Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta,
katedra matematiky a didaktiky matematiky

Jednota českých matematiků a fyziků

Školské zařízení pro DVPP Královéhradeckého kraje

Střední zdravotnická škola Hradec Králové

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 4. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2009

Organizátoři:
SUMA Jednoty českých matematiků a fyziků
Střední zdravotnická škola, Hradec Králové

Programový výbor:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha
RNDr. Vladimír Burjan, Exam testing, Bratislava, Slovensko
Dr. Robert Geretschleager, Gymnasium, Graz, Rakousko
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PF UHK, Hradec Králové
doc. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
Mgr. Lenka Takáčová, Střední zdravotnická škola, Hradec Králové
Mgr. Naďa Pourová, Střední zdravotnická škola, Hradec Králové

Editor:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha

Recenzenti:
RNDr. Pavel Calábek, Ph.D., PřF UP, Olomouc
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., PF UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7290-417-4

OBSAH

Úvodem **5**
Zhouf, J.: Úvodní slovo ke čtvrtému setkání 5

Program konference **6**

Plenární přednášky **7**
Calda, E.: Můj zdravý rozum a nekonečno 7
Hátle, J.: Přírodovědný klokan 11
Kluiber, Z.: Matematická příprava žáků pro jejich účast ve fyzikálních soutěžích 23
Kuřina, Z.: Jak poznat a jak rozvíjet matematické nadání 28
Leischner, P.: Příběh úlohy MO 43-A-S-2 40
Molnár, J.: Výchova talentů v Čechách 52
Švrček, J.: Středoevropská matematická olympiáda 59
Vaníček, J.: Bobřík informatiky, 1. ročník 66
Veselý, J.: Nekonečný proces hledání a počítání planet 81
Vybíral, B.: Mezinárodní soutěžní úspěchy českých studentů ve fyzice 95

Krátké příspěvky a pracovní dílny **104**
Hruška, M.: Matematické pojmy, úvahy a výpočty v hodinách středoškolské biologie 104
Jančařík, A.: Mathematica a interaktivní tabule 121
Kaslová, M.: Hodnocení nadprůměrnosti žáků jejich rodiči 126
Pazourek, K.: Matematické kurzy projektu Talnet 133
Plíšková, J.: Matematika a její aplikace – práce s rozdílnými skupinami žáků 138
Růžičková, L., Zhouf, J.: Kontinuální korespondenční soutěž jako zdroj zajímavých matematických a fyzikálních úloh 144
Tichý, M.: Jak může pomoci matematický software při řešení úloh 147
Vaněk, V.: Co se do Matematického klokana nedostalo 155
Volfová, M.: Motivační logické úlohy 165
Zelendová, E.: Nadaní na Metodickém portálu www.rvp.cz 168

Informace **172**
Hoza, K.: Nakladatelství HAV 172

Ze společenského večera **174**
Calda, E.: O práci s antitