**Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta,
katedra matematiky a didaktiky matematiky**
SUMA Jednoty českých matematiků a fyziků
Školské zařízení pro DVPP Královéhradeckého kraje

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 5. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2011

Programový výbor:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha
RNDr. Vladimír Burjan, Exam testing, Bratislava, Slovensko
Dr. Robert Geretschleager, Gymnasium, Graz, Rakousko
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PF UHK, Hradec Králové
doc. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
Mgr. Lenka Takáčová, Střední zdravotnická škola, Hradec Králové

Editor:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha

Recenzenti:
RNDr. Pavel Calábek, Ph.D., PřF UP, Olomouc
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7290-507-2

OBSAH

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 8. 4.

10.00–10.20	Zahájení
10.20–11.15	Jaroslav Zhouf: Tvorba matematických problémů pro talentované žáky
11.15–12.00	Tomáš Blumenstein: Mensa a rozvoj nadání
12.00–12.45	Stanislav Zelenda: Talnet v systému příležitostí pro nadané v ČR
13.00–13.30	Oběd
14.00–14.45	Eva Tošnerová: Jak učit matematiku (nejen talenty) na interaktivní tabuli
14.45–15.15	Přestávka
15.15–15.55	Příspěvky a dílny účastníků
16.00–16.30	Příspěvky a dílny účastníků
16.30–16.55	Příspěvky a dílny účastníků
16.55–17.10	Přestávka
17.10–17.45	Příspěvky a dílny účastníků
17.50–18.15	Příspěvky a dílny účastníků
19.00	Večeře

Sobota 9. 4.

7.45	Snídaně
8.45– 9.30	Beloslav Riečan: Láskavo a trpezlivo
9.30–10.15	Eva Patáková: Rychlé metody tvorby úloh pro nadané žáky
10.15–10.45	Přestávka
10.45–11.25	Příspěvky a dílny účastníků
11.30–11.55	Příspěvky a dílny účastníků
12.00	Zakončení

ÚVODEM

Úvodní slovo k pátému setkání

V letošním roce proběhl již pátý ročník konference Ani jeden matematický talent nazmar. Znamená to vzhledem k dvouleté periodě, že se již deset let můžeme setkávat na konferenci, která je tematicky orientována na talentované žáky v matematice a přírodovědných oborech. Jde o důležitou skupinu žáků, kteří v budoucnu budou hybateli pokroku, a to nejen v naší republice.

O významu této konference není zajisté pochyb. Proto poněkud překvapil malý zájem ze strany učitelů, případně administrativních pracovníků na všech stupních státních institucí. Je nutné přiznat, že letos se přihlásilo na konferenci nejméně účastníků za dobu její historie. Doufejme, že se nejedná o nastupující nezájem společnosti o tyto žáky. Jako věrohodnější se jeví probíhající ekonomická krize, která omezuje financování učitelů ze strany školy při účasti na takovéto akci.

Programový výbor s touto eventualitou prozíravě počítal, proto se klasické třídenní setkání změnilo jen na akci dvoudenní. Věřme, že šlo jen o krátkodobou změnu, že se zase budeme moci vrátit k předchozí formě.

Na konferenci zazněla řada zajímavých a podnětných zvaných přednášek. Podstatnější jsou ale přihlášené příspěvky a dílny účastníků, neboť právě ty svědčí o práci učitelů s nadanými žáky. I v letošním roce takovéto příspěvky byly prezentovány v hojné a kvalitní míře.

Již tradičně se mezi českými účastníky objevili i zahraniční hosté, i když ti letošní byli pouze ze Slovenska. I zde doufejme, že se v příštích letech objeví více zájemců ze zahraničí.

V současné době se nejvíce hovoří o státní části maturitní zkoušky. Nejinak je tomu i v matematice. Názory účastníků naší konference na tuto novou koncepci se sice různí, velkou podporu však tento proces nemá. Hlavně se v takové zkoušce obtížně objeví potenciál talentovaných žáků, takže z této strany pohledu jde o promarněnou příležitost státu. Podobně tomu bylo před čtyřmi roky, kdy byly největším hitem Školní vzdělávací programy. Ani tehdy nepanoval na konferenci nějaký přesvědčivý pozitivní postoj k tomuto dění, a to hlavně opět směrem k nadaným žákům.

Proto se i nadále domníváme, že je třeba pracovat s talentovanými žáky nad rámec úsilí státních institucí, aby se talenty v naší republice postupně úplně nevytratily. A k tomu mají i nadále konference typu Ani jeden matematický talent nazmar přispívat.

Jaroslav Zhouf

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Mensa a rozvoj nadání

Tomáš Blumenstein, Mensa ČR [1]

Abstrakt. *Mensa je mezinárodní organizace sdružující lidi s IQ mezi horními dvěma procenty populace, má přes 100 000 členů ve sto zemích světa. Mensa ČR [1] nabízí svým 2 200 členům i veřejnosti intelektuální stimulaci prostřednictvím zájmových skupin, místních i celostátních setkání, přednášek, exkurzí a především přátelského prostředí. Mensa ČR vydává časopis, je zřizovatelem gymnázia pro nadané děti v Praze, podporuje rozvoj nadaných dětí po celé republice, realizuje soutěž Logická olympiáda, projekt Mensa NTC pro školky, zřizuje Kluby nadaných dětí, provádí testování IQ veřejnosti.*

1. Co je Mensa?

Mensa je mezinárodní společenská organizace založená roku 1946 v Oxfordu. Je to nevýdělečné apolitické sdružení nadprůměrně inteligentních lidí bez rozdílu rasy a vyznání. Jejím cílem je využití inteligence ve prospěch lidstva, ale také vytvoření stimulujícího prostředí pro své členy.

Členem se může stát každý, kdo dosáhne věku 14 let a v testu inteligence, schváleném mezinárodním dozorčím psychologem Mensy International, výsledku mezi horními dvěma procenty celkové populace (na stupnici používané v Čechách odpovídá IQ 130). Pro členství v Mense nejsou nutné žádné jiné předpoklady (kromě povinnosti platit členské příspěvky).

2. Mensa International

Mensa International [2] zastřešuje 59 národních organizací. Celkem má přes 110 tisíc členů ve více než 100 zemích světa.

Zajímavým mezinárodním programem pro členy je SIGHT, který nabízí cestovatelům po celém světě drobnou pomoc, provedení po městě, ale i možnost ubytování u členů.

[1] e-mail: tblumen@mensa.cz

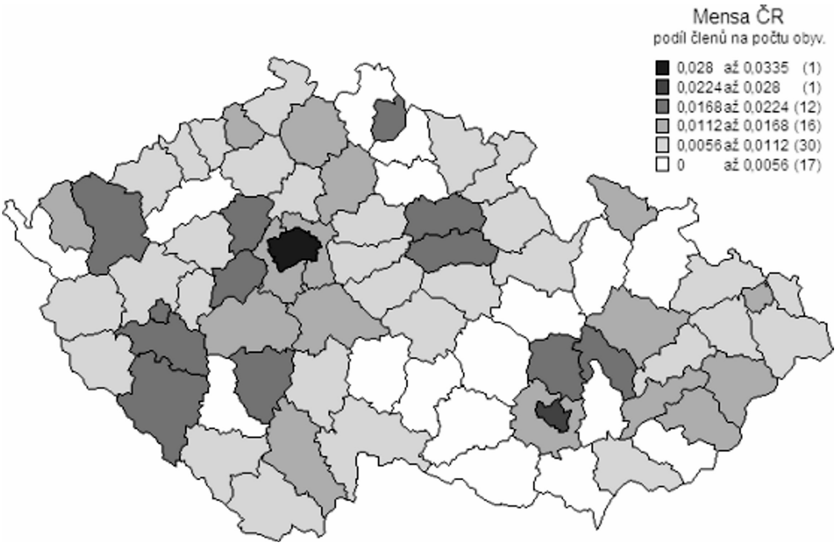
3. Testy IQ

Mensa provádí základní testování IQ prostřednictvím mezinárodně uznávaného standardizovaného testu schváleného mezinárodním dozorčím psychologem společnosti. Na správnost prováděných testování dohlíží i psycholožka Mensy ČR, PhDr. Dagmar Jílková. Test trvá 40 minut a lze jej opakovat maximálně třikrát za život s minimálně roční přestávkou mezi jednotlivými pokusy. Každý, kdo se zúčastní mensovního testu, dostane potvrzení o absolvování s udaným IQ. Toto potvrzení má mezinárodní platnost.

Test není závislý na nabytých vědomostech, kulturním, jazykovém a společenském zázemí. Jedná se o vyhledávání logických vazeb mezi grafickými symboly. Testování se provádí pod dohledem, aby byly zaručeny shodné podmínky pro všechny účastníky. Test nelze absolvovat korespondenčně. Testování IQ provádí Mensa i u dětí, a to od věku 5 let.

Absolvování IQ testu je jediný způsob, jak se stát členem organizace.

4. Organizace Mensa v České republice (Mensa ČR)



Obr. 1: Územní rozložení počtu členů

U nás se se zakládáním Mensy počalo v roce 1989 pod vedením Dr. Hany Drábkově. Registrace Mensy Československa proběhla v 1991.

Od roku 1993 působí Mensa České republiky. V současnosti má Mensa ČR kolem 2 200 členů, z toho zhruba 600 dětí.

5. Aktivity Mensy ČR

5.1. Celostátní setkání

Jednou z největších akcí jsou celostátní setkání, jarní (v květnu) a podzimní (v září). Účast se pohybuje mezi 80–120 členy. Náplní jsou exkurze, teamové hry, přednášky, šifry, soutěže, deskové hry, poznávání okolí, ale především setkání se zajímavými lidmi z celé republiky i zahraničí.

5.2. Exkurze

Významným způsobem rozšiřování obzorů členů i veřejnosti jsou pořádané exkurze. Cílem jsou různé instituce (např. Vláda ČR, Česká televize, Poslanecká sněmovna, výzkumné ústavy, Tokamak, Policie ČR), elektrárny (Temelín, Dukovany, Dlouhé Stráně, Dalešice, Jaslovské Bohunice, i celá řada menších vodních) a továrny (např. Hyundai, Mars, Czech Blades, Škoda Auto a celá řada dalších).

5.3. Zahraniční exkurze

K oblíbeným akcím patří zahraniční exkurze. Proběhly návštěvy např. Belgie a Bruselu (Evropský parlament, Evropská komise), Oxfordu (kolébka Mensy) a Londýna (BBC), Štrasburku (Evropský parlament a Evropský soud pro lidská práva) a Paříže, Itálie (Florencie, Pisa, Řím), několikrát CERNu v Ženevě, kde pracovně působí místopředseda Mensy ČR, Berlína a nyní se připravuje návštěva Petrohradu a Pobaltí.

5.4. Přednášky

Pro členy i pro veřejnost pořádá Mensa ČR každým rokem řadu přednášek. Přínosem bývá nejen přednesené téma a setkání s přednášejícím, ale také následující diskuze.

Z desítek přednášejících hostů uveďme např. (bez titulů a křestních jmen): viceguvernér ČNB Singr, poslanec Tluchoř, rektor UK Hampl, ombudsman Motejl, astronom Grygar, ekonom Sedláček, politolog Robejšek, ministryně Kovářová a další.

5.5. Místní skupiny

Členové v regionech a městech se sdružují v místních skupinách. Pravidelné schůzky místních skupin probíhají zpravidla jednou měsíčně a jejich častou náplní jsou tematické i obecné diskuze, řešení logických her, plánování a příprava dalších akcí. K dalším aktivitám patří různé výlety, sportovní akce, extrémní sporty nebo společné návštěvy kulturních akcí.

Místní skupiny působí v těchto městech: Praha, Prostějov, Ostrava, Brno, České Budějovice, Pardubice, Hradec Králové, Plzeň, Karlovy Vary, Ústí nad Labem, Zlín.

5.6. Časopis MENSA

Mensa vydává vlastní časopis, který vychází šestkrát ročně (každý sudý měsíc) ve formě tištěné i PDF. Obsahuje informace o Mense, pozvánky a reakce na akce, rozhovory, hry a adresář, ale má také publicistickou a odbornou funkci.

Výroční číslo vychází s dvojnásobným nákladem (cca 5 000 ks) a je shrnutím uplynulého roku (obr. 2).

Obr. 2

5.7. Zájmové skupiny (SIGy)

Název vychází z anglického *Special Interest Group* – jedná se tedy o sdružování členů na základě jejich zájmů. V rámci Mensy ČR působí desítky různých typy SIGů – globální oteplování, jazyky, ekonomie, jídlo, sport, business, sci-fi, deskové hry, výtvarné umění, psychologie a další.

5.8. Internet

Internetové stránky [1] slouží ke komplexnímu informování veřejnosti i členů o Mense a jejích projektech a aktivitách. Nabízí ovšem také hádanky, šifry, hlavolamy, kontakty i zajímavé čtení.

Intranet pro členy je pak zabezpečeným přístupem k dokumentům a vnitřním informacím, ke vzájemné komunikaci mezi členy, editaci kalendáře akcí i administrativě.

Významnější projekty mají své vlastní internetové systémy [3, 4].

6. Mensa pro nadané děti

6.1. Mensa gymnázium (MG)

Mensa gymnázium bylo založeno v roce 1993 Kateřinou Havlíčkovou. Do roku 2010 neslo název Osmileté gymnázium Buďánka. Jedná se o jedinou střední školu v ČR zaměřenou výhradně na vzdělávání nadaných studentů a současně jediné gymnázium na světě zřizované Mensou. V této škole najdou nadaní studenti optimální podmínky pro svůj rozvoj, rodinné prostředí, přátelské učitele zapálené pro svůj obor, kolektiv podobných vrstevníků, prostor pro tvořivost a uspokojování svých individuálních specifických potřeb. Cílem školy není jen rozvoj vědomostí, ale celé osobnosti studenta. Základní podmínkou přijetí na MG je úspěšné absolvování vstupního testu do Mensy ČR (IQ nad 130) – členství podmínkou studia není.

Škola poskytuje svým studentům nadstandardní péči s vysoce individuálním přístupem pedagogickým i psychologickým. Podporuje jejich radost z poznávání, tvořivost, pracuje na jejich sociálních dovednostech a sebepoznávání, učí je týmové práci. Studentům je od prvního ročníku umožněna vysoká profilace pomocí volitelných předmětů a seminárních prací. Výuka některých předmětů (matematiky, cizích jazyků) probíhá ve smíšených skupinách podle vyspělosti studentů tak, aby student vždy pracoval ve skupině, jejíž tempo a úroveň nejlépe odpovídá jeho schopnostem. Některé obory jsou vyučovány přímo na katedrách vysokých škol vysokoškolskými profesory (např. fyzika na MFF UK). Studenti mají možnost sami nebo prostřednictvím svých zástupců ve studentské radě ovlivnit rozhodnutí týkající se školy. Ze svých studentů vychovává MG vzdělané, tvořivé a samostatně uvažující osobnosti. Studenti jsou velmi úspěšní v přijímacím řízení na vysoké školy.

MG poskytuje úplné všeobecné středoškolské vzdělání gymnaziálního typu intelektově nadprůměrným dětem i s přihlédnutím k jejich zvláštnostem a handicapům. Jednou z hlavních zásad gymnázia je respektování individuálních potřeb a předpokladů každého studenta. Studenti mají od prvního ročníku možnost vysoké profilace a ovlivňují tempo výuky v předmětech, které je zajímají nejvíce. Třída má průměrně 18 studentů.

Mensa Gymnázium sídlí na Španielově ulici 1111, Praha-Řepy [5].

6.2. Dětská Mensa

Dětská Mensa je platforma pro členství dětí ve věku 5–14 let, které takto mají přístup na mensovní akce, na intranet, časopis a další výhody dospělých členů. Slouží k podpoře rozvoje a vyhledávání nadaných dětí, k podpoře takto zaměřených škol a zastřešuje mensovní aktivity pro děti a mládež.

6.3. Logická olympiáda

Logická olympiáda [3] je soutěž v logických úlohách určená dětem a mládeži z celé České republiky. Doplňuje spektrum aktivit určených dětem a mládeži o soutěž, ve které nerozhodují školní znalosti, ale samostatné uvažování a schopnost logického myšlení, a klade si za cíl podnítit v dětech zájem o tuto oblast. Soutěžní úlohy jsou založeny na obecných principech a pro jejich řešení nejsou potřeba žádné speciální znalosti, ale jen zdravý rozum, logika, rychlý a správný úsudek. Soutěž není vědomostní, a proto v ní mohou dosáhnout vynikajících výsledků i žáci, kteří nejsou úspěšní v tradičních školních předmětech nebo pocházejí z různého sociálního a kulturního zázemí. Úspěch v soutěži pak může mít příznivý vliv na jejich integraci a motivaci. Mezi velké přínosy Logické olympiády tedy patří vyhledávání skrytých talentů.

Hlavním cílem je obrátit pozornost dětí i odborné veřejnosti ke specifickému nadání, kterým je schopnost logického myšlení a samostatného uvažování. Olympiáda chce doplnit spektrum akcí určených školákům o aktivitu zaměřenou na oblast, která si v našem vzdělávacím systému stále hledá své místo. Mnoho škol se dnes snaží přistupovat k výuce aktivně a rozvíjet u dětí schopnost samostatného myšlení. Cílem olympiády je pomoci rozpoznat toto individuální nadání a být krokem k jeho rozvoji.

Soutěže se v roce 2010 zúčastnilo téměř 15 000 žáků a studentů z 900 škol z celé republiky. Do krajských kol konaných ve všech 14 krajích postoupilo 1 365 soutěžících. Nejlepších 200 soutěžících postoupilo z krajů do finále.

Novinkou pro ročník 2011 je rozšíření kategorií o kategorii B – žáky druhého stupně základních škol (6.–9. třída a odpovídající ročníky víceletých gymnázií, tj. první dva ročníky u šestiletých gymnázií nebo první čtyři ročníky u osmiletých gymnázií). Stejně jako loni se soutěže mohou zúčastnit žáci 1. stupně základních škol (1.–5. třída) a studenti všech druhů středních škol, v případě víceletých gymnázií poslední 4 ročníky studia, a to z celé České republiky. Díky rozšíření kategorií očekáváme výrazně vyšší počty přihlášených dětí. Do krajských kol bude postupovat 150 nejlepších soutěžících v kraji.

Každý soutěžící se musí na stránkách `www.logickaolympiada.cz` registrovat. Pouze pod svým unikátním přihlašovacím jménem totiž může vyplnit online test nominačního kola. Registrovat se mohou i školy. Uživatelský profil školám umožňuje přehled o přihlášených studentech, jejich výsledcích a slouží i pro komunikaci s organizátory soutěže. Registrace škol i soutěžících bude letos probíhat od 1. srpna do 30. září, a poté budou požádány kontaktní osoby z jednotlivých škol o ověření pravosti žáků přihlášených z jejich školy. Je to jedno z mnoha opatření, jak snížit riziko případných podvodů v nominačním kole. Jakékoliv nepravosti jsou postihovány vyloučením žáka ze soutěže.

Soutěž probíhá ve třech kolech. Cílem je zpřístupnit soutěž co největšímu počtu dětí a studentů, a proto nominační kolo proběhne online, soutěžící se mohou připojit ve škole, doma, v knihovnách, zkrátka kdekoliv.

Nominační kolo pro kategorii A (žáci prvního stupně ZŠ) proběhne ve dnech 1.–4. října 2011, pro kategorii B (žáci druhého stupně ZŠ) proběhne ve dnech 5.–8. října 2011 a pro kategorii C (studenti SŠ) proběhne ve dnech 9.–12. října 2011.

Krajská kola se uskuteční v pátek 4. listopadu 2011 ve všech krajích. Nejúspěšnější řešitelé postoupí do celorepublikového finále, které se bude konat na konci listopadu 2011 v Poslanecké sněmovně Parlamentu ČR.

6.4. Letní kempy

Každé léto jsou připravovány letní kempy a tábory pro nadané děti a mládež. Jsou organizovány především pobytové na jeden až dva týdny, ale také příměstské. Program a témata bývají velmi pestrá – společné setkání nadaných dětí, zábavné testy, šifry, kvízy, hlavolamy, kryptografie, funkční gramotnost, rozbor autorských textů, zlepšení slohu, tvůrčí psaní, autorské soutěže (povídka, námět), rétorika, aktivity na rozvoj debatních dovedností, přednášky, diskuze, dramatizace, role-playing, informatika (programování a počítačové hry), kreslení komiksů, promítání ANIME a ukázek z tematických filmů, dračí doupě a další hry na hrdiny, které rozvíjejí strategii, taktiku a rétorické schopnosti, stolní deskové hry – skrebl (scrabble), šachy, abalone, a jiné známé či méně známé logické hry pro rozvoj různých typů inteligence, hry v přírodě, průběžné soutěže týmů i jednotlivců o zajímavé ceny.

6.5. Školy spolupracující s Mensou

Mensa propojuje školy, které se systematicky věnují podpoře nadání a talentu a jeho identifikaci. Tyto školy aktivně pracují s nadanými dětmi, ať už v rámci výuky nebo při mimoškolních aktivitách se zaměřují na rozvoj logického myšlení (klub deskových her, speciální matematika/logika, investigativní žurnalistika, debatní kroužek apod.). Nabízejí IVP, skupinové vyučování nebo úrovňové vyučování.

Mensa prosazuje princip zkvalitňování pedagogické práce – škola se snaží v rámci svých možností informovat učitele o nových možnostech práce s talentovanými dětmi, využívá IT ve výuce, pracuje na učebních listech, knihách, software.

V neposlední řadě se školy podílejí na mensovních aktivitách (dny plné her, Logická olympiáda a další) a informují žáky, učitele i rodiče o aktivitách Mensy ČR.

Mensa zajišťuje školám metodickou pomoc, vzájemnou výměnu zkušeností, informační podporu a každý rok pořádá Konferenci Mensa pro školy.

6.6. Kluby nadaných dětí

Mensa ČR zřizuje po celé republice kluby nadaných dětí. Věkové zacílení je první a druhý stupeň základní školy. Cílem je podchytit skupinu velmi nadaných dětí již v raném věku a poskytnout jim nadstandardní rozvoj a rozšiřování obzorů. Kluby spolupracují s městy a se základními školami, které poskytují pro jejich aktivity vhodné prostory. Důležitým prvkem klubu je i spolupráce s rodiči, jejichž zapojení významným způsobem rozšiřuje spektrum činnosti klubu. Četnost schůzek je zpravidla jednou za dva týdny a náplní jsou především exkurze, přednášky, aktivity rozvíjející intelektové schopnosti, odborné projekty či logické a deskové hry.

Kluby působí v těchto městech: Brno, Frenštát pod Radhoštěm, Frýdek–Místek, Karviná, Kyjov, Liberec, Lubina, Opava, Prostějov, Uherský Brod, Ústí nad Labem, Velká Bíteš, Vsetín, Znojmo, Domažlice.

6.7. Mensa pro školky – NTC Learning System

Od roku 2009 implementuje Mensa v ČR (Jitka Fořtíková, Tomáš Blumenstein) projekt Mensy International *Mensa NTC Learning System*, projekt rozvoje rozumových schopností dětí v předškolním věku [4], vypracovaný týmem odborníků především z Mensy Srbsko vedeným lékařem Dr. Rankem Rajovićem.

Jde o systém učení dětského mozku za pomoci cvičení, které mají vědecký základ v průkaznosti zvýšení efektivity využívání mozkové kapacity v dětském věku. Tyto výzkumy mimo jiné poukazují na fakt, že dětský mozek zakládá 75 % všech neuronových synapsí (propojů) do věku 7 let – a celých 50 % vznikne dokonce do věku 5 let. Tento argument se nám zdá dostatečně významný k tomu, abychom věnovali velmi významnou pozornost předškolnímu věku, efektivitě učení a využívání dětské paměti. Pokud naše formální základní a středoškolské vzdělání pracuje již pouze se zbývajícími 25 % možností využívání potenciálu mozkové kapacity, pak je pro nás zajisté důležité, jak je rozvíjeno dítě ve věku do 6 let.

Proto se Mensa České republiky ve spolupráci s odbornou platformou Centra nadání zapojila do tohoto projektu a snaží se vlastními možnostmi s využitím svých odborníků v oblasti neurologie, psychologie a pedagogiky podpořit kvalitu předškolní péče v nabídce spolupráce na tomto unikátním projektu.

Metoda Mensa NTC Learning System využívá soubor technik a speciálně sestavených cvičení, které vedou ke zvýšení intelektových schopností u dětí v předškolním věku. Trénink je založený na poznatcích neurologického výzkumu mozku a kombinuje různé techniky – motorická cvičení, učení symbolů, procvičování pozornosti, využití hudby a další – tak, aby stimuloval zvyšování počtu neuronových spojení (synapsí) v mozku.

Nejedná se tedy o nějaké umělé zvyšování inteligence, ale o využívání přirozené kapacity mozku dětí, která byla doposud nevyužita.

Trénink přispívá k rozvoji pohybové koordinace a motorických schopností a pozitivně působí také v prevenci dyslexie a při zmírňování poruch učení. Ačkoliv trénink vede primárně ke zvyšování mentálních schopností všech dětí bez rozdílu, nezanedbatelnou úlohu hraje také při identifikaci a rozvoji schopností u nadaných dětí. Nadané děti se přirozeně v projektu zapojí a poukáží na svoje někdy utajené schopnosti, které pedagog ve školce za normálních okolností jen těžko odhaluje.

Nedílnou součástí projektu je spolupráce s rodiči, jejichž zapojení výrazně zvyšuje výsledky tréninku. Rodiče jsou v projektu vyzváni k tomu, aby metodu aktivně využívali s dětmi formou velmi jednoduchého a časově nenáročného tréninku. Dr. Rajović tvrdí: „Aktivní spolupráce s rodiči vede k většímu efektu metody v práci s dětmi, ale pomáhá také rodičům pochopit, co se ve školce s dětmi odehrává. Procvičování nezabírá rodičům žádný operativní čas. Mohou s dětmi cvičit značky aut při cestě ze školky na parkoviště, při sledování olympijských her procvičí zase vlajky států nebo upozorní děti, že se hraje národní hymna USA. I ve školce je metoda založena na malých časových úsecích, nikoliv na systémové změně vzdělávacího programu mateřské školy. Zlaté pravidlo metody zní: málo a často, tak docílíme nejvýraznějšího efektu“.

Na vývoji tréninku se podílel expertní tým lékařů, psychologů a pedagogů z několika zemí a v současnosti je využíván ve stále více státech Evropy – v Itálii, Srbsku, Maďarsku, Slovinsku, Bosně, Švýcarsku, České republice a ve Francii. Na jaře roku 2009 se v České republice do projektu pilotně zapojilo několik školek v Brně, v Prostějově a v Praze. Tři měsíce bylo ověřováno, zda bude metoda vhodná i pro české prostředí. Testování v mateřských školách ukázalo, že metoda bude mít své uplatnění i v českém prostředí. Učitelky, které začaly s metodou pracovat aktivně, zjistily, že skutečně metoda pomáhá systematicky rozvíjet rozumové funkce předškoláků, děti aktivity projektu velmi baví a nevnímají je jako něco, co by se ve školce dělat nemělo.

Na podzim roku 2009 byly proto akreditovány tři základní etapy projektu, aby se mohlo začít s veřejnou distribucí projektu. Zájem o kurzy je značný, od listopadu 2009 bylo v první fázi proškoleno více než 120 učitelek, v dubnu 2011 odstartovalo školení pro druhou fázi projektu. V období letních prázdnin 2011 je připravena třetí (závěrečná) etapa školení v pobytové čtyřdenní verzi, kdy si učitelky nejen samy připraví pod dohledem odborníků vlastní studnici nápadů a materiálů, ale také si své vlastní ukázky pracovních materiálů vyzkouší v přímé práci s dětmi. Vzdělávací aktivity jsou uspořádány v celek, nejdříve je třeba absolvovat vstupní šestihodinové školení, druhá fáze vyžaduje 14 výukových hodin. Třetí fáze projektu je několikadenní soustředění – 24 výukových hodin. K úspěšné realizaci projektu ve školce je zapotřebí všech pedagogů, kteří budou s metodou pracovat, proškolit minimálně v 1. a 2. fázi metody NTC Learning System. Přenos mezi pedagogy je možný až po absolvování těchto základních pilířů. Finančně je metoda málo náročná, kurzy se pohybují v intencích běžných nákladů na kurzy DVPP a vzhledem k akreditaci MŠMT je možné čerpat krajské zdroje MŠ na další vzdělávání.

Pokud by mateřská škola měla zájem o institucionální zapojení do projektu, může využít možnosti zakoupení licence, která umožňuje provozování Mensa NTC Learning System s plnou podporou, poskytuje 10% slevu na školení a kurzy, možnost veřejně prezentovat zapojení MŠ do projektu, telefonickou a e-mailovou podporu, zdarma dostupné původní pracovní listy a materiály v digitální podobě a další výhody.

Literatura

[1] `www.mensa.cz`

[2] `www.mensa.org`

[3] `www.logickaolympiada.cz`

[4] `www.mensantc.eu`

[5] `www.mensagymnazium.cz`

Rychlé metody tvorby úloh pro nadané žáky *

Eva Patáková, Pedagogická fakulta UK a Mensa gymnázium, Praha [1]

Abstrakt. *Příspěvek je zaměřen na vybrané strategie tvorby úloh na základě úlohy již existující. Tyto strategie jsou interpretovány tak, aby pomocí nich bylo možné tvořit v rámci vyučovací hodiny a konkrétní didaktické situace úlohy pro nadané žáky. Jako požadavky na vytvořené úlohy stanovíme kvalitu (řešení úlohy musí být pro nadaného žáka obohacující) a zároveň rychlost tvorby (aby byla technika použitelná v rámci práce ve třídě).*

1. Úvod

V článku se budeme zabývat rychlými metodami tvorby úloh pro nadané žáky. Je zjevné, že se nebude jednat o metody, jak vytvořit novou, originální a propracovanou úlohu např. do matematické olympiády. Domnívám se, že takové úlohy téměř není možné tvořit rychle.

Budeme se tedy zabývat tvorbou úloh z úloh již existujících, a to tak, že se budeme snažit zvýšit jejich potenciál pro práci s nadaným žákem. Konkrétně mám na mysli situace, kdy v rámci vyučovací hodiny nadaný žák zvládl nějakou v hodině řešenou úlohu rychleji než ostatní a my mu potřebujeme zadat další práci – samozřejmě takovou, která jej co nejvíce obohatí. Protože se ale musíme věnovat celé třídě, jsou naše časové možnosti, kdy si můžeme zadání nové úlohy rozmýšlet, velmi omezené.

Na tvorbu úloh v takovéto situaci kladu tři požadavky:

- *Rychlost* – Novou úlohu je potřeba vytvořit rychle, aby se učitel mohl věnovat i zbytku třídy.
- *Kvalita* – Práce s úlohou musí být pro nadaného žáka co nejvíce přínosná.
- *Obsahová příbuznost výchozí úloze (?)* – Záleží na osobnosti nadaného žáka. Nepopírám, že je dobré zadávat nadanému žákovi pestré úlohy týkající se různých matematických oblastí, dle mých zkušeností je pak ale někdy problém obrátit žákovu pozornost zpět k problematice řešené v hodině.

* Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 303511.

[1] e-mail: eva.patakova@email.cz

2. Signální slova[2]

Máme-li hotovou úlohu, můžeme ji začít upravovat mnoha různými způsoby. Změny, které na úloze provedeme, mohou být založeny na pouhé změně dat v úloze nebo na změně myšlenkové podstaty úlohy. (Což spolu nepochybně souvisí, změna dat mnohdy vyvolá změnu myšlenkové podstaty úlohy a změna myšlenkové podstaty úlohy má obvykle za následek i změnu dat. Nicméně ten výrazný rozdíl je ve způsobu našeho myšlení, jak tu naši rychlou změnu úlohy „táhneme". Nepodceňujme ani nenáročné změny. Pouhá změna dat např. z hodnoty 2 na hodnotu $\frac{\sqrt{7}}{13}$, i když neovlivní myšlenkovou podstatu úlohy, může zvýšit obtížnost úlohy poměrně výrazným způsobem.)

Za účelem zvýšení naší rychlosti přetváření úlohy je dobré mít svoji zásobu slov – signálních slov – která v sobě obsahují impuls (jakýsi krátký výstižný návod), jak úlohu změnit. Tedy konkrétně – v situaci, kdy potřebujeme rychle změnit nějakou úlohu na náročnější, může nám proletět hlavou: „Vymyslet *reformulaci* by mi zabralo moc času, *analogie* mě nenapadá, *zobecnění* se sem moc nehodí, *prohození výchozího a cílového stavu* – to by šlo." V tomto okamžiku už můžeme začít formulovat úlohu.

Není třeba obávat se toho, že úloha bude v důsledku malé propracovanosti pro nadaného žáka příliš snadná, nebo naopak příliš obtížná, až neřešitelná. Podle mých zkušeností učitelovy znalosti a odhad obvykle stačí k tomu, aby jeho úloha, ač ji sám nemá vyřešenou, adekvátní obtížnosti byla. A zastávám názor, že i jak příliš snadné, tak příliš obtížné úlohy rozhodně patří k rozvoji nadaného žáka.

Každý přemýšlíme jinak, takže optimální by bylo, kdyby si čtenář sám vytvořil svůj seznam signálních slov, která jsou pro něj nejvíce návodná a využitelná. Pro inspiraci předkládám tři klasifikace přístupů k tvorbě úloh[3] s ukázkami jejich možné aplikace na přetváření ryze procvičovacích úloh. Tedy předložené úlohy nejsou ukázkami propracovaných úloh pro nadaného žáka, snažila jsem se spíše ukázat, jaké úlohy je reálně možné vymyslet během několika okamžiků.

---

[2] Pojem zaveden na námět M. Kaslové místo pojmu „aktivní slova" užívaného během přednášky.

[3] Se zmiňovanou literaturou (z níž většina se zabývá tvorbou úloh žákem jako učební aktivitou) pracuji volně. Přesně přebírám pouze kategorie, které příslušní autoři rozlišují, dávám jim ale jinou (více metodologickou) interpretaci. Ve všech názvech používám vlastní překlad, takže nemohu vyloučit, že v jiné česky psané literatuře jsou zmiňované kategorie nazývány jinak.

3. Klasifikace podle E. Stoyanové [3]

E. Stoyanova rozlišuje tyto strategie tvorby úloh na základě úlohy existující:

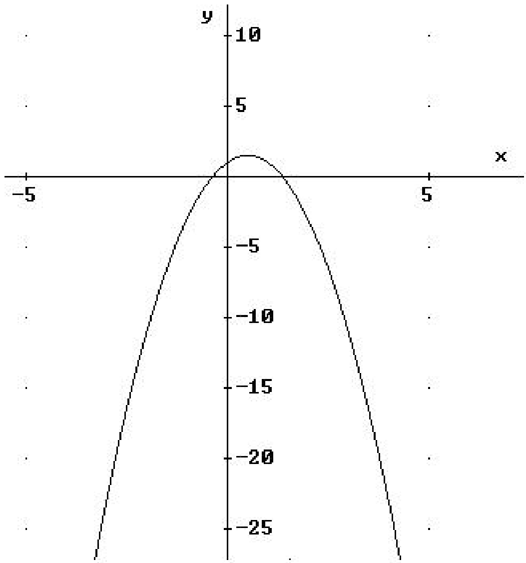
- Strategie reformulace
- Strategie rekonstrukce
- Strategie imitace

Pro ukázku přetváření úlohy zmíněnými strategiemi použijeme procvičovací úlohu:

Příklad 3.1. Najděte vrchol paraboly o rovnici $y = -2x^2 + 2x + 1$.
Řešení: Viz obr. 1.:

$$y = -2x^2 + 2x + 1 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2},$$

$$V\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$$



Obr. 1: Parabola

3.1. Strategie reformulace

Reformulujeme-li úlohu, pak se snažíme najít takový text úlohy, aby zadání vypadalo úplně jinak a úloha přitom zůstala na výpočet v podstatě stejná. (E. Stoyanova uvádí např. prohození hodnot v komutativních operacích, např. $3 \cdot 5 + 4$ změnit na $4 + 5 \cdot 3$.)

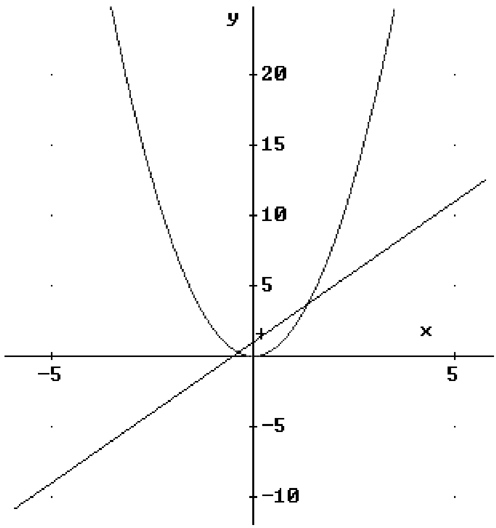
Dle mých zkušeností vhodně reformulovaná úloha působí na žáky vysoce motivačně – nadaného žáka naštve (v nejlepším smyslu tohoto slova), že přemýšlel 10 minut, aby v závěru zjistil, že má řešit stejnou úlohu jako jeho spolužáci.

Příklad 3.2. Mějme dány funkce:

$$f\colon\ y = 2x^2$$
$$g\colon\ y = 2x + 1$$

Uvažujme všechny hodnoty x, pro které $f(x) < g(x)$. Pro které x je rozdíl těchto hodnot největší? Jaká je hodnota tohoto rozdílu?

Řešení: Viz obr. 2. Hledáme takové x, pro které je rozdíl $g(x) - f(x)$, neboli $(2x+1) - 2x^2$, největší. Jinými slovy – hledáme maximum funkce $y = -2x^2 + 2x + 1$. Dále viz původní úloha.



Obr. 2: Úloha – reformulace

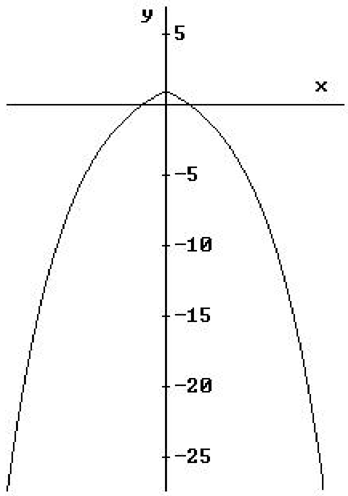
3.2. Strategie rekonstrukce

Strategie rekonstrukce je velmi široký pojem. Znamená přeuspořádat nějakým způsobem prvky původní úlohy tak, aby vznikla úloha, jejíž řešení je různé od řešení úlohy původní. E. Stoyanova uvádí např. prohození hodnot v nekomutativní operaci (např. $4-6$ místo $6-4$).

Příklad 3.3. Najděte maximum funkce

$$y = -2 \cdot 2^{|x|} + 2 \cdot 1^{|x|} + 1.$$

Řešení: Viz obr. 3. Maximum je v bodě $[0; 1]$.



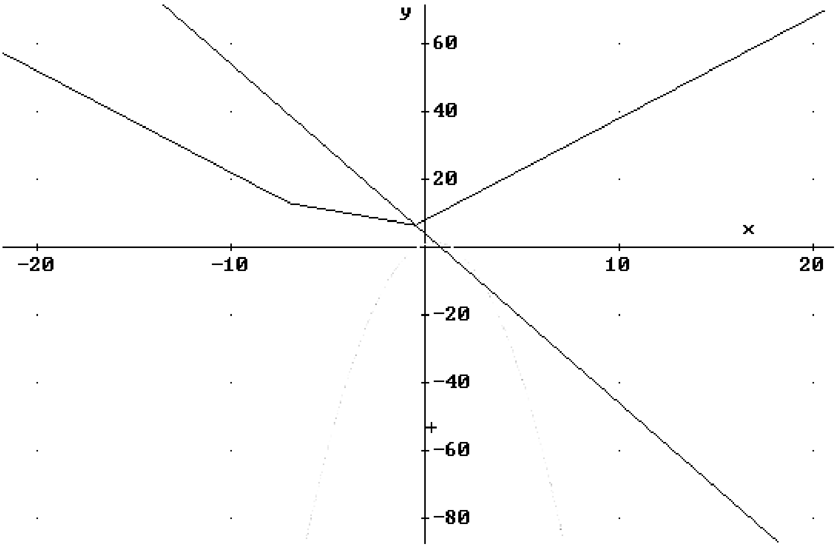
Obr. 3: Úloha – rekonstrukce

3.3. Strategie imitace

Strategií imitace rozumíme vytvoření úlohy takové, aby původní úloha byla jejím dílčím krokem. V následující úloze ukazuji přepracování této úlohy, které je velmi nenáročné na nápad – pouhé mechanické přidání dílčích úkolů, takže nadaný žák má vlastně tři úlohy místo jedné.

Příklad 3.4. Najděte rovnici lineární funkce, jejíž graf prochází vrcholem paraboly o rovnici $y = -2x^2 + 2x + 1$ a bodem, který je minimem funkce $y = |2x + 1| + |x + 7|$.

Řešení: Viz obr. 4. Vrchol paraboly je v bodě $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$, minimum funkce s absolutní hodnotou v bodě $[-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}]$, výsledná rovnice přímky tedy je $y = -5x + 4$.



Obr. 4: Úloha – imitace

4. Klasifikace podle D. S. Fielkera [2]

D. S. Fielker rozlišuje tyto strategie tvorby úloh na základě úlohy existující:

- Otevřenost
- Nepřesnost
- Zúžení
- Úplnost
- Převrácení
- Hloubka
- Proměnné

Pro ukázku přetváření úlohy zmíněnými strategiemi použiji procvičovací úlohu: *Sestrojte střední příčky daného trojúhelníka.*

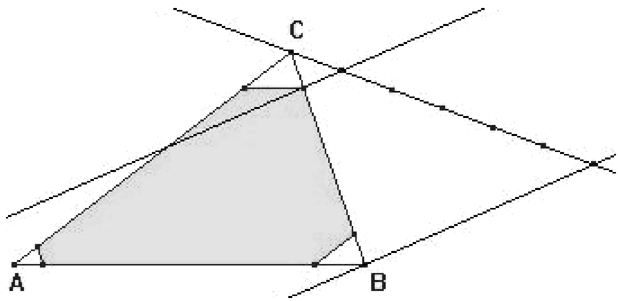
4.1. Otevřenost

Strategie otevřenosti v sobě skrývá nutnost podívat se na zkoumaný jev jinak. Můžeme např. hledat alternativní klasifikace, zkoumat, jak se vlastnosti objektů přenáší na jiné, ...

Příklad 4.1. Najděte všechny úsečky, které mají krajní body na stranách daného trojúhelníka, jsou rovnoběžné s jeho stranami a jejich délka je rovna 1/7 délky strany, se kterou jsou rovnoběžné.
(Popř. ještě: Spočítejte obsah vybarveného útvaru.)

Řešení: Viz obr. 5. Podle úrovně řešitele pak můžeme využít situaci např. k rozpravě o redukčním úhlu. Označíme-li S obsah daného trojúhelníka, pak obsah vybarveného útvaru je

$$S' = S - 3 \cdot \left(\left(\frac{1}{7} \right)^2 \cdot S \right) = \frac{46}{49} S.$$



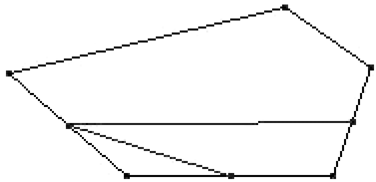
Obr. 5: Úloha – otevřenost

4.2. Nepřesnost

Vytváříme úlohu záměrně chybně zadanou, úlohu s nejednoznačným nebo nepřesným zadáním, úlohu s nejednoznačným řešením, ... Tato strategie je velmi vhodná, pokud chceme vyvolat diskusi, kterou můžeme s nadaným žákem odstartovat a následně i přenést na celou třídu.

Příklad 4.2. Narýsujte střední příčky pětiúhelníku.

Řešení: Viz obr. 6. Poznámka: Co je střední příčkou v pětiúhelníku? Spojnice středů sousedních stran? Spojnice středů jakýchkoli stran? Čemu říkáme střední příčka u čtverce? U lichoběžníka? ...



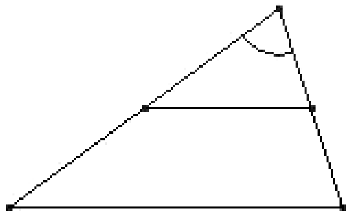
Obr. 6: Úloha – nepřesnost

4.3. Zúžení

Strategie zúžení znamená, že pracujeme do hloubky pouze s jedním aspektem situace. U našeho příkladu se středními příčkami se zaměříme na aspekt rovnoběžnosti.

Příklad 4.3. Dokažte, že střední příčka je rovnoběžná se stranou trojúhelníka. (Nebo s úsečkou s krajními body vzdálenými od vrcholu trojúhelníka 1/7 délky příslušných stran trojúhelníka.)

Řešení: Využijeme např. podobnost podle věty *sus* – viz obr. 7. Nezná-li žák pojem podobnosti, může pracovat např. pomocí vzdálenosti krajních bodů střední příčky od příslušné strany trojúhelníku.

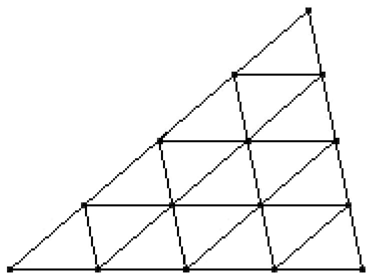


Obr. 7: Úloha – zúžení

4.4. Úplnost

Úplnost znamená podrobnější probádání situace popsané v úloze. Rozšíříme tedy úlohu o další otázky.

Příklad 4.4. Kdybychom pokračovali dále tak, že do každého ze čtyř vzniklých shodných trojúhelníků bychom vepsali jeho střední příčky atd., po kolikátém kroku by byl počet vzniklých shodných trojúhelníků poprvé větší než 100? Viz obr. 8.



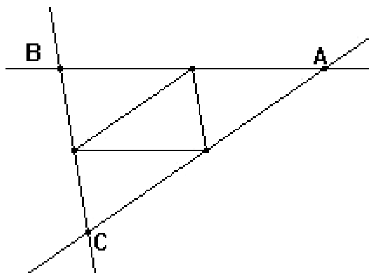
Obr. 8: Úloha – úplnost

Řešení: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256 > 100$. Trojúhelníků bude více než 100 po čtvrtém kroku.

4.5. Převrácení

Tato strategie, pokud se k úloze hodí, je na tvorbu nové úlohy velmi rychlá. Stačí prohodit výchozí a cílový stav (prohodit, co je dané a co hledáme).

Příklad 4.5. Jsou dány tři úsečky tvořící trojúhelník, o nichž víme, že jsou středními příčkami jistého trojúhelníku. Dorýsujte jej.
Řešení: Viz obr. 9.



Obr. 9: Úloha – Převrácení

4.6. Hloubka

Při práci s touto strategií si vybereme jeden jev a pracujeme s ním v různých kontextech.

Příklad 4.6. V pravidelném osmiúhelníku má úsečka spojující středy sousedních stran délku 2 cm. Jaká je délka průměru kružnice, která je tomuto osmiúhelníku opsaná?

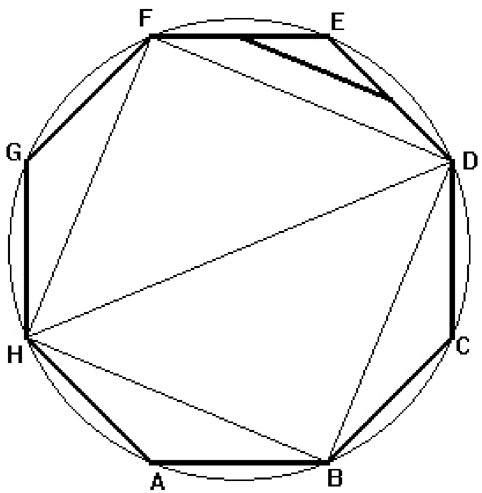
Řešení: Viz obr. 10. Střední příčka rovnoběžná s FD v trojúhelníku DEF má délku 2 cm, proto délka strany čtverce $BDFH$ je 4 cm. Úhlopříčka tohoto čtverce je zároveň průměrem kružnice osmiúhelníku opsané, hledaná délka je proto $4\sqrt{2}$ cm.

4.7. Proměnné

Při využití této strategie klademe otázky: „Co se stane, když...?"

Příklad 4.7. Co se stane, když budeme tak jako ve čtvrté úloze vpisovat další a další trojúhelníky? Kdy bude strana vepsaného trojúhelníku nulová? Jak se bude lišit počet kroků, než se dostaneme k nulové délce strany, v závislosti na rozměrech (tvaru) původního trojúhelníka?

Řešení: Nulu nedostaneme nikdy, nenásilnou formou jsme se dostali k propedeutice pojmů jako „limita", „nekonečně malý", „součet nekonečna s konečným číslem", ...



Obr. 10: Úloha – Hloubka

5. Klasifikace podle R. Bairaca [1]

Nyní se již bez konkrétních ukázek podíváme na další klasifikaci, a to podle R. Bairaca. Ten člení strategie tvorby úloh na základě výchozí úlohy na:

- Parafrázování – podíváme se na problematiku z jiného úhlu pohledu, změníme geometrický tvar, ...
- Změna dat v tvrzení – nahradíme pojmy, vztahy, změníme hodnoty, přidáme nové podmínky, ...
- Analogie – přeneseme stejnou strukturu do jiného prostředí, např. planimetrickou situaci do stereometrické.
- Zobecnění – pracujeme s více objekty zároveň, hodnoty nahrazujeme parametry, zobecňujeme geometrický tvar, ...
- Kombinace – propojíme problematiku se zcela jinou oblastí matematiky.

6. Závěr

V článku jsme ukázali, jak rychle tvořit úlohy pro nadaného žáka, pomůžeme-li si vlastní zásobou signálních slov. Práci se signálními slovy jsme doložili na práci s jednou „nudně procvičovací“ středoškolskou a jednou základoškolskou úlohou. Co se týče přístupů ke tvorbě úloh, je možné najít další členění, která by se dala po příslušné modifikaci využít jako zdroj signálních slov. Tato členění se však již výrazně překrývají s kategorizacemi zmíněnými. Účelem článku bylo motivovat čtenáře, aby si vytvořili seznam vlastních signálních slov, které nejvíce odpovídají jeho způsobu myšlení.

Literatura

[1] Bairac, R.: Some Methods for Composing Mathematical Problems. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* [online] `http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bairac.pdf` [cit. 2010-06-24].

[2] Fielker, D. S.: Removing the Shackles of Euclid: 8 Strategies. In: Brown, S., Walter, M. (eds.): *Problem posing: Reflecitons and applications.* Hillsdale, New Jersey, 1993, s. 39–51.

[3] Stoyanova, E.: Problem-Posing Strategies Used by Years 8 and 9 Students. *Amt* **61**, 3 (2005), s. 6–11.

Láskavo a trpezlivo

Beloslav Riečan, Fakulta prírodných vied, UMB Banská Bystrica [1]

ABSTRAKT. *Určitým prelomom v sledovaní matematických talentov v Československu bolo ustanovenie matematickej olympiády v r. 1951. Osou článku je pôsobenie vynikajúceho učiteľa matematiky Bedřicha Šofra na Slovensku. Na jeho účinkovaní chceme demonštrovať také dôležité vlastnosti vo vyhľadávaní a výchove talentov, akými sú láskavosť a trpezlivosť.*

60 rokov československej matematickej olympiády

Pri jej vzniku stáli dve významné osobnosti čs. matematiky: Jur Hronec (1881–1959) a Eduard Čech (1893–1960). Pražskí matematici radili k opatrnosti. Na to prof. Hronec rozhodol, že olympiádu spustíme aspoň na Slovensku, a tak získame skúsenosti. Tento rozhodný Hroncov postoj primäl aj českých matematikov k tomu, aby sa olympiáda začala v celom Československu.

Jur Hronec bol predprevratový Slovák, ak prevratom rozumieme vznik Československej republiky v r. 1918. Tak v r. 1912 na lýceu v Kežmarku, kde pôsobil ako profesor matematiky a fyziky, zastal sa slovenských študentov, ktorých jediným prečinom bolo, že si po večeroch čítali slovenské knižky. Veľký tam bol vtedy maďarizačný útlak.

Prof. Hronec si inak pred 1. svetovou vojnou urobil doktorát v Nemecku, po vojne sa habilitoval na Karlovej univerzite a stal sa profesorom matematiky na brnenskej technike. Odtiaľ viedol úspešný boj za založenie slovenskej techniky.

Druhým význačným činom Jura Hronca bolo postavenie na nohy slovenskej matematickej vedy v 50. rokoch. Urobil to ako vedúci katedry matematiky na Prírodovedeckej fakulte, a to najmä pri výchove študentov, budúcich profesionálnych matematikov. Dialo sa tak v symbióze s aktivitou skupiny okolo Štefana Schwarza (1913–1996), reprezentanta moderných smerov na Karlovej univerzite, ako aj brnenských priateľov prof. Hronca, predovšetkým Otakara Borůvku (1899–1995).

Keď sme už spomenuli Eduarda Čecha, vedca medzinárodného formátu (o. i. jedného zo zakladateľov všeobecnej topológie), žiada sa nám spomenúť jeho zástoj pri vyučovaní matematiky. Autor tohto článku mal možnosť používať v šk. r. 1952/53 v septime jeho učebnicu geometrie. Za

[1] e-mail: Beloslav.Riecan@umb.sk

celý polrok sme prebrali len rovnicu priamky v analytickej geometrii roviny. Podobne jemné požiadavky mala aj jeho učebnica aritmetiky venovaná limite postupnosti. Žiaľ, radikálna reforma školstva v r. 1953 zrušila gymnáziá a v dôsledku toho sa Čechove učebnice prestali používať.

Bedřich Šofr a záchrana slovenskej kultúry

Na jeseň 1951 ma učil prof. Šofr (1890–1977) jeden polrok. Robil tak popri zamestnaní mzdového účtovníka mestskej nemocnice. Za ten štvrťrok nás naučil logaritmy a komplexné čísla, a to tak, že som to nikdy nezabudol. Hovorilo sa o ňom, že správnu odpoveď vie žiakovi vsugerovať: „No řekni to, vždyť to umíš.“ Či už to bolo tak, alebo inak, raz ma doviedol k odpovedi, že logaritmus nuly je mínus nekonečno. Ja viem, ortodoxom bude možno chýbať limita sprava, ale ja som bol vtedy ani nie pätnásťročný sextán a pán profesor Šofr ma dokázal povzbudiť možno na celý život.

Bedřich Šofr sa narodil 14. 9. 1890 v Rychnove nad Kněžnou. Jeho mladé roky sú spojené okrem iného s menami troch výnimočných osobností českej kultúry. Prvou je spisovateľ Karel Poláček. V jeho románoch sú opísané hneď dve epizódy zo Šofrovho života. Druhou bol Jaroslav Heyrovský, neskorší nositeľ Nobelovej ceny za fyziku. Treťou osobnosťou bol slávny český skladateľ Bohuslav Martinů, s ktorým Bedřich absolvoval aj tanečnú zábavu. Poučná je najmä história Šofrovej skúšky z chémie. Na jar 1910 sa v parku Šofr učil zlúčeniny síry. Prechádzajúci Heyrovský presvedčil Šofra, aby s ním išiel na skúšku z chémie. Skúšajúci profesor bol rozčúlený, vyhodil zo skúšky dvoch uchádzačov a ako tretieho aj Heyrovského. Na to dal Šofrovi otázku – zlúčeniny síry. Keďže Šofr mal túto otázku v čerstvej pamäti, exceloval. Zronený Heyrovský si povzdychol: „Tak dobre som to preštudoval.“ Na druhý deň už neprišiel na Petrove prednášky z matematiky. Zamenil matematiku za chémiu o odišiel na univerzitu do Anglicka.

V r. 1919 odišol Šofr na Slovensko. Uvážme, že v tom čase na Slovensku existovali len siedmi stredoškolskí profesori schopní vyučovať po slovensky. V Žarnovici sa oženil a usadil sa v Banskej Bystrici, kde pôsobil v dvoch etapách (1920–1939, 1951–1058).

Ťažko vyjadriť, čo Šofr pre Bystricu, ale aj pre celé Slovensko znamenal. V prvom rade ako divadelník, spoluzakladateľ bystrického ochotníckeho divadla. Podieľal sa na umeleckom formovaní významných osobností slovenskej kultúry.

Po r. 1938 nemusel odísť zo Slovenska, lebo mal manželku Slovenku. Ale práve tá sa obávala, že Šofr sa nebude vedieť zmieriť s novou politickou situáciou. V r. 1939 sa usadili v Hradci Králové, kde prečkali protektorát. Ale hneď po februári 1948 sa dostal do kolízie s novou mocou, pretože si dovolil v súkromnom rozhovore kritizovať všemocného ministra. Vrátil sa do Banskej Bystrice. Pozoruhodné, ako pri týchto odchodoch pomáhali Šofrovi jeho žiaci. Za slovenského štátu sa o prechod Šofrovcov do Hradca postaral Martin Sokol (1901–1957), v tom čase predseda parlamentu, v r. 1950 zariadil Šofrov návrat na Slovensko Ernest Sýkora (1914–2000), v tom čase povereník školstva.

Dvakrát opustil Šofr aj banskobystrických ochotníkov. Prvýkrát, v r. 1958, sa lúčil Galénom v Čapkovej Bielej nemoci. Druhý odchod bol definitívny, aj keď impozantný. Bola ním scénická úprava Kukučínových Mladých liet. V inscenácii pohostinsky vystúpili viacerí bratislavskí profesionálni herci.

Ani po odchode do penzie neprestal byť prof. Šofr aktívnym. Napísal 4 matematické príručky, z ktorých 2 vyšli knižne. V archívoch sa zachovali dvojdielne Divadelné spomienky a v rodinnom kruhu trojdielne pamäti Historie mého života.

Existuje, pravda, odchod nenávratný, ktorý čaká každého z nás. Bedřich Šofr zomrel 12. 2. 1977 v Banskej Bystrici vo veku 86 rokov. V čase jeho života bolo v Banskej Bystrici živé heslo Za živa v Bystrici, po smrti v nebi. Ale vlastnosti, ktoré osobnosť prof. Šofra reprezentovala, potrebujeme teraz aj na zemi: Láskavý vzťah k študentom, toleranciu, vzdelanosť a kultúru a jej obetavé a nezištné šírenie.

Otakar Borůvka a rozkvet slovenskej kultúry

Prof. Borůvka bol vedúcou osobnosťou vo viacerých oblastiach algebry i matematickej analýzy. Jeho vzťah k Slovensku vznikol už v útlej mladosti, keď ho otec zaviedol na moravsko-slovenskú hranicu a povedal mu: „Tam žijú bratia Slováci, ktorých život je veľmi ťažký.“

V období po 2. svetovej vojne pomoc slovenským matematikom poskytoval Borůvka plným priehrštím, a to najmä pri orientácii mladých vedeckých pracovníkov. Tak na teóriu zväzov orientoval Jána Jakubíka a Milana Kolibiara, čím spôsobil vznik slovenskej školy teórie zväzov.

O atmosfére v tom čase v okolí prof. Hronca svedčí epizóda z Kolibiarovej štátnice, ktorú opísal neskôr sám prof. Kolibiar (1922–1994). Štátnica obsahovala aj písomnú časť. Kolibiar jednu otázku nevedel. Po zriadencovi poslal lístok Václavovi Medekovi (1923–1994), ten ho dal svojmu profesorovi Gabrielovi Čeňkovi (1900–1956) a ten profesorovi Štefanovi Schwarzovi (1914–1996). Schwarz vytiahol z knižnice vhodnú knihu, dal ju Čeňkovi, Čeněk Medekovi a Medek odpísal patričné vzorce a poslal Kolibiarovi. Prešli roky, Kolibiar už bol docentom na Hroncovej katedre. Diskutovalo sa o študentských trikoch a Hronec vyhlásil, že jeho nik nepodvedie. V zápale diskusie Kolibiar vytiahol argument: „Ja som vás podviedol.“ „Pán kolega, myslíte ten ružový lístok, čo vám poslal Medek?“ Udivený Kolibiar sa opýtal: „Ako viete, že mi ho poslal Medek?“. „Takové blbé ypsilon píšu len dvaja ľudia – Huťa a Medek“, uzavrel Hronec, ktorý si bol vtedy, pred rokmi, všimol Medekom napísaný lístok na Kolibiarovom stolíku.

Podobný duch panoval aj na školách stredných, Bedřich Šofr rozpoznal veľký talent Alexandra Matušku (1910–1975) pre literárnu vedu. Pravda, matematika Matuškovi nešla, preto Šofr Matuškovu maturitu zinscenoval. Našiel sa však člen poroty, ktorý začal vyrývať, pričom Matuška nemal poňatie, o čom je reč. Šofr zahral hru, že Matuška je strašný trémista a po úspešnom zakončení Matuškovi povedal: „Zmaturoval si, pretože si mlčel.“

Do matematiky na ľubovoľnej úrovni, teda aj najvyššej, možno vnikať len riešením primeraných úloh. A na to bol Borůvka majster. Preto ostala po ňom taká vedecká stopa, a to aj na Slovensku.

V súvislosti s výberom problémov je otázny vzťah k novým teóriám. Dovolíme si uviesť dva príklady.

Pred 100 rokmi ruský matematik a neskorší ruský emigrant do Československa, Nikolaj Podtjagin (1887–1970) študoval teóriu množín u Emila Borela (1871–1956). Zachcelo sa mu pochváliť, zašiel preto v Moskve za špičkovým matematikom Vladimírom Steklovom (1864–1926) (dnes nesie jeho meno matematický ústav akadémie vied). A Steklov Podtjagina schladil: „Éto pustiki, molodoj čeloviek (to sú hlúposti, mladý človeče).“

Podobný príklad sme zažili aj v súčasnosti. V r. 1965 publikoval Lofti Zadeh základný článok o fuzzy množinách. Keď sme v r. 1992 vydali prvé číslo časopisu Tatra Mountains Mathematical Publications, bolo venované teórii fuzzy množín. Veľmi to rozčúlilo nikoho menšieho ako Igora Kluvánka (1931–1994). A vidíme, aký rešpekt si získali fuzzy množiny, a to tak v teórii, ako aj v praktických aplikáciách.

Týmito príkladmi sme chceli upozorniť na to, že nové teórie si treba všímať a práve ony môžu byť cenným materiálom pri výchove matematických talentov.

Existuje aj opačný postoj a aj pred ním sa treba vystríhať. V r. 1964 na pozvanie Štefana Schwarza navštívil Slovensko významný algebraik Alexandr Kuroš (1908–1971). A vystríhal sa pred matematikmi-fermatistami, ktorí nič nevytvorili, ale „riešia ťažký problém“.

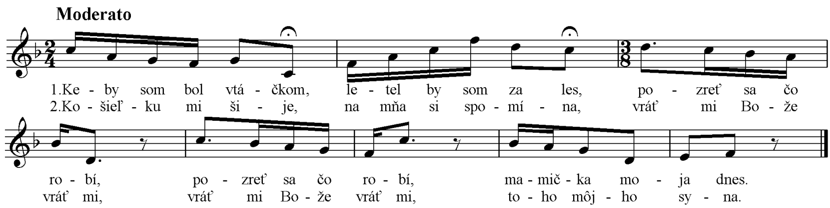
Keby som bol vtáčkom

Výklad skončíme s osobnosťou, s ktorou sme začali, s Jurom Hroncom. Podobnú úlohu, akú hral Hronec vo vede, zohral v umení Mikuláš Schneider-Trnavský (24. 5. 1981 – 28. 5. 1958). A pritom sa narodili temer na ten istý deň – Jur Hronec (17. 5. 1881 – 1. 12. 1959).

Vzhľadom na nepriazeň doby nedosiahli medzinárodne uznávaných vrcholov (Schneider mal byť žiakom Antonína Dvořáka (1841–1904), ale Dvořák mu neočakávane zomrel). Ale obaja vytvorili dielo, na ktorom mohla slovenská veda a slovenské umenie stavať. Ilustrujme to na Schneiderovej piesni:

Keby som bol vtáčkom, letel by som za les,
pozrieť sa čo robí mamička moja dnes.

Košieľku mi šije, na mňa si spomína,
vráť mi Bože, vráť mi, toho môjho syna.



Literatura

[1] Bakošová, L.: *Bedřich Šofr – matematik a pedagóg.* Diplomová práca. FPV UMB, Banská Bystrica, 2008.

[2] Hronec, O., Suláček, J., Riečan, B.: *Starý pán, kniha o Jurovi Hroncovi a jeho dobe.* Veda, Bratislava, 1996.

[3] Nemoga, K., Riečan, B.: *Matematika v b mol, Štefan Schwarz matematik a pedagóg.* Veda, Bratislava, 1996.

[4] Šofr, B.: *Euklidovské geometrické konštrukcie.* Alfa, Bratislava, 1976.

[5] Šofr, B.: *Populárne o počte pravdepodobnosti.* Alfa, Bratislava, 1967.

[6] Žbirková, V.: *Juraj Hronec – pedagóg.* SPN, Bratislava, 1975.

Tvorba matematických problémů pro talentované žáky *

Jaroslav Zhouf, Pedagogická fakulta UK Praha [1]

Abstrakt. *Název příspěvku je vypůjčen z publikace [1] stejného názvu a stejného autora. Příspěvek si klade za cíl seznámit čtenáře pomocí této publikace s tvorbou problémů převážně pro žáky talentované na matematiku. Hlavní součástí příspěvku jsou prezentace tzv. principů tvorby matematických problémů a klasifikace uzavřených problémů s výběrem odpovědi. Vše je dokumentováno množstvím konkrétních matematických problémů a ukázkou publikací pro tyto účely vytvořených.*

Úvod

Existuje jediná cesta, jak se lze učit matematice: řešit matematické problémy. Proto je problém klíčovým prvkem matematického vzdělávání. Bez nadsázky lze říci, že dějiny matematiky jsou dějinami řešení problémů. Podobně lze říci, že vyučování matematiky je rozvíjením žákových schopností řešit problémy.

V současnosti existuje nepřeberné množství problémů a sbírek úloh pro každou oblast školské matematiky a pro různé úrovně matematické vyspělosti žáků. Na první pohled se tedy zdá, že učitel nemusí žádné další problémy tvořit. Přesto z literatury, ze zkušeností kolegů, i z vlastních zkušeností víme, že učitelé a zejména ti, kteří vychovávají matematicky nadané žáky, sami problémy pro své žáky neustále tvoří. Proč? Důvody jsou aspoň tři. Prvním je skutečnost, že různí žáci potřebují ke svému optimálnímu rozvoji různé problémy. Ty ale zřídka lze rychle najít ve sbírkách problémů. Učitel, který dokáže tvořit problémy žákům „šité na míru“, urychluje jejich proces učení. Druhý důvod přichází z matematických soutěží, kde je stálá potřeba mnoha nových, originálních problémů. Konečně třetí důvod je nejzávažnější. Učitel tvorbou problémů dospívá k hlubšímu matematickému, ale zejména didaktickému porozumění danému učivu. Při tvorbě problému zvažuje, jak jej asi jeho žáci budou řešit, kde mohou mít nejasnosti nebo těžkosti, a tím hlouběji proniká do tématu.

---

* Podpořeno výzkumným záměrem MSM 0021620862 „Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání“.

[1] e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Didaktika matematiky a tvorba problémů

Hlavním úkolem didaktiky matematiky (můžeme-li tento termín použít i na období mezi válkami) bylo tradičně hledání metod „optimálního“ výkladu jednotlivých pojmů, vztahů i tematických celků matematiky od 1. ročníku základní školy po maturitu. Ovšem krátce po druhé světové válce vyšla kniha G. Polyi *How to solve it?*, která otevřela nový směr bádání, když poukázala na klíčovou roli úlohy v matematickém vzdělávání [2]. Badatelé si uvědomili, že nejen výklad, ale i promyšleně volená struktura úloh je cesta k matematickému poznání. Konečně po neúspěchu množinové éry vzrostl na konci sedmdesátých let minulého století zájem o řešení problémů – začaly se zkoumat řešitelské strategie žáků i studentů u různých typů úloh.

Zcela přirozeně se postupně do středu zájmu didaktiky matematiky dostala tvorba úloh, tedy *problem posing*, a této problematice byla a stále je ve světové didaktice matematiky věnována značná pozornost. Jsou dva hlavní proudy bádání. Za prvé se jedná o problem posing žáků a studentů během řešení problémů, kdy je problem posing využíván jako prostředek, pomocí něhož žáci dospívají k hlubšímu porozumění matematice. Druhý proud bádání se týká problem posingu učitele, a právě do tohoto proudu náleží prezentovaná publikace. V české literatuře pravděpodobně neexistuje hlubší studie, která by se podrobněji věnovala procesu tvorby úlohy učitelem, i když je tato kompetence pro učitele matematiky nezbytná.

Vymezení základních pojmů

Publikace je věnována převážně problematice problem posing ve smyslu tvorby problémů pro talentované žáky základních a středních škol a studenty vysokých škol motivované pro matematiku.

V kapitole 1 je krátce shrnuto, jaké žáky považuje autor za talentované nebo aspoň pro matematiku motivované. Přiklání se k názoru, že vymezení pojmu *talentovaný jedinec* nelze provést krátkou definicí, že je třeba definice rozsáhlá. Nejlépe se charakterizuje talentovaný jedinec souborem atributů. Takové soubory lze najít např. u Koščе [3, s. 169] nebo u Hříbkové [4, s. 92–94]. Autor doplnil několik dalších podle něj důležitých atributů [5, s. 27–28].

Kapitola 2 se věnuje vymezení pojmů *problem solving* a *problem posing*. Problém je taková situace, která vede k otázce, jak tuto situaci vyřešit. Často (hlavně ve škole) se používá pro onu situaci termín úloha. Ve škole se ale většinou předkládají úlohy, jejichž řešení je dáno nějakým algoritmem, který žáci znají nebo mají znát. Naopak problém pro žáky příslušného stupně školy je úloha, na jejíž vyřešení nemusí být žákům dopředu algoritmus znám. Podobně uvádí Stehlíková [6, s. 28], že „úloha je úkol, při jehož řešení žák nebo student pouze aplikuje dříve naučené strategie. Úloha se stává problémem, jestliže řešitel nezná okamžitě řešitelskou strategii a musí hledat novou strategii." Krátce řečeno, pod pojmem úloha je v publikaci myšlena situace, jejíž řešení prověřuje žákovy znalosti a dovednosti a se kterou se setkává především ve škole, kdežto problém je situace, na jejíž vyřešení je třeba využít schopnosti a dovednosti k objevení strategie řešení, nebo je to dokonce situace, která ještě nebyla nikým vyřešena. Problém je tedy postaven kognitivně výše než úloha. Někdy se dají oba termíny zaměnit, neboť jsou situace, které jsou pro někoho problémem, ale pro jiného pouze úlohou.

Nejčastěji používaný význam procesu *problem posing* vystihuje Silver [7, s. 20]: „Problem posing zahrnuje tvorbu nových problémů a otázek, abychom prozkoumali danou situaci, a stejně tak přeformulování problému během procesu jeho řešení." Podobně se vyjadřují Dunker [8] i Stoyanova a Ellerton [9, s. 522]. Cobb a Bauersfeld [10] si pod pojmem problem posing představují činnost, která se skládá z jednotlivých „klíčových elementů". Patří mezi ně: „. . . porozumění problémovým strukturám a rozpoznání vztahových struktur, pochopení formy problému, rozpoznání kritických informačních jednotek, umění modelovat a transformovat dané struktury a vytvářet nové, znalost, zda a jak je problém řešitelný, umění myslet matematicky různými cestami, umění, jak a kdy aplikovat procesy na analogické problémy, schopnost kriticky posoudit problémy a zkušenosti s problémy, zpětný pohled a zvýšení efektivnosti očekávání, zlepšení dispozic směrem k řešení problémů, účast v třídní komunikaci o filosofických a matematických otázkách, zaujetí v konstruktivních dialozích a debatách, podíl na kritické tvorbě problémů. . . " Český termín „tvorba problémů" neodpovídá přesně anglickému „problem posing", proto je v českém textu, kde je to účelné, používán původní anglický termín.

Na proces problem posing přirozeně navazuje tzv. *problem solving*, tj. řešení problémů. Zde nelze opomenout badatele, který je považován za zakladatele promyšlené činnosti problem solving, G. Polyu. Polya [11, díl I, s. VII-VII] charakterizuje problem solving slovy: „Naše znalost o jakémkoli subjektu sestává z dat a know-how. . . . nebude určitě pochyb ve všem uvažování, že v matematice je mnohem důležitější know-how než pouhé vlastnictví dat. A co je know-how v matematice? Schopnost řešit problémy – ne pouze rutinní úlohy, nýbrž problémy vyžadující určitý stupeň nezávislosti, úsudku, originality, kreativity.“ U Polyi se objevuje členění této činnosti do čtyř kroků: porozumění problému, vytvoření plánu řešení, realizace řešení podle plánu, pohled zpět na celý problém [2]. Polyovy kroky podrobněji konkretizuje Gonzales [12, s. 79–80]. *Porozumění problému* charakterizuje jako „zohlednění všech myšlenek a otázek, které vstupují do mysli, když se pokoušíte pochopit problém. Máte si při tom dávat otázky ‚O čem je problém?‘ , ‚Co máme dáno?‘ , ‚Co potřebujeme najít?‘ “ *Vytvoření plánu řešení* charakterizuje jako „strategii nebo strategie, které budete užívat, a plán pro vybranou strategii nebo vybrané strategie“. *Realizaci řešení podle plánu* charakterizuje jako „provádění potřebných výpočtů (nebo tvoření obrázků, tabulek atd.) a zápis kroků, které děláte“. *Pohled zpět na celý problém* charakterizuje jako „kontrolu výsledků. Jestliže výsledky nedávají smysl, začne proces řešení znovu. Kontrolu děláte, abyste věděli, zda neexistují jiná řešení nebo strategie, které dávají stejná řešení.“ Gonzales dále uvádí, „že rozšíření Polyova čtvrtého kroku o pátý krok, *tvorbu souvisejících, příbuzných problémů*, může být efektivním nástrojem, jak ulehčit žákům pomalý přechod do role tvůrců problémů. Žáci jsou žádáni, aby vytvářeli variace problémů, se kterými se setkali během řešení zadaného problému.“

Metodologie spojená s tvorbou matematických problémů

Jak již bylo řečeno, historicky se výzkum v didaktice matematiky začal věnovat nejdříve řešení problémů a teprve následně jejich tvorbě a předkládání žákům. Proto také existuje velké množství literatury o způsobech řešení matematických problémů, zatímco literatura týkající se tvorby problémů (a speciálně pro talentované žáky v matematice) je velice vzácná. Publikace o tvorbě problémů jsou zpravidla zaměřeny na jejich soubory pro různé cílové skupiny a nehovoří o žádných obecných principech, které tvorbu úloh řídí. Tento článek a uvedená publikace se více zaměřuje právě na tvorbu matematických problémů ve snaze hlouběji proniknout do podstaty práce, která se vesměs dělá intuitivně.

Publikace vychází ze zkušeností, náhledů a názorů na tuto problematiku, proto je v jistém smyslu autorskou sebereflexí. Vhodnost daného matematického problému pro danou situaci je ovšem značně subjektivní a těžko měřitelné kritérium, proto bylo nutno zvolit kvalitativní výzkumné metody. Během celého výzkumu byly evidovány, archivovány a zpracovávány i mnohé reakce žáků a kazuistiky kolegů, jejich připomínky a návrhy na úpravu obsahu a formy předkládaných problémů a na koncepci souborů problémů. Tím se původní, víceméně intuitivní autorské poznatky postupně systemizovaly, upřesňovaly a prohlubovaly. Bylo zvědoměno mnoho nových souvislostí, zvýšila se snaha o výstižnou a jasnou formulaci jednotlivých principů a o jejich přesnou charakteristiku. Každé nové upřesnění formulace nebo charakteristiky vyžadovalo opětovnou kontrolu pomocí problémů, které sloužily jako ilustrativní. Důležitým prvkem výzkumu byla spolupráce s kolegy i práce se začínajícími učiteli, kterým byly předávány autorské zkušenosti (případ Markéta a Eva, popis práce v semináři pro budoucí učitele matematiky).

Shrneme-li všechna tato výzkumná šetření, dá se říci, že byly částečně použity metody jako kvalitativní i kvantitativní analýza žákovských řešení, analýza produktu, introspektivní analýza procesu, kazuistiky, nestrukturovaný rozhovor atd.

Výsledky výzkumu

Výsledky výzkumu lze zhruba rozdělit do tří částí.

Principy tvorby problémů

Procesem popsaným v odstavci 4 bylo postupně vyvinuto schéma, které řídí tvorbu problémů pro určité cílové skupiny žáků. Toto schéma je nazváno *principy tvorby matematických problémů* (krátce *principy*). Principy jsou identifikovány a popsány nejen pro otevřené problémy, ale i pro problémy uzavřené, které se u nás více rozšířily např. díky soutěži Matematický klokan a mezinárodnímu testování (TIMSS, PISA a dalších).

Principy se liší nejen podle toho, zda jsou určeny pro tvorbu problémů otevřených nebo uzavřených, ale také podle toho, pro jakou soutěž, případně pro jaké jiné použití jsou problémy zamýšleny. V publikaci jsou diskutovány jejich atributy ve čtyřech případech otevřených problémů, a to pro písemné maturitní zkoušky ve třídách se zaměřením na matematiku, pro matematickou olympiádu, pro korespondenční semináře a pro písemné přijímací zkoušky do tříd se zaměřením na matematiku, dále pak ve dvou případech uzavřených problémů, a to pro soutěž Matematický klokan a pro přijímací zkoušky na pedagogickou fakultu připravující budoucí učitele matematiky, a nakonec v případě písemného testu zkombinovaného z uzavřených a otevřených problémů pro vyšší úroveň státních maturitních zkoušek. Konkrétní problémy jsou čerpány z publikací [13–21]. Pro některé oblasti použití byly principy již dříve publikovány v pracích [22–23].

Za zásadní teoretický výsledek mnohaletého systematického výzkumu lze tedy považovat prezentovaný soubor nejméně 33 *principů tvorby didakticky účinných problémů*, potažmo jejich souborů zaměřených k jistému cíli. (Tento počet se zdá velký, ale je třeba uvědomit si, že jde o principy pro více oblastí použití a v každé oblasti jsou uplatňovány třeba jen některé z nich.) Význam a způsob využití principů jsou dokumentovány na autorských souborech matematických problémů. Zde je také diskutován vliv jednotlivých principů na tvorbu matematických problémů a testů pro konkrétní účely.

Identifikované principy jsou vnímány jako soubor požadavků, které jsou kladeny na nově tvořené problémy i na celý test, protože právě požadovaná výsledná podoba problémů a testu má zásadní vliv na proces jejich tvorby. Jsou to tyto principy:[2]

1. *zařazení problémů členěných na dílčí úkoly a vyžadujících lokální strategii řešení*
2. *zařazení problémů vyžadujících globální strategii řešení*
3. *nezávislost jednotlivých strategií v problémech s dílčími úkoly*
4. *propojení více oblastí matematiky v jednom problému*
5. *zastoupení širokého spektra matematických témat v testu*
6. *gradace obtížnosti každého problému i celého testu*
7. *obtížnostní vyváženost paralelních problémů v testu*
8. *zařazení problémů řešitelných zobecňováním, experimentováním, analogií...*
9. *zavádění nových pojmů a jejich propojování se známými pojmy*
10. *reálnost problémů, aktualizace problémů (např. podle data), kontext, autentičnost*
11. *zohlednění studenty oblíbených partií matematiky*
12. *zařazení „význačných témat"*
13. *možnosti řešení problémů více způsoby*
14. *nezařazování problémů s trikovým řešením pro školní testy*

[2]Principy jsou zde uvedeny v jednom souboru bez kontextu, proto je mezi nimi možné najít řadu protikladů. Pro každé výše uvedené použití je třeba vybrat určitou skupinu principů, což je v publikaci specifikováno. Na druhou stranu nejde od sebe oddělit skupiny principů podle typu testu, neboť většina principů je použitelná univerzálně, a to dokonce současně pro otevřené i uzavřené problémy.

15. *zařazení „triku“ pro mimoškolní testy*
16. *zařazení problémů s obrázkem, grafem v zadání*
17. *přiměřená míra složitosti úprav pro žáky i opravovatele*
18. *„čitelnost“ textu a jeho jednoznačnost*
19. *nestandardní formulace problémů*
20. *tematická návaznost problémů*
21. *zasazení problémů do literárního příběhu*
22. *jednotná forma vložení problémů do příběhu*
23. *zařazení problémů s různými strategiemi řešení v testu*
24. *uspořádání nabídnutých odpovědí podle jistého pravidla*
25. *nezařazování jasně nereálných distraktorů*
26. *zařazení stejně atraktivních distraktorů*
27. *zařazení „neurčité odpovědi“*
28. *jednotná forma problémů v celém testu*
29. *zařazení problémů v testu jak s kladnou otázkou, tak se zápornou otázkou*
30. *zařazení „paralelních problémů“*
31. *rovnoměrné rozdělení správných odpovědí na různé pozice*
32. *nezařazování problémů se stejnou tematikou bezprostředně za sebou*
33. *zařazení uzavřených „problémů do série“ se společnými vstupními daty*

Principy jsou v publikaci dokumentovány konkrétními autorskými problémy a jejich soubory. Přitom byla též udělána analýza charakteru typů problémů pro jednotlivé účely (různé typy soutěží, přijímací zkoušky, maturitní zkouška), která je opět ilustrována problémy. Např. je uveden problém, který byl v jedné podobě použit jako problém matematické olympiády a v jiné podobě jako problém písemné maturitní zkoušky. Je také naznačeno, jak se dají poměrně obtížné problémy z mezinárodní matematické olympiády přetvořit pro větší skupinu talentovaných žáků do písemné maturitní zkoušky a naopak zobecnit natolik, aby byly velice náročné, a to dokonce i pro matematiky-profesionály. Tato situace má ukázat, jaké široké možnosti skýtá proces tvorby problémů pro jejich tvůrce.

Pro popis procesu tvorby problémů je důležitá identifikace jeho jednotlivých fází, která je uvedena v kapitole 3. Každý autor nových úloh vystupuje ve třech pozicích: jako *tvůrce* (vytváří problém i jeho textaci), jako *řešitel* (snaží se vžít do role různých žáků a v jejich ‚duchu' problém vyřešit) a jako *hodnotitel* (hodnotí kvalitu i kvantitu jednotlivých úkolů, celého problému, celého testu i jeho záludnosti pohledem tvůrce i řešitele).

Fáze autorského procesu tvorby problémů jsou tyto:

A. *fáze přístupu k problému, neboli uchopení problému*
B. *fáze hlubšího uchopení problému*
C. *fáze matematizace, výpočtu a interpretace*
D. *fáze sémantické zkoušky*
E. *fáze zhodnocení naplnění principů u analyzovaného problému*
F. *fáze tvorby dalších úkolů a otázek*
G. *fáze výběru úkolů a otázek*
H. *fáze sestavení celého testu*
I. *fáze externího hodnocení*
J. *fáze finalizace*

Uzavřené problémy s výběrem odpovědi a jejich analýza

Druhým významným výsledkem uvedeným v publikaci v kapitole 10 je *analýza formy uzavřených problémů s výběrem odpovědi.* Ta vykrystalizovala v sestavení vícedimenzionální kriteriální tabulky, podle níž lze jednotlivé problémy klasifikovat. Každé kritérium se dělí na několik parametrů. Svojí formou připomíná zde uvedená klasifikace vícedimenzionální (např. revidovanou Bloomovu) taxonomickou strukturu. V případě klasifikace uzavřených problémů s výběrem odpovědi připadá v úvahu více kritérií, jako je např. strategie řešitele problému, potence problému (využití dovedností, schopností, vhledu), vztah textu problému a nabídnutých odpovědí (závislý, nezávislý), polarita otázky (pozitivní, negativní), obtížnost problému, reálnost problému, určenost pro věkovou skupinu řešitelů. U každého kritéria je také důležitá jemnost jeho členění na jednotlivé parametry.

Pro publikaci byla vybrána první čtyři uvedená kritéria a jejich ne příliš jemné členění, aby se tím zachovala přehlednost. V případě matematických uzavřených problémů jsou totiž problémy kratší a jednodušší, proto při jemnější klasifikaci dochází k výraznějšímu překrývání kritérií a jejich parametrů. První dvě vybraná kritéria se více týkají vztahu problému a řešitele, další dvě kritéria se naopak více týkají problému samotného. Výběr kritérií a k nim přiřazených parametrů, podle kterých se dají členit uzavřené problémy s výběrem odpovědi, vychází z mnohaleté zkušenosti s řešením a tvorbou takových problémů. Podrobná analýza uvedená v práci je v české literatuře ojedinělá.

Kritérium založené na pracovních postupech řešitelů rozdělené podle těchto parametrů:

(A) *Řešitel problém vyřeší a podle výsledku označí správnou odpověď, tj. řeší ho jako otevřený.*

(B) *Řešitel postupně testuje jednotlivé odpovědi, dokud nenarazí na správnou odpověď. Testování odpovědí může probíhat*
   (B1) *od začátku do konce,*
   (B2) *od konce k začátku,*
   (B3) *podle prvního dojmu, např. od jednoduchých odpovědí,*
   (B4) *jakkoli (intuicí).*

(C) *Řešitel si situaci představí nebo načrtne, čímž získá vhled do problému; na základě vhledu pak najde dominantní jev, který mu umožní*
   (C1) *eliminovat některé distraktory a se zbylými pracovat dále (podle některé ze strategií),*
   (C2) *rychle problém vyřešit.*

(D) *Řešitel využije grafickou informaci v textu nebo mezi nabídnutými odpověďmi, což mu pomůže získat vhled do problému; na základě vhledu pak najde řešitel dominantní jev, který mu umožní*
   (D1) *eliminovat některé distraktory a se zbylými pracovat dále (podle některé ze strategií),*
   (D2) *rychle problém vyřešit.*

Kritérium založené na potenci problému řazené podle matematické vyspělosti:

(ZD) *Řešitel využije svých znalostí a dovedností, které jsou podstaty*
   (ZD1) *matematické, kdy využívá odborných znalostí a dovedností,*
   (ZD2) *komunikační, kdy zná matematické konvence, zápisy.*

(MS) *Řešitel využije svých matematických schopností*
   (MS1) *analyticko-syntetických,*
   (MS2) *experimentálních.*

(VT) *Řešitel využívá vhledu či triku při řešení a uchopí problém*
   (VT1) *procesuálně, kdy si stanoví jasný řešitelský postup,*

(VT2) *konceptuálně, kdy vidí situaci jako celek.*

Kritérium založené na vztahu textu a nabídnutých odpovědí s parametry:

(ZZ) *Správná odpověď závisí jak na údajích uvedených v textu problému, tak na údajích uvedených v odpovědích.*

(ZN) *Správná odpověď závisí na údajích uvedených v textu problému, ale nezávisí na údajích uvedených v odpovědích, tj. problém lze řešit jako otevřený.*

(NZ) *Správná odpověď nezávisí na údajích uvedených v textu problému, ale závisí na údajích uvedených v odpovědích.*

(NN) *Správná odpověď nezávisí ani na údajích uvedených v textu problému ani na údajích uvedených v odpovědích.*

Kritérium založené na polaritě otázky s parametry:

(K) *Otázka v textu je formulována kladně.*

(Z) *Otázka v textu je formulována záporně.*

U prvního kritéria je 9 parametrů, u druhého 6 parametrů, u třetího 4 parametry a u čtvrtého 2 parametry. Z parametrů lze vytvořit čtyřdimenzionální tabulku, která má celkem $9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 532$ buněk. K většině buněk se dá přiřadit uzavřený problém s výběrem odpovědi, který splňuje příslušné parametry. Některé parametry ale závisejí jen na řešiteli, tvůrce problému je může ovlivnit jen málo. Např. parametry (B1)–(B4) se nejeví z pohledu tvůrce problémů jako odlišné. Též prakticky není možný parametr (NN) a také není možná kombinace (A,NZ). Proto můžeme tabulku zredukovat na $6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = 204$ buněk. I po této redukci jsou rozdíly parametrů v mnoha případech malé, takže se tabulka může ještě zmenšit.

K mnoha buňkám kriteriální tabulky jsou uvedeny v publikaci příklady matematických problémů s komentářem, který osvětluje jejich zařazení. Jde sice o subjektivní autorskou klasifikaci, ta je ale založena na objektivních vlastnostech prakticky vytvářených uzavřených problémů s výběrem odpovědi.

Šetření týkající se tvorby problémů

Publikace prezentuje v kapitole 11 výsledky několika šetření z nejrůznějších oblastí týkajících se tvorby problémů: komentáře zkušených tvůrců, sebereflexe z tvorby matematických problémů u začínajících tvůrců, konfrontace otevřených a uzavřených problémů. Každé z těchto šetření přispívá k ucelení mozaiky o tvorbě problémů.

Ke sledování práce kolegů byla použita metoda polostrukturovaných rozhovorů. Ty byly vedeny zhruba v této linii: jak se dotazovaný angažuje v tvorbě problémů, jak se proces tvorby u něj vyvíjel či vyvíjí, má-li dotazovaný nějaký systém pravidel, podle něhož problémy tvoří, a na závěr je stočen rozhovor na v publikaci prezentovaný systém principů. Tato šetření vedla ke korekcím v systému těchto principů.

V publikaci jsou dále popsány dva případy diplomových prací u studentek Markéty a Evy, které se zabývaly šetřením na poli tvorby matematických problémů. Metoda šetření spočívala v pozorování, jakým vývojem studentky při tvorbě problémů prošly. V menší míře byla tato metoda použita se studenty v semináři Metody řešení úloh. Opět to vedlo ke korekcím při tvorbě problémů jak u studentek, tak u vedoucího diplomových prací.

Poslední v publikaci uvedené šetření se týká porovnání vhodnosti, resp. nevhodnosti, použití otevřené a uzavřené formy problémů v matematice. Existují zastánci zásadního používání otevřených problémů, podle nichž jedině tato forma dovede odhalit matematické schopnosti a dovednosti. Vedle toho existuje liberálnější část odborníků, kteří pracují i s uzavřenými problémy. Šetření v publikaci ukazuje na to, že nejsou velké rozdíly v úspěšnosti vypracování testů s otevřenými a uzavřenými problémy – je zde citován výzkum studentky Kateřiny zpracovaný v diplomové práci.

Závěr a pokračování výzkumu

Zatímco na úrovni aplikační jsou podstatným výsledkem předložené publikace konkrétní vytvořené problémy, na úrovni teoreticko-výzkumné je jím identifikace, popsání a ilustrace obecných forem a typů matematických problémů a odlišných přístupů k procesu jejich tvorby. Problematiku tvorby úloh je sice možné rozvinout ještě do větší šíře, tj. zabývat se tvorbou problémů pro další oblasti jejich uplatnění, je to však cesta, která jde na úkor hlubšího pohledu na tuto činnost. Cennější je podrobnější rozbor tvorby několika konkrétních problémů než jejich pouhý povrchní přehled.

Publikace je svým zaměřením didakticko-matematická, ale obsahuje i prvky psychologizující. Je také odborně matematická, i když matematika zde primárně slouží jako ilustrace stránky didakticko-matematické. Toto zpracování publikace může posloužit tvůrcům problémů pro žáky a studenty všech typů a stupňů škol a jako teoretický rámec i těm, kteří dále chtějí problematiku tvorby problémů studovat. Má též řadu aplikací v přípravě učitelů matematiky i v dalším vzdělávání učitelů, neboť přináší velmi podrobný pohled na kompetenci učitele matematiky tvořit úlohy.

Předložený výzkum není rozhodně ukončen. V zásadě pokračuje dvěma proudy. První z nich podrobněji zkoumá implementaci toho, co bylo vytvořeno, tedy způsoby, jak různí učitelé s nabízenými principy pracují, co přebírají beze změn a co si přizpůsobují pro vlastní potřeby. Druhý proud rozšiřuje cílovou skupinu žáků, kterým jsou tvořené problémy adresovány. Mění se i charakter výzkumu, protože ke spolupráci jsou získáváni zájemci o systematický výzkum problematiky problem posing (např. dvě doktorandky).

Případné doplňující větve výzkumu, např. při rozšíření spektra cílových skupin žáků o žáky průměrné nebo dokonce slabé, si vynutí rozšíření uvedeného seznamu principů. Určitě se zde ukáží důležité jevy, jako je nutnost dát příležitost úspěchu i těm nejslabším žákům, zvýšit názornost zadání, hledat adresné motivační dominanty, volit krátké věty, volit kratší zadání problémů apod. Celý výzkum pak může být koncipován podobnou metodologií jako výzkum v publikaci popsaný.

Literatura

[1] Zhouf, J.: *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky.* PedF UK, Praha, 2010.

[2] Polya, G.: *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1945.

[3] Košč, L.: *Psychológia matematických schopností.* SPN, Bratislava, 1972.

[4] Hříbková, L.: *Nadání a nadaní. Pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výzkumy a jejich vztah ke školské praxi.* PedF UK, Praha, 2005.

[5] Zhouf, J.: *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice.* Doktorská práce, MFF UK, Praha, 2001.

[6] Stehlíková, N.: *Structural Understanding in Advanced Mathematical Thinking.* PedF UK, Praha, 2004.

[7] Silver, E. A.: On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics* **14** (1994), s. 19–28.

[8] Dunker, K.: On Problem Solving. *Psychological Monographs* **58**, 5 (1945).

[9] Stoyanova, E., Ellerton, N. F.: A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. In: Clarkson, P. (ed.) *Technology in Mathematics*

Education. Mathematics Education Research Group of Australia, Melbourne, 1991, s. 518–525.

[10] Cobb, P., Bauersfeld, H. (eds.): *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1995.

[11] Polya. G.: *Mathematical Discovery on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving, Volume I, Volume II*. John Wiley & Sons, N.Y.–London–Sydney, 1962 (Volume I), 1965 (Volume II).

[12] Gonzales, N. A.: Problem Posing: A Neglected Component in Mathematics Courses for Prospective Elementary and Middle School Teachers. *School Science and Mathematics* **94**, 2 (1994), s. 78–84.

[13] Zhouf, J.: *Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku*. 2. vydání, PedF UK, Praha, 2010.

[14] Boček, L., Horák, K., Pitner, T., Šimša, J., Švrček, J., Töpfer, P., Zhouf, J.: *52. ročník matematické olympiády na středních školách*. JČMF, Praha, 2004.

[15] Zhouf, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*. Prometheus, Praha, 2006.

[16] Zhouf, J.: *Přijímací zkoušky z matematiky pro třídy s rozšířenou výukou matematiky*. 2. doplněné vydání, Prometheus, Praha, 1997.

[17] Molnár, J. a kol.: *Počítejte s Klokanem – Junior*. Prodos, Olomouc, 2001.

[18] Horenský, R., Rys, P., Zhouf, J., Molnár, J.: *Počítejte s Klokanem – Junior*. Prodos, Olomouc, 2007.

[19] Sýkora, V., Zhouf, J. a kol.: *Matematika – sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky, základní obtížnost*. Tauris, Praha, 2001.

[20] Sýkora, V., Zhouf, J. a kol.: *Matematika – sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky, vyšší obtížnost*. Tauris, Praha, 2001.

[21] Zhouf, J. a kol.: *Sbírka testových úloh k maturitě z matematiky*. Prometheus, Praha, 2002.

[22] Zhouf, J.: Zásady tvorby matematických problémů. In: Gunčaga, J., Takáč, Z. (eds.) *Matematika v škole dnes a zajtra, Zborník 8. ročníka konferencie*. Pedagogická fakulta Katolíckej Univerzity, Ružomberok, 2007, s. 74–80.

[23] Zhouf, J.: Strategie řešení uzavřených problémů. In: Lávička, M., Bastl, B. (eds.) *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008*. Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, s. 337–342.

KRÁTKÉ PŘÍSPĚVKY A PRACOVNÍ DÍLNY

Dvě úlohy pro talenty

Emil Calda, MFF UK Praha [1]

ABSTRAKT. *V příspěvku jsou připomenuty dva starší články z Rozhledů matematicko-fyzikálních a z Učitele matematiky pojednávající o problémech, které mohou být pro talentované studenty zajímavé a podnětné.*

Úvod

Při probírání svými staršími materiály jsem narazil na články [1] a [2], které pojednávají o zajímavých problémech, ale výsledky, ke kterým docházejí, uvádějí bez důkazu. A protože tyto důkazy neznám, řekl jsem si, že bych obě úlohy mohl účastníkům konference připomenout v naději, že je předají svým talentovaným studentům, kteří tyto důkazy jistě zvládnou a někdy mě s nimi třeba i seznámí.

První úloha

Článek [1] byl publikován v Rozhledech matematicko-fyzikálních před patnácti lety a je v něm řešena následující úloha: *Dámy $D_1, D_2, \ldots, D_n$, které jsou členkami Klubu pro vzájemnou komunikaci a šíření zaručených zpráv, si každý večer telefonicky sdělují novinky, které se během „pracovního" dne dověděly. Určete nejmenší počet $t(n)$ telefonních rozhovorů, které musí proběhnout, aby se všechny dověděly všechno, co přes den zjistila každá.*

Snadno zjistíme, že pro $n = 2, 3, 4$ nejmenší počet hovorů je: $t(2) = 1$, $t(3) = 3$, $t(4) = 4$. Pro $n = 4$ může večerní výměna novinek proběhnout např. takto: Nejprve dáma D_1 pohovoří s D_2 a dáma D_3 s D_4; když pak D_1 (která už zná vše, co zjistila D_2) zavolá dámě D_3 (která už zná vše, co zjistila D_4), budou po výměně získaných poznatků obě dámy D_1 a D_3 vědět všechno, co ví celá čtveřice; s podobným výsledkem pak proběhne telefonát mezi dámami D_2 a D_4, takže po skončení těchto čtyř hovorů budou všechny čtyři dámy vědět vše, co se během dne dozvěděla každá.

[1] e-mail: ecalda@volny.cz

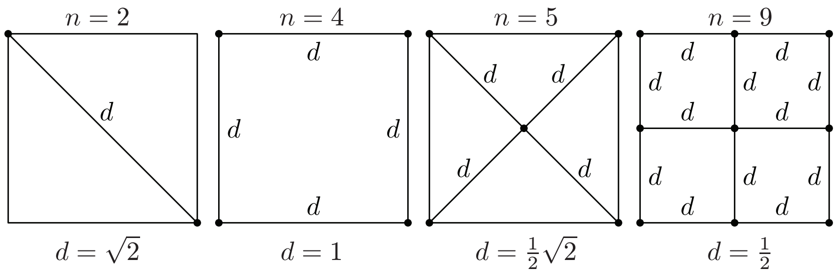
Na základě tohoto postupu pro $n = 4$ odvodíme potřebný počet hovorů pro libovolné $n \geq 5$ takto: Zvolíme jakékoli čtyři členky klubu, třeba D_1, D_2, D_3, D_4, a pověříme dámu D_1, aby postupně zavolala každé z členek D_5, D_6, …, D_n; po skončení těchto $n-4$ telefonátů, bude D_1 vědět vše, co každá z těchto $n-4$ členek klubu zjistila. Nyní necháme výše uvedeným způsobem proběhnout čtyři hovory mezi dámami D_1, D_2, D_3 a D_4, po jejichž skončení bude každá z této čtveřice znát všechny novinky, které se během dne dověděla každá z n členek klubu. Nakonec požádáme dámu D_1, aby zatelefonovala každé z členek D_5, D_6, …, D_n, čímž dosáhneme toho, že po těchto závěrečných $n-4$ telefonátech bude každá z n členek vědět všechno.

Tímto způsobem jsme zjistili, že pro $n \geq 5$ počet telefonátů, které stačí k tomu, aby každá členka klubu znala všechny novinky, je roven $(n-4) + 4 + (n-4) = 2n-4$; je vidět, že tento výsledek platí i pro $n = 4$. Zůstává ovšem otázka, zda pro každé $n > 5$ je $2n-4 = t(n)$, tj. zda výraz $2n-4$ vskutku udává *nejmenší* počet potřebných telefonních hovorů. (V článku [1] se sice tvrdí, že tomu tak je, ale důkaz chybí.)

Druhá úloha

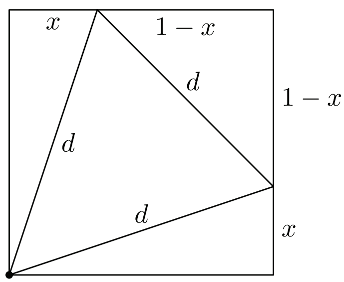
Článek [2] v Učiteli matematiky z roku 1995 má v podstatě jen informativní charakter a seznamuje čtenáře s výsledky řešení následujícího problému: *V jednotkovém čtverci určete n bodů tak, aby vzdálenost mezi dvěma nejbližšími byla co největší.*

Jde o zajímavý problém, a to i v případě, že se omezíme pouze na přirozená čísla menší nebo rovna deseti. Pro $n = 2, 4, 5, 9$ napovídá intuice, že řešení této úlohy by mohlo být znázorněno na obr. 1, v němž plné kroužky představují hledané body a vzdálenost nejbližších bodů je označena d.



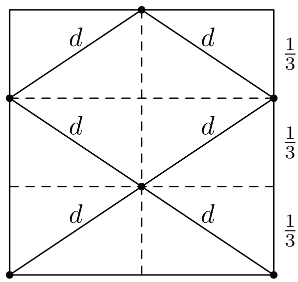
Obr. 1

Pro $n = 3$ je řešení na obr. 2 – hledané body leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, jehož jedním vrcholem je jeden z vrcholů daného čtverce a zbývající dva leží uvnitř protějších stran. Vzdálenost $d = \left(-1 + \sqrt{3}\right)\sqrt{2}$ nejbližších bodů, tj. strana tohoto rovnostranného trojúhelníku, se vypočítá ze dvou pravoúhlých trojúhelníků o stranách délek 1, d, x a $1 - x$, $1 - x$, d. Řešení dané úlohy pro $n = 6$ znázorňuje obr. 3, odkud se snadno určí $d = \sqrt{13}/6$.



$d = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

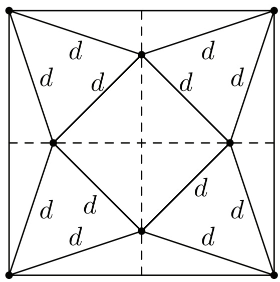
Obr. 2



$d = \frac{1}{6}\sqrt{13}$

Obr. 3

Na obr. 4 je pak řešení pro $n = 8$, hledané body leží ve vrcholech rovnostranných trojúhelníků vepsaných podle obr. 2 do každého ze čtyř shodných čtverců pokrývajících čtverec daný; výpočtem zjistíme, že hledaná vzdálenost d je v tomto případě rovna polovině vzdálenosti nejbližších bodů pro $n = 3$.



$d = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

Obr. 4

Pokud je mi známo, pro $n = 7$ a $n = 10$ není tento problém dosud vyřešen, takže studenti se mohou pokusit hledanou konfiguraci navrhnout sami. Dokázat, že má požadované vlastnosti, tj. že neexistuje jiná, v níž je vzdálenost d nejbližších bodů větší, bude asi velmi obtížné.

Závěr

Důkazy uvedených úloh nejsou jednoduché. Doufám, že některým z talentů, na něž je tato konference zaměřena, se otázky podaří zodpovědět. Budu rád, pokud mě budete o těchto důkazech informovat.

Literatura

[1] Calda, E.: Problém Klubu pro vzájemnou komunikaci a šíření zaručených zpráv. *Rozhledy matematicko-fyzikální* **73**, 3 (1996).

[2] Calda, E.: Jak rozesadit žáky při písemce. *Učitel matematiky* **3**, (16).

Talent na jazykové škole

Michaela Kaslová, Pedagogická fakulta UK, Praha [1]

Abstrakt. *Nadprůměrný žák druhého stupně na škole, odkud odchází relativně málo žáků na gymnázium, se liší od složení žáků jazykové školy, do které dělali žáci ve třetím ročníku přijímací zkoušku. Tito žáci vykazují nadprůměrnost vzhledem k výuce cizím jazykům a řada těchto dětí odchází po pátém a sedmém ročníku do gymnázií. Mají tito žáci nějaká specifika a jaká, pokud zůstanou v jazykové škole a vykazují nadprůměrnost?*

1. Základní škola s rozšířenou výukou jazyků

V tomto článku diskutovaná Jazyková základní škola je výjimečná v několika aspektech:

a) jsou do ní zapsány děti, které od třetího ročníku *vykazují alespoň mírně nadprůměrné jazykové schopnosti* (na konci druhého ročníku dělají vstupní zkoušky např. ze čtení s pochopením, mají minimální míru logického myšlení, schopnost reprodukovat co nejpřesněji zvuky apod.);

[1] e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

b) rodičům těchto dětí *záleží na jazykovém vzdělání jejich dětí,* někdy i na dobrém všeobecném vzdělání (což ovšem neznamená, že svým dětem poskytují zvláštní domácí podporu, dohled, častější jsou až příliš vysoké nároky na dítě ne vždy spojené s důsledností ve výchově, někdy je školní výuka doplněna domácím doučováním především jazyků);

c) je *vyšší hodinová dotace jazykové výchovy* (mateřský jazyk a cizí jazyky v poměru k hodinám matematiky), tj. postavení matematiky je zejména na druhém stupni odlišné od matematiky na běžných školách.

2. První stupeň jazykové školy

Na prvním stupni jsou žáci této školy dlouhodobě (více než 20 let) sledováni [1]. Většina nadprůměrných žáků byla/je členy Klubu přátel matematiky – dále jen KPM (kromě dalších členů, které matematika sice baví, ale k nadprůměru je nelze řadit). Výuka na prvním stupni je posílena o výuku cizího jazyka v jazykových třídách, ale jinak je výuka pojata všestranně a komplexně. Škola používá širokou organizačně didaktickou škálu, zapojuje se na prvním stupni do řady soutěží relativně vyrovnaně (sportovní, výtvarné, jazykové, přednesové; z matematických soutěží např. Matematická olympiáda, Matematický klokan, ze školních např. Logická olympiáda). Na konci prvního stupně se většina žáků nadprůměrných v matematice uchází v přijímacím řízení o přijetí na osmiletá gymnázia (jednak na gymnázia s prohloubenou jazykovou výukou, jednak na špičková gymnázia, jako např. Jana Keplera v Praze 6). Tito žáci zpravidla uspějí vzhledem ke své nadprůměrnosti v kombinaci se všestranností a ctižádostivostí (pokud je tam nenutí rodiče). Někteří z nich jsou dále dlouhodobě sledováni.

3. Druhý stupeň jazykové školy

Na druhém stupni zůstávají jednak žáci více či méně nadprůměrní převážně všeobecně, či ti, kteří podávají nadprůměrné výkony v oblasti jazykové, zpravidla ale méně ctižádostiví či soutěživí. Ostatní žáci odpovídají složením druhému stupni běžných základních škol. Minoritu mezi nadprůměrnými žáky tvoří žáci nadprůměrní v matematice, kteří se z nejrůznějších důvodů na nižší gymnázium nehlásili, nebo u přijímacích zkoušek neuspěli; například nižší výkon v českém jazyce, pro nechuť soutěžit nebo měnit školu a podobně. Dalším z odkrytých důvodů je to, že nadprůměrnost v matematice nebyla odhalena nebo nebyla zejména rodiči brána v úvahu (např. Martin – otec sám je matematik s vysokými nároky; Martina – celkově rodiči podceňována; David – rodiče tomu nechtěli věřit, což ho vrhalo do pasivity). Zájem těchto rodičů byl o to více směrován především na maximální výkon v jazykové přípravě, nebo na zvýšení aktivity vůbec. Druhý stupeň navazuje na první v aktivizujících formách včetně Matematické olympiády, Matematického klokana, zavádí Pikomat, Pythagoriádu, zavedl Malou maturitu z matematiky.

4. Role nadprůměrných žáků

Pokud na prvním stupni systematicky pozorujeme nadprůměrné žáky v matematice, pak lze v dlouhodobém horizontu registrovat pestrost osobností těchto žáků, kteří zastávali (každý relativně stabilně) jednu z níže uvedených rolí při řešení matematických problémů nejen v KPM, ale i při výuce.

Role nadprůměrného žáka při řešení úloh mohou být [1]:

A) **řešitel matematik-kolega** rád řeší, zejména plyne-li z toho, že bude moci diskutovat o řešení s dospělým jako s partnerem nebo se stejně inteligentním spolužákem; mezi žáky prvního stupně se objevují tací, kteří si hledají takového kamaráda mezi žáky vyšších ročníků (Jirka, 1993, v první třídě vyhledával žáky šestých tříd k diskusi; Vláďa, 1963, chodil za žáky třetích a čtvrtých ročníků) – tento jev na málotřídkách není tak evidentní; David a Marko z druhého stupně jsou typičtí svým uzavřením se do sebe, pokud nenaváží komunikaci s učitelem;

B) **sólista** nebo také **izolant/poustevník/vědec** v podstatě nepotřebuje spolužáky, ani učitele, pro roli je typické zaměření na zdroj zajímavých úloh k řešení; zpravidla zvažuje, zda je úloha hodna jeho pozornosti a pokud ano, pak ho hodnocení za řešení ani moc nezajímá, podobně ho nezajímá negativní hodnocení v případě, že „nezajímavou“ úlohu neřeší nebo ji „odbyde“; pokud nemá zajímavé úlohy, často se myšlenkami „toulá jinde“ nebo vymýšlí jiné aktivity netýkající se vyučovaného předmětu;

C) **herec** je žák vyžadující k řešení diváky, zpravidla již od začátku, rád řeší u tabule, případně řeší za všechny ve skupině; slabší výkony podává při samostatné práci v lavici; u této skupiny se také častěji vyskytují jedinci, kteří při řešení potřebují slyšet svůj hlas (při samostatné práci si relativně často šeptají, pokud to učitel toleruje);

D) **samaritán** je žák, který podává maximální výkon (co do přesnosti a úplnosti vyjadřování, systematičnosti a užívání alternace), pokud cítí smysl takové komunikace – například pomoci někomu, zkontrolovat výsledky i postup, poradit s řešením, pak také promýšlí řešení jinak, detailněji; do prezentace se nepouští, pokud k jeho vlastnímu řešení došlo vhledem, pokud ano, pak je jeho komunikace velmi stručná; ve vyučování je vzhledem k pokynům učitele submisívnější než ostatní typy;

E) **koordinátor** je žák, který rád promyslí rychle strukturu řešení a pak práci rozdělí, případně kontroluje, dokáže celkem dobře odhadnout, co kdo zvládne; většinou nerad zapisuje nebo jinak se graficky vyjadřuje, řešení v představě dokáže slovně načrtnout a nechat to dělat jiné; pokud pracuje sám, nerad dotahuje řešení do konce; miluje načít, načrtnout řešení a přejít k dalšímu; ve skupinové práci si zhruba polovina z nich z uvedeného důvodu hledá „asistenta“, který za ně ohlídá dotažení řešení, dodržení požadované formy prezentace; díky tomu unikají někdy detaily řešení, podmínky, metody;

F) **vzor/hráč, konkurent** cítí potřebu mít následovníky nebo soupeře, někteří z nich neřeší, pokud cítí silnou konkurenci, u které jsou si téměř jisti, že zvládnou cíl řešení dříve nebo lépe; vyžadují většinou ocenění ze všech stran (učitel, spolužáci, rodiče), u jiných z této skupiny se vyskytuje chuť jít do rizika jen za cenu toho, že budou první (na špičce), pak jde o vyloženě soutěživé typy, avšak těchto žáků je minimum; své výsledky mají rádi zvěčněny (v žákovské knížce, na nástěnce, na webu školy, ...);

G) **gurmán/estét** rád hodnotí úlohy, které řeší (většinou nahlas), a s nadšením řeší nestandardní úlohy, slovní úlohy zajímavé jak kontextem, tak matematickou podstatou; pro některé z nich navíc záleží i na tom, jak je úloha zadána (jazyk, obrázek, formátování, barvy, rozložení, velikost symboliky, ...), které nástroje může/nesmí použít (tabulka, vyškrtávání, konstrukce, kalkulačka, ...); ostřeji než ostatní hodnotí obtížnost úlohy vzhledem k míře obecnosti i k dalším parametrům; rád vymýšlí podobné úlohy, pokud je rád oceněn pak za originalitu; většinou preferuje práci s kvalitními „neškolními publikacemi“;

H) **smíšené/jiné** ...

V předmatematické výchově [2] v mateřské škole byly vymezeny tři skupiny dětí (a, b, c) – řešitelů situací. Tyto typy lze pozorovat i u starších dětí:

a) **aktér** – dítě, které má vnitřní potřebu se ihned zapojit do jakékoli nové situace, a to bez ohledu na to, zda si s případným problémem ví rady nebo ne; situaci prožívá a teprve s odstupem je schopné se k situaci vrátit a uvědomit si, co se dělo; aktérem může být dítě jak v případě, že bude mít výjimečnou roli sám jako jedinec a ostatní budou v roli pozorovatelů, nebo je vedle jedince další role jedinečná, ale odlišná; nebo bude aktérem v „opakované“ – hromadné – roli, kde situace se zúčastní více dětí a dělají více méně totéž samostatně, relativně izolovaně paralelně, kompetitivně či kooperativně; role aktérů mohou být hierarchizované;

b) **pozorovatel** – dítě, které potřebuje mít jasnou představu o tom, co a jak se bude dít, jakou může mít roli, jaké se nabízejí eventuality a čím aktivita bude/může být zakončena; u některých je důležité vidět, jaká je šance na úspěch, respektive za jakých podmínek; mezi těmito dětmi jsou takové, které na základě mluveného slova obtížně tvoří představy, potřebují ukázku a časový plán či pomoc v časové orientaci při sledu více dějů; u některých situací potřebují vše znát dopředu i s delším časovým předstihem; pozorovatel může být pouhým přihlížitelem, hry/zadané situace se v rámci řešení nezúčastní, ale může z jakéhosi odstupu zaujímat role posuzovatele, hodnotitele, soudce nebo poradce (pokud se na něho aktéři obrátí), případně komentátora průběhu/reportéra, styčného důstojníka mezi aktéry a učitelem, který však za činy aktérů nezodpovídá;

c) **adaptér** – smíšený typ, který dává přednost té které z rolí a), b) podle okolností, respektive vzhledem ke svým a právě potřebným schopnostem; pokud převažuje představa, že ví, co se bude dít a že to nějak zvládne, je vyšší tendence zaujímat roli aktéra, ale je schopné se jí většinou vzdát, jde-li o roli aktéra jednotlivce.

V hodinách školské matematiky můžeme rovněž pozorovat zaujímání jedné z rolí a), b), c). Pozorování nadprůměrných dětí v mateřské škole a později na prvním stupni v matematice naznačuje, že dítě vstupem do školy výrazně nemění svoji roli (kterou zaujímalo v mateřské škole). Vstupem do školy typ a) se někdy mění na c), podobně jako b) na c) a naopak z c) se ve škole jiné dítě přeřadí pak spíše k jedné ze skupin a) či b). Na tom se podílí především sociální zrání a míra obtíží v procesu socializace; u některých dětí změnu iniciuje pocit neúspěšnosti. Změna role nemusí být při přechodu do školního vzdělávání stabilní. Jsou však děti, u kterých ke změně v podstatě nedochází.

Nadprůměrný žák není jednoznačně zařaditelný do jedné skupiny. U nadprůměrných převažuje typ aktér nebo adaptér. Pokud je úloha (série úloh) pro nadprůměrného snadná, má tendenci v rámci role adaptéra zaujímat více roli pozorovatele-hodnotitele, nápovědy, jindy spontánně využívá této pozice k zobecňování.

I když roli pozorovatele můžeme chápat svým způsobem jako osobnostní rys (psychologická škola přednášená v Bruselu), z dlouhodobého pozorování nadprůměrných v hodinách matematiky plyne, že na dominanci té které role a), b), c) má výrazný vliv učitel svým stylem práce, výběrem úloh, tvorbou didaktických situací. Jinými slovy dominantně roli pozorovatele zaujímají jen někteří nadprůměrní žáci, a to výjimečně za specifických okolností, kdy převažuje v práci učitele frontální způsob práce, relativně jednotný, neindividualizovaný přístup k žákům. Pokud učitel individualizuje vyučovací proces, pak u nadprůměrných v matematice koncem prvního stupně dominuje role aktéra jednotlivce nad rolí aktéra kooperujícího v hromadné roli.

Odchodem některých nadprůměrných žáků z jazykové školy se situace mění. Jak plyne z kapitoly 2, zůstává na škole zúžená skupina nadprůměrných a současně s tím lze pozorovat u nadprůměrných i zúžení typu rolí, které při řešení obtížnějších problémů zastávají. Objevují se typy smíšené (K). Zůstává typ herec (C), velmi často (možná právě proto, že mu není z různých důvodů dávána často příležitost k předvádění se) není okolím řazen k nadprůměrným. Podobně, i když zřídka, se objevuje řešitel matematik-kolega (A), pro svoji relativní uzavřenost, zejména není-li soutěživý. Podobně zůstává typ estét (I), který má vnitřní potřebu specifických podmínek pro to, aby byl rozpoznán v kontextu zdůrazňovaného jazykového vzdělávání. Jeho vzdorování (neřešení některých typů úloh) je chápáno jako zaujímání opozice k autoritě – tedy projev prepuberty či puberty (např. Ondra, Marko) místo přesnější kombinace vyhraněného „úlohového vkusu“ s jistou pohodlností. Přechod z prvního stupně na druhý neznamená jen redukci počtu nadprůměrných žáků, ale i redukci typů nadprůměrných. Jakési ujednocení typu rolí snižuje pestrost diskuse k problémům, zužuje škálu postupů řešení, na druhé straně zjednodušuje učiteli volbu strategií.

5. Motivace žáka jazykové školy na druhém stupni

V ideálním případě je realizován přechod od sekundární k primární motivaci v matematice již na prvním stupni. Na prvním stupni je motivace nadprůměrného žáka výrazně snazší. Kromě adaptace na typ nadprůměrného žáka (vyjít částečně vstříc typu žáka) stačí na počátku školní docházky volit jiná témata než v učebnici, posílit akcent na logické procesy, užít víceciferná čísla, než s kterými se právě pracuje, později spojit probírané s historií, zavést i více procesů, dát důraz na ekonomičtější postupy, požadovat takovou metodu či způsob řešení, který ostatní obtížně zvládají (např. zpaměti), v „partnerském vztahu“ vyžadovat přesnější či obecnější způsob verbální komunikace, nově hodnotit.

U soutěživých typů může být, vedle radosti ze samotného procesu řešení, motivačním prvkem rychlost (zvládnout řešení dříve než ostatní), nebo kvantita (vyřešit v daném časovém limitu více úloh než ostatní). Dlouhodobé podporování zmíněné motivace na prvním stupni (učitel, rodiče) se v pozorování výrazně nadprůměrných žáků ukazuje jako kontraproduktivní především ze tří důvodů: a) i soutěživé typy dříve či později (na druhém stupni) motivace rychlostí a kvantitou omrzí; b) omezuje u nadprůměrných rozvoj strategií učení; c) deformuje jejich sebehodnocení, protože rychlost či kvantita řešeného se jim jeví jako nejdůležitější pro hodnocení jeho výkonu, což může mít za následek demotivaci, i deformovaný pohled na kulturu řešení a myšlení, na matematiku jako obor. Akcentování kvantity a rychlosti na prvním stupni od počátku docházky omezuje kladení otázky „Proč?“ a jistým způsobem může zpohodlnět myšlení i ovlivňovat postoje k obtížnějším úlohám (zejména ve spojení s nastupující prepubertou). Pokud jsme zkoumali motivy vysoce nadprůměrných žáků prvního stupně, kteří opustili KPM, zjistili jsme, že šlo o žáky, kteří ve třídě hráli prim právě díky těmto fenoménům řešení.

Akcentace kvality řešení, náročnosti řešené úlohy na myšlenkové procesy jim (ve srovnání se snadným dosažením úspěchu ve třídě) náhle dělá problémy; na rozdíl od předchozích let je najednou nutnost se soustředit, být samostatnější – respektive zodpovědný za celé řešení s minimální odstupňovanou dopomocí. Pokud se ve třídě nepreferovala kvalita před rychlostí či kvantitou, pak v KPM v odpoledních hodinách to představovalo hodně námahy bez odrazu na školní ohodnocení (například Honza, Eliška, Natálie, Dan), což se promítlo do poklesu motivační hladiny.

Pokud žák vstupující na druhý stupeň byl navyklý na řešení vhledem, či na rychlé uplatnění nacvičených algoritmů (případně užitých modifikovaně), pak na druhém stupni potřeba změnit postoje k řešení a sebehodnocení může vést (případně v kombinaci s nástupem pubertální pohodlnosti) i ke snížení snahy uplatnit své schopnosti v matematice.

Žáci zvyklí na zajímavé a náročnější úlohy vstupují na druhý stupeň dobře motivováni pro matematiku. K problémům s motivací dochází u nové látky, která má nyní jiný charakter a vyžaduje jiné způsoby práce. Na rozdíl od prvního stupně, kde nemuseli vynakládat téměř žádnou energii na učení, vyžaduje druhý stupeň od žáka zvládnutí technik, pro jejichž zautomatizování je nutný delší „trénink“ než doposud – propojovat nové s již zvládnutým. Nezvládnutí nových technik, stereotypie v učení brání v rozvoji žáka:

α) Žák sklouzává k různým strategiím, jak se nácviku nových technik vyhnout, omezit je, pokud necítí smysluplnost opakované aktivity.

Situace 1, Tomáš (září 2009), opakování za sedmý ročník

U (učitelka): Proč hledáš kalkulačku?

T: Nepotřebuji se to učit, stačí, abych to zadal do počítače, jsou na to programy.

U: Jak poznáš, že to tvá kalkulačka zvládne?

T: Porovnám výsledek s tím na tabuli, nebo ve výsledkách.

U: Co když se bude lišit? Jak poznáš, kde byla chyba?

T: K čemu mi to bude?

U: Naučíš se pracovat s chybou. Dostáváš tak cit pro řešení, a pro práci se zlomky.

T: Kde to budu potřebovat?

U: Později například u funkcí, v algebře, ..., v lékařství, ve stavebnictví, na ekonomii, ve statistice, ...

T: Tak jo.

Tomáš tráví hodně času na počítači, je v řešení velmi pohodlný, nerad přijímá nové, pokud něco vymyslí sám, rád to zařazuje do rejstříku řešení. Je pro něho důležité, aby věděl, k čemu mu vynaložená námaha je. Štve ho, pokud pronikl do podstaty, ale pak to pro vynechání domácí přípravy neumí uplatnit, zejména v zajímavých úlohách. Nácvik nových technik považuje za metodu určenou pro slabé žáky. Jeho postoj je i na čtyřletém gymnáziu obdobný.

Situace 2, Sára (2007), sedmý ročník, krácení zlomků

U: Proč počítáš s tak velkými čísly, to stačilo vykrátit, ...

S: Krácení je pro ty, co nemaj kalkulačku nebo to nedovedou spočítat jako já (zakrývá to, že neumí krátit, respektive nerozumí plně výrazu krátit, její pozornost v hodinách je návykově z prvního stupně průměrná až slabší).

U: Jak převedeš zlomek do základního tvaru?

S: Budu to zkoušet dělit?

U: Budeš hledat pro čtyřciferná čísla největšího společného dělitele?

S váhá: To se musí?

U: Proč?

S: To už jsem zapomněla.

U: Šlo by to jinak?

S: Zkoušela bych to.

U: Netrvalo by to dlouho?

S: No právě, a to mě nebaví.

Situaci změnilo zadání zlomkového algebrogramu

$$\frac{A}{B} + \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

Pro Sáru byla navíc práce s vícecifernými čísly doposud znakem nadprůměrnosti, což mimo jiné ovlivňovalo její postoj ke zvládnutí krácení zlomků. Dle dalšího šetření si v předchozím roce vzhledem k typu úloh v učebnici pro 6. ročník neosvojila bezpečně techniku vyhledávání nejmenšího společného násobku, ani největšího společného dělitele, protože u dvojciferných čísel to celkem spolehlivě odhadovala, opírala se o obrazové představy a nechtělo se po ní popisování postupu, protože patří mezi nadprůměrné. Ani po přechodu na šestileté gymnázium se její postoj nezměnil.

β) Žák se uchyluje k částečným řešením (blízce role koordinátora), kde nemusí plně uplatnit nacvičované nové – např. navrhne strategii.

Situace 3, Alex (2010)

A: Nejdřív to vynásobíme, pak vydělíme a přičteme polovinu (z toho, co známe).

U: Tak to udělej, už se těším, jak to ocením. (Následuje náznak výpočtu a zcela nesmyslný výsledek.)

U: Přepočítej si to, někde ses spletl.

A: Ale bylo to dobře (návrh postupu)*!?*

U: Nápad byl dobrý, ale musíš ho taky realizovat.

A: Ach jo. Asi mám blbě to dělení, že jo?

U: Proč myslíš?

A: Mě to násobení zlomků nejde. Mám přehodit (myslí převrátit) *ten první nebo druhý?*

Jednou ze strategií, které jsou u něho účinné, je zavedení bodování úloh, kde každému jevu/kroku je přiřazen jeden bod, a Alex předem ví, jakou má úloha „cenu". Od třetího ročníku nebyla diferencována volba úloh. Alex u většiny úloh začne dobře, pro úlohu se nadchne, pokud pronikne do problému, ale není schopen/motivován (?) dotáhnout řešení do konce (desetinná čárka, jednotky, ..., neschopnost postup jakkoli popsat, komunikuje náznakem, nedostatečnost komunikace kompenzuje výkřiky, že řešení je snadné). Přetrvává u něho pojetí nadprůměrnosti:

rychle ve spojení s nápadem. U ostatních řešitelů pak není vždy s to posoudit, zda mají výsledek dobře, pokud nepopisují postup podobný jeho nápadu. Středem zájmu je vždy pouze jeho postup, podobně jako jeho role ve skupině, což souvisí s jeho osobnostním profilem.

Situace 4, Marko (2009), osmý ročník, lomené výrazy

M: To se asi rozloží podle vzorce, budeme krátit, dokud to půjde, pak taky podmínky.

U: Skvěle! Tak pojď k tabuli. Už se těším.

M: No, já ty vzorce neumím.

U: Můžeš si nějak pomoct?

M: Musel bych ten rozklad zkoušet, to se mi nechce, to chce čas… radši mi jedničku nedávejte.

Účinnou strategií je u něho zadání složité úlohy již na začátku seznamování s novou látkou, která mu pak umožní/usnadní řešení úlohy, která u něho vzbudila zájem. Řešení ho musí bavit, silným motivačním prvkem je pro něho prvek novosti.

γ) Žák se orientuje na jiný předmět (např. Sam, Honza, Leo, Magda, Tim, Tereza, …). Pokud však najdeme téma, které ho plně zaujme, je „ochoten se k matematice vrátit“ i za cenu dohánění probrané látky.

Situace 5, Sam (2009), IQ 135, devátý ročník, téma funkce

Kvůli funkcím byl ochoten doučit se látku části sedmého a osmého ročníku, ze známky 3 to dotáhl na 1.

Situace 6, Leo (2008), nadprůměrný

Díky propojení logiky, filosofie a sociologie s matematikou byl ochoten doučit se značnou část učiva a dotáhnout hodnocení na 2, z čehož byl sám překvapen. Po proniknutí do základů algebry začal o algebře hovořit jako o „záznamu myšlenek, nejen čísel“.

Situace 7, Terezka (2009)

Začala se nadprůměrně věnovat zeměpisu a během šestého ročníku opustila matematiku, ve které byla doposud jedna z nejúspěšnějších. V momentě, kdy zjistila, že potřebuje určitý matematický aparát pro hlubší proniknutí do určitých okruhů, vyhledala odbornou radu. Využití konzultace k zadanému okruhu bylo spouštěcím momentem k návratu k matematice.

Poznámka: U všech jmenovaných žáků bylo poradnou diagnostikováno IQ nad 125, v soutěžích jako Matematický klokan, MO, Pythagoriáda, testy CERME, Logická olympiáda, Geometrická olympiáda vykazovali výborné matematické nápady, avšak s nedostatky blízkými výše popsaným. Nepodařilo se však všechny k matematice přitáhnout zpět.

5.1. Problémy nadprůměrných spjaté s prací učitele

Mezi prvním a druhým stupněm můžeme na mnoha školách pozorovat skok v náročnosti na výkon žáka, pokud na prvním stupni tuto náročnost nestupňovali během posledních dvou ročníků. Na druhém stupni u jednoho nadprůměrného žáka můžeme pozorovat radost z náročnostního zdvihu, u jiného naopak nezvyk vynakládat vyšší úsilí než na prvním stupni, což působí demotivujícím způsobem. To, jak nadprůměrného žáka udržet na jisté výkonnostní hladině, souvisí nejen s jeho motivací, ale i s učitelskými strategiemi. Učebnice nejsou materiálem, který by učiteli v práci pomáhal. Webové stránky jsou využitelné, pokud má učitel časové, technické a ekonomické podmínky úlohy hodnotit, vybírat, stahovat a množit. Problémy: Je málo škol, kde může učitel nechat žáka přímo ve třídě smysluplně pracovat na internetu tak, aby to nerušilo ostatní; chybí učebnice pro nadprůměrné žáky, která by mimo jiné navazovala na učivo tak, aby ukazovala smysluplnost tréninku určitých technik.

Na druhém stupni jazykových škol narůstá počet hodin, ve kterých se vyučuje jazyk (dva cizí jazyky a jazyk mateřský), pro některé žáky ještě třetí jazyk v čase volna. Tím se mění poměr mezi metodami učení, učebními styly v neprospěch matematiky. U jazyků jde často o pamětné učení (slovně akustická paměť pro slova, obraty, fráze, o fonetická a gramatická pravidla, která se tréninkem aplikují, až se jejich užití zautomatizuje). Po probrání jednoho tematického okruhu se zpravidla k tématu vracejí jen v případě avizovaného opakování. Na rozdíl od toho školní matematika druhého stupně představuje strukturovaný celek, který stále potřebujeme a který neustále obohacujeme zásahy do strukturace celku, kde dochází propojováním a porovnáváním k přechodu do vyšších úrovní. S nároky na vyšší míru zobecnění stoupají i nároky na kvalitu argumentace, dokazování a ověřování. Používání třídění, analogie, komparativní metody, systemizace a dalších však není dán takový prostor, aby si je žák uvědomoval a mohl s nimi vědomě operovat; je často zaskočen, že potřebuje v podstatě stále to, co se v předchozích letech naučil, což v řadě dalších předmětů pro dosažení úspěchu nepotřebuje (zeměpis, dějepis, . . . zapomene-li na kraje Vysočina, může být i tak relativně úspěšný, protože zvládl kraj Českobudějovický; může být úspěšný v angličtině, i když nezvládl téma „u lékaře“, ale zvládá základy gramatiky).

Neztratit nadprůměrného žáka druhého stupně zejména v kontextu, kde je poměr jazykových předmětů k matematice tak nevyvážený (13 : 4), je velmi náročné a je téměř nemožné, pokud se s žáky otevřeně o odlišnosti technik učení nemluví.

Poznámka: Přírodopis, fyzika a chemie jsou stavěny především na pokusech, na zpracování konkrétního, ostatní informace mohou ukládat bez větších problémů do mechanické paměti, aniž by je to srazilo do podprůměru.

Žák druhého stupně často trpí únavou z prudkého růstu, je roztěkaný, hůře se soustřeďuje pod vlivem hormonálních změn, s ohledem na změny sociálních vztahů a postojů ve třídě je tendence „nebýt nejlepší“, u řady z nich se snižuje chuť mluvit před ostatními (což ovšem neznamená, že nevyhledají konzultaci individuálně mimo třídu). Přistupuje i nechuť trénovat některé techniky, byť okořeněné adaptací na schopnosti žáka. Bezproblémově zvládnuté matematické řemeslo (nemuset myslet například na podmínky u lomených výrazů a zabývat se jimi automaticky), umožňuje žákovi u těžších úloh pracovat tvořivě a energeticky úsporněji, dosáhnout tak radosti z objevení, z vyřešení. Představa, často vytvořená okolím nebo na prvním stupni, že tvorba je dar nevyžadující námahu (což je samozřejmě omyl), že tvořit představuje námahu a určité znalosti, vede k omrzelosti, že náhle nelze něco vytvořit, vymyslet hned. Zvyšuje se míra netrpělivosti v procesu řešení. Matematické osvojování technik směřující k prohloubenému pochopení, k zobecnění, k ekonomizaci procedur, … se nemůže odehrávat stejným způsobem, jako se žáci učí jazyku, je třeba hledat nové technologie učení se. V takovém prostředí je náročnější žáka motivovat.

Spagnolo (na přednášce v Londýně v dubnu 2010) v souvislosti s informacemi o matematickém vzdělávání v Číně zmínil strategii při práci s pubertálními žáky (zjednodušeně řečeno): *nutnost posilování koncentrace a trpělivosti, posilování vědomí, že pro dosažení určité úrovně,* která je žádoucí, je nutné *vynaložit úsilí, a to opakovaně,* tedy posilovat volní vlastnosti. Tyto strategie je třeba nejprve rozvíjet vně matematiky, aby mohl žák v matematice postoupit dál.

Pro nadprůměrného žáka druhého stupně je podmínka *uplatnění tvořivosti* jedním ze silných motivačních faktorů. Sarrazy (ve vystoupení v Plzni 31. 3. 2011) jasně vymezil způsob výuky matematice: „…je nutné vyvážit objevování, experimentování a trénink technik …“ Tvořivost v matematice přirovnal k tvořivosti v hokeji: „Hráč může být na ledu tvořivý, zvládá-li potřebné techniky a pravidla, v rámci kterých se hra smí odehrávat. Podobné je to v matematice.“ Nadprůměrný žák má z prvního stupně převažující zkušenost, že se tréninku technik stačí věnovat minimálně. Příčina je i v tom, že pokud žák řešil úlohy na prvním stupni zpaměti (byl mu často odpouštěn grafický záznam, popis postupu), nemusel se při nácviku určitých technik tolik podřizovat. Tento postoj a některé potřebné techniky z prvního stupně mu náhle chybí. Vyšší procento takto reagujících žáků zaujímají chlapci, většina nadprůměrných dívek se z nejrůznějších důvodů snadněji adaptuje (domácí příprava, procvičování technik, ...). To ovšem neznamená, že při ztížení podmínek se vůbec neuchylují ke strategiím „úniku“ nebo „omezení tréninku“. Z uvedených důvodů se v některých třídách vyskytuje i u nadprůměrných snížení známky z matematiky a relativní vyrovnání s průměrnými, ale motivovanými a pracovitými žáky, kteří někdy svoji systematickou domácí přípravu (včetně doučovacích kurzů) tají.

Pro učitele není v takovém případě snadné najít rovnováhu mezi oběma cíli: stimulací tvořivosti a rozvojem potřebných technik. Jsou učitelé, kteří jeden z cílů značně redukují, zpravidla tvořivost spojenou s objevováním, což sice vyhovuje průměru a slabší části třídy a do jisté míry i nadprůměrnému pohodlnému žákovi, ale aktivní nadprůměrní, zejména typy estét, gurmán a vědec, se cítí demotivováni.

5.2. Žák na jazykové škole

V jazykové škole je tvořivost stimulována v jazykových předmětech systematicky, ale tato tvořivost (až na respektování gramatiky) není tolik podmiňována specifickými technikami, zejména když k opravě písemné domácí práce využívají PC. V rámci ústní komunikace i v písemných slohových pracích či projektech se velmi často hodnotí kladně právě rozvinutí myšlenek, používání atributů, emotivita – tedy v komunikaci se (s výjimkou gramatických a fonetických cvičení) sledují jiné jevy než v komunikaci v matematice.

V jazykových hodinách se oceňuje originální vyjadřování vlastních myšlenek. Současný žák druhého stupně, na rozdíl od filmu *Škola základ života,* si nevytváří tak specifický jazyk, ale jeho mluvená komunikace redukuje slova na minimum, užívá nedokončených vět, systém „laskavý posluchač si domyslí sám“, „vždyť je to jasné“, nebo „v tom je ten fór“ – pokud jde o nejednoznačnost informace. Jazyk matematiky ale musí mít jinou charakteristiku. Uvedené jevy ztěžují nejen výuku matematice, ale i rozvoj nadprůměrného žáka.

Nadprůměrný žák na druhém stupni je vybíravější v kontextových motivacích. Na jazykové škole je navíc náročnější na jazykovou podobu zadání. Je citlivější na jazyk, na volbu slov, na zadání slovní úlohy jako slohový útvar, na reálnost zadání slovní úlohy, ale nepohrdne fantasy. Nemá tolik rád úlohy, jejichž zadání vyžaduje diskusi, doplňování podmínek, pokud to nesouvisí s tématy finanční matematika, pravděpodobnost, funkce v běžném životě – netriviální úlohy apod. Je také často výrazněji rozhořčen, pokud mu něco v textu zadání unikne (plyne z analýzy řešení Matematického Klokana 2008, 2009, 2010, 2011), než žáci z nejazykových škol.

V sebehodnocení nadprůměrného žáka je necitlivost či nižší citlivost na jazyk (vliv rodiny nebo zaměření školy) chápána jako něco nežádoucího, jistým způsobem je u některých žáků vnímána jako větší provinění než samotné nevyřešení úlohy.

Nadprůměrný žák jazykové školy má specifický vztah k písmenům a role písmen v různých kontextech je něco, co ho upoutá, co rád řeší, ale musí být k tomu vyzván. Dokonce někteří pro řešení problémů dávají přednost užití písmen před číslicemi.

Situace 8, Prokop (2011)

Prokop měl hledat magické čtverce a polomagické (rovnají se součty ve sloupcích, řádcích, nikoli na úhlopříčkách) čtverce pro čísla do 100.

P: S číslama je to na dlouho, můžu tam dát písmena?... najdu všechny (řešení). Asi ne jen jedno číslo! ... No, asi pak je jedno, jestli tam je zrovna a, mohlo tam bejt m nebo t...! To první stačí votočit, tak to stačí. Třetí jen prohodí sloupečky. Poslední (čtvrtý) nejde dát číslo, který mě napadne. Možná sudý-lichý, to musím promyslet. Ještě jinak, mám další... je to nějak symetrický... na kříž to nejde... $b + d$ *je násobek* a*?,* $e + c$ *taky? To je dobrý, to se mi líbí. Ty jsou pro 5 (písmen). Pro čtyři to nejde?... To zkusím. Souvisí to s devíti?*

U: Proč devíti?

P: Devět (polí) tady... (už řeší jen v představě) *Jo, čtyři jdou dvě na kříž, jeden uprostřed, dvě proti sobě v rozích. Vlastně ne, to je víc řešení!*

U: Jak to?

P: No, jsou to písmena a ne čísla.

U: Rozumím dobře, že podle tebe každé zapsané řešení představuje *několik řešení číselných?*

P kýve radostně hlavou: NO! Teď těch šest… Ne, co devět (různých čísel/písmen)? A co záporný, to by bylo! Nechcete taky desetinný?

U: Proč?

P: To nechci. Ale záporný zkusím.

U: Pak musíš odlišit čísla opačná.

P: No – (a, −a).

U: Proč nepracuješ?

P: Nešla by tam básnička? (Myslí současně na čísla a na text.)

a	m	b
b	a	m
m	b	a

a	a	b
a	b	a
b	a	a

a	b	a
b	a	a
a	a	b

a	b	c
d	e	b
d	d	a

b	c	b
a	a	a
d	e	d

Zvýšená kritičnost u žáků daného věku mění pohled na výběrové úlohy pro nadané. Nezajímavý námět, námět s generačním posunem nebo „umělé úlohy“ jsou prvky demotivující žáka v řešení úloh v Matematické olympiádě a podobných soutěžích. Z Matematické Rallye 50 % nadprůměrných odmítlo řešit „umělé úlohy“ (o dortu krájeném na sedmnáctiny, o fleku na utěrce na nádobí, o počtu kroků na schodišti, …) a dokonce o nesmyslnosti úlohy v některých případech přesvědčovali ostatní. Tři z nich navrhovali slohovou úpravu úlohy tak, aby byla blíž realitě.

Zajímavé úlohy jsou pro některé žáky v důsledku omezení schopnosti použít nové techniky nebo požadované způsoby komunikace neřešitelné či jen obtížně řešitelné. Řešit zajímavou nestandardní úlohu, když ostatní řeší něco jiného, vyžaduje i určitou sebedůvěru. Tvořivost v matematice [5] je podmíněna tím, že autor-žák je dostatečně odvážný a prezentuje svůj „původní“ návrh před ostatními, současně je tvořivost (aby byla tvořivostí) závislá na reakci okolí na novinku, na ocenění původnosti. Uznání již není jen potřebou osobní vzhledem k typu nadprůměrného žáka, ale už je i nutností pro řešení výběrových nadstandardních úloh. Tvorba úloh nebo tvořivost uplatněná v procesu řešení je na jedné straně vysoce ceněna, ale na druhé straně v oblasti sociální v období puberty ne zcela jednoduchá.

Situace 9, Honza, osmý ročník

H šeptá: Co děláš, v…?

Ondra: Tvořím.

H: Jen jestli nešplháš!

O: Neruš.

H: Sem se lek, že něco řešíš.

Komplexně pojaté úlohy projektového nebo poloprojektového typu nebo referáty (například: Velká čísla v cizích jazycích, Čísla a jejich zápis v historii, Vyjádření počtu jinak než základní číslovkou, Golf a matematika, Pravděpodobnost výhry, Měření v historii a dnes, Grafy funkcí v lékařství, Grafikony a funkce, Užití písmen v matematice, Geometrie v architektuře, Symetrie v zahradní architektuře apod.) sice žáky motivují, ale ne všichni si troufají je prezentovat před celou třídou.

Situace 10, Tereza, sedmý ročník

Tereza chce prezentovat svůj projekt Historie – výtvarné umění a tělesné proporce. Domlouvá se s Petrem.

P: Ty už to chceš říkat?

T: No a?

P: Já to mám a nechlubím se s tím.

T: Už jsem myslela, že ses na to vyflák. Nech mi bejt, jo.

Situace 11, Honza, osmý ročník

H: Nemohl bych místo referátu řešit úlohy, třeba algebru, nebo algebrogramy?

U: To myslíš, že bych ti je zadala, nebo bys je vymýšlel.

H: Možná i vymýšlel.

U: Tak dobře, ale tak, že některé budou mít jedno řešení, jiné víc a zařaď i takovou úlohu, která řešení nemá. Pokud někde budeš hledat inspiraci, napiš, odkud jsi čerpal.

Vašek: Můžu taky?

U: Tobě zadám nějaký nový problém, musíš najít vlastní řešení a říct mi, jak jsi uvažoval.

Zjevně je úkol motivující, avšak přes pěkné vztahy ve třídách jsou zde jisté obavy z prezentace, která u některých omezuje chuť úkol řešit. Nejde jen o obavu z prezentace před ostatními, ale i o obavy z kritiky obsahu, jazyku, zajímavosti prezentace informací a způsobu přednesu (někdy i obrazové doprovodné prezentace), matematika je v obavách z kritiky v pozadí. Takové parametry jsou v jazykové škole nastaveny v jazykových hodinách (často zařazované projekty a referáty). V matematice nejde o volné téma k procvičení jazyka, ale je zde dán nesnadný obsah a náročnost na úplnost informací a přesnost vyjadřování. Ke zpracování témat je potřeba pracovat s různými prameny, což je nové. Jistým kompromisem pro prezentaci v jazykové škole je tedy práce ve skupinách. Referáty jsou prezentovány současně na více místech a žáci si podle zájmu volí skupinu, jejíž téma je zajímá. Velmi účinné je zadání tvorby úloh v rámci zadaných podmínek pro nižší ročníky – zpravidla zajímavé nebo soutěžní úlohy pro mladší.

Za zamyšlení stojí i analýza ústní komunikace: užívané vazby, „matematická“ slovní zásoba a její strukturace. Sledování slovní zásoby v souvislosti s mentálními mapami na prvním stupni jazykové školy vykazuje značnou pestrost, na druhém stupni se ve vyšším počtu vyskytuje sgrupování na jiných principech, než je třídění dle témat, a někdy nečekaně chybí hierarchizace. Výpis „matematické slovní zásoby“ v limitovaném čase vykazuje i jazyková kriteria, např. shodné počáteční písmeno (*poloměr, přímka, počítat, porovnat, . . .*) nebo shoda v poslední slabice (*menšenec, sčítanec, čtverec, . . . , čitatel, menšitel, dělitel, . . .*).

6. Zvláštní RVP, nebo individuální plány v rámci ŠVP?

Z dlouhodobých diskusí k pojetí práce s nadprůměrným žákem a z porovnání zkušeností mých evropských kolegů plyne, že práce s nadprůměrným žákem na prvním stupni ZŠ by měla být všestranná, v matematice by neměla přeskakovat ve velkých celcích, ale více směřovat do hloubky, měla by umožňovat zobecnění, rozvíjet intenzivněji alternativní a vztahové myšlení, spojovat matematiku s její historií. Ukazuje se vhodné zařadit, dříve než u průměrných, v souladu *s principem užití včasného kontrastu* nad plán RVP obor celých čísel a v něm především zahájit operace sčítání a odčítání (čtvrtý ročník), dříve rozvinout práci se zlomky a zavést práci s písmeny jako přípravu na algebru. Naprostou nutností jsou nestandardní slovní úlohy, kombinatorické úlohy, úlohy založené na pravidelnostech, závislostech, setkání s nekonečnem, složitější úlohy, ve kterých hraje roli orientace v prostoru a v čase, práce s podmínkou nereálnou. U metod práce cíleně používat ve vhodných situacích metodu vylučovací, tabulkové metody, lokání důkaz sporem, posílení funkce modelu, zpřesnění řeči.

Na druhém stupni jazykových škol lze zahájit výuku algebry dříve než v osmém ročníku, u probírané látky lze zobecněnou zkušenost zapisovat algebraicky, posílit v rámci probrané látky tvorbu úloh s respektováním specifických podmínek (např. *Sestav úlohu tak, aby v ní byly všechny čtyři operace, nejmenší/nevětší číslo bylo . . . a výsledek úlohy vyšel záporný, ale větší než . . .*), s vyššími nároky na počet řešení, použité jednotky, s nároky na metodu řešení, zařadit úlohy parametrické. V šestém ročníku jsou relativně oblíbená témata: kriteria dělitelnosti a výpočty v jiných pozičních číselných soustavách. Motivačním zpestřením je zařazování vybraných stolních her s úkoly na objevení optimálních strategií, na hledání souvislostí hry s matematikou, tvorba vlastních strategických her, vyhledávání matematiky v informacích podávaných v médiích – interpretace informací (např. v souvislosti s reklamou, finanční matematikou a podobně). Zde se ukazuje reálné dřívější nasazení prvků statistiky a pravděpodobnosti, práce s náročnějšími funkcemi, než jsou v RVP. Pro jazykově orientované žáky je zajímavé téma šifrování, které posiluje vědomé užití substituce. V rámci projektů či podprojektů je zajímavé propojování matematiky s přípravou na různá povolání, řemesla, volnočasové aktivity včetně sportů (golf a matematika a podobně). Řadu nadprůměrných žáků zajímá spojení matematiky s prací politiků, ať jde o politickou reklamu (prezentace preferencí, argumentace pro projekty apod.) nebo rozpočtování (Honza (2011), sedmý ročník: *Jak je možné, že se v rozpočtu sněmovny zapomnělo na daně a jak se to počítá?* – našel vzor pro ostatní). Celkově je vhodné posílit práci s kvantifikovanými výroky a s vědomým zpracováním negace nejen jednoduchých výroků. Referáty o práci s výroky nebo s negací žáci často chápou jako jazykové cvičení vně matematiky. Propojení literatury/filmu s matematikou jim otvírá nové tematické okruhy (například: *Vyhledej, kde výpočet pomohl k vyluštění záhady/zachránil hrdinu.*).

Byla jsem několikrát vyzvána k přípravě individuálního studijního plánu zřejmě v domnění, že lze sestavit obecný plán pro libovolného nadprůměrného žáka. Jak bylo uvedeno výše, je zřejmé, že mezi nadprůměrnými žáky na druhém stupni jsou značné rozdíly, které závisejí na osobnostních rysech, na předchozím způsobu vyučování, na přáních rodičů a na jejich filosofii výuky, na deficitech v některých oblastech (nejen v matematice, ale i v nižším rozvinutí některých schopností, v zúžení zkušenostního spektra), na specifických zkušenostech vzniklých ve volnočasových aktivitách, na složení třídy a na jedincových motivačních faktorech. Jak se ukázalo, tak i typ školy a proporce mezi hodinovými dotacemi mohou mít vliv na rozvoj jeho potenciálu i na případné sestavení individuálního plánu. Pohlížejme tedy na nadprůměrné jako na žáky vyžadující zvláštní péči. V sestavování plánů je třeba dalšího dlouhodobého zkoumání. Individuální plán těchto žáků by měl být proto flexibilnější, než je tomu u žáků se specifickými potřebami.

Literatura

[1] Kaslová, M.: Komunikace a talent. In: Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2003.* Pedagogické centrum, Hradec Králové, 2003, s. 49–58.

[2] Kaslová, M.: Vývoj písemné komunikace v matematice na 1. stupni ZŠ aneb cesta žáka P k číslu a. In: Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2005.* Pedagogická fakulta UK, Praha, 2005, s. 71–82.

[3] Kaslová, M.: Rozdíly ve strategiích řešení u devítiletých žáků. In: Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2007.* Pedagogická fakulta UK, Praha, 2007, s. 138–146.

[4] Kaslová, M.: *Předmatematické činnosti.* Raabe, Praha, 2010.

[5] Sarrazy, B.: Tvorba v matematice: nezbytná iluze? *Přednáška na vědecké konferenci pořádané ZČU a JČMF.* Plzeň, 2011.

[6] Spagnolo, F.: Matematické modely a jejich úskalí. *Přednáška na konferenci CIEAEM.* Londýn, 2010.

O talent je třeba se starat už na ZŠ

Klára Krejčíčková [1], Aneta Mirová [2], MFF UK Praha

ABSTRAKT. *Článek pojednává o talentovaných dětech, jak se nejčastěji chovají, jaké mají problémy, výhody, jak se s nimi vypořádat. Dále je představen matematický korespondenční seminář Pikomat MFF UK, který zaštiťuje, jak sám název napovídá, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Dále se zde pojednává o jednodenní matematické soutěži MaSo pro žáky základních škol, která spadá pod zmíněný seminář Pikomat MFF UK.*

Jak se pozná talentované dítě

Nejdřív jsme se zamyslely nad otázkou, jak takové talentované děti poznat v kolektivu, čím se vyznačují nebo čím zaujmou. Ze zkušeností z táborů a soustředění Pikomatu MFF UK bychom chování těchto dětí rozdělily na dva typy. Buď jsou to děti hyperaktivní, které narušují výuku, většinou z důvodu, že se nudí, rády na sebe upoutávají pozornost a všem mají potřebu ukazovat, že jsou lepší. To jsou děti, které ví, že vynikají. Ale pozor, ne každé hyperaktivní dítě musí být nutně talentované.

[1] e-mail:klara.krejcickova@seznam.cz
[2] e-mail:anetica@seznam.cz

Nebo jsou to naopak děti přesného opaku. Děti, o kterých ani nevíte, že je ve třído máte, jsou velmi tiché. Jsou to děti skromné a hodné. Jsou to ty děti vzadu ve třídě, které si potichu čtou nějakou knížku. Zřejmě ne každé dítě, které čte pod lavicí, musí být darebák; dost často je to proto, že dané látce rozumí a nudí se a má potřebu se vzdělávat dál. Tyto děti velmi rády pomohou svým spolužákům, poradí, napíšou úkol. . .

Bohužel přesný návod, jak poznat talentované děti, neexistuje.

Problémy talentovaných dětí

Může se zdát, že talentované děti to mají v životě jednoduché, všechno umí, všechno znají. Ale právě naopak. V naší společnosti si stále ještě zvykáme, že je někdo „jiný“. Chytré děti mají problém se začleněním do kolektivu, protože buď nemají potřebu a sedí s knížkou v rohu, nebo zase jsou to ty vůdcovské typy, které ostatní děti nemají rády.

Dost často se stává, že nejsou pochopeny ze strany spolužáků, učitelů a co je nejhorší, tak mnohdy ani ze strany rodičů. Nechápou jejich touhu po vědění, učitelé nemají čas se jim věnovat tolik, kolik by potřebovaly. Matematicky nadané děti doma často slyší, že matika je k ničemu, že ji v životě nebudou potřebovat a ať se věnují něčemu praktičtějšímu. Z toho plyne i nedostatečná motivace nadaných dětí pro rozvoj nadání, ztráta nadšení a postupně se z těchto dětí stává „normální“ dítě, protože pokud talent není rozvíjen, upadá. Pokud je dítě motivováno, tak se ale často setká z nedostatkem informací pro další rozvoj.

Návrhy řešení těchto problémů

Každý problém se dá řešit, když je o něj zájem. Talentovaným dětem můžeme s jejich problémy také pomoci. Problém s kolektivem se dá vyřešit tak, že budeme sdružovat děti se stejnými zájmy; na to jsou ideální matematické tábory, soustředění, semináře. S tím souvisí i propagace matematických soutěží pro ZŠ, které tato soustředění a tábory organizují.

V dnešní době je velmi důležité začít matematiku popularizovat, aby rodiče a spolužáci pochopili, že to není zas tak strašná věda. A je v ní spoustu zajímavého a pěkného.

Matematické soutěže

Už jsme se zmínily o matematických soutěžích, ty se dělí na korespondenční semináře a „ty ostatní“. Korespondenční semináře trvají celý rok, dítě řeší doma, řešení sepíše a pošle, organizátoři došlá řešení opraví a pošlou zpět se zadáním dalších příkladů. Na konci roku jsou nejlepší řešitelé odměněni věcnou cenou, soustředěním apod. Mezi tyto soutěže patří například [2]: Pikomat MFF UK, „Pražský“ Pikomat, „Brněnský“ Pikomat, KoKos a další regionální soutěže.

Mezi ostatní matematické soutěže můžeme zařadit Matematickou olympiádu, Pythagoriádu, Matematického klokana, MaSo, ... První tři asi všichni důvěrně znají, k MaSu se vrátíme později.

Pikomat MFF UK a MaSo blíže

Nyní představíme matematické soutěže, které organizujeme.

Pikomat MFF UK [1] je korespondenční seminář pro žáky 5.–9. tříd ZŠ a příslušných ročníků gymnázií. Máme dlouholetou tradici, letos probíhá již 26. ročník. Organizátoři jsou především studenti MFF UK pod vedením Kláry Krejčíčkové. Pikomat má šest sérií po sedmi úlohách, ale do výsledkové listiny se započítává pouze šest nejlépe hodnocených. Děti se naučí i matematickým formulacím, protože po nich chceme slovní komentář jejich řešení. Samotný, i když správný výsledek je pro nás nedostatečný. K řešení příkladů je důležité jisté matematické myšlení, které děti mohou postupně rozvíjet a vylepšovat. Potřebný matematický aparát se děti naučí ve školách. V sérii se vyskytují zajímavé nařiklad geometrické, logické, kombinatorické nebo stereometrické úlohy.

Pro nejlepší řešitele pořádáme jarní týdenní soustředění, kde se děti účastní dopoledních nejen matematických přednášek, odpoledne hrají většinou nematematické hry v přírodě. O matematiku, ale ani o pohyb, nouze není. O prázdninách pro všechny připravujeme letní tábor, který je dvoutýdenní a má program podobný programu soustředění. Nudit se nebudou ani děti, které matematika tolik nezajímá. Poslední roky se Pikomat MFF UK setkává s úpadkem řešitelů, v minulých ročnících bylo aktivních přes 200 řešitelů, nyní máme problém získat řešitelů sto. Nejspíš to bude zmíněnou nedostatečnou propagací matematiky.

Pod Pikomat MFF UK spadá taktéž jednodenní MAtematická SOutěž pro čtyřčlenná družstva žáků 5.–9. tříd ZŠ a příslušných ročníků gymnázií. MaSo probíhá dvakrát ročně – jarní a podzimní běh. Letos v květnu proběhlo MaSo již po jedenácté. Organizátoři jsou taktéž převážně studenti MFF UK. Jeden den se sejdou žáci pražských škol do budovy MFF UK na Malostranském náměstí, kde hodinu a půl v týmu počítají příklady, které ve škole nepotkají. K tomu hrají doprovodnou hru, aby se naučili pracovat s přidělenými body za vypočtené příklady. Většinou se jedná o úpravu nějaké deskové hry. Jak už bylo řečeno, MaSo je zatím pouze pro pražské školy, ale ostatní neodmítáme, jen je nezveme. Pražské školy zvládají kapacitu pokrýt. Dokonce začínáme mít problém, jejich zájem přesahuje kapacitu. Chápeme, že se kvůli jednomu dni nebudou na MaSo do Prahy plahočit žáci například z Ostravy. Proto naším cílem je, spojit se s jinou školou, nejlépe na Moravě, a tím MaSo rozšířit.

Literatura

[1] Kolektivy autoru: *Pikomat MFF UK*. Ročenky soutěže.

[2] Zhouf, J. a kol.: *Matematické příběhy z korespondenčních seminářů*. Prometheus, Praha, 2006.

Geometrie pro všechny a geometrie pro talenty

František Kuřina, UHK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Cílem tohoto příspěvku je ukázat na několika úlohách, že dosti často lze běžné školní učivo rozvinout tak, aby zaujalo i žáky nadané.*

Úvod

Ve své dlouhé praxi jsem se se studentem mimořádně nadaným na matematiku nesetkal. Nebo – i to je možné – jsem to na něm nepoznal. Talentovaný student se totiž nemusí projevit jako student „vzorný“, úlohy školní matematiky ho mohou i odpuzovat svou „nejapností“. O jednom z geniálních matematiků *Evaristu Galoisovi* (1811–1832) napsal polský matematik a fyzik *Leopold Infeld* poutavý román, v němž o škole mladého Evarista píše např.: „Většina žáků se učila matematice stejně jako řečtině nebo latině, přeměňující ji v mrtvou kostru, ve sbírku nudných vzorců, kterým se žáci učili ze dne na den nazpaměť. Viděl, jak v této škole dovedou s nedostižným uměním změnit krásu v nudu, logiku v dogmata, řeckou svatyni v rumiště kamenů ([1], s. 56).“ Můžeme se divit, že jeho učitelé o něm napsali: „Je povídavý. Nelze u něho pozorovat ani stín lásky k nějaké práci. Je nedbalý… Neustále se zabývá něčím,

[1] e-mail:frantisek.kurina@uhk.cz

co by neměl dělat. Je to s ním den ze dne horší ([1], s. 62)." Tento student píše svému otci: „Zkoušející mi začal syčivým hlasem klást idiotské otázky… Žádal pouze, abych ze sebe chrlil vzorce, nezajímaje se o to, zda jim vůbec rozumím. Chtěl, abych všechno vysvětloval podle nejapného textu z učebnice. Mít vlastní metody a nápady považuje zřejmě za velké provinění ([1], s. 66)."

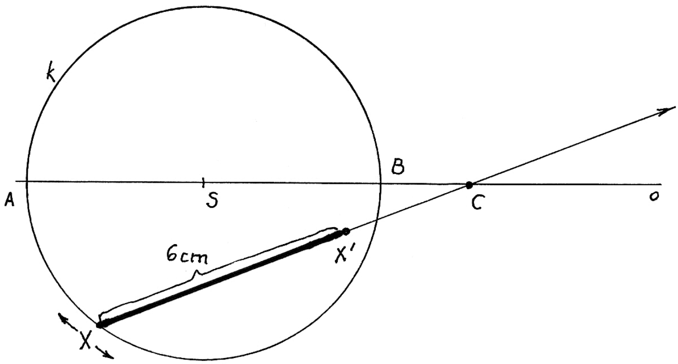
Galois zahynul v souboji ve svých jednadvaceti letech v roce 1832, v roce 1909 byly jeho vědecké objevy proslulé v celém světě a rozhodujícím způsobem ovlivňovaly rozvoj moderní matematiky ([1], s. 273).

Genius se nedá zlomit, pro něho je *každá škola dobrá*, jak napsal *Otto Wichterle* [2]. Rozvíjet zájem a učit matematiku žáky s náznakem zájmu a talentu je ovšem důležité a o práci s nimi se chci s vámi podělit.

V dalším uvedu šest geometrických úloh, které mohou řešit žáci na konci základní školy, řešil jsem tyto úlohy s osmi absolventy střední školy, kteří žádné zvláštní matematické nadání nevykazovali, měli však o matematiku zájem. První tři úlohy jsou spjaté s učivem probíraným ve škole, druhá trojice úloh vzešla z podnětů historických.

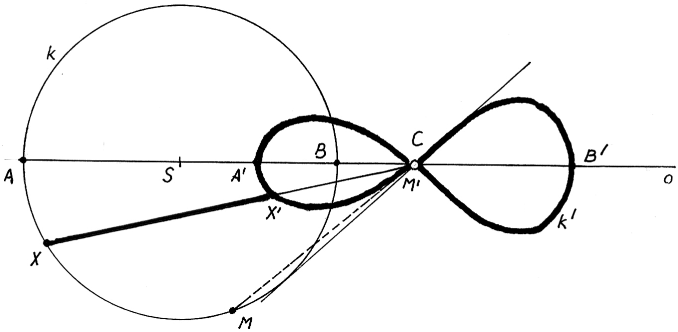
První trojice úloh

Úloha 1. Na přímce o sestrojte po řadě body A, S, B, C tak, že platí $|AS| = |SB| = 4$ cm, $|SC| = 6$ cm, a kružnici $k(S; 4\text{ cm})$. K libovolnému bodu X kružnice sestrojte bod X' polopřímky XC tak, že $|XX'| = 6$ cm. Co vyplní body X', probíhá-li bod X kružnici k (obr. 1)?



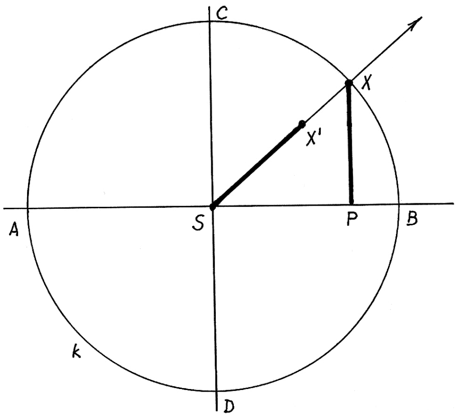
Obr. 1

Řešení úlohy začíná pozorným přečtením textu, na něž navazuje narýsování daných prvků. Tuto část úlohy by měli zvládnout všichni žáci. Následuje konstrukce několika bodů X' při různé volbě výchozího bodu X. Některým žákům již dělá konstrukce potíže, ačkoliv textu rozumějí. Vedeme je vhodnými otázkami, případně opakováním konstrukce mimo obrázek se zvolenými body X a C. Nadaní žáci již tuší výsledek: body X' vyplní jistou křivku a kladou si otázky typu: *Bude křivka procházet bodem C? Bude souměrná podle osy o?* Řešení úlohy je na obr. 2.



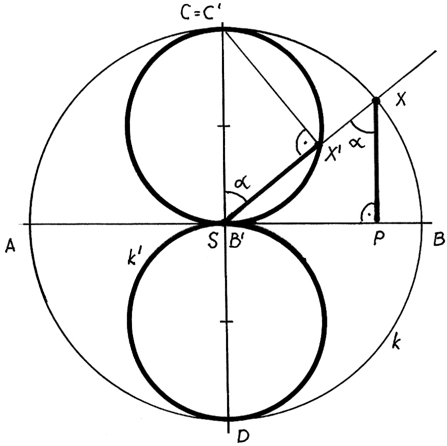
Obr. 2

Úloha 2. Sestrojte kružnici $k(S; 5\ \text{cm})$ a její k sobě kolmé průměry AB, CD. K libovolnému bodu X kružnice k sestrojte bod x' polopřímky SX tak, že je od bodu S stejně vzdálený jako bod X od přímky AB. Co vyplní body X', probíhá-li bod X kružnici k (obr. 3)?



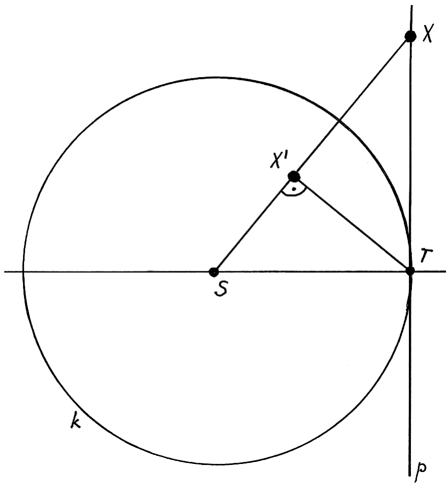
Obr. 3

Řešení úlohy začíná stejně jako u úlohy 1. Po etapě experimentování, které má ráz rýsování (obr. 4), nastává formulace hypotézy a její důkaz. Ten patně zvládnou samostatně jen nadaní žáci devátého ročníku.



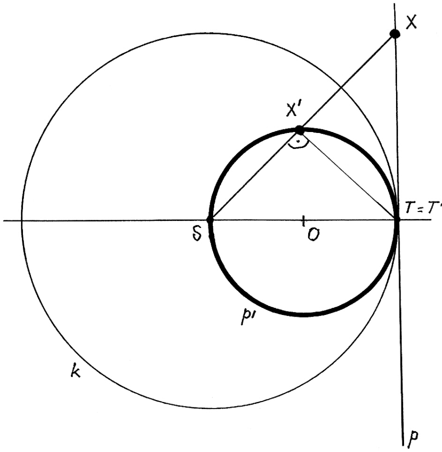
Obr. 4

Úloha 3. Sestrojte kružnici $k(S; 5\text{ cm})$ a její tečnu p v bodě T. K libovolnému bodu X tečny p sestrojte bod X' jako patu kolmice sestrojené z bodu T na přímku SX. Co vyplní body X', probíhá-li bod X přímku p (obr. 5)?



Obr. 5

Řešení je analogické k řešení úlohy 2 (obr. 6).



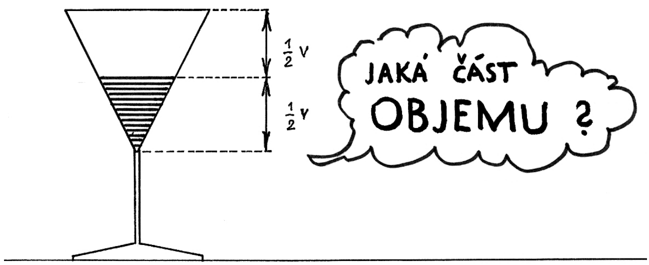
Obr. 6

Ve všech třech úlohách jsme vyšli od základních konstrukcí a dospěli jsme přirozeně k otázkám o obrazu kružnice, respektive přímky v popsaných zobrazeních. Výsledky mohou být pro zvídané žáky zajímavé: v prvním případě je obrazem kružnice „osmička“, v druhém dvě kružnice, ve třetím případě je obrazem přímky kružnice.

Druhá trojice úloh

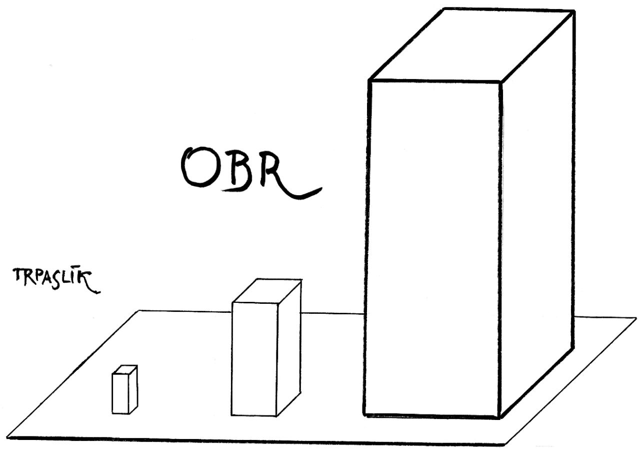
Podnětem pro zajímavé úlohy pro nadané žáky budou nyní úlohy početního charakteru.

Úloha 4. Číše tvaru rotačního kužele je z jedné poloviny výšky naplněna vínem. Jaká část objemu číše je prázdná (obr. 7)?



Obr. 7

Je zajímavé, že trvalo celý týden, než jedna studentka došla ke správné odpovědi (7/8 objemu). Přitom tento výsledek získala výpočtem objemu „malého“ a „velkého“ kužele, nikoliv úvahou o objemu dvou podobných těles. O tuto problematiku může probudit zájem otázka typu: *Dítě váží 27 kg. Kolik bude vážit dítě, jehož „každý“ rozměr bude třikrát menší nebo třikrát větší?* Správnou odpověď může navodit obrázek „trpaslíka“ a „obra“ v kvádru (obr. 8).



Obr. 8

Úloha 5. Vypočítejte objem pravidelného čtyřstěnu, jehož hrany mají délku a.

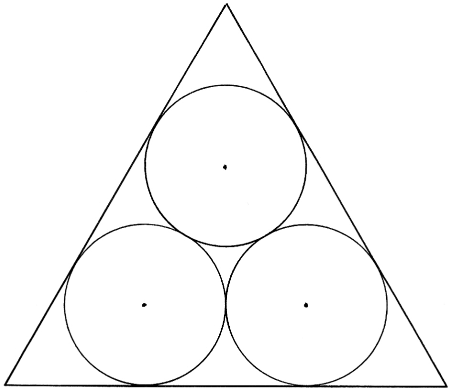
V úloze je potřeba osvětlit stereometrické souvislosti. Nadaní žáci by si ovšem měli položit otázku, proč objem jehlanu se vypočítá podle vzorce

$$V = \frac{1}{3}Sv.$$

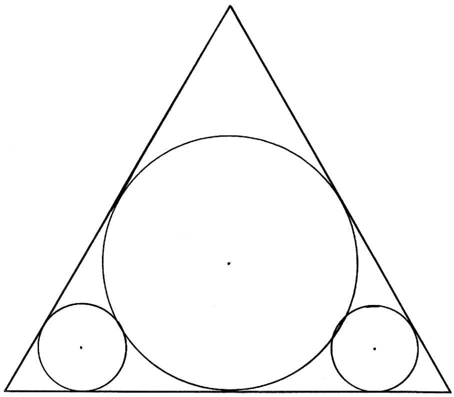
Elementární odpověď lze uvést známým postupem s užitím Cavalieriho principu, který je žákům dobře přístupný v Archimedově formulaci: *Jestliže do dvou nádob přitéká voda tak, že v každém okamžiku má hladina vody týž obsah, pak má voda v obou nádobách týž objem.* Podrobněji je tématika zpracována v knize [3].

Ačkoliv *Jaroslav Kurzweil* napsal *Matematika je krásná. Co bylo pravda včera, je pravda i dnes,* můžeme žákům zadat úlohu, která dokumentuje, že i v matematice musí být některé výsledky po čase revidovány.

Úloha 6. Ukažte, že součet obsahů kruhů sestrojených v rovnostranném trojúhelníku podle obr. 9 je menší než součet obsahů kruhů sestrojených podle obr. 10.

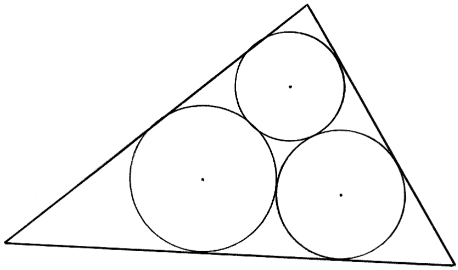


Obr. 9

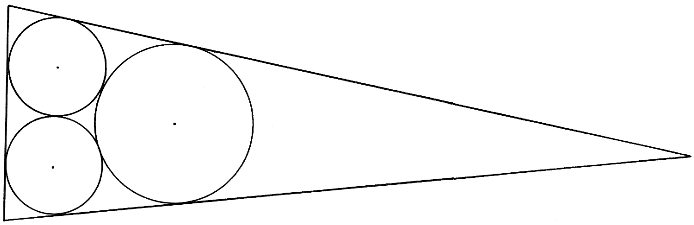


Obr. 10

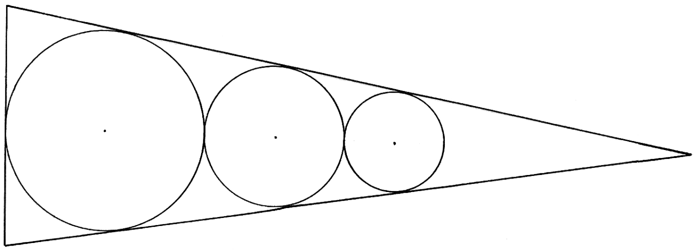
Výpočet je sice dosti pracný, ale nadaný student jistě námahu rád podstoupí, sdělíme-li mu, že od roku 1803 se pokládal za správný *Malfattiho výsledek*, že k maximu součtu obsahů kruhů „vepsaných“ do kružnice vede konstrukce na obr. 11, než v roce 1929 dokázal Michal Goldberg, že tomu tak není. Je zajímavé, že k vyvrácení Malfattiho omylu stačí pohled na obr. 12 a 13.



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Závěr

Podle mého názoru je možné rozvíjet matematické nadání žáků a studentů kladením zajímavých a ne příliš náročných otázek v průběhu dobře organizované normální školní výuky. Několika příklady jsem se snažil tuto tezi doložit. Posuďte, zda je takovýto přístup v praxi reálný.

Literatura

[1] Infeld, L.: *Vyvolenci bohů.* Mír, Praha, 1952.

[2] Seydler, J.: Potřebujeme vůbec vědu? *Reportér* **18** (1992).

[3] Kuřina, F., Půlpán, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky.* Academia, Praha, 2006.

K vyhledávání talentů *

Josef Molnár [1], PřF UP Olomouc

Jana Slezáková [2], Slovanské gymnázium Olomouc

Abstrakt. *Existuje řada kritérií sloužících k vyhledávání matematicky nadaných dětí. Ve školské praxi se osvědčuje jejich co možná nejširší kombinace. Do mozaiky nabídky metod sloužících k tomuto účelu patří bezesporu didaktické testy. Jeden z nich, konkrétně test geometrické představivosti ověřený na více než tisíci řešitelích je zde nabídnut k veřejnému užití.*

Talentovaní jedinci potřebují ke svému rozvoji podporu. Jak ale rozpoznat, kdo si tuto přízeň zaslouží, koho považovat za *nadprůměrně* nadaného?

Zjišťování *mimořádného* nadání provádí podle vyhlášky č. 73/2005 Sb. (o vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami a žáků mimořádně nadaných) školské poradenské zařízení. V rámci projektu „Práce s talenty“, který je řešen na ZŠ Čtyřlístek v Uherském Hradišti (ve spolupráci s 8. ZŠ Zlín–Malenovice, Gymnáziem Zlín–Lesní čtvrť a UP v Olomouci), jsme k identifikaci nadprůměrných žáků zvolili následující 4 kriteria: (1) didaktické a diagnostické testy, (2) výsledky v intelektových soutěžích, (3) hodnocení vyučujících, (4) názory rodičů.

K získávání objektivních názorů rodičů zejména u dětí předškolního a mladšího školního věku byl použit připravený popularizační leták s informacemi o projevech talentovaných dětí a dotazníkem. Základ hodnocení učiteli tvoří známky ze sledovaných předmětů, které jsou dle potřeby doplňovány dalšími informacemi. Zohledňovány byly výsledky v soutěžích typu Matematický a Přírodovědný klokan, oborové olympiády, Pythagoriáda, korespondenční soutěže, SOČ, Čmelda Pepík aj.

Na základě brainstormingu projektového týmu bylo přistoupeno k tvorbě vlastních didaktických testů pro jednotlivé věkové kategorie. K testování žáků 1. a 2. ročníku čtyřletého gymnázia a jejich vrstevníků ve víceletých gymnáziích, kde se vyhledávali nadprůměrně nadaní žáci na matematiku, byly zpracovány tři testy – test všeobecné inteli-

[1] e-mail: molnar@inf.upol.cz

[2] e-mail: slezakov@seznam.cz

* Článek byl zpracován za podpory projektu ESF OP VK CZ.1.07/1.2.08/02.0017 „Práce s talenty – Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práce s nimi“.

gence, test geometrické představivosti a test zaměřený na řešení slovních úloh. V našem příspěvku se podrobněji zaměříme na *Test geometrické představivosti TP2*.

Test, jehož zadání naleznete v závěru příspěvku a jehož hlavní autorkou je Jana Slezáková, byl inspirován Testem čtverců, který je subtestem Amthauerových IQ testů a který je odvozen z tzv. Rybakovových figur. Správné řešení každého ze 40 úkolů testu je hodnoceno jedním bodem, doba určená k řešení byla stanovena na 20 minut. Testování proběhlo v červnu 2010 a zúčastnilo se ho 1 142 žáků (421 chlapců a 721 dívek) z gymnázií, která jsou fakultními školami PřF UP v Olomouci.

Podrobné statistiky zpracovaných výsledků jsou součástí disertační práce spoluautorky příspěvku a výtah z nich byl odevzdán k publikování v časopise E-pedagogium. Zde proto jen stručně: Průměrný bodový zisk činil 29,7 bodu, což je 74,2 % maximálního bodového zisku, chlapci dosáhli mírně lepších výsledků než dívky a prokázala se souvislost výsledků testu se známkou z matematiky.

Z našeho šetření dále vyplývá, že pokud budeme úlohy řadit podle stoupající obtížnosti, budou seřazeny takto: č. 14, 9, 2, 30, 3, 28, 21, 7, 33, 38, 23, 15, 25, 36, 1, 34, 27, 32, 16, 8, 5, 40, 39, 13, 4, 29, 20, 24, 18, 17, 10, 11, 22, 26, 31, 6, 12, 35, 37, 19.

Reliabilita testu TP2 byla zjišťována metodou půlení a porovnávána s výsledky Testu čtverců – u TP2 je reliabilita $r = 0{,}837$, u Testu čtverců činí $r = 0{,}812$ [5]. Naše měření lze považovat také za validní (na hladině významnosti 0,05), přičemž k posouzení validity byla jako vnější kriterium zvolena známka z matematiky a k výpočtu korelace použit Spearmanův koeficient.

Vznikl tak sice nestandardizovaný didaktický test, který byl nicméně ověřen na dostatečně velké skupině probandů, a může tedy sloužit k porovnávání úrovně geometrické představivosti studentů 1. a 2. ročníků čtyřletých gymnázií a jejich vrstevníků z víceletých gymnázií, případně dalších středních škol.

Literatura

[1] Amthauer, R. a kol.: *Test struktury inteligence I-S-T 2000R.* Testcentrum, Praha, 2005.

[2] Molnár, J.: Výchova talentů v Čechách. In: Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar*, PedF UK, Praha, 2009.

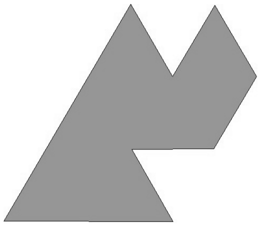
[3] Slezáková, J.: *Geometrická představivost v rovině.* (disertační práce), PřF UP, Olomouc, 2011.

[4] Slezáková, J., Molnár, J.: *Testování geometrické představivosti v rovině.* (odevzdáno do časopisu E-pedagogium).
[5] Svoboda, M.: *Psychologická diagnostika dospělých.* Portál, Praha, 2005.

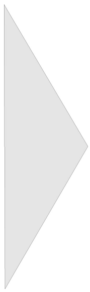
Příloha: Test TP2

Mnohoúhelník jedním řezem rozdělte tak, aby po přemístění jedné části ke druhé (pouze v představách) vznikl rovnostranný trojúhelník.

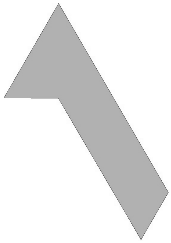
1.



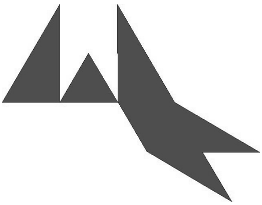
2.



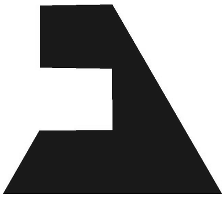
3.



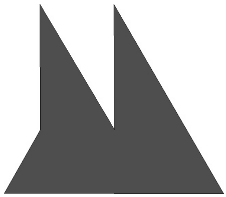
4.



5.



6.

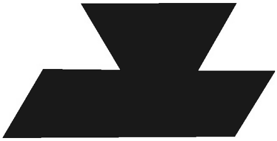


7.

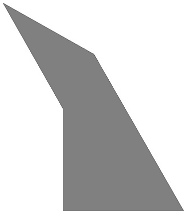
8.

9.

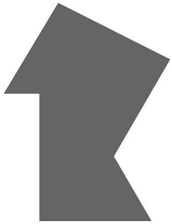
10.



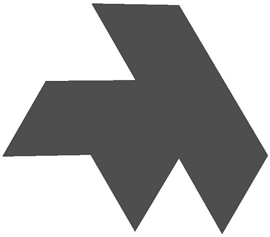
11.



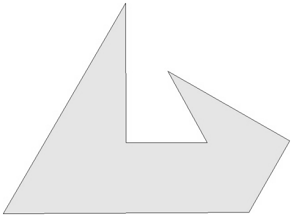
12.



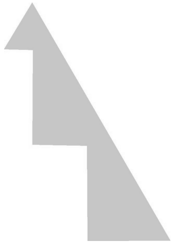
13.



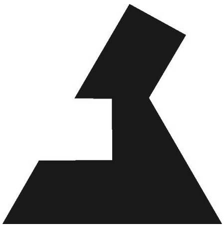
14.



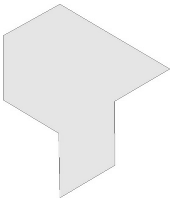
15.



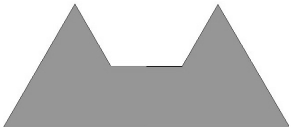
16.



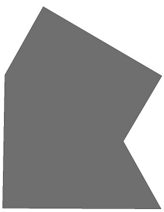
17.



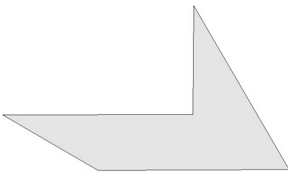
18.



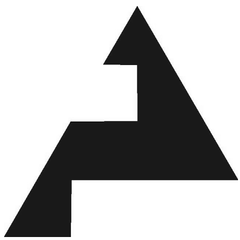
19.



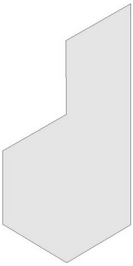
20.



21.

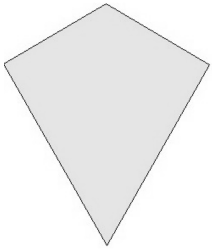


22.

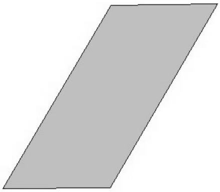


23.

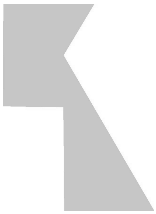
24.



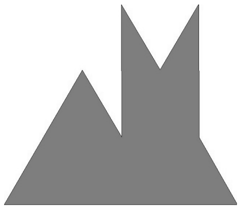
25.



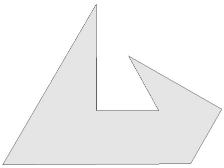
26.



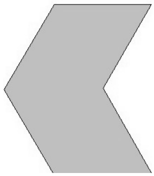
27.



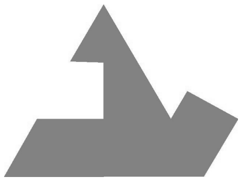
28.



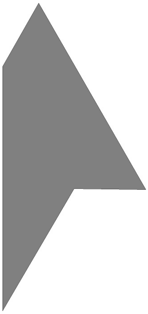
29.



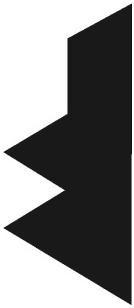
30.



31.

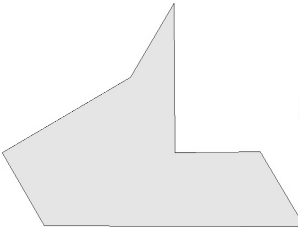


32.

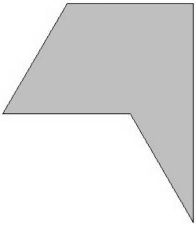


33.

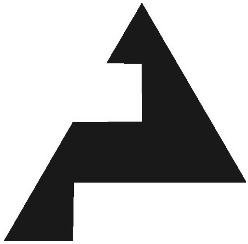
34.



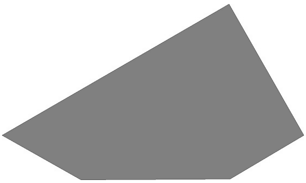
35.



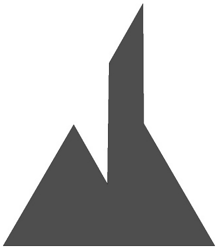
36.



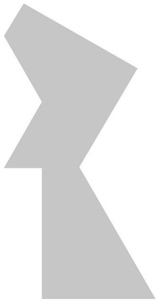
37.



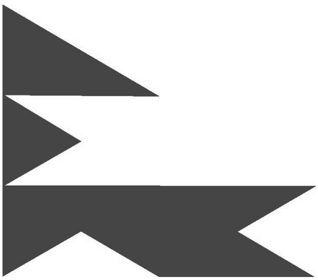
38.



39.



40.



Inspirující svět klasických jednoduchých substitučních šifer

Michal Musílek, PřF, Univerzita Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Kryptologie má velký motivační a mezipředmětový potenciál. Substituční šifry lze chápat jako zvláštní typ zobrazení. Šifry sloužící k utajení zpráv i kódy sloužící k usnadnění přenosu zpráv na dálku lze znázornit pomocí převodových tabulek. V článku je uvedeno několik graficky zajímavých šifer a kódů. Formou řešených příkladů seznamuje s dvěma základními metodami luštění jednoduché záměny, luštěním pomocí předpokládaný slov a pomocí frekvenční analýzy. Mimo to obsahuje celkem dvanáct úloh k samostatnému řešení, jejichž výsledky jsou uvedeny souhrnně na konci článku.*

Úvod

Jednou z cest, kterou lze zpestřit výuku matematiky talentovaným žákům, je začlenění učiva věnujícího se základům kryptologie, tj. nauky o tajné komunikaci (z řeckého kryptós – skrytý), poněkud zjednodušeně řečeno o šifrách. Jde o učivo s velmi silným mezipředmětovým potenciálem, protože pro práci se šiframi, zejména pro jejich luštění potřebujeme jazykové znalosti (mateřský nebo cizí jazyk podle toho, jaký otevřený text byl zašifrován), matematiku (šifrové systémy lze popisovat matematickými prostředky), informatiku (řadu rutinních postupů v rámci šifrování, dešifrování či luštění lze zapsat jako algoritmy ve vhodném programovacím jazyce). Neměli bychom vynechat vyučovací předmět dějepis, protože historie tajné komunikace sahá do doby starověkých civilizací a skrývá velmi zajímavé a dramatické příběhy.

Základní pojmy

V minulém odstavci jsme použili několik pojmů, které bychom si měli ujasnit. *Otevřený text* (OT) je běžný čitelný text v daném jazyce. Pomocí *šifrování* (angl. encryption) z něj vytvoříme na první pohled naprosto nečitelný *šifrový text* (ŠT) pomocí předem daného algoritmu a většinou také *klíče* (hesla). Pouze ty nejjednodušší šifry nemají klíč a jsou určeny jen algoritmem. Opačnému postupu, kdy ze ŠT získáváme OT se znalostí algoritmu a klíče, říkáme *dešifrování* (angl. decryption).

[1] e-mail: michal.musilek@uhk.cz

Zcela jinou činností (mnohem náročnější) je *luštění* (angl. deciphering), kdy se luštitel snaží ze ŠT získat OT bez znalosti šifrovacího algoritmu nebo bez znalosti klíče [8]. Anglické ekvivalenty pojmů uvádím proto, že se v jejich překladech chybuje a slovo „deciphering“ se velmi často chybně překládá jako dešifrování, nikoliv správně jako luštění.

Nauka o použití různých šifrových systémů, tedy o šifrování a dešifrování, se nazývá *kryptografie*, zatímco luštěním šifer a vším, co s luštěním souvisí, se zabývá *kryptoanalýza* [1]. Třetí součástí kryptologie je *steganografie*, zabývající se ukrýváním tajných zpráv tak, aby byla utajena sama jejich existence (např. použitím neviditelných inkoustů, či fotografických mikroteček).

Všechny klasické šifry i jejich moderní počítačové obdoby vycházejí ze tří základních principů. Prvním je *substituce*, čili záměna znaku (písmene, resp. skupiny znaků) OT jiným znakem (resp. skupinou znaků). Druhým je *transpozice*, čili změna pořadí znaků zprávy (promíchání podle určitého klíče). Třetím je *jednotkové připočtení hesla*. Při něm musíme písmena OT nejprve převést na čísla, čímž získáme mezitext, který potom sčítáme modulo daný základ (např. 26 pro písmena mezinárodní abecedy) s číselným heslem. Nakonec provedeme převod z čísel zpět na písmena. Pokud převedeme znaky do série dvojkových číslic a pak sčítáme bit po bitu s binárním heslem, můžeme místo sčítání modulo 2 hovořit o logické operaci XOR (čili nonekvivalence).

Monoalfabetická substituce

Dále se budeme zabývat jedním typem šifer, kterým je jednoduchá záměna (čili monoalfabetická substituce). To znamená, že každé jednotlivé písmeno OT nahradíme vždy stejným jednotlivým znakem, pro různá písmena použijeme vždy různý znak. Z matematického hlediska se jedná o prosté zobrazení množiny písmen OT na množinu znaků ŠT. Přitom OT zpravidla upravíme tak, že odstraníme veškerou diakritiku a text zapíšeme kapitálkami, takže výchozí množina písmen OT je složena z 26 velkých písmen mezinárodní abecedy $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$.

Zobrazení množiny písmen OT na množinu znaků ŠT můžeme znázornit pomocí převodové tabulky, která má v prvním řádku zapsáno 26 písmen OT a ve druhém řádku v příslušných sloupcích znaky ŠT. Stejný typ převodové tabulky můžeme ovšem použít nejen pro jednoduché substituční šifry, ale také pro kódy. Zatímco šifra je určená k utajení obsahu zprávy před nepovolanými osobami, tj. použitá substituce by neměla být známa nikomu jinému než dvěma korespondujícím stranám, kód také používá substituci, ale důvodem je zpravidla vyšší spolehlivost přenosu jednotlivých znaků, když je zpráva přenášena na dálku. Kód bývá obvykle obecně znám mnoha lidem, smyslem jeho používání je srozumitelnost a spolehlivost.

Nejstaršími známými šiframi jsou okolo roku 500 př. n. l. biblické šifry atbaš a albam, které se objevují v knize Jeremjáš. Hebrejská abeceda má dvacet dva písmen, z nichž první dvě jsou alef a bet a poslední dvě šin a tav. Když spojíme první písmeno s posledním (alef–tav) a druhé s předposledním (bet–šin) dostaneme, po vožení samohlásky „a“, slovo atbaš. Pokud použijeme stejný princip na naši mezinárodní abecedu, získáme převodovou tabulku [2]:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A

Všimněme si, že jde nejen o prosté zobrazení množiny písmen mezinárodní abecedy samé na sebe, ale navíc také o relaci, která je symetrická a antireflexivní. Díky tomu lze použít stejnou převodovou tabulku jak pro šifrování, tak pro dešifrování a také úplnou převodovou tabulku nahradit zkrácenou převodovou tabulkou poloviční šířky:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N

Druhou podobnou biblickou šifrou je albam, která nejprve rozdělí abecedu na dvě stejně dlouhé části (první začíná písmeny alef a bet, druhá písmeny lamed a mem) a pak spojí první písmeno z první části s prvním z druhé, druhé s druhým, třetí s třetím atd. Pokud opět nahradíme hebrejskou abecedu mezinárodní latinkou, dostaneme převodovou tabulku:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M

Také tato substituce je relací antireflexivní a symetrickou, takže stačí zkrácená tabulka:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Úloha 1 (jednoduché záměny a kombinatorika). Jedním, ale zdaleka ne jediným, kritériem bezpečnosti šifry je počet možných šifer daného typu. Určete počet navzájem různých

a) jednoduchých záměn pro mezinárodní abecedu s 26 písmeny, tedy prostých zobrazení množiny s 26 prvky na sebe,

b) šifer typu atbaš–albam, tedy jednoduchých záměn, které jsou nejen prostými zobrazeními množiny s 26 prvky na sebe, ale jsou to zároveň zobrazení antireflexivní a symetrická.

Pozn.: Řešení úloh jsou uvedena na konci článku.

Polybiův čtverec

Nejstarším známým kódem je patrně Polybiův čtverec, kód používaný v prvním známém bezdrátovém telegrafu. Polybios (203–120 př. n. l.) byl starověký řecký politik a historik, který ve svém díle *Historiai* (Dějiny) mimo jiné popsal princip předávání zpráv pomocí hořících pochodní. Signalizující voják zvedl a chvíli držel v každé ruce jistý počet hořících pochodní (od 1 do 5), čímž kódoval písmena abecedy. Ukažme si to opět na mezinárodní abecedě s tím, že písmeno W, které se v českých slovech téměř vůbec nevyskytuje, spojíme s písmenem V (tedy při odstraňování diakritiky v případě potřeby zaměníme W za V):

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	X	Y	Z

Nahradíme-li Polybiův čtverec klasickou převodovou tabulkou, dostáváme:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
11	12	13	14	15	21	22	23	24	25	31	32	33

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
34	35	41	42	43	44	45	51	52	52	53	54	55

Kódovací Polybiův čtverec můžeme ovšem snadno nahradit šifrovacím, když k vyplnění vnitřku čtvercové tabulky použijeme heslo. Ukažme si to na příkladu. Nechť heslo je „Hradec Králové“. Písmena hesla po odstranění diakritiky zapíšeme postupně do tabulky s tím, že jednou zapsané písmeno nelze již znovu použít. Písmena V a W opět spojíme do jednoho pole tabulky: v případě potřeby zaměníme W za V):

	1	2	3	4	5
1	H	R	A	D	E
2	C	K	L	O	V
3	B	F	G	I	J
4	M	N	P	Q	S
5	T	U	X	Y	Z

Úloha 2 (Polybiova digrafická substituce). Následující ŠT byl získán šifrováním pomocí výše uvedeného Polybiova čtverce, v němž je abeceda přeházena podle hesla „Hradec Králové“. Dešifrujte jej.

14524 53421 23242 51522 13122 45514 15235 23515 43545 11113
33241 21345 42135 11234 21134 55134 51245 13455 42134 15445
23122 45525 13115 21351 24521 15253

Pozn.: Digrafická subistutuce nahrazuje vždy jedno písmeno OT dvěma znaky ŠT. V případě Polybiova čtverce jedno písmeno dvěma číslicemi.

Morseova abeceda

Velmi známým a důležitým kódem byla Morseova abeceda, spojená s vynálezem elektromagnetického telegrafu. Samuel Morse patentoval svůj telegraf v roce 1837, první linka na světě (Washington–Baltimore) byla zprovozněna roku 1844 a jen o dva roky později byla zprovozněna první linka na našem území (Brno–Vídeň).

Morseův kód nahrazuje každé písmeno mezinárodní abecedy sérií krátkých a dlouhých impulzů, tzv. teček a čárek. Graficky se mohou znázorňovat jako tečky a pomlčky. Nejčetnějším písmenům (E, I, A, N, T) jsou přiřazeny krátké značky. Zajímavé je, že s rozmachem telegrafu se také ustálil zvyk zapisovat šifrové texty do pětimístných skupin. Příslušné nařízení vzniklo proto, aby důvodem šifrování nebyla snaha ušetřit na telegrafních poplatcích, které se tradičně vyměřovaly podle počtu slov zprávy. Šifrové texty musely být rozděleny na pětimístné skupiny a zaplaceny podle počtu těchto skupin.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
.–	–...	–.–.	–..	.	..–.	––.	....	..	.–––
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
–.–	.–..	––	–.	–––	.––.	––.–	.–.	...	–
U	V	W	X	Y	Z				
..–	...–	.––	–..–	–.––	––..				

Pro dekódování Morseovy abecedy si vytvoříme jinou tabulku:

.	E	.–	A	.–.	R	–.–	K	–.	N	–	T
..	I	..–	U	..–.	F	––.–	Q	––.	G	––	M
...	S	...–	V	.––.	P	–..–	X		H	–––	O
....	H	.––	W	.–..	L	–.––	Y	–..	D		V
		.–––	J	–.–.	C	––..	Z	–...	B		

Nyní můžeme definovat zobrazení množiny písmen mezinárodní abecedy na sebe tak, že každému písmenu přiřadíme písmeno, ve kterém v Morseově abecedě tečky zamění čárky a naopak. Tedy E nahradíme T, A nahradíme N, R nahradíme K atd. Protože touto metodou nemůžeme spárovat všechna písmena, vytvoříme navíc uměle dvě dvojice: C–Z a D–H. Získáme tak substituční šifru typu atbaš–albam, jejíž převodová tabulka je:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	J	Z	W	T	Q	U	V	M	B	R	Y	I
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	S	X	F	K	O	E	G	H	D	P	L	C

Tato jednoduchá záměna, obvykle nazývaná Morseova záměna, je stejně jako šifry atbaš a albam symetrická a antireflexivní, takže ji můžeme popsat zkrácenou převodovou tabulkou:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	O	P
N	J	Z	W	T	Q	U	V	M	R	Y	S	X

Úloha 3 (Morseova abeceda). Dekódujte text zapsaný pomocí Morseovy abecedy:

|.–|–.|..||.–––|.|–..|.|–.||––|.–|–|.|––|.–|–|..|–.–.|–.–|–.––|
|–|.–|.–..|.|–.|–||–.|.–|––..|––|.–|.–.||

Úloha 4 (steganografie a Morseova abeceda). Poznáváte Morseovu abecedu i v tomto notovém zápisu? Rozluštěte:

Úloha 5 (Morseova záměna). Dešifrujte:

```
GZMEO TJTCX KTILO YTAMB TCJLE TZATX KTILO
YTEJT CGZTA MATJT CXTZA TRSAQ GZMGO
```

Zednářské kódy

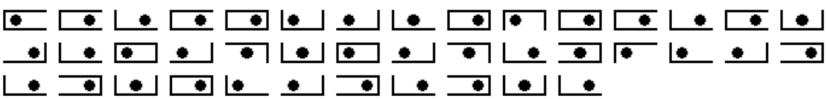
V různých šifrovacích hrách se setkáváme s dalšími grafickými symboly, které vychází z méně známých kódů. Zajímavé jsou např. kódy podle kříže, kterým se říká pro jejich používání zednářskými lóžemi také zednářské kódy. Méně poetickým názvem pro kód velký kříž, který si nyní ukážeme, je pojmenování kód prasečích chlívků. Pomůcku pro kódování a dekódování vytvoříme z tabulky 3×3 s obdélníkovými políčky, do nichž napíšeme vždy 3 písmena. Odstraníme-li vnější ohraničení tabulky, je každé písmeno určeno polohou a počtem „přepážek“ a umístěním v rámci „chlívku“ (vlevo, uprostřed, či vpravo):

A B C	D E F	G H I
J K L	M N O	P Q R
S T U	V W X	Y Z ?

A B C	D E F	G H I
J K L	M N O	P Q R
S T U	V W X	Y Z ?

Kromě kódu velký kříž bývají používány také kódy malý kříž a hebrejský kříž, které lze snadno najít na Internetu.

Úloha 6 (zednářský kód velký kříž). Dešifrujte:



Semaforová abeceda

Dalším grafickým kódem je tzv. semaforová abeceda, která může být zobrazena nejen v podobě postaviček mávajících rukama případně i praporky, ale také steganograficky převedená např. do podoby ciferníků hodin, kde jsou ruce signalizujícího námořníka nahrazeny ručičkami hodin.

Takovou „hodinovou“ semaforovou abecedu najdeme na internetu v podobě speciálního TrueType fontu [7].

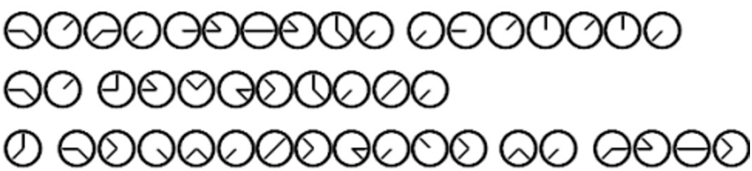
Také semaforovou abecedu můžeme využít k vytvoření převodové tabulky substituční šifry, kterou můžeme nazvat semaforová záměna, a to tak, že každé písmeno nahradíme písmenem signalizovaným osově souměrně k původnímu (tj. levá a pravá ruka si vymění pozice) a zbylá dvě písmena L a T se budou také vzájemně nahrazovat:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
G	F	E	D	C	B	A	Z	X	P	V	T	S

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
N	W	J	Y	R	M	L	U	K	O	I	Q	H

Všimněte si, že semaforová záměna není šifrou typu atbaš–albam, protože není antireflexivní (písmena D, N, R a U se zobrazí sama na sebe). Podmínku symetrie ovšem splňuje, takže i v jejím případě použijeme stejnou tabulku pro šifrování i pro dešifrování.

Úloha 7 (steganografie a semaforová abeceda). Dešifrujte:



Caesarova šifra

Podmínku symetričnosti nesplňuje jiná, poměrně známá a současně poměrně slabá šifra, které se říká Caesarova, protože ji používal a ve své knize *Commentarii de bello Gallico (Zápisky o válce galské)* popsal Gaius Julius Caesar. Jde o jednoduchou záměnu spočívající v posunutí celé abecedy o 3 písmena, tedy A se zamění D, B se zamění E, C se zamění F atd. Poslední tři písmena abecedy X, Y a Z se nahradí písmeny A, B a C. Převodová tabulka pro šifrování vypadá takto:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Převodová tabulka pro dešifrování ovšem vypadá jinak:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W

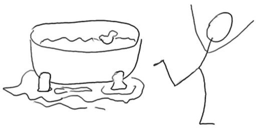
Caesarova šifra nepředstavuje symetrickou relaci, příslušná relace je antireflexivní a antisymetrická. Někdy se jako Caesarova šifra označují všechna posunutí o k písmen, kde $k \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 24, 25\}$, tedy nejen posunutí o 3 písmena. Vidíme, že takových šifer je celkem pouze 25, takže se jedná o velmi slabé šifry.

Úloha 8 (tři jednoduché záměny). Následující tři ŠT vznikly z jednoho OT zašifrováním třemi různými jednoduchými záměnami. Poznáte kterými? Jaký je použitý OT?

```
VWTXV MXBCR HNGML WTXVR GLPMX VRQJL WARGB CS
NROLN VLIHU CQDVW ROLNU DWMVL NUBSW RJUDI HP
RSYMR OMQTK CANOE SYMRK NEBOM RKLXE SUKNQ TI
```

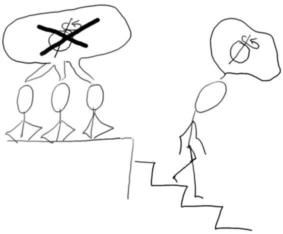
Úloha 9 (jednoduchá záměna s nápovědou). V šifrovacích hrách se člověk občas setká s originálními jednoduchými záměnami. Následující šifra je převzata z 1. kola soutěže Technoplaneta 2009, kde byla publikována pod názvem Vzdělané postavičky. Bez podrobné obrázkové nápovědy by tuto šifru nebylo možné vyluštit. Naopak s využitím nápovědy, která předpokládá určité znalosti z dějin přírodních věd, je luštění zajímavým a napínavým úkolem. Vyluštěte šifru [4]:

□ _ _ _ _ _ _ _ _ _

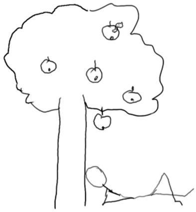


_ _ _ _ _ _ □ _ _ _

_ _ □ _ _



_ _ _ _ _ _ □



_ _ _ □ _ _

_ □ _ _ _ _

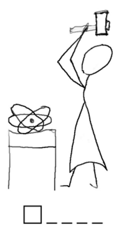
_ _ _ □ _ _ _

_ □ _ _ _

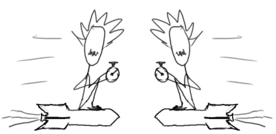
_ _ _ _ _ _ _ □ _ _

□ _ _ _ _ _ _

_ _ _ □ _ _



□ _ _ _ _



_ _ □ _ _ _ _ _

Frekvenční analýza

Jako zajímavost si můžeme uvést literární šifru, kterou popsal sir Arthur Conan Doyl ve své povídce *The Adventure of the Dancing Men (Tančící figurky)*. Úspěšným luštitelem šifry v této povídce samozřejmě není nikdo jiný než Sherlock Holmes. Autor svěžím jazykem vysvětluje princip luštění jednoduché záměny metodou frekvenční analýzy textu.

Jako první ovšem metodu frekvenční analýzy popsal o více než tisíc let dříve Abú Jusúf Jakúb ibn Isák al-Kindí (801–873), jak potvrzuje Rukopis o luštění kryptografických zpráv, objevený v Sülajmanově osmanském archivu v Istanbulu v roce 1987 [6]. Je velmi pravděpodobné, že ke vzniku frekvenční analýzy přispělo studium koránu, které bylo tak důkladné, že zkoumalo nejen četnost výskytu jednotlivých slov v súrách, ale dokonce četnost jednotlivých písmen. V arabštině se velmi často vyskytují písmena a a l, jistě také proto, že spolu tvoří určitý člen al-, zatímco četnost písmene j je asi desetkrát nižší. Podobné rozdíly v četnosti písmen vykazují všechny jazyky.

Ještě, než se budeme věnovat frekvenční analýze českého textu, ukážeme si jinou, časem prověřenou metodu luštění jednoduché záměny. Je jí metoda předpokládaných slov, která pomohla k rozluštění řady tajných zpráv. Vysvětlíme si ji na následujícím příkladu.

Příklad 1 – luštění metodou předpokládaných slov

Podařilo se nám zachytit tajnou korespondenci mezi Antonínem a Bohumilem a navíc jsme zaslechli, že šifrovaná zpráva se vztahuje k tajemství. Vyluštěte následující ŠT:

```
ETWZE GANXM ANHLX KMJTV ENBTI OEHMH TYRTV SHSAE NSWBN
KSOYN HNQSU YNKNB TESOG XTKRA MCRN
```

Slovo „tajemství“ je vhodné přepokládané slovo, protože se v něm opakuje písmeno T. Luštíme tak, že si šifrový text napíšeme po písmenech v pravidelných rozestupech a na malý proužek papíru si napíšeme předpokládané slovo „tajemství“ po písmenech ve stejných rozestupech a opakující se písmeno vhodně zvýrazníme (pastelkami, podtržením). Oběma znakům T musí odpovídat v jednoduché záměně stejný šifrový znak. Ostatní znaky odpovídající písmenům slova „tajemství“ musí být naopak navzájem různé. Tedy asi takto:

```
E T W Z E G A N X M A N H L X K M J T V E N B T I O E H M H T Y R T V S H
                                            T A J E M S T V I
```

```
SAENSWBNKSOYNHNQSUYNKNBTESOGXTKRAMCRN
                       TAJEMSTVI
```

V tomto případě lze umístit slovo „tajemství“ dokonce na dvě různá místa. Vyzkoušejme doplnit převodovou tabulku pro dešifrování nejprve podle prvního umístění:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	J			T			V	M				I
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	S					E						

Tuto neúplnou převodovou tabulku použijeme na šifrový text, a tak získáme následující neúplné řešení:

```
ETWZEGANXMANHLXKMJTVENBTIOEHMHTYRTVSH
TE  T NA INAV   I E TAJEMSTVIVE  E  V

SAENSWBNKSOYNHNQSUYNKNBTESOGXTKRAMCRN
 NTA   A  S AVA    A AJET S  E  NI  A
```

Ještě chybí dost velká část zprávy, ale zdá se, že převodová tabulka odpovídá symetrické relaci. Takže zkusíme doplnit záměny plynoucí ze symetrie a odhadneme další dvojici písmen L a Y:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	J			T			V	M	B		Y	I
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	S				O	E		H			L	

```
ETWZEGANXMANHLXKMJTVENBTIOEHMHTYRTVSH
TE  T NA INAVY  IBEHTAJEMSTVIVEL EHOV

SAENSWBNKSOYNHNQSUYNKNBTESOGXTKRAMCRN
ONTAO JA OSLAVA O LA AJETOS  E  NI  A
```

Po tomto doplnění je už zpráva z velké části rozluštěna a zbývá odhadnout některá slova v objevujícím se OT. Zdá se, že text začíná slovy „Teď čtu napínavý příběh“:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
N	J	Z	W	T		U	V	M	B	R	Y	I
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	S	X		K	O	E	G	H	D	P	L	C

```
E T W Z E G A N X M A N H L X K M J T V E N B T I O E H M H T Y R T V S H
T E D C T U N A P I N A V Y P R I B E H T A J E M S T V I V E L K E H O V

S A E N S W B N K S O Y N H N Q S U Y N K N B T E S O G X T K R A M C R N
O N T A O D J A R O S L A V A F O G L A R A J E T O S U P E R K N I Z K A
```

OT: *Teď čtu napínavý příběh Tajemství Velkého Vonta od Jaroslava Foglara. Je to super knížka.*

Kdybychom si chtěli usnadnit mechanickou práci s posouváním slova „tajemství“ proti znakům ŠT, můžeme použít skript, který sám vyhledává možné pozice předpokládaného slova proti danému ŠT. Skript [5] umožňuje zadat až čtyři různá předpokládaná slova, resp. spojení slov, a posunovat je proti ŠT nezávisle na sobě. Umístění slova „tajemství“ proti textu v zadání tohoto příkladu vidíme na obrázku.

Úloha 10 (jiná literární šifra). Luštěte daný ŠT metodou předpokládaných slov. Předpokládejte slova „jednoduché“ a „v povídce“. Po získání OT zrekonstruujte převodovou tabulku pro šifrování a určete heslo, podle kterého byla sestavena:

```
YTRZJ ZDZFH GYHGH MZDDP MNYFU KYTFG TPAOY XZEYF WQHGQ UTAYN
OYRGD TLPRK YKUXO JTUFG QYTUC WQWDP MNYFU MUBJG QYOGN YVNPF
ZKTGP PCJWN WHGCD ZT
```

Úloha 11 (česká literární šifra). Luštěte následující ŠT metodou předpokládaných slov. Předpokládejte slova „detektiv“ a „kombinovaný“.

Po získání OT zrekonstruujte převodovou tabulku pro šifrování a určete heslo, podle kterého byla sestavena:

```
MXBIR ZILBI DPIMI BMKRE KDJFD XEQAX EXWXY JXEUX AFLIV XLBRF
JIZBI NFRJX WPXRW XLMFQ GIEKA ICQLM IEKLK VJUPQ CIWKM FQLFQ
ZXLMK PIAIE IAIPE XLIWP IRLXB FAIPE FPQZN FQWXD IEQXC IFLCF
WKMUB FDYKE FRXEU LKVJF RULUL MID
```

Příklad 2 – luštění metodou frekvenční analýzy

Luštěte metodou frekvenční analýzy následující text, vztahující se k historii informatiky:

```
ADJDOB MTUD ZD GECOBINY PGUDPGUBN KBOQZQK G AYEGODZID ILGFODT
HGHHGCD EDMDE TDTUFQMBO RQIBUGIB TUFQM RFQ RQLQJOED
GVUQPGUBIND TDTUGADEB UGHVODN PGUDPGUBINYIL KVENIB G EGTUBEBO
NQEIDRIB VEBADFZGOEBLQ RQIBUGID EG RGFEB RQLQE GOD UGND EGTDO
QFBCBEGOEB ZRVTQH OVTUDEB RQOYGOKGHDUBIND TVHTUBUVID
T RDFBQJBINYP LDTODP
```

Než se pustíme do řešení úlohy, je třeba vědět, že v běžném českém textu jsou pěti nejčastěji použitými písmeny E, A, O, I a N (v uvedeném pořadí) [3]. Další může být souhláska T. Naopak téměř vůbec se nevyskytují Q, W a X a velmi malou frekvenci mají F a G. Nejen v českém jazyce, ale i v řadě dalších jazyků se souhlásky a samohlásky poměrně pravidelně střídají. Další pravidla se týkají nejčetnějších bigramů a trigramů (dvojic a trojic po sobě jdoucích písmen), ale zkusme se prozatím obejít bez nich.

Tabulka frekvencí jednotlivých znaků šifrového textu (písmena S, W a X se nevyskytují):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
4	26	3	31	19	8	27	7	16	3	4	6	4
	O		E	I		A						

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
10	17	7	18	10	0	15	19	8	0	0	5	5
			T				N					

Po dosazení převodové tabulky dostáváme:

```
-E-E-O --NE -E AI--O--- -ANE-ANO- -O-T-T- A --IA-E--E --A--E-
-A--A-E IE-EI -E-N-T-O- -T-ONA-O -N-T- --T -T-T--IE
A-NT-ANO--E -E-NA-EIO NA---E- -ANE-ANO----- --I--O A IA-NOIO-
-TI-E--O -IO-E--A-IO-T -T-ONA-E IA -A-IO -T-TI A-E NA-E IA-E-
T-O-OIA-IO ----T- ---NEIO -T--A--A-ENO--E ----NON--E
- -E-OT-O---- -E--E-
```

A vidíme, že střídání samohlásek a souhlásek neodpovídá. Zkusíme tedy místo I psát N, místo N psát T a místo T psát I. Tato záměna se nabízí, protože četnosti odpovídajících si písmen jsou velmi podobné (19, 19 a 18). V upraveném textu se teprve nyní objevují části textu, které dávají smysl, např. tři po sobě jdoucí slova „ale také našel“:

```
-E-E-O --TE -E AN--O--- -ATE-ATO- -O-I-I- A --NA-E--E --A--E-
-A--A-E NEJEN -E-T-I-O- -I-OTA-O -T-I- --I -I-I--NE
A-TI-ATO--E -E-TA-ENO TA---E- -ATE-ATO----- --N--O A NA-TONO-
-IN-E--O -NO-E--A-NO-I -I-OTA-E NA -A-NO -I-IN ALE TAKE NASEL
I-O-ONA-NO ----I- ---TENO -I--A--A-ETO--E ----TOT--E
- -E-OI-O---- -E--E-
```

Na základě výše uvedené výměny a odhadnutí slov získáme upravenou tabulku:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	O		E	N		A						J
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	L		I			S	T					

A protože v okolí středu se zdá být část tabulky jen posunutím abecedy, doplníme zkusmo ještě písmena B, C, K a M na odpovídající pozice a zkusíme doplnit otevřený text:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	O		E	N		A	B	C				J
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
K	L	M	I			S	T					

```
-E-ELO JSTE -E AN-LOCK- MATEMATOK -OLISI- A --NALE-CE C-A-LES
BABBA-E NEJEN SEST-IJOL -ICOTACO ST-IJ --I -I-I-LNE
A-TIMATOCKE SESTA-ENO TAB-LEK MATEMATOCK-C- --NKCO A NA-STONOL
KINCE-CO -NO-E--ALNO-I -ICOTACE NA -A-NO -I-IN ALE TAKE NASEL
I-O-ONALNO ---SIB L-STENO -IL-AL-ABETOCKE S-BSTOT-CE
S -E-OI-OCK-M -ESLEM
```

V převodové tabulce je ještě potřeba opravit chybu, která způsobuje zobrazení slova „NASTONOL“ místo správného „NASTÍNIL“, tedy vyměnit ve druhém řádku převodové tabulky písmena O a I. Pak zkusíme odhadnout další slova v otevřeném textu a doplníme další písmena do převodové tabulky:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
V	I	G	E	N	R	A	B	C	D	F	H	J

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
K	L	M	O	P		S	T	U			Y	Z

```
VEDELI JSTE ZE ANGLICKY MATEMATIK FILOSOF A VYNALEZCE CHARLES
BABBAGE NEJEN SESTROJIL POCITACI STROJ PRO POHODLNE
AUTOMATICKE SESTAVENI TABULEK MATEMATICKYCH FUNKCI A NA-STINIL
KONCEPCI UNIVERZALNIHO POCITACE NA PARNI POHON ALE TAKE NASEL
ORIGINALNI ZPUSOB LUSTENI POLYALFABETICKE SUBSTITUCE
S PERIODICKYM HESLEM
```

Doplněním diakritiky a interpunkce získáme původní OT: *Věděli jste, že anglický matematik, filozof a vynálezce Charles Babbage nejen sestrojil počítací stroj pro pohodlné automatické sestavení tabulek matematických funkcí a nastínil koncepci univerzálního počítače na parní pohon, ale také našel originální způsob luštění polyalfabetické substituce s periodickým heslem?*

Pokud máme k dispozici počítač, je výhodné nahradit prostou frekvenční analýzu četnosti jednotlivých písmen frekvenční analýzou četností bigramů (tj. dvojic po sobě jdoucích písmen), která dává pro texty dostatečné délky ještě přesnější výsledky. Jednoduchou realizaci takového algoritmu, stejně jako další podobné úlohy k luštění najdete na webu autora [5].

Úloha 12 (česká literární šifra). Luštěte následující ŠT metodou frekvenční analýzy. Po získání OT zrekonstruujte převodovou tabulku pro šifrování a určete heslo, podle kterého byla sestavena:

```
TAVAHE FQRA ZA JAZE MPLBPUJURLPY MPTKEID MLIERUIS NYHY IUQRL
ZAKY JAZE KAFZKUJAFQE Z KEID MURPE AXIAHAKRKE BPUIA DLMMAP
USRLPGU MPLBPUJLTUIEDL FUZYGU ILNLH
```

Řešení úloh

Řešení úlohy 1 – jednoduché záměny a kombinatorika

Nejprve určíme počet všech jednoduchých záměn. Každou z nich můžeme popsat tabulkou, která má v prvním řádku abecedu seřazenou v obvyklém abecedním pořadí (A, B, C, ..., Z) a ve druhém řádku jsou písmena uspořádána v libovolném pořadí. Počet různých pořadí, tedy permutací z písmen mezinárodní abecedy je

$$26! = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000,$$

tedy přibližně 403 kvadriliónů.

Šifry atbaš i albam mají společné určité omezení, které však přináší výhodu stejného postupu při šifrování i dešifrování zpráv. Je jím vytvoření dvojic písmen, které se vzájemně zastupují (proto stačí k popisu těchto šifer tabulka s 13 sloupci namísto 26). Opět se nabízí otázka, kolik je takových šifer. Představíme-li si, že postupně volíme jednotlivé dvojice písmen, jde postupně o výběr dvou prvků z 26, 24, 22, ... bez ohledu na jejich pořadí, tedy o kombinace. Navíc nezáleží na tom, zda jsme dvojici přiřadili v prvním, druhém, třetím, ... v předposledním dvanáctém, nebo třináctém kole, takže součin počtů kombinací vydělíme počtem permutací 13 výběrů, tedy můžeme psát:

$$\frac{\binom{26}{2}\binom{24}{2}\binom{22}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{13!} = \frac{26!}{2^{13}\cdot 13!} = 7\,905\,853\,580\,625.$$

Šifer typu atbaš–albam je sice $2^{13} \cdot 13!$krát (přibližně 51biliónkrát) méně, než je všech jednoduchých záměn, ale pořád jich je $7{,}9 \cdot 10^{12}$ (7,9 biliónů).

Řešení úlohy 2 – Polybiova digrafická substituce

ŠT přepíšeme na dvojice číslic a každou dvojici číslic nahradíme písmenem podle šifrové tabulky:

```
14 52 45 34 21 23 24 25 15 22 13 12 24 55 14 15 23 52 35 15
D  U  S  I  C  L  O  V  E  K  A  R  O  Z  D  E  L  U  J  E
43 54 51 11 13 33 24 12 13 45 42 13 51 12 34 21 13 45 51 34
P  Y  T  H  A  G  O  R  A  S  N  A  T  R  I  C  A  S  T  I
51 24 51 34 55 42 13 41 54 45 23 12 24 55 25 13 11 52 13 51
T  O  T  I  Z  N  A  M  Y  S  L  R  O  Z  V  A  H  U  A  T
24 52 11 52 53
O  U  H  U  X
```

OT: *Duši člověka rozděluje Pythagoras na tři části, totiž na mysl, rozvahu a touhu.*

Řešení úlohy 3 – Morseova abeceda

Dekódovaný text: *Ani jeden matematický talent nazmar.*

Řešení úlohy 4 – steganografie a Morseova abeceda

Noty čtvrťové (s plnou hlavičkou) představují telegrafickou tečku, noty půlové (s dutou hlavičkou) představují telegrafickou čárku. Ukrytý otevřený text: *Dalibor.*

Řešení úlohy 5 – Morseova záměna

ŠT: `GZMEO TJTCX KTILO YTAMB TCJLE TZATX KTILO YTEJT CGZTA MATJT CXTZA TRSAQ GZMGO`

OT: `UCITS EBEZP REMYS LENIJ EZBYT ECNEP REMYS LETBE ZUCEN INEBE ZPECN EKONF UCIUS`

OT: *Učit se bez přemýšlení je zbytečné, přemýšlet bez učení nebezpečné. Konfucius*

Řešení úlohy 6 – zednářský kód velký kříž

OT: *Příroda hovoří řečí matematiky. Galileo Galilei*

Řešení úlohy 7 – steganografie a semaforová abeceda

OT: *Semaforová abeceda se používala k signalizaci na moři.*

Řešení úlohy 8 – tři jednoduché záměny

ŠT1: `VWTXV MXBCR HNGML WTXVR GLPMX VRQJL WARGB CS`
Semaforová záměna

ŠT2: `NROLN VLIHU CQDVW ROLNU DWMVL NUBSW RJUDI HP`
Caesarova šifra

ŠT3: `RSYMR OMQTK CANOE SYMRK NEBOM RKLXE SUKNQ TI`
Morseova záměna

OT: KOLIK SIFER ZNAST OLIKR ATJSI KRYPT OGRAF EM

OT: *Kolik šifer znáš, tolikrát jsi kryptografem.*

Řešení úlohy 9 – jednoduchá záměna s nápovědou

Postavy nakreslené v nápovědě jsou postupně Pythagoras (P), Archimedes (E), Giordano Bruno (U), Galileo Galilei (I), Isaac Newton (T), Edmond Halley (A), Luigi Galvani (V), Alfred Nobel (O), Dmitrij Ivanovič Mendělejev (J), Wilhelm Conrad Rentgen (R), Thomas Alva Edison (S), Marie Curie (C) a Albert Einstein (N).

OT: *Řešení je počet postav s cenou pana Nobela.*

Řešení úlohy 10 – jiná literární šifra

Po dosazení předpokládaných slov „jednoduché“ a „v povídce“ dostaneme částečně vyluštěný OT:

```
ED... ...NP OEPOP ....U ..ENI JEDNO DUCHE ...EN .VPOV IDCE.
HE.O. D.U.J EJI.H .DINO VEDI. .V..U ..ENI .I..O VEHO. E..UN
.JDOU U.... .PO.. .D
```

Část OT, kterou jsme zvýraznili a podtrhli, by mohla obsahovat slova „luštění jednoduché záměny“. Po dosazení příslušných písmen dostáváme:

```
ED.A. ALANP OEPOP SALLU STENI JEDNO DUCHE ZAMEN YVPOV IDCET
HE.OL D.U.J EJIZH .DINO VEDI. YVYLU STENI SI..O VEHOT E.TUN
AJDOU U..YT YPO.L AD
```

Opět jsme zvýraznili část textu, jejíž význam odhadneme jako „hrdinové díky vyluštění šifrového textu“. Výsledný OT pak bude:

```
EDGAR ALANP OEPOP SALLU STENI JEDNO DUCHE ZAMEN YVPOV IDCET
HEGOL DBUGJ EJIZH RDINO VEDIK YVYLU STENI SIFRO VEHOT EXTUN
AJDOU UKRYT YPOKL AD
```

Edgar Alan Poe popsal luštění jednoduché záměny v povídce The Gold Bug, jejíž hrdinové díky vyluštění šifrového textu najdou ukrytý poklad.

Pro šifrování byla použita převodová tabulka:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Z	L	A	T	Y	B	R	O	U	K	C	D	E
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
F	G	H	I	J	M	N	P	Q	S	V	W	X

Řešení úlohy 11 – česká literární šifra

Luštíme podobně jako předchozí šifru. Po umístění předpokládaných slov dostaneme:

```
TAKEV .E.KE MDETE KTIVN IM.OM AN..A NA.AB .ANYA .O.E. A.KVO
.E.KE .OV.A .DAV. A.TO. .ENI. E...T ENI.I ..YD. .E.IT O..O.
.A.TI DE.EN E.EDN A.E.D EV.AK O.EDN OD... O..AM EN.A. EO..O
.ITYK OMBIN OVANY .I..O VY.Y. TEM
```

Následně odhadneme další slova a získáme otevřený text: *Také v českém detektivním románu Jana Zábrany a Josefa Škvoreckého Vražda v zastoupení je luštění šifry důležitou součástí děje. Nejedná se zde však o jednoduchou záměnu, ale o složitý kombinovaný šifrový systém.*

Při šifrování byla použitá převodová tabulka:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
X	Y	Z	P	I	V	O	N	K	A	B	C	D
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
E	F	G	H	J	L	M	Q	R	S	T	U	W

Řešení úlohy 12 – z historie informatiky

Frekvenční analýzou ŠT získáme následující tabulku četností znaků a z ní odhadneme písmena E (14), A (13), O (11), I (10) a N (10). Podle střídání souhlásek a samohlásek a skutečnosti, že slova v textu mohou poměrně často končit samohláskou Y, odhadneme, že písmena Y a Z se při šifrování nezmění:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	3	0	4	10	4	2	4	9	5	7	11	7
E				I							O	
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2	0	10	3	7	2	3	13	1	0	1	5	7
	N						A				Y	Z

ŠT/OT:

```
TAVAHE FQRA ZA JAZE MPLBPUJURLPY MPTKEID MLIERUIS NYHY IUQRL
.E.E.I ...E ZE .EZI .NO.NA.A.O.Y .N..I.. .O.I.A.. .Y.Y .A..O

ZAKY JAZE KAFZKUJAFQE Z KEID MURPE AXIAHAKRKE BPUIA DLMMAP
ZE.Y .EZI .E.Z.A.E..I Z .I.. .A.NI E..E.E...I .NA.E .O..E.

USRLPGU MPLBPUJLTUIEDL FUZYGU ILNLH
A..ON.A .NO.NA.O.A.I.O .AZY.A .O.O.
```

Zkusíme odhadnout začátek OT: „Věděli jste, že mezi“. Tím získáme další vyplněná pole v převodové tabulce. To nás navede také k opravě chybně umístěného N a umístění R:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
E				I	J				M	N	O	
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
		R	S	T		V	A	D			Y	Z

ŠT: TAVAHE FQRA ZA JAZE MPLBPUJURLPY MPTKEID MLIERUIS NYHY

OT: VEDELI JSTE ZE MEZI <u>.RO.RAMATORY .RVNI.. .O.ITA.. .Y.Y</u>

A hned typujeme pokračování OT: „programátory prvních počítačů byly“. To umožní další doplnění tabulky a rozkrytí OT.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
E	G		H	I	J		L	C	M	N	O	P
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B		R	S	T	U	V	A	D			Y	Z

ŠT: TAVAHE FQRA ZA JAZE MPLBPUJURLPY MPTKEID MLIERUIS NYHY

OT: VEDELI JSTE ZE MEZI PROGRAMATORY PRVNICH POCITACU BYLY

OT: *Věděli jste, že mezi programátory prvních počítačů byly často ženy? Mezi nejznámější z nich patří excelentní Grace Hopper, autorka programovacího jazyka COBOL.*

Literatura

[1] Hubálovský, Š., Musílek, M.: Počítačová bezpečnost ve výuce informatiky 1. *MFI* **20**, 3 (2010), s. 175.

[2] Hubálovský, Š., Musílek, M.: Počítačová bezpečnost ve výuce informatiky 2. *MFI* **20**, 6 (2011), s. 370.

[3] Kolektiv: *Frekvence písmen, bigramů, trigramů, délka slov.* Centrum zpracování přirozeného jazyka Fakulty informatiky Masarykovy univerzity, Brno. http://nlp.fi.muni.cz/cs/Frekvence_pismen_bigramu_trigramu_delka_slov [cit. 2011-04-15].

[4] Kolektiv: *Vzdělané postavičky.* http://technoplaneta.cz/2009/ukoly/ukol-1-3-vzdelane-postavicky/ [cit. 2011-04-15].

[5] Musílek, M.: *Šifry a kódy.* http://www.musilek.eu/michal/sifry.html?menu=mat [cit. 2011-04-15].

[6] Singh, S.: *Kniha kódů a šifer.* 2. vyd., Argo a Dokořán, Praha, 2009.

[7] Šťastný, J.: *Variace na semafor.* http://amber.feld.cvut.cz/fpga/software/morzeovka/morzeovky.html [cit. 2011-04-15]

[8] Vondruška, P.: *Kryptologie, šifrování a tajná písma.* 1. vyd., Albatros, Praha, 2006.

Dělitelnost bez čísel

Karel Pazourek, MFF UK a Gymnázium Přípotoční, Praha [1]

Abstrakt. *Dělitelnost přirozených čísel patří mezi tradiční témata školské matematiky, rovněž i mezi častá témata úloh Matematické olympiády a dalších soutěží pro talentované žáky. Dělitelnost můžeme provádět i v jiných oborech, ať už v celých číslech, polynomech nebo v geometrii na úsečkách.*

Tento článek si klade za cíl ukázat možnosti rozšíření dělitelnosti přirozených čísel do jiných oborů, které poskytuje další náměty pro práci s talentovanými žáky. V krátkosti připomeneme dělitelnost polynomů, dále přejdeme k dělitelnosti v geometrii. Učiníme tak pomocí dvou příkladů, o paprsku v pravoúhelníku a pravoúhelníkových keltských uzlech.

1. Dělitelnost polynomů

1.1. Od přirozených čísel k polynomům

Od dělitelnosti přirozených čísel můžeme snadno přejít k dělitelnosti čísel celých. Stejně tak můžeme přejít k dělitelnosti polynomů, ve skutečnosti to často děláme, aniž o tom příliš uvažujeme.

Píšeme-li kupříkladu možné tvary přirozených čísel podle toho, do jaké zbytkové třídy po dělení pěti patří, obdržíme výrazy

$$5k, \quad 5k+1, \quad 5k+2, \quad 5k+3, \quad 5k+4$$

nebo

$$5k-2, \quad 5k-1, \quad 5k, \quad 5k+1, \quad 5k+2,$$

což záleží na použití v konkrétní situaci. Uvedené výrazy jsou přitom polynomy, i když je chápeme jako obecný zápis čísla, tedy jakási „obecná čísla“. Podobně, pokud obecně odvozujeme znak dělitelnosti jedenácti nebo devíti (třemi), pracujeme s polynomy. Rovněž se s polynomy můžeme setkat při práci s číselnými soustavami.

Úloha: Pro který základ Z je číslo $(1320)_Z$ dělitelné šesti?

[1] e-mail: kajakajakaja@seznam.cz

Řešení. Zápis čísla v zadání má smysl pro $Z \geq 4$. Rozepíšeme-li si dané číslo, obdržíme

$$(1320)_Z = 1 \cdot Z^3 + 3 \cdot Z^2 + 2 \cdot Z + 0 = Z^3 + 3Z^2 + 2Z = Z(Z+1)(Z+2),$$

tedy součin tří po sobě jdoucích čísel. Dané číslo je vždy sudé i dělitelné třemi, tudíž je dělitelné šesti. Řešením jsou tak všechny základy $Z \geq 4$.

1.2. Dělitelnost polynomů

Dělitelnost polynomů používá do značné míry stejné nebo analogické pojmy jako dělitelnost čísel (např. dělitel, násobek, společný dělitěl, společný násobek, ale prvočinitel a prvočíslo, rozklad na prvočinitele a prvočíselný rozklad). Rovněž se setkáváme s obdobnými metodami a vlastnostmi, některé však přibývají. Klíčovou roli pak hrají kořeny polynomů a řešení polynomických rovnic. Připomeňme jednoduchou ekvivalenci.

Tvrzení: Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. Číslo c je kořenem polynomu $P(x)$.
2. Polynom $x - c$ dělí polynom $P(x)$.
3. Číslo c je kořenem rovnice $P(x) = 0$.
4. Graf polynomické funkce $y = P(x)$ protíná osu x v bodě c.

Uvedená ekvivalence tak může být základem výuky řešení polynomických rovnic, a to i vyšších stupňů.

1.3. Řešení polynomických rovnic

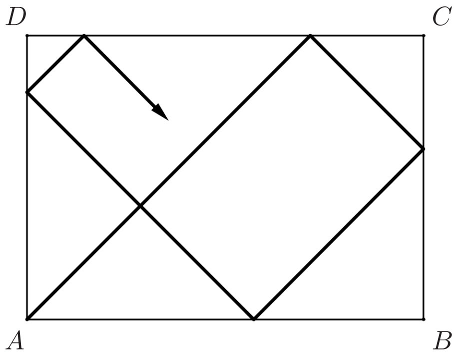
Talentovaným žákům dělitelnost polynomů tak může poskytnout nástroj pro řešení polynomických rovnic. Například Eukleidův algoritmus pro polynomy umožňuje vyhledávat společné kořeny dvou a více polynomických rovnic. Pomocí Hornerova schématu ověříme, zda je dané číslo c kořenem, a napíšeme podíl po vydělení polynomem $x - c$ i zbytek.

Tato témata se například probírají v kurzu Matematika I projektu Talnet [5], který vzdělává děti nadané v přírodních a technických vědách a matematice a děti se zájmem o ně. Účastníkům podle dosavadních zkušeností nedělala problémy je pochopit a úspěšně je použít v úlohách. Kurz a jeho průběh je popsán v článku [2].

2. Paprsek v pravoúhelníku

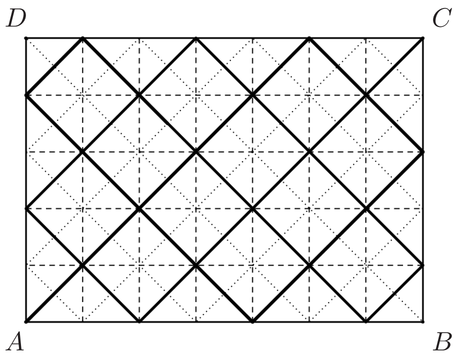
Následující problém ilustruje vztah dělitelnosti a geometrie – souměřitelnost úseček.

Představme si pravoúhelník $ABCD$, z jehož vrcholu A pod úhlem $\alpha = 45°$ vystřelíme „ideální" paprsek (obr. 1). Dopadne paprsek do některého jiného vrcholu pravoúhelníku?



Obr. 1: Paprsek v obdélníku

Uvažme nejprve, že strany pravoúhelníku jsou celočíselné. Pak stačí do pravoúhelníku umístit čtvercovou síť jako na obr. 2.



Obr. 2: Pravoúhelník, paprsek a čtvercová síť

Vidíme, že paprsek se pohybuje pouze po úhlopříčkách čtverců sítě. Protože čtverců sítě je konečně mnoho a paprsek se mimo vrcholy na stranách pravoúhelníku $ABCD$ vždy odráží, musí paprsek dopadnout do některého z vrcholů pravoúhelníku.

Podobně lze řešit problém i v situaci, kdy strany pravoúhelníku jsou racionální, $|AB| = \frac{p}{q}$ a $|BC| = \frac{r}{s}$. Jednotková čtvercová síť tentokrát nepomůže. Pokud však zvolíme za délku strany čtverce sítě $\frac{1}{qs}$, pak paprsek bude opět procházet po úhlopříčkách čtverce sítě. Použitá čtvercová síť může být i zbytečně jemná, stačí vzít stranu čtverce sítě dlouhou $\frac{1}{\mathrm{n}(q,s)}$, kde $\mathrm{n}(q, s)$ značí nejmenší společný násobek čísel q, s.

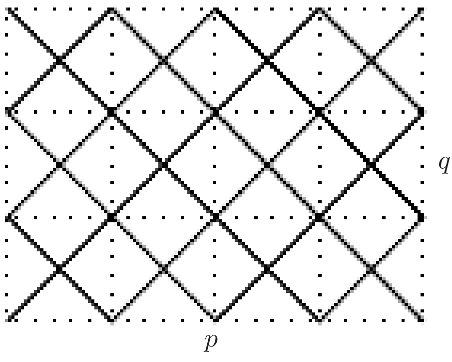
Uvažme případ, kdy strany pravoúhelníku $ABCD$ jsou iracionální. Pak úloha řešení mít může i nemusí. Např. pro $|AB| = 6\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{2}$ můžeme zvolit za jednotku $\sqrt{2}$. Pokud $|AB| = \sqrt{3}$, $|BC| = \sqrt{5}$, pak paprsek nikdy dalšího vrcholu pravoúhelníku $ABCD$ nedosáhne, neboť úsečky o délkách $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nemají společnou míru, jsou nesouměřitelné.

Podobně by dopadl případ, kdy jedna strana, například AB, pravoúhelníku $ABCD$ by byla racionální a druhá strana, například BC, by byla iracionální.

Úlohu lze také zobecnit změnou úhlu α, pod kterým je vyslán paprsek z vrcholu A. Pak řešení závisí na na tangentu úhlu α.

3. Keltské uzly

Podobnou aplikací dělitelnosti v geometrii najdeme v úlohách o pravoúhelníkových keltských uzlech, které jsou popsány v článcích [3] a [4]. Pracujeme opět se zjednodušeným obrazcem, příklad ukazuje obr. 3.



Obr. 3: Zjednodušený keltský uzel o rozměrech p, q

„Provázky" uzlu mohou být dvou druhů. Buď začínají a končí ve vrcholech opsaného pravoúhelníku (označujeme je jako cesty), anebo je tvoří jediná smyčka (označujeme je jako cykly). Samotná úloha spočívá v nalezení délek cest a cyklů a jejich počtu v uzlu v závislosti na číslech p, q, která udávají rozměry opsaného pravoúhelníku. Problém lze řešit dvěma způsoby. Geometrický způsob využívá osových souměrností, podobně jako úlohy o pohybu kulečníkové koule. Druhá možná metoda využívá dělitelnosti, přesněji společných násobků čísel. Podstatné je, že úvahy v obou postupech jsou obdobné, ač jsou vysloveny v jazycích různých matematických disciplín. Vrcholnou úlohou je pak odvození počtu cyklů v uzlu jako výraz

$$\frac{2pq - 2\,\mathrm{n}(p,q)}{2\,\mathrm{n}(p,q)},$$

který se podle známého vzorce

$$pq = \mathrm{n}(p,q) \cdot \mathrm{D}(p,q)$$

zjednoduší na výraz

$$\mathrm{D}(p,q) - 1,$$

kde $\mathrm{D}(p,q)$ značí největšího společného dělitele čísel p, q.

4. Závěr

Dělitelnost je ve školské matematice pevně svázána s přirozenými čísly. Její metody lze však použít i v jiných oborech, jako jsou celá čísla nebo polynomy. Můžeme se s ní setkat i v geometrii při práci s nesouměřitelnými úsečkami, ostatně geometricky byla dělitelnost popsána už v Eukleidových Základech. Další geometrické interpretace problémů o dělitelnosti lze nalézt například v knize [1].

Literatura

[1] Křížek, M, Sommer, L, Šolcová, A.: *Kouzlo čísel.* Academia, Praha, 2009.

[2] Pazourek, K., Šír, Z.: Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných žáků II: Polynomy. In: Bastl, B, Lávička, M.: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Vydavatelský servis, Plzeň, 2008. s. 231–235.

[3] Pazourek, K.: O keltských uzlech. *MFI* **20**, 5 (2011), s. 257–265.

[4] Pazourek, K.: Keltské uzly a dělitelnost. *MFI* **20**, 7 (2011), s. 392–398.

[5] *Talnet.* [online] `http://www.talnet.cz/` [cit. 2011-04-13].

Matematika nejen pro zlost

Karel Popp [1]

ABSTRAKT. *Po zmínce o různých druzích hádanek následuje popis některých deskových her a způsobů, jak pořádat turnaje různého typu. Celý text je prostoupen poznámkami o použitelnosti ve výuce informatiky a matematiky, zvláště teorie grafů a kombinatoriky.*

1. Úvodem

Téma Matematika nejen pro zlost v sobě zahrnuje hádanky, hry a hlavolamy. Můžeme začít hádankami z Alšova Špalíčku. Jsou známy hádanky z různých kultur, i starších než z antiky. Můžeme pokračovat: „Co je to? Je to čtyřúhelník v rovině. Jeho úhlopříčky jsou stejně dlouhé a navzájem se půlí. Je to pravoúhelník.“ Pak můžeme předložit kresbu mechanizmu, který otevírá a zavírá dveře trolejbusu. Je založen na vlastnosti právě zmíněné.

Různých druhů hádanek je nepřeberné množství. Některé se objevují i v učebnicích nebo v monografiích. V některých z nich se má uhádnout, jak danými prostředky dosáhnout daného cíle. Kdo by neznal hádanku o převozníkovi, koze, zelí a vlku? V kapitole o orientovaných grafech ji využil Claude Berge [1]. Za zvlášť zapeklitou hádanku však můžeme považovat nalezení budovy s adresou Hradec Králové, Švendova 13.

O hádanky není nouze v dějinách, v kriminalistice (vražda, sebevražda, nešťastná náhoda) ani v medicíně (diagnóza, terapie, studená klinika). Luštíte rádi šifry? Za hádanky lze považovat i rovnice nebo dosud nevyřešené problémy v matematice, například Goldbachovu domněnku. Významným krokem k řešení bývá tak šikovně položená otázka, že spousta dosud uvažovaných možností odpadne [13]. Pěkné hádanky vystupují i v paradoxech. Např.: Krokodýl, kluk a jeho máma pradlena. Sami určitě znáte hádanky typu „Jak se chytá...“ nebo „Jaký je rozdíl...“. Hádankou může být i vyhrávající tah nebo pokus o záchranu v nějaké deskové hře i jinde.

[1] e-mail: poppk@post.cz

2. Deskové hry

Nim

Na začátku položíme na stůl hromádku s libovolným počtem x zápalek nebo jiných předmětů. Dva hráči se střídají. Kdo je na tahu, odebere jednu, nebo dvě zápalky. Kdo nemá co vzít, prohraje. Není dovoleno vzdát se tahu (nehrajeme go).

Co tím procvičujeme? Dělitelnost třemi. Je-li číslo x dělitelné třemi, pak vyhraje druhý hráč tím, že vždy dobere, co chybí do třech z toho, co vzal jeho předchůdce. Jinak vyhraje první hráč tím, že na začátku odebere zbytek vzniklý při dělení čísla x třemi. Tím se role obrátí.

Obměny

Cit pro analogii můžeme procvičovat tím, že slíbíme novou hru a místo zápalek užijeme pecky, šroubky nebo figurky. Pochválíme toho, kdo se první ozve, že to není nic v podstatě nového. Pak začneme s prázdnými jamkami rovněž v počtu x. Hráč na tahu zaplní jednu nebo dvě jamky kuličkami, kterých je na počátku po ruce dostatečné množství.

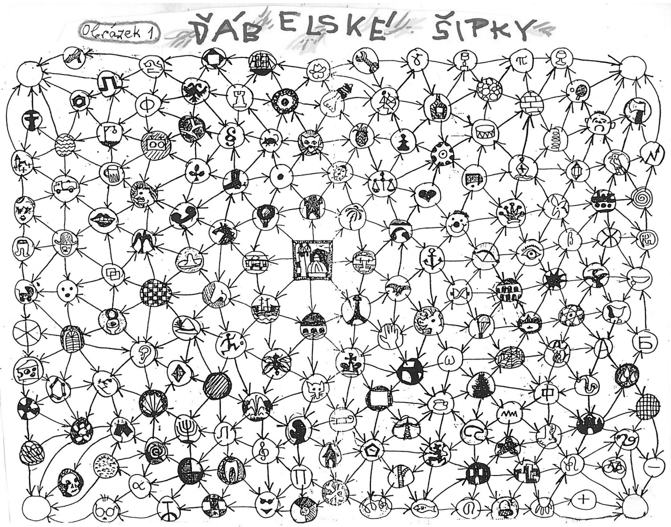
Další obměna tkví v tom, že na pás postavíme dvě figurky, každou pro jednoho hráče, a mezi nimi ponecháme x volných políček. Hráč na tahu posune svou figurku o jedno, nebo o dvě políčka ve směru proti protivníkově figurce. Figurky se přeskočit ani sebrat nesmějí. Hra končí tím, že se zablokují. Co se změní, jestliže místo toho budeme sklápět původně x vztyčených prstů? Můžeme také sestrojit orientovaný graf, ve kterém různému počtu zápalek, sklopených prstů, zaplněných důlků nebo volných políček mezi figurkami budou odpovídat různé vrcholy a tahům šipky. Takový graf bude představovat celou hru, jednu partii bude reprezentovat cesta z vrcholu pro číslo x do vrcholu pro nulu.

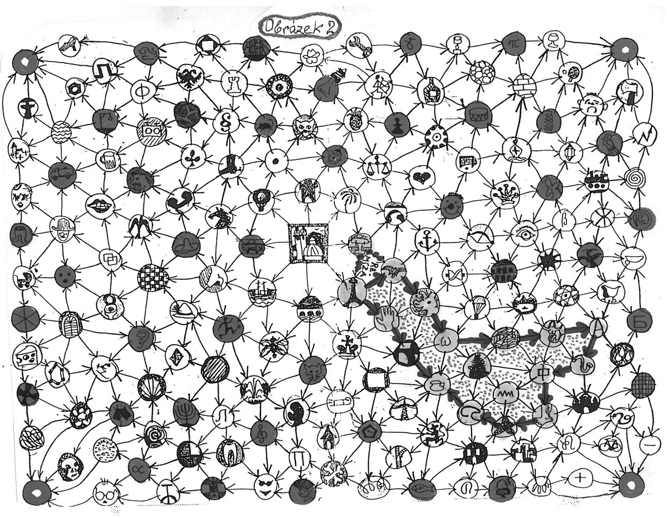
Jindy dovolíme hráči na tahu odebrat jednu, dvě, nebo tři zápalky. Všimneme si, že se nyní uplatní dělitelnost čtyřmi. Dovolíme-li odebírat $1, 2, 3, \ldots, n$ zápalek, rozhodne o vítězi dělitelnost čísla x číslem $n+1$. (Odbíhám: Zbytek po dělení sedmi je možno procvičovat na dnech v týdnu. Očíslujeme-li klávesy, pak všechna géčka budou mít stejný zbytek po dělení dvanácti.) K odebírání můžeme dovolit i jiné, řekněme děravé množiny, třeba $\{1, 2, 3\}$ (obr. 3).

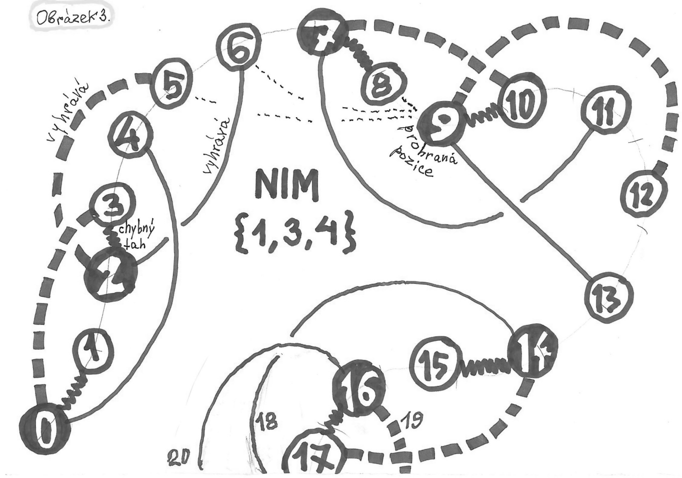
Vyhrávající strategie se pro ni najde způsobem popsaným v následujícím odstavci. Jiná varianta vznikne, prohraje-li, kdo vezme poslední zápalku.

Ďábelské šipky

Tato hra byla uveřejněna v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální [6], abychom si uvědomili, že každou deskovou hru jistého typu lze znázornit jistým typem orientovaného grafu, ve kterém pozicím odpovídají vrcholy a tahům šipky (obr. 1, 2).







Každá pozice, kde hra končí, je znázorněna stokem, to jest vrcholem, do kterého nějaké šipky vedou, aspoň jedna, ale odkud žádná šipka nevede ven. Platí-li pravidlo, že prohraje, kdo nemá tah, pak tyto stoky prohlásíme za prohrané vrcholy. Obarvíme je červeně, zanechávajíce uprostřed bílou skvrnu. Dále ve shodě se zkušeností dobrých hráčů definujeme rekurentně, že každý vrchol je vyhraný, odkud vede aspoň jedna šipka do nějakého vrcholu prohraného, protože hráč na tahu může uvrhnout svého soupeře do záhuby. Takové vrcholy barvit nebudeme. Prohraný je naproti tomu každý vrchol, odkud vedou všechny šipky do vrcholů vyhraných, protože hráč na tahu musí nechat dosti chytrého protivníka vyhrát. Ty obarvíme červeně plně. Tato dvě pravidla umožňují často rozhodnout již na počátku hry, kdo vyhraje, ovšem za předpokladu, že každý hráč na tahu učiní nejlepší možný tah. Za jistých okolností bude množina prohraných vrcholů totožná s jádrem grafu a Grundyho funkce bude fungovat tak, jak zmíněná dvě pravidla žádají. Jedna partie odpovídá cestě do stoku z vrcholu odpovídajícího počáteční pozici. Tam na počátku hry postavíme jedinou figurku nebo položíme jediný peníz, kterým táhne hráč na tahu po šipce do sousedního vrcholu. Oba hráči užívají téže figurky. Vzdát se tahu není dovoleno. Toto jsou samozřejmosti, které si uvědomuje každý dobrý hráč nejen této hry nebo šachu, ať už používá terminologie teorie grafů nebo ne, ať se mu líbí nebo ne.

Jde o princip společný spoustě deskových her tak, jak o tom přednášel Zermelo již roku 1912 [9]. V české literatuře tento princip připomíná Demel [5]. Nedovedu si představit, jak by se bez těchto znalostí obešli programátoři deskových her, třeba šachu [14]. Tohoto principu je možno užít například při rozboru šachové partie, chceme-li dokázat nebo vyvrátit korektnost oběti figury.

Graf může jako část obsahovat místo, kde je možno běhat dokola (silná komponenta), ale jež je možno opustit jen vstupem do pozice vyhrané pro soupeře. To se hodí k důkazu remízy opakováním pozic. Remízové body obarvíme zeleně, šipky tohoto bludiště vyznačíme tlustě. Ani černě-šedě-bílé provedení nebude vtipnému čtenáři činit potíže. Chceme-li předvést jádro a Grundyho funkci, zvolíme graf bez takových částí.

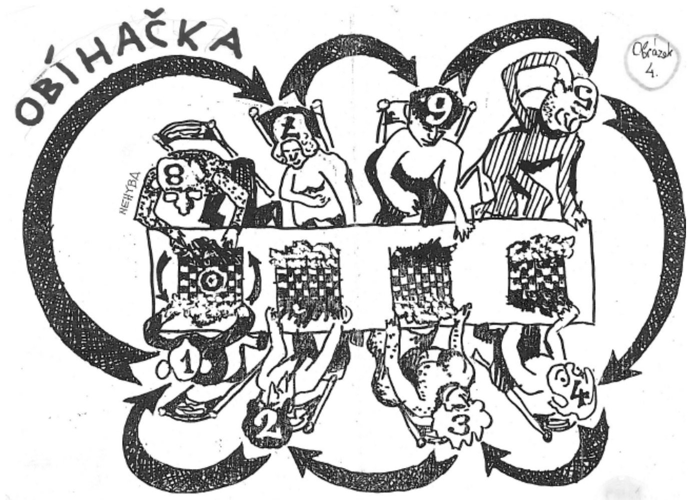
Hry, ušité na míru

Hlavní myšlenku předvedu na hamiltonovské kružnici, neboli na problému obchodního cestujícího. Hamiltonovskou kružnicí se rozumí uzavřená cesta po hranách neorientovaného grafu, která proběhne všechny jeho vrcholy každý jednou s výjimkou toho, kde cesta začíná i končí. Některý graf takovou kružnici má, jiný ne. Abychom získali potřebný postřeh a intuici v tomto směru, můžeme si vymyslet a hrát například hru Okruž. Na počátku je dáno několik izolovaných vrcholů. Hráč na tahu přidává hrany podle předem stanovených pravidel. Zvolí například vrchol, kde to ještě jde, třeba opakovaně, a přidá jednu, nebo více incidenčních hran, tj. takových, pro které je zvolený vrchol jedním z konců. Kdo první vytvoří hamiltonovskou kružnici tohoto grafu, ten vyhraje, pokud ji vyznačí. Jinak ponechává výhru soupeři, pokud ji soupeř nepřehlédne.

Hledáním hamiltonovských kružnic a zejména podmínkami jejich existence se zabývají také někteří čeští matematikové. Ve svém výzkumu užívají počítače. Kdyby to zaujalo například pořadatele nebo řešitele matematické olympiády, jejich učitele nebo přátele natolik, že by chtěli vědět víc, než je v učebnici, kterou mají po ruce, nebo kdyby chtěli vědět, kde se tato teorie uplatní, věděli by na koho se obrátit. Lukáš Toth zpracoval některé postřehy a poznatky ve své seminární práci o hře Okruž asi roku 2005, když končil svá studia na gymnáziu v Jírovcově ulici v Českých Budějovicích. Na této škole, v Jevíčku i jinde jsem kdysi se studenty nejen tuto hru hrával.

Turnaje

Na svých toulkách jsem se mimo jiné naučil pořádat turnaj, kde hraje každý s každým jednou způsobem nazvaným „obíhačka“ (obr. 4). Dával bych mu přednost před Bergerovými nebo Schurigovými tabulkami, protože si zopakujeme a procvičíme permutace i jejich skládání.



Máme-li například 8 hráčů, pak po sedmi kolech turnaj končí. Kdybychom si přesedli ještě jednou, pak by všichni seděli jako na začátku. Poučení: sedmá mocnina permutace, prováděná po každém kole, se rovná identitě, čili totožnosti. Počet zápasů je $8 \cdot (8-1)/2 = 28$. Dokázali byste z tabulky získaných bodů určit, kdo koho porazil a kdo s kým hrál nerozhodně? Pozor, někdy se dává za výhru bod a za remízu půl, jindy za výhru 3 body, za remízu 1 bod a za prohru v každém případě nic.

Zahrajme si pro změnu turnaj vylučovacím způsobem, kde po každém zápasu (bez ohledu na to, ve kterém kole) jeden hráč vypadne. To se děje tak dlouho, až zbude jen vítěz. Jestliže jsme začali s h hráči, pak jsme sehráli $h-1$ zápasů. Pokud se hraje na kola, nazývaná od konce finále, semifinále, čtvrtfinále, ..., je počet zápasů v každém kole geometrickou posloupností, začínající jedničkou a každý její člen je dvojnásobkem předešlého. Pokud počet hráčů na začátku je nějakou mocninou dvou, například $16 = 2^4$, pak, kdyby se nehrálo o tak zvané 3. místo, bude počet zápasů $16 - 1 = 2^4 - 1 = 15$ ve shodě s učebnicí. Při jiném druhu turnaje se uplatní latinské čtverce [7]. Proč jako cvičení ve škole neučit žáky pořádat turnaje? Někteří se tomu naučí v šachových klubech. Pokud se tak nestalo, nesmírně bych ocenil, kdyby si těchto možností všimli učitelé a autoři učebnic, náležitě toho využili a dali mi o tom vědět.

3. Závěrem

Připomínám, že diskrétní matematika, to jest kombinatorika a teorie grafů, nabízí spoustu jiných neméně zajímavých námětů a problémů, kolem nichž se rojí nové objevy, a že tento vývoj je těžko sledovat v ústraní a v pohodlí s pomocí zastaralých učebnic. Radost z objevu odkluše do dáli, zatímco důležitých aplikací stále rychleji přibývá. Za zájem o takovýto způsob studia grafů pomocí her speciálně navržených jako úvod do různých kapitol diskrétní matematiky vděčím hlavně různým vysokoškolským učitelům Univerzity v Salcburku, zejména profesoru Gerlovi, a dále některým slovenským pedagogům a mnohým českým studentům, které jsem nejen zde zmíněné, ale i mnohé jiné hry naučil, a kteří mě brzy poráželi a z nichž dnes někteří učí na Matematicko-fyzikální fakultě. Pokusme se sestavit seznam některých badatelů, výzkumných úkolů a pojmů, pro které se hry dají střihnout na míru: Ramseyova teorie, Spernerovo lemma, arrangements a čiapočnica, rozklady množin, Fibonacciho posloupnost nebo objekty z krychlí, kterých je na našich základních školách dost. Jsou dostatečně využívány? Někteří známí autoři ve svých knihách při vysvětlování různých pojmů rovněž užívají hry sprouts, hex i s vhodnou obměnou a jiné [11]. Vyhrávajícím strategiím se obzvlášť zevrubně věnuje kniha [2]. Často od hlavolamů, her i hádanek vede cesta k objevům. Stojí rovněž za zamyšlení, co dnešní žáky baví, co hrají spontánně a jakou to má výukovou a výchovnou hodnotu. Někteří zuřivě mastí karty, vymýšlejí vlastní hry, a jsou ochotni tomu naučit třeba i své učitele. Hrozí nebezpečí, že uhnou, bude-li se někdo snažit nachytat je na jejich dnes oblíbenou hru a pak odtud dotáhnout k nějaké formuli z kombinatoriky?

Významem her pro zpestření výuky se u nás zabývají například Václav a Jitka Fořtíkovi [3, 4]. Vzdělávací programy, obsahující i deskové hry, nabízí pod názvem Matematika v běžném životě Národní institut pro další vzdělávání [12]. Potěšilo by mě, kdyby i jiné učitelky a učitelé, kteří nějaké zajímavé hry znají, častěji předvedli, co dovedou, a všímali si turnajů šachu i jiných her, například go. Tato hra je tvrdým oříškem pro programátory. Olympiádu duševních sportů pořádá Pražský klub go, dosažitelný na webovské adrese Česko-japonské společnosti `office@japan.cz`. Dalšími pořadateli soutěží i jiných než šachy nebo go jsou: Klub deskových her Paluba, `paluba@hrejsi.cz`, nebo Dr. Mazuch, `mazuch@avekont.cz`.

Někteří učitelé programování dávají za cvičení napsat programy hrající různé deskové hry. K tomu se vyplatí znát vyhrávající strategii nebo aspoň taktické triky. Tříbí se smysl pro algoritmy a nakoukne se i do teorie složitosti [10]. Takové znalosti a dovednosti se mohou hodit i pro jiné účely. Známe-li více vyučovacích metod pro týž pojem, je větší naděje, že se najde ta, která lépe vyhovuje určitému žáku nebo učiteli (žákyni, učitelce).

Kromě zmíněných osob děkuji za pomoc vedení i zaměstnankyním Státní vědecké knihovny v Hradci Králové a Antonínu Jančaříkovi za darovanou brožuru [8], kde najdete další odkazy.

Literatura

[1] Berge, C.: *Théorie des Graphes et ses Applications.* Dunod, Paris, 1959.

[2] Berlekamp, E. R., Conway, J. H., Guy, R. K.: *Winning Ways for your Mathematical Plays.* Academic Press, London, 1982.

[3] `www.centrumnadani.cz`

[4] Fořtík, V., Fojtíková, J.: *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností.* Portál, Praha, 2007.

[5] Demel, J.: *Grafy.* SNTL, Praha, 1988.

[6] Doseděl, O., Fiala, J., Popp, K.: Hry, grafy, algoritmy. Články na pokračování. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, Praha, 1992.

[7] Gik, E. Ja.: *Matematika na šachmatnoj doske.* Moskva.

[8] Jančařík, A.: *Hry v matematice.* PedF UK, Praha, 2007.

[9] König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

[10] Kučera, L.: *Kombinatorické algoritmy.* SNTL, Praha, 1983.

[11] Matoušek, J., Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, Praha, 2000.

[12] `www.nidv.cz`

[13] Polya, G.: *How to solve it?* Princeton University Press, 1945.

[14] Shannon, C. E.: Programming a Computer for Playing Chess. *Philosophical Magazine* Ser. 7, **41**, 314 (March, 1950).

Matematické sústredenie pre riešiteľov Matematickej olympiády v kategórii Z9 *

Alena Prídavková [1], Marek Mokriš [2], Pedagogická fakulta PU v Prešove

Abstrakt. *V Prešovskom kraji je každoročne organizované päťdňové matematické sústredenie zamerané na odbornú prípravu riešiteľov Matematickej olympiády v kategórii Z9. Akcia je organizovaná v spolupráci s JSMF a lektorskú činnosť vykonávajú odborníci z oblasti didaktiky matematiky. V príspevku prezentujeme obsah a štruktúru vyučovacích modulov.*

Úvod

Matematická olympiáda (MO) je súčasťou výchovno-vzdelávacieho procesu na základných školách [1]. Jedným z poslaní súťaže je vyhľadávať žiakov talentovaných v matematike a podporovať ich odborný rast. Úlohy zaradené do jednotlivých kôl súťaže v kategóriách pre základné školy predstavujú svojim charakterom prostriedok identifikácie žiakov s nadaním na matematiku. Pre žiakov základných škôl je na Slovensku vytvorených šesť kategórií od Z4 do Z9, tj. pre žiakov od 4. do 9. ročníka ZŠ a im zodpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. V každej z kategórií sú organizované dve kolá – v kategórii Z4 domáce a školské, v kategóriách Z5 až Z8 je to domáce a obvodné kolo. Vyvrcholením súťaže v kategórii Z9 je tretie – krajské kolo, organizované na úrovni samosprávnych krajov na Slovensku. Počet účastníkov krajského kola určuje krajská komisia v príslušnom kraji. V Prešovskom kraji je počet postupujúcich do tretieho kola zvyčajne v rozmedzí 50 až 60 žiakov. Výber je realizovaný na základe dosiahnutých výsledkov v obvodnom kole. V každom ročníku súťaže je stanovený minimálny počet bodov dosiahnutý v obvodnom kole potrebný pre postup do krajského kola. Navyše sú z každého obvodu pozvaní minimálne dvaja úspešní riešitelia druhého – obvodného kola. Pred organizáciou krajského kola je každoročne usporiadané matematické sústredenie pre všetkých žiakov postupujúcich z obvodného kola.

---

[1] e-mail: alena.pridavkova@pf.unipo.sk

[2] e-mail: marek.mokris@pf.unipo.sk

* Príspevok vznikol ako súčasť riešenia projektu MŠ SR KEGA 165-016PU-4/2010 Matematika pre život – cesty rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy v kontexte medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.

Z histórie sústredenia

Myšlienka organizovať matematické sústredenie pred krajským kolom Matematickej olympiády v kategórii Z8 (neskôr Z9) vznikla v školskom roku 1993/1994. V ďalších ročníkoch súťaže bolo podujatie pripravované pre žiakov bývalého východoslovenského kraja. V roku 1996, kedy prebiehal 45. ročník MO, došlo k novému územnému členeniu Slovenska a východoslovenský kraj bol rozdelený na kraje dva – Košický a Prešovský. V nasledujúcich troch rokoch bolo sústredenie organizované členmi krajskej komisie MO v Prešovskom kraji a zúčastňovali sa ho aj žiaci Košického kraja. Od roku 1999 sa akcie zúčastňujú len žiaci zaradení v kraji Prešovskom. Do 47. ročníka MO bol tábor organizovaný pre riešiteľov súťaže v kategórii Z8. V školskom roku 1998/1999 vznikla kategória Z9, ale z dôvodu nízkeho počtu úspešných žiakov v druhom kole súťaže sústredenie nebolo organizované. Od roku 2000 bola akcia realizovaná pre účastníkov Matematickej olympiády v kategórii Z9.

Sústredenie je organizované pod záštitou Jednoty slovenských matematikov a fyzikov a Krajskej komisie MO v Prešovskom kraji. Lektorskú činnosť vykonávajú vysokoškolskí učitelia z Katedry matematickej edukácie Pedagogickej fakulty PU v Prešove. Aj napriek tomu, že sústredenie je súčasťou MO, ktorej vyhlasovateľom je Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky, nie je žiadnym spôsobom finančne podporovaná. Z toho dôvodu sú všetky náklady spojené s účasťou na podujatí hradené buď zo strany rodičov žiakov alebo vo väčšine prípadov z prostriedkov školy, ktorú konkrétny žiak navštevuje. Pokiaľ ide o lektorskú činnosť, tú vykonávajú učitelia na báze dobrovoľnosti.

Program matematického sústredenia

Akcia je organizovaná zvyčajne v škole v prírode, v zariadení rekreačného typu. Od jeho vzniku až do roku 2008 bola miestom organizácie sústredenia Škola v prírode v Thurzove neďaleko Gelnice. V ostatných dvoch rokoch je tábor usporadúvaný v rekreačnom zariadení v Chmeľovej pri Bardejove. Akcia je realizovaná zvyčajne týždeň, resp. dva týždne pred termínom tretieho kola MO v kategórii Z9.

Cieľom matematického sústredenia je odborná príprava žiakov na krajské kolo Matematickej olympiády v kategórii Z9, ktoré je vyvrcholením súťaže v spomínanej kategórii. Tomuto cieľu je prispôsobený aj program podujatia, pričom veľký priestor je venovaný vyučovaniu, ktoré prebieha v štyroch blokoch.

Obsahovo sú jednotlivé vyučovacie moduly zamerané na rôzne oblasti matematiky. Prioritne je priestor venovaný riešeniu úloh typovo korešpondujúcich s úlohami zaradenými v obvodnom kole príslušného ročníka MO – v každej skupine sa riešia úlohy analogické s jednou úlohou druhého kola. Okrem toho sú do výučby zaradené rôzne netradičné úlohy, zaujímavosti a poznámky z histórie matematiky. Výučba v prvej skupine je venovaná problematike aritmetiky a teórie čísel. Žiakom je prezentované napríklad indické násobenie, násobenie využitím Napierových počítacích paličiek, grafické násobenie a pod. V druhom bloku sú zaradené úlohy z algebry, rozličné spôsoby umocňovania prirodzených čísel, priestor je venovaný prezentácii rôznych postupov násobenia spamäti. Do obsahu tretieho vyučovacieho bloku sú zaradené úlohy tzv. výpočtovej geometrie a vo štvrtej skupine majú žiaci možnosť riešiť neštandardné úlohy analytickej a konštrukčnej geometrie.

Program sústredenia je rozvrhnutý do piatich dní.

• Prvý deň začína príchodom na miesto konania v popoludňajších hodinách, ubytovaním, organizačnými záležitosťami a zoznamovacím večierkom spojeným s programom, ktorý zabezpečujú študenti alebo doktorandi z Pedagogickej fakulty.

• Druhý deň – v utorok – začína výučba v jednom zo štvorhodinových blokov a prebieha v štyroch paralelných skupinách. Žiaci v ďalších dňoch postupne absolvujú výučbu v každom zo štyroch blokov. Popoludní pokračuje výučba v štvorhodinovom module. Večer je pre žiakov pripravený program plný hier, súťaží a zábavy.

• V stredu dopoludnia je do programu zaradená výučba a popoludní výlet, zvyčajne do mesta v blízkosti konania akcie. Večer je pre žiakov organizovaný spoločný program.

• Štvrtý deň dopoludnia prebieha výučba v posledných moduloch a popoludní je priestor venovaný súťaži s názvom Miniolympiáda, kde žiaci riešia úlohy analogického typu ako boli zaradené do výučby v jednotlivých blokoch. Na ich riešenie je vymedzený čas pol hodiny na jednu úlohu. Organizácia Miniolympiády kopíruje pravidlá krajského kola MO, kde žiaci riešia úlohy samostatne a za každú úlohu majú možnosť získať maximálne 6 bodov. Ide v podstate o akúsi generálku krajského kola MO. Výsledky súťaže sú vyhlásené posledný večer, kde sú odmenení najúspešnejší riešitelia. Odmenení sú aj víťazi iných súťaží, ktoré sú počas sústredenia realizované.

• Vyvrcholením odbornej prípravy je program posledného dopoludnia, kedy je pre účastníkov pripravená odborná prednáška zameraná na vybranú tému, ako napríklad *História veľkej Fermatovej vety, Prechádzka dejinami matematiky, Príbehy matematiky* a pod.

V ďalšej časti uvádzame zadania úloh zaradených do Miniolympiády v roku 2011:

1. Plechová podložka má tvar štvorca s dĺžkou strany $a = 8$ dm pri každom vrchole sa odreže rovnaký tvar pravouhlého rovnoramenného trojuholníka tak, aby sa hmotnosť podložky zmenšila

   a) o 18 %,

   b) o 72 %.

   Aká je veľkosť odrezaných trojuholníkov? Je možné previesť obidve odrezania?

2. Barbora si napísala dve rôzne čísla. Potom ich sčítala, odčítala, vynásobila a vydelila. Dostala štyri výsledky, ktorých súčet bol -100. Keď vynechala výsledok sčítania a spočítala ostatné výsledky, dostala tiež súčet -100. Ktoré celé čísla Barbora napísala?

3. Daný je pravidelný 6-uholník $ABCDEF$. Bod X patrí úsečke BF. Bod X spojíme s vrcholmi 6-uholníka, čím dostaneme trojuholníky, ktoré majú obsah: trojuholník ABX 4 cm^2, trojuholník DEX 8 cm^2, trojuholník AFX 2 cm^2. Vypočítajte obsahy ostatných trojuholníkov.

Okrem odbornej prípravy sú do programu sústredenia zaradené aj aktivity hrového, športového, relaxačného a spoločenského charakteru. V roku 2000 vznikla myšlienka pripraviť časopis pre účastníkov sústredenia s názvom *Sústreďák*, pričom autormi príspevkov boli samotní žiaci. Do roku 2004 vychádzala tlačená verzia časopisu, ktorá sa v roku 2005 pretransformovala do elektronickej formy (na CD). V posledných dvoch rokoch sú príspevky žiakov, fotografie, produkty spoločných súťaží a hier prezentované na sociálnej sieti Facebook.

Uvádzame ukážku niektorých príspevkov z časopisu *Sústreďák*.

Autor (ka?) S. S.

Matika, to je tá pravá,
na písomky veľmi dravá,
zažili sme týždeň taký,
moc nie prísny, ale sťaby.

Ráno bola algebra,
my sme tupí jak jedľa,
potom sa však zlomil strach,
múdri ľudia boli z nás.

Dnes to bola geoda,
to bol stres, nie pohoda,
občas niekto čosi splodil,
nás ostatných vyslobodil.

Zajtra je už tretí deň,
učíme sa, čo nie je hej,
neskôr výlet do Gelnice,
obleč dvoje nohavice
(lebo je zima).

Prejde štvrtok, príde piatok,
pre niektorých veľký sviatok.
Tejto škole dovi poviem,
otočím sa a preč pôjdem.

Prvočíslo deliteľné nie je,
ani ten trojuholník,
kalkulačka sa zasmeje,
nedá sa to odmocniť.
ORIDŽINL

Nekonečný počet číslic
môže tvoriť množinu
dokázal ich niekto sčísliť
bez zvyšku a pochyby?
NO

Trojciferná

Ja to už viem vynásobiť,
je to dobrý výsledok.
Možno ma budete chcieť zbiť
a dáte mi na zadok.

Táto rovnica ťažká je,
ostrá sťa ihlan,
pero sa s ňou zahraje
som trojciferný Milan.

SPEŠL

Najkrajšia matematika je tá, ktorá:
– násobí radosť
– delí smútok
– odmocňuje nenávisť
– umocňuje lásku

OSEMSMEROVKA

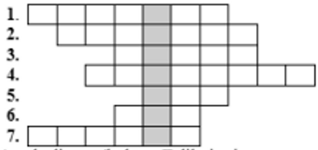
autor: neznámy

A	Ž	O	K	S	K	A	T	S	Ž
B	A	N	Í	K	O	K	E	L	Á
S	Ť	T	T	R	R	É	F	N	L
U	Ú	K	S	A	E	T	V	I	P
O	S	S	E	H	Ň	O	B	E	D
T	O	R	T	A	V	K	A	Č	T
S	I	S	P	R	N	S	R	K	R
E	J	M	A	P	E	I	A	O	Á
R	A	K	E	Č	Í	D	U	B	P
K	R	D	O	M	O	V	E	Y	E
O	K	R	E	I	Z	A	J	N	N
O	L	Y	M	P	I	Á	D	A	E

sústredenie, olympiáda, diskotéka, budíček, Praha, okres, slniečko, súťaž, kraj, čas, koreň, obed, trápenie, testík, Baník, jazierko, kampaň, domov, bufet, pláž, koža, torta, drab

tajnička

Tajnička:
Učiteľky kričia o 7. 15 ....



1. hrdina príbehu o Talibejovi
2. obed 7. 3. 2001 v Gelnici
3. zostanú po nás
4. manžel pani učiteľky Prídavkovej
5. nevyhnutná zložka raňajok, obeda, olovrantu a večere
6. brechajúca mačka
7. naša najobľúbenejšia pani učiteľka

autor: Samo G. (pravdepodobne)

Dotazník

Prostredníctvom anonymného dotazníka sa mohli účastníci matematického sústredia v posledný deň vyjadriť k jeho samotnej úrovni. Uvádzame vyhodnotenie prieskumu z roku 2011 (zúčastnilo sa ho 35 respondentov), ktoré obsahuje znenie otázky v dotazníku, alternatívne odpovede a frekvenciu ich výskytu:

1. Splnilo sústredenie Tvoje očakávanie?
   - a) áno 29
   - b) nie 0
   - c) čiastočne 6
2. Výučba v skupinách bola:
   - a) náročná 0
   - b) primeraná 5
   - d) rozšírila moje matematické vedomosti 21
   - e) čiastočne doplnila moje vedomosti 11
   - f) nebola náročná 2
3. Spôsob, akým prebiehala výučba:
   - a) mi vyhovoval 35
   - b) mi nevyhovoval 0
   - c) navrhoval by som: 0

4. Večerný program bol:

   a) zaujímavý 21
   b) priemerný 11
   c) nudný 3

5. Chcel by si sa ešte zúčastniť na podobnom matematickom sústredení?

   a) áno 33 b) nie 1

6. Navrhni zmeny v sústredení, ktoré by zlepšili jeho úroveň:

   športové hry každý deň
   mohol by tu byť počítač, aby som mohol informovať učiteľky ako sa mám
   nič by som nemenil
   predĺžiť večierku
   Kalčeto zadarmo

7. Napíš, čo Ťa najviac zaujalo:

   piatková prednáška bola úžasná
   výučba v skupinách
   prednáška a výučba
   počítanie spamäti
   nové spôsoby riešenia úloh
   pekná prírody v okolí Chmeľovej
   výlet do Bardejova
   večerný program

Záver

Reakcie žiakov ukazujú, že matematické sústredenie splnilo svoj cieľ. Jeho účastníci nielen získali nové vedomosti z matematiky, naučili sa riešiť úlohy rôznymi metódami, ale prínos vidíme aj v tom, že tu vzniklo mnoho nových priateľstiev. Veríme, že táto forma mimoškolskej práce s nadanými žiakmi na matematiku, ktorá sa stala v Prešovskom kraji tradíciou, bude pokračovať aj v ďalších ročníkoch MO a prispeje k popularizácii nielen matematiky, ale aj Matematickej olympiády.

Literatura

[1] *Organizačný poriadok Matematickej olympiády.* [online] `http://skmo.sk/dokument.php?id=344` [cit. 24.4.2011].

[2] Prídavková, A.: Sústredenie pre riešiteľov krajského kola matematickej olympiády v kategórii Z9. *MIF* **21** (2003), s. 3–6.

Pozice výuky matematiky ve vzdělávacím systému

Jiří Raška, Gymnázium Přerov [1]

Abstrakt. *Článek se kriticky zamýšlí nad současným stavem výuky matematiky. Autor nevidí problémy v ekonomické stránce, ale v nekoncepčnosti vzdělávání řízeném Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy. Příkladem zkvalitňování výuky matematiky na středních školách, a to převážně talentovanějších žáků, jsou projekty realizované gymnáziem Jakuba Škody v Přerově.*

Klesající úroveň všeobecného vzdělávání vidím v přímé souvislosti se zanedbáváním výuky matematiky a pohrdáním jejím významem při vzdělávání – zvláště pak na středních školách. Matematika jako věda, kterou nelze jednoznačně zařadit mezi vědy přírodovědné, spíše stojí na pomezí dělení věd, je dnešní společností potlačována. Neustále kolem sebe slyšíme, že matematika není důležitá, že podstatná je znalost jazyků a práva a ostatní znalosti přijdou jaksi samy.

To že právě matematika je podkladem pro rozvoj mnohých dalších věd a učí logickému myšlení, rozvíjí analytické i syntetické myšlení a rozšiřuje konstruktivní přístup k řešení problémů, to se zřejmě záměrně pomíjí. Matematice se zbytečně dává nálepka těžkého předmětu, z nějž je potřeba znát jen to nejnutnější končící tak dělením.

Zakopaný pes v mezinárodním srovnávání studijních výsledků našich žáků, v němž již padáme ke dnu, se pak hledá všude možně a hlavně v nedostatku peněz na vzdělávání. Myslím ale, že problém je především ve struktuře vzdělávání a jeho prioritách, které stanovuje MŠMT. Dlouhodobě se daří matematiku jako zbytečně těžký předmět odsouvat do pozadí. Myšlenka povinné maturity z matematiky minimálně pro žáky gymnázií je pak téměř kacířská. Když se však zamyslíme nad tím, že by žáci SŠ věděli již při nástupu do prvního ročníku, že budou maturovat z matematiky a k předmětu by přistupovali jako k předmětu maturitnímu, nebyla by matematika (a maturita z ní) tak těžká, ale byla by respektovaná. A hlavně znalosti z jejího studia by žáci jistě uplatňovali ve studiu ostatních předmětů a oborů.

Gymnázium Jakuba Škody ve spolupráci s Přírodovědeckou fakultou UP Olomouc získalo v roce 2009 dva granty na zkvalitňování výuky matematiky na ZŠ a SŠ a na výchovu matematických talentů. Všechny

[1] e-mail: raska@gjs.cz

aktivity těchto projektů směřují jak k posílení výuky matematiky a přilákání matematických talentů k hlubšímu studiu matematiky, tak k získávání zkušeností s touto prací na různých školách ČR a v zahraničí. Dosavadní poznatky z práce s matematickými talenty v běžné školské praxi jsou zatím pro naše školství bohužel nelichotivé, a tak se snažíme aktivity stále rozšiřovat, zvyšovat jejich přitažlivost a kvalitu a s jejich výsledky seznamovat veřejnost odbornou i politickou, a apelovat tak na změny v systému školství.

Aktivity našich projektů „PMT" a „MATES" jsou hlavně tyto (viz také [1]):

1. organizujeme pravidelné každotýdenní dvouhodinové semináře pro zájemce o matematiku (obr. 1),

Obr. 1

2. v každém pololetí vyjíždíme 3–4 krát do vzdálenějších škol, s dvouhodinovými přednáškami k popularizaci matematiky a matematických soutěží,
3. organizujeme čtyřdenní výjezdní soustředění matematických talentů, na kterém přednáší lektoři z UP Olomouc, MU Brno, KU Praha a učitelé gymnázií (obr. 2),

Obr. 2

4. připravujeme žáky k matematickým soutěžím organizovaným celostátně, zároveň mnohé soutěže organizačně zajišťujeme (DUEL, Turnaj měst, ...),
5. účastníme se mezinárodních soutěží v zahraničí a na naše soutěže zveme zahraniční účastníky,
6. aktuálně chystáme průběžnou matematickou soutěž organizovanou a realizovanou po internetu.

Všechny tyto aktivity hodnotí žáci velmi pozitivně a také kolegové z různých škol jsou jim příznivě nakloněni. Vzhledem k tomu, že jsme právě uprostřed řešení obou projektů, věříme, že jejich význam bude na konci oceněn žáky a učiteli regionu jako přínosný pro zvýšení celkového zájmu o matematiku. Doufáme však také, že bude zdůrazněna nezastupitelná pozice matematiky ve středoškolském vzdělávání a náš apel dopadne přes mnohá jednání i na půdu MŠMT a ovlivní jeho další rozhodování o matematice jako základu všeobecného vzdělávání žáků základních a středních škol ČR.

Literatura

[1] Raška, J.: Projekty PMT a MATES. In: Zhouf, J., Růžičková, L. (eds.) *Makos 2010.* Pedagogická fakulta UK, Praha, 2011, s. 31–32.

Matematický korespondenční seminář MFF UK

Michal Rolínek [1], Gymnázium J. Keplera, Praha

Martina Vaváčková [2], MFF UK Praha

Abstrakt. *Článek představuje Matematický korespondenční seminář MFF UK. Lze se v něm dočíst něco o typickém průběhu ročníku, o zadávaných úlohách, o soustředění či o mezinárodní týmové soutěži Náboj, kterou tento seminář taktéž pořádá.*

Matematický korespondenční seminář je soutěž pro nadané středoškoláky pořádaná studenty MFF UK [1]. Tato soutěž probíhá korespondenčně – řešitelé obdrží zadání úloh a pošlou nám sepsaná řešení, která se jim poté vrátí obodovaná a opravená. Na základě jejich výsledků je sestavena výsledková listina, podle níž jsou studenti zváni na soustředění. Cílem semináře je podnítit u talentovaných studentů zájem o matematiku, potažmo jim napomoci k dobrým výsledkům v Matematické olympiádě. Ročník 2010/2011 byl již třicátým od vzniku semináře. Podrobnější informace o korespondenčních seminářích najdeme např. v publikaci [2].

Průběh ročníku

Během ročníku na řešitele čeká sedm tematicky zaměřených sérií (např. dělitelnost, obsahy, zlomky). Každá série obsahuje osm úloh s rostoucí obtížností. Výjimku tvoří závěrečná série, tzv. *Finální myš(maš)*, v níž studenti řeší sedm dvojic úloh, přičemž každá dvojice se vztahuje k jedné z proběhlých sérií aktuálního ročníku. Řešitelé tak mohou zúročit nabyté vědomosti.

Kromě toho lze získávat body ještě řešením *seriálu*. Seriál je třídílný studijní text vztahující se k nějakému širšímu tématu. Zároveň s každým dílem zveřejňujeme seriálovou sérii obsahující trojici úloh, jejichž řešení by při důkladném čtení studijního textu nemělo činit potíže. Příklady seriálových témat z minulých let jsou nerovnosti, komplexní čísla či geometrická zobrazení.

Zadání a řešení všech úloh, výsledkové listiny i celý studijní text k seriálu vydáváme na konci každého roku v rozsáhlé ročence.

[1] e-mail: michalrolinek@gmail.com

[2] e-mail: martina@klikni.cz

Pár čísel k 29. ročníku

- Seminář řešilo 172 studentů, z toho 70 aktivně (tj. ti, kteří zaslali více než polovinu úloh).
- Zadali jsme 79 úloh a opravili přes 3 500 řešení.
- Na celostátním kole MO bylo 28 ze 40 účastníků a 10 z 11 vítězů řešiteli našeho semináře.

Zadávané úlohy

Úlohy do semináře vybíráme tak, aby na rozdíl od běžných středoškolských úloh podněcovaly kreativitu a chuť přemýšlet. Řešením je zpravidla důkaz, jen zřídka číselný výsledek. To se také odráží v hodnocení úloh. Zatímco nad numerickými chybami často přivřeme oko, chyby v argumentaci a ve vyjadřování trestáme nemilosrdně. K vyřešení drtivé většiny úloh stačí běžné středoškolské znalosti.

Příklad (28. ročník 1. série) Tabulka $n \times n$ je vyplněna čísly $1, 2, \ldots, n^2$, přičemž každé je použito právě jednou. Dokažte, že existují dvě hranou sousedící políčka taková, že rozdíl čísel v nich napsaných je alespoň n.

Soustředění

Jako odměnu pro nejlepší řešitele pořádáme každoročně dvě týdenní soustředění. Tam si účastníci mohou prohloubit své matematické znalosti na dopoledních přednáškách a různých soutěžích. Texty k přednáškám vydáváme ve sborníku, který si účastníci ze soustředění odváží. Tyto texty lze pak najít i na našem webu v sekci *knihovna*. Jednu přednášku tradičně přednese host z MFF UK či z ústřední komise MO. Zbylý čas vyplní kolektivní hry venku i uvnitř, či hraní na hudební nástroje.

Náboj

Další naší aktivitou je mezinárodní matematická soutěž pro pětičlenné týmy středoškoláků zvaná Náboj (`www.naboj.org`). Tato soutěž probíhá jednou za rok současně v Praze, Opavě a Bratislavě. Cílem každého týmu je v časovém limitu 90 minut vyřešit co nejvíce úloh (odpovědí bývá pouze číselný výsledek). Soutěží se ve dvou kategoriích Junioři a Senioři, přičemž kategorie Junioři je určena pro studenty nejvýše druhých ročníků středních škol.

Jak se zapojit?

Seminář je možné začít řešit kdykoliv během roku. Neváhejte tedy a oslovte středoškoláky ve svém okolí! Aktuální informace o semináři lze najít na našich webových stránkách `mks.mff.cuni.cz`.

Literatura

[1] Kolektiv autorů: *Matematický korespondenční seminář, n-tý ročník.* MFF UK, Praha, 1986–2010.

[2] Zhouf, J.: *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky.* PedF UK, Praha, 2010.

Kritický přístup talentovaných žáků k zadání matematických úloh *

Lucie Růžičková [1], PedF UK, Praha

Abstrakt. *Příspěvek vychází z charakteristických projevů matematicky talentovaných žáků, které jsou uváděny v literatuře. Souhrn těchto projevů je doplněn výsledky provedeného průřezového výzkumu. Dále je diskutována možnost využití matematických úloh netradiční formy jako podpůrných diagnostických nástrojů k identifikaci matematicky talentovaných žáků na základě rozboru jejich přístupů k zadání těchto úloh i jejich řešení.*

Úvod

Pojmy *(matematický) talent* nebo *(matematicky) talentovaný žák* jsou natolik komplexní, že v podstatě neexistuje jejich jednoznačné a obecně přijímané vymezení. Řada autorů se přiklání k behavioristické charakteristice talentovaných žáků pomocí souboru pozorovaných projevů některých jejich typických vlastností [2; v matematice 3]. Z vlastností matematicky talentovaných žáků projevovaných konkrétně v situacích řešení matematických úloh, které podrobněji uvádí Zhouf [5, s. 25–26], zmíním následující: snaha o přehlednost a jednoduchost řešení a komunikaci;

[1] e-mail: lucie_ruzickova@seznam.cz

* Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

autonomie při řešení problémů i při mezilidské komunikaci; snaha o originalitu a seberealizaci; rozlišování podstatné součásti problémů a jejich řešení; registrace chyb ostatních žáků i pedagogů; menší soustředěnost na řešený problém; korigovaný výdej energie na intelektuální činnost.

V rámci výzkumu, jehož výsledky dále uvádím, byly některé výše uvedené vlastnosti vztaženy konkrétněji k práci žáka se zadáním matematické úlohy.

Charakteristiky přístupu talentovaných žáků k zadání matematických úloh

Na základě výsledků průřezového výzkumu, který byl realizován v letech 2008 až 2011 na osmiletém gymnáziu se zaměřením na matematiku, byla identifikována následující specifika projevující se u talentovaných žáků při práci se zadáním matematické úlohy.

Talentovaní žáci bývají vysoce citliví a zároveň velmi málo tolerantní k jakýmkoli nepřesnostem a nejednoznačnostem v zadání úlohy. Jejich nadprůměrné matematické schopnosti jim totiž umožňují tyto nesrovnalosti snadno odhalit a snaha o úplnost a správnost řešení a přesné vyjadřování je nutí zabývat se jimi.

Talentovaní žáci také mívají tendenci interpretovat matematickou úlohu přesně podle jejího zadání, neberou tedy v úvahu doplňující informace, které v zadání nejsou uvedeny a nedají se z něj odvodit matematickými prostředky. Nedokonale formulovaná úloha však není chápána jako selhání ze strany zadavatele, ale jako výzva k bádání v dosud neprozkoumaných oblastech nebo jako možnost přicházet s nečekanými řešeními i výsledky. Konkrétní přístup žáka k matematické úloze, v jejímž zadání odhalí určitou nejednoznačnost, pak samozřejmě závisí nejen na jeho matematických předpokladech, ale i na jeho jiných osobnostních rysech, na didaktickém kontraktu ve výuce matematiky v dané třídě [1] a na dalších faktorech.

Na druhou stranu, někteří talentovaní žáci přistupují k matematickým úlohám s určitým nadhledem a soustředí se spíš na subjektivně vnímanou matematickou podstatu problému než na přesnou textaci zadání. V každém případě pokládám schopnost kriticky zhodnotit zadání matematické úlohy za jednu z významných charakteristik matematicky talentovaných žáků.

Úlohy využitelné k identifikaci matematicky talentovaných žáků

Při vytváření matematických úloh vhodných pro práci s talentovanými žáky je obvykle kladen důraz na podnětný matematický obsah a na dodržení vysoké matematické kultury zadání úloh (např. [4, 5]). Na základě výsledků uvedeného výzkumu se však domnívám, že i úloha se standardním školským matematickým obsahem, která se však vyznačuje vhodnou (a záměrnou) formální nedokonalostí, může mít vysoký didaktický i diagnostický potenciál. Takovou úlohu nazývám *úlohou nestandardní formy.*

Úloha nestandardní formy se vyznačuje některými z následujících charakteristik:

- údaje v zadání připouštějí různé interpretace;
- úloha má více řešení;
- úloha nemá (obvyklé) řešení;
- řešení úlohy je příliš jednoduché;
- údaje v zadání nevedou k úplnému řešení;
- údaje v zadání si vzájemně odporují;
- údaje v zadání odporují znalostem žáků;
- není splněna podmínka pro použití předpokládaného algoritmu řešení.

Závěr

Výsledky provedeného výzkumu naznačují, že talentovaní žáci jsou schopni kriticky zhodnotit zadání matematických úloh a případné nedostatky v zadání adekvátně reflektovat v procesu řešení. Analýza žákovských řešení úloh netradiční formy tedy může učitelům pomoci při identifikaci matematicky talentovaných žáků.

Literatura

[1] Brousseau, G.: *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[2] Hříbková, L.: *Nadání a nadaní.* PedF UK, Praha, 2005.

[3] Kočš, L.: *Psychológia matematických schopností.* SPN, Bratislava, 1972.

[4] Švrček, J.: *Tvorba a užití gradovaných řetězců matematických úloh.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2008.

[5] Zhouf, J.: *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky.* PedF UK, Praha, 2010.

Matematický software na střední škole

Miroslav Tichý, SŠAK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Příspěvek se zaměřuje na možnosti modelování reálných situací ve výuce matematiky pomocí programů Mathematica a GeoGebra.*

Úvod

V příspěvku se budeme zabývat modelováním reálných situací v matematice, tedy i softwarem vhodným k modelování.

Modelování jevů má v pedagogické praxi velký význam, na modelech žáci chápou činnost jinak pro ně velmi složitých mechanismů, jevů a dějů. Reálný děj je pro žáky na úrovni základní či střední školy leckdy složitý, vytvořením modelu, který zanedbá okolnosti nepodstatné, se popis jevu žákům náležitě zjednoduší, jsou pak snáze schopni jej pochopit.

Ve školním prostředí lze modelovat jevy na papíře, tabuli. Lepší možnost tvorby modelů dává použití počítače. Z výchovného hlediska je důležité dětem, které počítač doma mají a ten jim slouží pouze za hračku, ukázat, v čem jsou jeho přednosti a použitelnost v aplikačních úlohách z praxe (pro dítě to představuje použitelnost v běžném předmětu). Používání počítačů při výuce běžného předmětu má pro děti veliký význam světonázorový: počítač není hračka odtržená od světa, ale normální pracovní pomůcka, která práci usnadňuje a především zkvalitňuje.

Ve výuce matematiky lze pro modelování reálných dějů použít tři základní typy programů:

• *počítačové algebraické systémy* (CAS, Computer Algebra Systém), programy, které zvládají symbolické i numerické výpočty, např. úpravy výrazů, řešení rovnic a nerovnic. Úlohy umí řešit jak v množině všech reálných čísel, tak i v množině čísel komplexních. Tyto programy umí sestrojovat grafy funkcí a křivek ve 2D i 3D. Do skupiny těchto programů patří například programy Mathematica, Maple, MATLAB, dříve Derive.

• *programy dynamické geometrie* (DGE, Dynamic Geometry Environment), programy umožňující přesné rýsování geometrických figur. Obsahují nástroje pro pohyb, dynamiku hotových figur, umí v konstrukcích měřit délky, velikosti úhlů i obsahy obrazců. Představiteli tohoto typu programu jsou např. Cabri, GeoGebra, GeoNext, Cinderella.

---

[1] e-mail:tichy@ssakhk.cz

• *tabulkové kalkulátory*, jsou to programy původně kancelářské, umožňují vytvářet tabulky, pomocí vzorců upravovat data, vytvářet grafy. V matematice bývají používány při výuce některých kapitol (posloupnosti a řady reálných čísel, finanční matematika, statistika). Představiteli jsou např. Microsoft Office Excel, Open Office Calc. Na mnoha školách jde o jediný typ programu, který škola pro výuku matematiky používá.

Velmi vhodné je použít k podpoře výuky matematiky jak na základní škole, tak i na střední škole program dynamické geometrie. Lze zde snadno modelovat vztahy mezi geometrickými objekty, interaktivně tyto objekty měnit při současném zachování geometrických a matematických vazeb mezi nimi. Počítačové modely geometrických konstrukcí simulují konstrukce, které bychom na papíře či na tabuli prováděli euklidovsky – pomocí pravítka a kružítka. Interaktivní dynamická geometrie má však i další neeuklidovské prostředky konstrukce, má k dispozici funkce, výpočty, barvy, derivace. Tak lze modelovat a vizualizovat obecnější pojmy a děje než v klasické geometrii. Interaktivní geometrie je používána v celé řadě počítačových odvětví nejen pro výukové účely, ale např. v modelování a simulacích dějů, tvorbě virtuální reality.

Na příkladu 1 ukážeme použití programu dynamické geometrie při výuce. Tento příklad je možné s drobnými omezeními řešit už na základní škole. K řešení použijeme program GeoGebra, proto nejprve uveďme pár slov o něm.

GeoGebra

Prostředí programu má, jak uvidíme, několik výhod. První výhodou ne nepodstatnou ve školském prostředí je jeho dostupnost. Jak bylo uvedeno výše, program je od počátku vyvíjen jako Open Source. Je tedy zdarma dostupný učitelům, žákům i jejich rodičům, komukoli, kdo má o program zájem.

GeoGebra má být, jak vyplývá už z jejího názvu, jakýmsi spojovníkem mezi programy dynamické geometrie a programy typu CAS (Computer Algebra System). Slučuje některé výhody obou typů programu, umožňuje využívat jak grafickou, tak i algebraickou reprezentaci geometrických objektů, kombinovat přístupy k nim, i když samotné algebraické matematické programy (Derive, Mathematica a další) přeci jen nemůže plnohodnotně nahradit.

Výhodné je (zvláště pro žáky), že pokud máme zobrazeno algebraické i geometrické okno programu, vidíme jak analytický popis útvarů, se kterými pracujeme, tak i jejich geometrické umístění v rovině, vztahy mezi těmito útvary.

Základní vlastnosti tohoto programu jsou:

• Program je lokalizován, lze v něm nastavit české menu i nápovědu. Klíčová slova příkazů jsou také lokalizována, nepoužíváme tedy např. „OsculatingCircle“, ale „OskulacniKruznice“.

• Při zápisu textů, vzorců, názvů proměnných a funkcí lze používat dolní i horní indexy. Zápis f_1 zobrazí jako f1 ,zatímco zápis x^3 zobrazí jako x3. To vede k lepší čitelnosti a srozumitelnosti funkčních předpisů. V textu je také povolena syntaxe vzorců jazyku LaTeX, což umožňuje vytvářet popisy včetně znaků pro sumu, integrál apod.

• GeoGebra je vzhledově podobná ostatním programům dynamické geometrie. Má podobnou strukturu menu, práci s (jediným) panelem nástrojů. Co je vzhledově odlišné a pro funkci a použití programu velmi podstatné, je algebraické okno, v němž se objevují souřadnice bodů, předpisy funkcí, hodnoty konstant a proměnných, rovnice křivek. Všechny zde uvedené objekty lze dále editovat, upravovat jejich vlastnosti, měnit barvu, typ čáry, možnosti zobrazení objektu, či nastavovat stopu objektů při jejich pohybu.

• Lze vytvářet vlastní makroinstrukce, a doplňovat si tak další vlastní nástroje do panelu nástrojů.

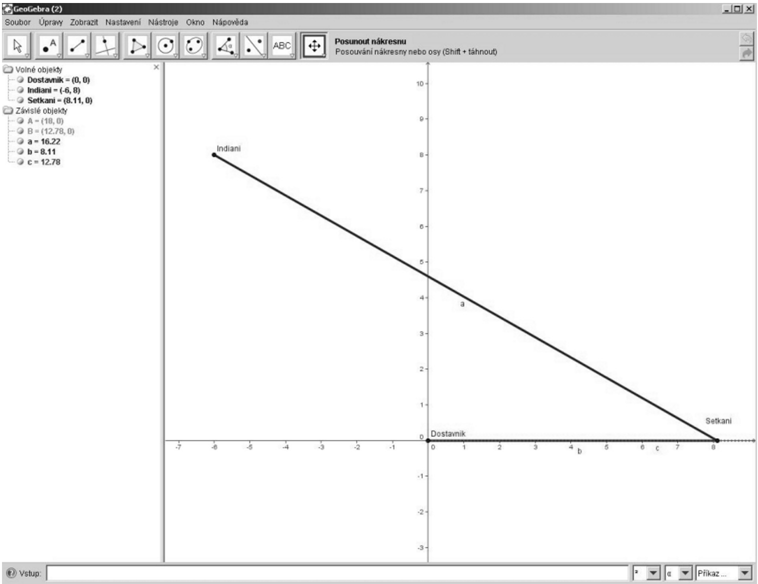
• Objekty lze, pokud je to z jejich charakteru možné, zadávat jak geometricky, jejich vytvořením v geometrickém okně, tak i algebraicky, zápisem jejich rovnice do algebraického okna. Údaje v obou oknech se neustále dynamicky ovlivňují. Máme-li např. dán bod F a přímku d, můžeme příkazem `Parabola [F, d]` vytvořit parabolu určenou ohniskem F a řídicí přímkou d. Parabola se ihned vykreslí v geometrickém okně a v algebraickém okně se objeví její rovnice. Kružnici lze zadat několika způsoby geometricky (např. středem a jedním bodem, třemi body apod.), lze ji zadat rovnicí ve středovém i obecném tvaru. Její rovnice se objeví v algebraickém okně vždy ve středovém tvaru.

• Pomocí posuvníků lze vytvářet animace, nastavit i velikost jejich kroku. Případně lze pomocí zaškrtávacích políček ovlivňovat zobrazení/skrytí vybraných objektů.

• Kromě analytické geometrie umí GeoGebra i mnoho z matematické analýzy, má tak blízko k programům CAS. Umí počítat derivace, hledat primitivní funkce pro všechny běžné funkce. Jak derivace, tak neurčité integrály přitom hledá symbolicky, nikoliv numericky. U polynomických funkcí umí hledat jejich extrémy.

• Podstatnou vlastností prostředí programu je jednoduchost a intuitivnost jeho ovládání a práce s ním. Program se po krátkém seznámení líbí i žákům, slouží jim nejprve k snadnému sestrojování grafů funkcí. Využijí ho při modelování planimetrických konstrukcí, při výpočtech v analytické geometrii i později v diferenciálním a integrálním počtu.

• Učitel i žák mají široké pole působnosti od vytváření a upravování vlastních dynamických geometrických figur až po experimentování s již hotovými demonstračními příklady převzatými z Internetu.



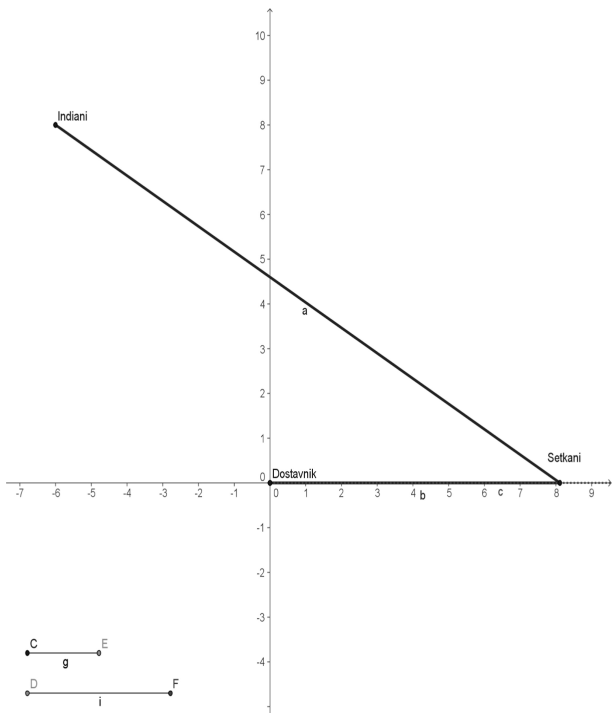
Obr. 1: Program GeoGebra

Příklad 1. *Dostavník jede po přímé cestě stálou rychlostí. V místě mimo cestu jsou Indiáni, jejichž rychlost při pronásledování je oproti dostavníku dvojnásobná. Určete směr a místo na cestě, kam mají jet, aby na cestě narazili přesně na projíždějící dostavník.*

Řešení: Matematizujme, modelujme: je dána polopřímka c, na ní bod D. Dále je dán bod I mimo polopřímku c. Nalezněte bod X na polopřímce c dvakrát více vzdálený od bodu I než od bodu D.

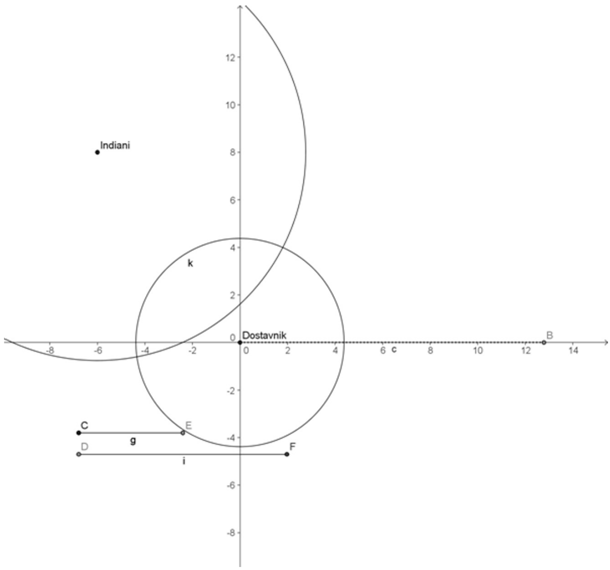
Na základní škole je matematické řešení této úlohy nemožné, potíže s ním budou mít i žáci střední školy, nebudou-li znát Apollóniovu kružnici. Tu při řešení použít nechceme. Je tedy nutné použít vhodný model a celou situaci řešit modelováním. Použijeme program dynamické geometrie GeoGebra, viz obr. 1 (vlevo je algebraické okno, vpravo konstrukční geometrické okno, dole je příkazový řádek). Při modelování situace umístíme na nákresnu body Dostavnik a Indiani, jako cestu zvolíme (bez újmy na obecnosti) kladnou část osy x. Při situaci dle obrázku hledáme takové řešení, aby délka a byla dvojnásobkem délky b. Pak budou splněny podmínky úlohy.

Úloha je bez znalosti Apollóniovy kružnice pro žáky neřešitelná. Po seznámení s programem GeoGebra (nebo jiným programem dynamické geometrie) však mohou zkusit celou úlohu vymodelovat – sestrojit její dynamický model. Sestrojíme pomocné ukazatele dráhy ujeté oběma účastníky – Indiány a dostavníkem. Dynamickým posouváním bodu E v tomto modelu měníme dráhu ujetou dostavníkem, čímž se na obr. 2 mění velikost úsečky DF – dráhy ujeté Indiány.



Obr. 2: Dráhy

Dále můžeme sestrojit kružnice se středy v bodech Indiani a Dostavnik, které budou mít poloměry CE a DF. Tyto kružnice ukazují, kam se ve stejném čase mohou oba aktéři problému dostat. Průsečíky obou kružnic jsou body, v nichž se mohou Indiáni a dostavník potkat. Nás pak bude pochopitelně zajímat, kdy bude tento průsečík na cestě, po které dostavník jede. Obě kružnice jsou sestrojeny na obr. 3.

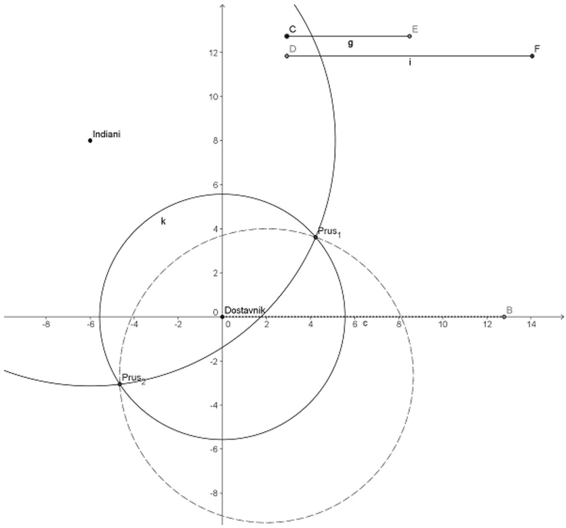


Obr. 3: Kružnice

Pokud by v úloze stačilo přibližně vymodelovat řešení, můžeme opět pohybovat bodem E po jeho trajektorii tak, aby se průsečík obou kružnic dostal na osu x – cestu, po níž jede dostavník.

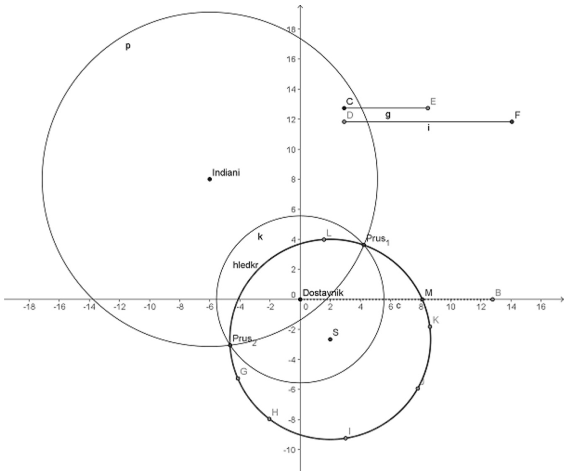
K přesnému vymodelování řešení pomůže svými nástroji GeoGebra. Označíme si průsečíky obou kružnic *Prus1* a *Prus2*. GeoGebra má nástroj „množina bodů“, kterým sestrojíme množinu všech bodů *Prus1* při pohybu bodu E, podobně sestrojíme množinu všech bodů vzniklých pohybem bodu *Prus2* při pohybu bodu E. Vše ilustruje obr. 4.

Modelováním vzniklá množina bodů se na první pohled jeví jako kružnice. Přesvědčíme se o tom tak, že použijeme další nástroj programu GeoGebra. Na získané množině bodů sestrojíme 5 bodů, proložíme jimi kuželosečku. Jak systém GeoGebra vypíše, jedná se o kružnici, její rovnici vidíme v algebraickém okně.



Obr. 4: Množina bodů

Příkazem `S=Stred[hledkr]` získáme v geometrickém okně její střed, v algebraickém okně jeho souřadnice. Průsečík této kružnice a kladné části osy x je hledaný bod M, v němž se Indiáni a dostavník podle podmínek úlohy střetnou. Celá konstrukce je provedena na obr. 5.



Obr. 5: Kružnice

Závěr: Pokud by žáci znali Apollóniovu kružnici, celou úlohu by mohli řešit snadněji, bez použití modelování celého děje. Pro žáky je ale přínosné. když objeví takovýto poznatek sami, s použitím modelování na počítači s nástroji dynamické geometrie. V obrázku lze spojit body Indiani, Dostavnik, S, hledat vazby mezi nimi, přesvědčit se tak o vlastnostech Apollóniovy kružnice.

Úlohu lze dále zobecnit tak, že bude dán koeficient k, který určí, kolikrát rychlejší jsou Indiáni než dostavník. K řešení stačí přidat do nákresny jeden posuvník, jehož pohybem tento koeficient měníme, provázat ho patřičně ve výpočtu dráhy.

Mathematica

K řešení následujícího příkladu chceme použít program Mathematica. Mathematica je profesionální matematický program typu CAS (Computer Algebra Systém).

Bude užitečné uvést něco málo o tomto programu především z pohledu středoškolského učitele. Podtitulem systému Mathematica je „A System for Doing Mathematics by Computer“. Mathematica je systémem velmi výkonným pro řešení matematických problémů, to však ocení spíše uživatelé v praxi, vědečtí pracovníci a učitelé vysokých škol, je však také vynikajícím systémem použitelným při výuce matematiky, v neposlední řadě právě na střední škole. Žáci velmi rychle mohou zvládnout základní příkazy systému potřebné k řešení úloh středoškolské matematiky, pak už mohou postupně své znalosti rozšiřovat na složitějších příkladech.

Mathematica je programový systém, který lze používat „jednořádkovými“ přímými příkazy, např. pro řešení rovnic, nerovnic, zobrazení grafů funkcí a relací, lze v něm i programovat, Mathematica má vestavěn vlastní programovací jazyk vytvořený na základě jazyků umělé inteligence. Mathematica má prostředky pro řešení úloh symbolicky (s použitím názvů parametrů, proměnných), tak i numericky, pokud nás zajímá (jen) číselné řešení.

Systém Mathematica lze na střední škole využívat dvojím způsobem:

• Mathematicu může používat učitel, připravit si s její pomocí výklad, demonstrační úlohy, písemné práce a testy pro žáky.

• Mathematicu ke své práci používají i žáci, zvládnou ji v rámci výuky matematiky, pomáhá jim při pochopení látky, řešení příkladů, usnadňuje a urychluje výpočty.

Mathematica žákům po zvládnutí programu umožňuje soustředit se na vlastní matematickou podstatu problému. Technické, mnohdy pracné výpočty mohou předat počítači. Nenahraditelná je Mathematica při vizualizaci problémů, při tvorbě grafů.

Příklad 2. *Určete pravděpodobnost, že v náhodně vybrané skupině třiceti lidí (např. školní třída) má alespoň jedna dvojice narozeniny ve stejný den v roce. Přestupný rok neuvažujeme.*

Řešení: Jde o známý „narozeninový problém“, úlohu, kterou sestavil rakouský matematik Richard von Mises. Mohli bychom ji řešit přímým výpočtem, zkusme však nejprve řešení vymodelovat bez pomoci kombinatoriky. Předpokládejme, že máme k dispozici program Mathematica a žáky, kteří již byli s tímto systémem seznámeni. K modelování použijeme generátor (pseudo)náhodných čísel, který je v programu vestavěn:

```
RandomInteger[{1,365}]
```

Tento příkaz vygeneruje jedno číslo od 1 do 365, simulujeme jím tedy datum narození jednoho člověka. Vygenerujme takto 30 čísel pro 30 lidí:

```
skupina:=RandomInteger[{1,365},30]
```

```
skupina
```

$\{311, 194, 242, 234, 277, 24, 261, 48, 91, 320, 184, 99, 44, 186, 204, 51, 139, 155, 193, 166, 142, 51, 71, 87, 264, 264, 239, 239, 113, 76\}$

Získaná data můžeme pro lepší prohlížení setřídit:

```
Sort[skupina]
```

$\{16, 23, 27, 39, 49, 49, 57, 77, 90, 94, 96, 108, 123, 125, 149, 156, 184, 198, 202, 204, 212, 217, 228, 232, 245, 255, 280, 336, 342, 345\}$

Vytvořili jsme tak model jedné třicítky lidí ze zadání, shodou okolností vidíme, že zde je dvojice lidí narozená 49. den v roce. To nám pochopitelně nestačí. Využijeme simulačních možností počítače a jeho rychlosti; opakujme pokus 10 000 krát (pochopitelně není problém i víckrát). Vznikne seznam `data`:

```
data=Table[skupina,{10000}];
```

Tento seznam ze zřejmých důvodů nevypisujeme, data jsou uložena v paměti počítače. S využitím funkce `Union` (sjednocení) napíšeme jednoduchou funkci, která vynechá opakované hodnoty v jedné skupině (ty nás zajímají):

```
stejnyden[sk_]:=Length[Union[sk]]<30
```

A teď už jen spočteme pravděpodobnost jako relativní četnost. Funkce `Map` aplikuje definovanou funkci `stejnyden` na data, `Count` spočte, kolikrát se vrátila pravda – alespoň jedna dvojice narozená ve stejný den v roce. Výsledek zobrazíme numericky:

```
pst=Count[Map[stejnyden,data],True]/10000 //N
```

0.7049

Vidíme, že pravděpodobnost výskytu alespoň dvou lidí s narozeninami ve stejný den ve skupině 30 je poměrně vysoká.

Podívejme se na matematické vyjádření pravděpodobnosti jevu, který jsme modelovali:

```
jinak=1-Binomial[365,30]*30!/Power[365,30] //N
```

0.706316

Vzorec je zapsáním kombinatorického vztahu v jazyku systému Mathematica:

$$p = 1 - \frac{V_{30}(365)}{V'_{30}(365)}$$

Spočtěme dále pravděpodobnosti výskytu stejného jevu pro skupiny od 2 do 40, výsledek zobrazme v grafu (obr. 6):

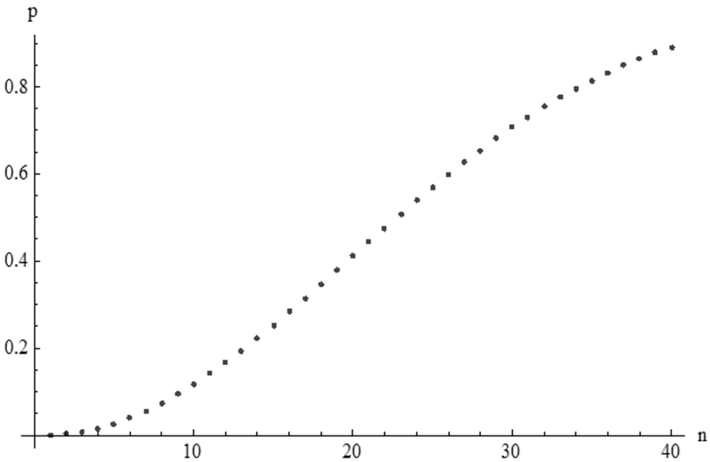
```
jinaknp[p_]:=1-Binomial[365,p]*p!/Power[365,p]
 tabulka=Table[{n,jinaknp[n]},{n,1,40}] //N
```

{{1., 0.}, {2., 0.00273973}, {3., 0.00820417}, {4., 0.0163559},
{5., 0.0271356}, {6., 0.0404625}, {7., 0.0562357}, {8., 0.0743353},
{9., 0.0946238}, {10., 0.116948}, {11., 0.141141}, {12., 0.167025},
{13., 0.19441}, {14., 0.223103}, {15., 0.252901}, {16., 0.283604},
{17., 0.315008}, {18., 0.346911}, {19., 0.379119}, {20., 0.411438},
{21., 0.443688}, {22., 0.475695}, {23., 0.507297}, {24., 0.538344},
{25., 0.5687}, {26., 0.598241}, {27., 0.626859}, {28., 0.654461},
{29., 0.680969}, {30., 0.706316}, {31., 0.730455}, {32., 0.753348},
{33., 0.774972}, {34., 0.795317}, {35., 0.814383}, {36., 0.832182},
{37., 0.848734}, {38., 0.864068}, {39., 0.87822}, {40., 0.891232}}

Závěr: Žáci na tomto příkladu vidí, že dobře provedenou simulací, správně zvoleným modelem, dosáhnou analogických výsledků, jako přesným matematickým výpočtem.

Závěr

Uvedené příklady demonstrují možnosti, jaké má učitel na střední, případně i základní škole, chce-li ve výuce použít nejen klasické postupy, ale chce s žáky použít k řešení matematických problémů i počítač s příslušnými programy. Použité programové vybavení je k těmto účelům vhodné, a to jak program GeoGebra, tak program Mathematica se při řešení těchto a podobných úloh osvědčily. Obě uvedené úlohy byly se žáky střední školy při výuce vyzkoušeny a setkaly se s jejich značným zájmem. Použití počítače ve výuce a použití netradičních postupů – modelování dějů – je určitě vhodné i pro motivaci žáků k dalšímu studiu matematiky, případně i matematického softwaru.



Obr. 6: Graf pravděpodobnosti

Literatura

[1] Hohenwarter, M., Preiner, J.: *GeoGebra Help 3.0: Official Manual.* `http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf` 2007, [on line].

[2] Vaníček, J.: *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* PedF UK, Praha, 2009.

[3] Cheung, C. K., Keough, G. E., Gross, R. H., Landraitis, Ch.: *Getting Started with Mathematica.* Willey, 2005.

[4] Abell, M. L., Braselton, J. P.: *Mathematica By Example.* Elsevier Academic Press, 2004.

[5] Kolesárová, A., Kováčová, M., Záhonová, V.: *Matematika I, II. Návody na cvičenia s programovým systémom Mathematica.* Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2004.

[6] Dobrakovová, J., Kováčová, M., Záhonová, V.: *Mathematica pre stredoškolských učiteľov – tréninkové materiály.* Vydavateľstvo STU, Bratislava, 2008.

[7] `http://www.wolfram.com`

Jak učit matematiku (nejen talentované) žáky na interaktivní tabuli

Eva Tošnerová, Activboard, Praha [1]

ABSTRAKT. *Software ActivInspire nabízí velkou škálu interaktivních nástrojů. Článek přináší praktické ukázky „magických“ funkcí a jejich začlenění do výuky matematiky. Je ukázáno využití tohoto softwaru pro zlepšení spolupráce či podnícení soutěživosti žáků u interaktivní tabule ActivBoard a také možnosti odpovědního systému pro přímý kontakt s žáky a okamžitou zpětnou vazbu.*

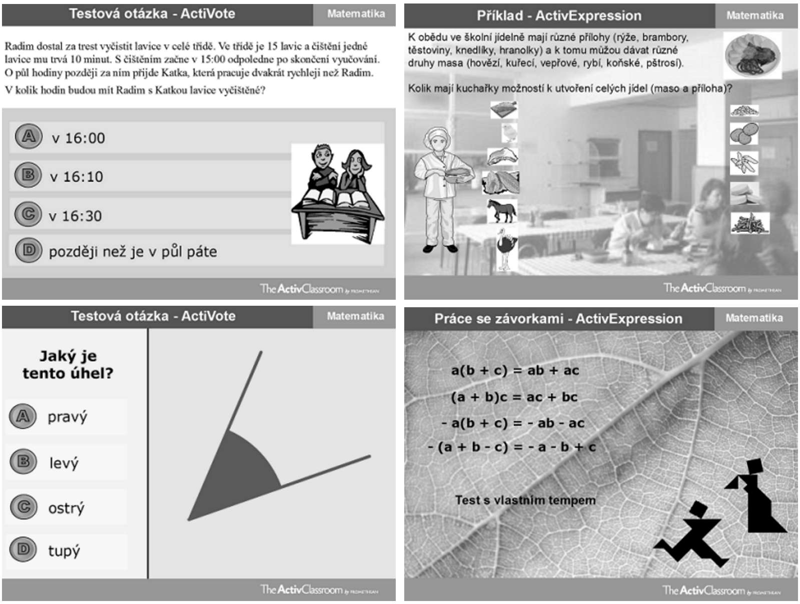
Pojem interaktivní výuka se dnes často používá, ale co je to vlastně interaktivita? Je to vzájemné ovlivňování, komunikace či spolupráce nejen mezi učitelem a žákem, ale i mezi žáky samotnými. Nejdůležitějším prvkem zůstává však učitel, jeho kreativita a nadšení. Ten pro vytvoření kvalitní přípravy potřebuje nejen dobré technické vybavení, ale zejména software, tj. autorský nástroj, který podněcuje poznání žáků a studentů.

Obr. 1

[1] e-mail:info@activboard.cz

Právě díky softwaru ActivInspire (obr. 1) a interaktivní tabuli ActivBoard může vyučující tvořit zajímavé výukové hodiny (dnes digitální učební materiály = DUM). Do výuky lze kromě vlastní tabule ActivBoard zapojit celou škálu interaktivních prvků, např. systém dvou per (ActivArena), odpovědní systémy (ActiVote/ActivExpression), ukazovátko, vizualizér, bezdrátový tablet.

Interaktivní tabuli můžeme využít v matematice (obr. 2). Na začátku využijeme odpovědní systém. Je možné zapojit do výuky i toho posledního lenocha a pomocí zpětné vazby (informace o tom, kdo, jak a jak rychle reaguje a zdali odpovídá správně či špatně) se můžeme podívat na výsledky třídy i jednotlivců. Analýzu pak můžeme znázornit jak ve formě grafů, tak tabulek v MS Excel.

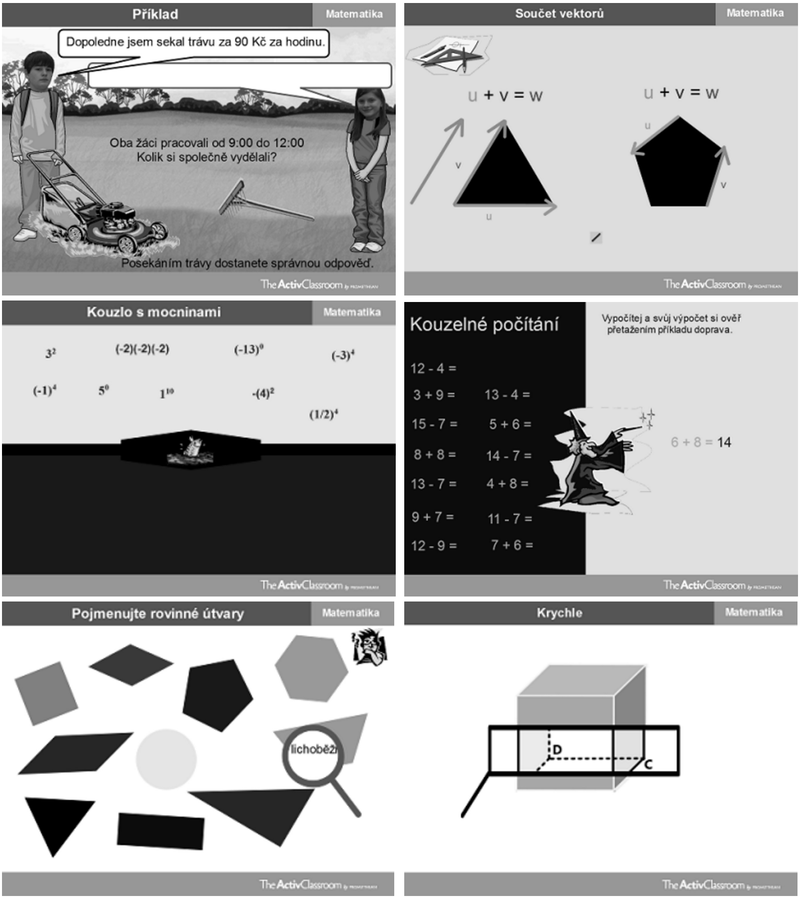


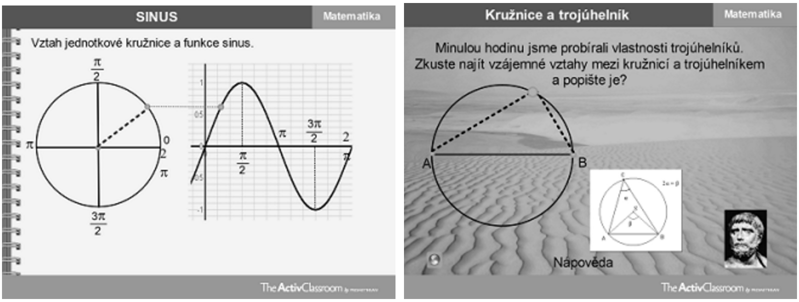
Obr. 2

Tvorba otázek je velmi jednoduchá a ActivInspire nabízí celou škálu šablon, pozadí či obrázků z galerie. Lze tvořit otázky plné obrázků, nákresů, ale i textové úlohy. Odpovídat lze na uzavřené otázky – Ano/Ne, výběrem z daných odpovědí (ActiVote) či lze zvolit otevřené odpovědi (číselnou či textovou), Likertovu škálu, řazení posloupností apod. Ty z vás, kteří se zaměřujete na nadané studenty nebo máte ve třídě žáky s velmi rozdílnou úrovní znalostí, jistě potěší možnost spuštění testu vlastním tempem (ActivExpression).

Dále je například možné využít obrázky, šablony, zvuky a mřížky z galérie a nástroje *Popisky, Propojky, Kontejnery a zvuky, Magický inkoust, Výplň a vrstvy, Omezení pohybu a otáčení objektů, Uzamykání objektů* aj. a celou řadu *Akcí* (*Skrýt*, ...) (obr. 3).

O softwaru ActivInspire a jeho možnostech lze obtížně psát, doporučuji si vše vyzkoušet při nezávazné prezentaci u vás ve škole nebo na některém z mnoha organizovaných školení.





Obr. 3

Literatura

[1] `www.activboard.cz`

Úlohy na rozvíjanie matematickej gramotnosti žiakov prejavujúcich matematické nadanie v primárnej škole *

Anna Vašutová, Pedagogická fakulta, Prešovská univerzita v Prešove [1]

Abstrakt. *Tvorenie a predkladanie vhodných úloh žiakom, ktorí prejavujú nadanie v oblasti matematiky, je kľúčovou úlohou učiteľov už na primárnom stupni. Ako však pripraviť úlohu tak, aby náročnosťou zodpovedala požadovanej úrovni a súčasne rozvíjala matematickú gramotnosť? Odpoveď na túto otázku sa pokúsime prezentovať v príspevku.*

Úvod

Školský systém sa v súčasnosti nachádza v procese komplexnej transformácie. Príčinou zavádzania zmien bola potreba zmeny filozofickej koncepcie ako kurikulárneho jadra, ktorej princípy ovplyvňujú všetky jej ďalšie súčasti. V minulosti bolo naše školstvo najviac kritizované pre

*Príspevok vznikol s podporou projektu MŠ SR KEGA 016PU-1/2010 Matematika pre život – cesty rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy v kontexte medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS.

[1] e-mail:anna.vasutova@pf.unipo.sk

jeho nedostačujúce prepojenie so životom, kde mal dominantné postavenie obsah vzdelávania a transmisívny spôsob sprostredkovania učiva od učiteľa k žiakom. Okrem toho sa praktizovalo akési „spriemerňovanie“ žiakov, pričom sa nevenovala pozornosť žiakom so špeciálnymi výchovno-vzdelávacími potrebami.

V súčasnosti sa kladie dôraz najmä na rozvíjanie schopností, zručností a spôsobilostí žiakov s cieľom pripraviť ich pre budúci život. Vo všeobecnosti je možné tento proces nazvať aj rozvíjaním gramotnosti žiakov. V príspevku sa budeme zameriavať na oblasť matematiky, a tak v tejto súvislosti považujeme za potrebné vysvetliť, ako budeme chápať pojem matematická gramotnosť.

Medzinárodná štúdia OECD PISA, ktorá za zameriava na pravidelné zisťovanie a porovnávanie úrovne gramotnosti 15ročných žiakov, pričom posledné testovanie prebehlo v roku 2009 a zúčastnilo sa na ňom 34 krajín OECD a 31 partnerských krajín, definuje matematickú gramotnosť ako „schopnosť jedinca porozumieť, rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdôvodnené hodnotenia, používať matematiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmýšľajúceho občana“ [1, s. 7]. Z toho vyplýva, že žiaci majú byť schopní odhaliť matematiku v bežnej situácii a poradiť si s ňou tak, aby danú situáciu vyriešili vo svoj prospech a čo možno najefektívnejšie vzhľadom na okolnosti. Bližšie sa problematike venujú Scholtzová [3] a Zeľová [5].

Tak ako sme v úvode spomínali, zmeny nastali aj v prístupe k žiakom ako individualitám a začal sa klásť väčší dôraz na ich osobité požiadavky a potreby. V roku 2009 vstúpil na Slovensku do platnosti, ako súčasť Štátneho vzdelávacieho programu [4], *Vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy pre žiakov so všeobecným intelektovým nadaním ISCED 1 – primárne vzdelávanie.* Spomínaný dokument obsahovo nepresahuje štátny vzdelávací program ISCED 1 – primárne vzdelávanie, ale je zameraný skôr na uplatňovanie obohacovania učiva v jednotlivých predmetoch ako jedného z možných prístupov vo vzdelávaní nadaných. Dôvodom je najmä fakt, že žiaci zaradení do špeciálnej edukačnej ponuky sú pravidelne testovaní, čím sa overuje, či v ich prípade nedošlo iba k tzv. zrýchlenému vývinu, alebo či ide v skutočnosti o nadanie. Ak sa potvrdí prvá možnosť, je žiak preradený do bežnej triedy. Aby sa zabránilo komplikáciám, ktoré by následne vznikli v dôsledku odlišného rozsahu prebraného obsahu, odporúča sa praktizovať prístup enrichment. To isté platí aj v opačnom prípade, keď je dieťa zaradené do špeciálnej edukačnej ponuky pre intelektovo nadaných v priebehu vzdelávania, kde môže dôjsť k obsahovej nejednotnosti v predmete v tom istom ročníku.

Aj keď sa žiakom prejavujúcim nadanie v matematickej oblasti zvyknú predkladať najmä náročnejšie úlohy zamerané na rozvíjanie špecifických matematických schopností, je nutné rozvíjať aj ich matematickú gramotnosť. Problematike starostlivosti o túto časť populácie sa podrobnejšie venuje Prídavková [2], ktorá okrem iného zdôrazňuje kompetentnosť učiteľa v súvislosti s výberom a tvorbou úloh, ktoré budú korešpondovať s obsahom učiva matematiky vymedzenom v Štátnom vzdelávacom programe a súčasne budú rozvíjať úroveň matematickej gramotnosti žiakov. To znamená ponúkať aj úlohy, ktoré vychádzajú z reálnych životných situácií, ktoré sami riešili, alebo by ich mohli v budúcnosti riešiť.

Pri podrobnejšom opise matematickej gramotnosti, ktorú skúma štúdia PISA, môžeme rozlíšiť jej tri zložky: (1) situácie alebo kontexty, do ktorých sú problémy umiestnené, (2) matematický obsah, (3) kompetencie (schopnosti).

Situácie a kontexty definujú problém reálneho sveta. Kontext úlohy predstavuje jej špeciálne umiestnenie v situácii. Štúdia OECD PISA kladie dôraz na úlohy, s ktorými sa možno stretnúť v istých situáciách reálneho sveta. V týchto úlohách sa vyskytujú štyri skupiny situácií: osobný život; škola, zamestnanie a voľný čas; spoločnosť; veda. Tieto sa medzi sebou rozlišujú v dvoch oblastiach: vo „vzdialenosti“ medzi žiakom a situáciou, to znamená, že niektoré sú im obsahovo bližšie, iné vzdialenejšie; druhý rozdiel je v tom, do akej miery je v úlohe zrejmý matematický obsah.

Matematický obsah bol vo výskume PISA rozdelený do štyroch oblastí: (1) kvantita, (2) priestor a tvar, (3) zmena, vzťahy a závislosť, (4) náhodnosť.

Na to, aby bol jednotlivec schopný používať matematiku v rôznych situáciách, musí mať isté *matematické kompetencie*. Štúdia PISA používa osem typických matematických kompetencií na zhodnotenie týchto schopností. Tie sa však pri riešení úloh prelínajú a nedajú sa hodnotiť jednotlivo. Preto sú rozdelené do troch úrovní:

- *reprodukčná úroveň* – ide o reprodukciu naučeného materiálu, vykonávanie rutinných výpočtov a procedúr riešenia rutinných problémov,
- *úroveň prepojenia* – ide o schopnosť prepojenia viacerých oblastí matematiky: integráciu, prepojenie a nenáročné rozšírenie pre žiaka známeho materiálu, modelovanie a spojenie pre žiaka známych metód,

• *úroveň reflexie* – ide o schopnosť plánovať stratégie riešenia úloh a uplatniť ich: rozvinuté uvažovanie, argumentáciu, abstrakciu, zovšeobecňovanie a modelovanie použité v nových (neznámych) kontextoch, originálny matematický prístup, spojenie viacerých zložitejších metód, vhľad do problému [1].

Na základe vyššie uvedených kritérií sme sa pokúsili vytvoriť, náročnosťou matematického obsahu, adekvátnu úlohu, ktorá bude zároveň rozvíjať matematickú gramotnosť žiaka 2. ročníka primárnej školy. Situácia je zasadená do oblasti osobného života, pričom je obsahom blízka väčšine žiakov. Matematický obsah by sme mohli zaradiť do dvoch oblastí, a to kvantita a zmeny, vzťahy a závislosť. Celá úloha je štruktúrovaná tak, aby sa úroveň kompetencií postupne zvyšovala a aby v sebe zahŕňala všetky tri.

Úloha: Kupujeme psíka

Aktuálna ponuka psov					
plemeno	Podhalandský ovčiak	Austrálsky hodvábny teriér	Dalmatínsky pes	Čau Čau	Jack Russel terier
narodený	marec 2008	máj 2010	september 2010	apríl 2009	november 2010
výška (v kohútiku)	65–70 cm	23–26 cm	56–58 cm	48–56 cm	25–30 cm
náročnosť	potreba priestoru a výbehu	zvýšená starostlivosť o srsť	voľnosť, dostatočný výbeh	zvýšená starostlivosť o srsť	nenáročný
charakter	pokojný, spoľahlivý	vrtký, hravý, nepokojný	hravý, spoločenský	spoločenský, prítulný, pokojný	veselý, energický, hravý
vhodný na chov	dom	byt	dom	dom aj byt	byt
cena	56 €	41 €	48 €	39 €	37 €

Mojím najväčším želaním je mať doma psa. Nie je to však jednoduché, pretože nebývame v dome so záhradou, ale v panelovom byte. Tento rok som presvedčila rodičov, aby mi nejakého psíka kúpili. Na internete som našla ponuku aj s fotografiami. Veľmi ma to zaujalo, a tak som sa rozhodla, že si jedného z nich vyberiem. Na to som potrebovala vedieť čítať údaje z tabuľky. Možno to vyzerá jednoducho, ale vyskúšajte si sami, ako by ste to zvládli.

Úloha 1. Z tabuľky zisti a doplň odpovede k nasledujúcim otázkam:
Ktorý pes sa narodil v septembri v roku 2010? ....
Ktorý pes je vyšší ako 40 cm a je vhodný na chov v byte? ....
Ktorý psík stojí menej ako 40 eur? ....

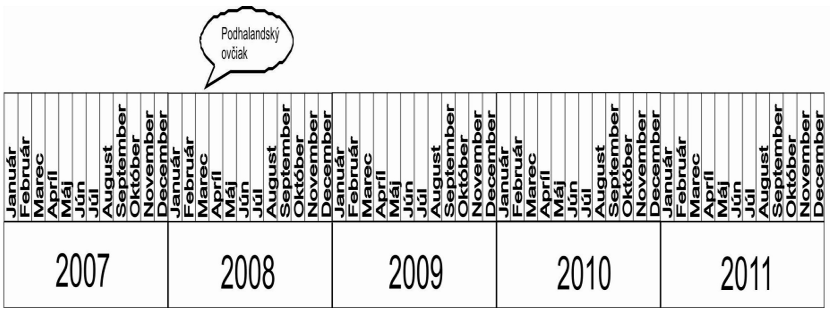
Ja by som si najradšej kúpila všetkých psíkov.

Úloha 2. Vypočítaj! Koľko eur by som potrebovala, keby som sa rozhodla kúpiť si všetkých psíkov?

....

Výpočet:

Keď kupujeme psa, je veľmi dôležité vedieť, koľko má rokov. Psi sa tak, ako ľudia, správajú v každom veku inak. Ako šteniatka sú hravé a nezbedné a ako dospelí jedinci sú pokojnejší a spoľahlivejší. Jeden rok pre človeka predstavuje sedem rokov pre psa.



Úloha 3. Odpovedz na nasledujúce otázky:
Koľko rokov má Podhalandský ovčiak v skutočnosti? ....
Koľko je to „psích“ rokov? ....
Ktorý zo psov je najmladší? (Pomôž si tým, že si na časovej osi vyznačíš, kedy sa približne ktorý psík narodil.) ....

No a najťažšie bude, ako vždy, vybrať takého psíka, s ktorým budú všetci spokojní.

- Mamička povedala: „Mal by byť krátkosrstý, nechcem mať chlpy po celom byte.“
- Brat povedal: „Nech nie je starší ako 8 mesiacov, aby som ho mohol vycvičiť.“
- Sestra povedala: „Nech je maličký, nie vyšší ako 30 cm.“
- Otecko povedal: „Nech nestojí viac ako 45 €.“
- Ja by som chcel, aby bol veselý a hravý.

Úloha 4. Pomôž mi vybrať takého psíka, ktorý by vyhovoval každému členovi našej rodiny.

....

....

Analýza jednotlivých úloh

Úloha 1 obsahuje tri otázky. Všetky sú zamerané na vyhľadávanie a čítanie údajov z tabuľky na základe jedného alebo dvoch kritérií. Žiaci využívajú kompetencie na reprodukčnej úrovni.

Úloha 2 obsahuje jednu otázku. V tomto prípade musí žiak vyhľadať údaje z tabuľky a použiť ich takým spôsobom, aby vypočítal požadovanú čiastku. Teda využíva kompetencie na úrovni prepojenia.

Úloha 3 obsahuje tri otázky. Pri prvej z otázok má žiak z údajov uvedených v tabuľke zistiť skutočný vek psa v rokoch, pričom má daný iba mesiac a rok jeho narodenia. Tu už musí prepájať daný údaj so svojimi vedomosťami. V ďalšej otázke má využiť aj novú informáciu o tom, že jeden rok pre človeka je sedem rokov pre psa, a túto informáciu správne spracovať a použiť správnu matematickú operáciu. V poslednej otázke je potrebné pracovať aj s priloženou časovou osou, na ktorej je možné vyznačiť dátum narodenia jednotlivých psov, a z toho vyčítať, ktorý je najmladší, teda na časovej osi vyznačený ako posledný. Vo všetkých otázkach je potrebné využiť kompetencie na úrovni prepojenia, v prípade práce s časovou osou až na úrovni reflexie.

V úlohe 4 je potrebné na základe stanovených kritérií vybrať psa, ktorý by spĺňal všetky uvedené podmienky. Táto úloha si vyžaduje od žiaka 2. ročníka zvoliť vhodný systematický spôsob práce s údajmi v tabuľke, pretože jednotlivé podmienky spĺňa niekoľko psov naraz, a teda je potrebné zistiť, ktorý pes alebo psi spĺňajú každú z nich. Z hľadiska skúseností žiakov bude v tomto prípade potrebné využiť kompetencie na úrovni reflexie.

Záver

Problematika týkajúca sa rozvíjania gramotnosti žiakov primárneho stupňa vzdelávania, a teda aj ich matematickej gramotnosti, je jednou z kľúčových úloh a cieľov súčasnej školy. Vniesť „život“ do škôl sa dá predkladaním a riešením rôznych, konkrétnych problémových úloh zo života, ktoré vzbudzujú u žiakov pocit, že sa podieľajú na riešení skutočného problému.

Literatura

[1] Kubáček, Z. et al.: *Matematická gramotnosť – správa.* ŠPÚ, Bratislava, 2004.

[2] Prídavková, A.: Niekoľko námetov na prácu s nadanými žiakmi v matematike v primárnej škole. In: *Sborník příspěvků z mezinárodního semináře. Talent a nadání ve vzdělávání.* Pedagogická fakulta MU, Brno, 2010, s. 144–150.

[3] Scholtzová, I.: Prvé kroky k matematickej gramotnosti. In: *Acta mathematica 13, zväzok 2: VIII Nitrianska matematická konferencia.* FPV UKF, Nitra, 2010, s. 233–240.

[4] *Vzdelávací program pre 1. stupeň základnej školy pre žiakov so všeobecným intelektovým nadaním ISCED 1 – primárne vzdelávanie.* [online] `http://www.statpedu.sk/sk/sections/view/statne-vzdelavacie-programy/statny-vzdelavaci-program` [cit. 2010-07-07].

[5] Zeľová, V.: Matematika pre život – cesty rozvíjania matematickej gramotnosti žiakov primárnej školy v kontexte medzinárodných výskumov OECD PISA a IEA TIMSS. In: *7. Žilinská didaktická konferencia.* FPV ŽU, Žilina, 2010, (CD).

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Blumenstein Tomáš* e-mail: tblumen@mensa.cz
   Pracoviště: Mensa ČR, Španielova 111, Praha 6
2. *Calda Emil* e-mail: ecalda@volny.cz
   Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
3. *Doubková Iva* e-mail: doubkova.iva@centrum.cz
   Pracoviště: GaSOŠe, Pivovarská 62, Vimperk
4. *Houser Jiří* e-mail: houser@spsnome.cz
   Pracoviště: SPŠ, ČSA 376, Nové Město nad Metují
5. *Hruška Michal* e-mail: michal.hruska@wo.cz
   Pracoviště: G, Brandlova 875, Hradec Králové
6. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
   Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
7. *Kolorosová Jana* e-mail: koloros@volny.cz
   Pracoviště: CHYTRÉ HRAČKY, Budyňská 12, Praha 6
8. *Krejčíčková Klára* e-mail: klara.krejcickova@seznam.cz
   Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
9. *Kubát Aleš* e-mail: akubat@scio.cz
   Pracoviště: Scio, Pobřežní 34, Praha 8
10. *Kubát Josef* e-mail: kubat.josef@gypce.cz
    Pracoviště: JČMF, Žitná 25, Praha 1
11. *Kuřina František* e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz
    Pracoviště: UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové
12. *Lukšová Hana* e-mail: hluksova@scio.cz
    Pracoviště: Scio, Pobřežní 34, Praha 8
13. *Machačíková Ivana* e-mail: machacikova@gymzl.cz
    Pracoviště: G, Lesní čtvrť 1364, Zlín
14. *Machková Lenka* e-mail: machkova@gjkt.cz
    Pracoviště: G JKT, Tylovo nábřeží 682, Hradec Králové
15. *Mirová Aneta* e-mail: anetica@seznam.cz
    Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
16. *Molnár Josef* e-mail: molnar@inf.upol.cz
    Pracoviště: PřF UP, 17. listopadu 12, Olomouc

17. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové
18. *Nepovímová Lenka* e-mail: nepovimova@zsuprkova.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Úprkova 1, Hradec Králové
19. *Nováková Anežka* e-mail: anezka.novakova@seznam.cz
Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
20. *Ondráčková Ivana* e-mail: ondrackova@gjkt.cz
Pracoviště: G, J. K. Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové
21. *Patáková Eva* e-mail: eva.patakova@email.cz
Pracoviště: Mensa gymnázium, Španielova 19, Praha 6
22. *Pazourek Karel* e-mail: pazourek@karlin.mff.cuni.cz
Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
23. *Pešková Blanka* e-mail: peskova@gekom.cz
Pracoviště: GEK, Ohradní 55, Praha 4
24. *Plíšková Jana* e-mail: pliskova.jana@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Josefa Ressla 2258, Pardubice
25. *Pokorná Jana* e-mail: ivanbubak@volny.cz
Pracoviště: ZŠ, Štefánikova 448, Pardubice
26. *Popp Karel* e-mail: poppk@post.cz
Pracoviště: důchodce
27. *Prídavková Alena* e-mail: alena.pridavkova@pf.unipo.sk
Pracoviště: PedF Prešovská Univerzita, 17. novembra 1, Prešov
28. *Průšová Anna* e-mail: a.prusova@gjwprostejov.cz
Pracoviště: G J. Wolkera, Kollárova 3, Prostějov
29. *Raška Jan* e-mail: raska@gjs.cz
Pracoviště: GJŠ, Komenského 29, Přerov
30. *Riečan Beloslav* e-mail: riecan@fpv.umb.sk
Pracoviště: Inštitút matematiky a informatiky, Banská Bystrica
31. *Rolínek Michal* e-mail: michalrolinek@gmail.com
Pracoviště: G J. Keplera, Parléřova 2, Praha 6
32. *Růžičková Lucie* e-mail: lucie_ruzickova@seznam.cz
Pracoviště: G, Zborovská 45, Praha 5
33. *Smejkalová Jana* e-mail: smejkalova.jana@centrum.cz
Pracoviště: ZŠ, Benešova 585, Třebíč
34. *Šišková Jana* e-mail: jana.siskova@seznam.cz
Pracoviště: G J. Wolkera, Kollárova 3, Prostějov

35. *Šlégrová Anna* e-mail: aslegrova@scio.cz
Pracoviště: Scio, Pobřežní 34, Praha 8

36. *Takáčová Lenka* e-mail: lenka.takacova@centrum.cz
Pracoviště: VZS a SZS, Komenského 234, Hradec Králové

37. *Tichý Miroslav* e-mail: tichy@ssakhk.cz
Pracoviště: SŠAK, Hradecká 1151, Hradec Králové

38. *Tošnerová Eva* e-mail: e.tosnerova@profimedia-cz.cz
Pracoviště: Profimedia, Sovova 3, Praha 8

39. *Vašutová Anna* e-mail: anna.vasutova@pf.unipo.sk
Pracoviště: PedF Prešovská Univerzita, 17. novembra 1, Prešov

40. *Vaváčková Martina* e-mail: martina@klikni.cz
Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8

41. *Vávrová Šárka* e-mail: vavrovas@zshutnikves.cz
Pracoviště: ZŠ Veselí nad Moravou, Hutník 1456

42. *Wágnerová Blanka*
Pracoviště: SPŠ stavební, Pospíšilova 787, Hradec Králové

43. *Zelenda Stanislav* e-mail: zelendast@gmail.com
Pracoviště: MFF UK, Karlovu 3, Praha 2

44. *Zelendová Eva* e-mail: zelendova@vuppraha.cz
Pracoviště: VÚP, Senovážné náměstí 4, Praha 1

45. *Zhouf Jaroslav* e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1

Název: Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba systémem LaTeX: Miloslav Závodný
Vydavatel: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Náklad: 100 kusů
Rok vydání: 2011

Text neprošel jazykovou úpravou.

Vydání sborníku bylo podpořeno granty
GAUK 4309/2009/A-PP/PedF
GAUK 303511

ISBN 978-80-7290-507-2

ISBN 978-80-7290-607-2
9 788072 905072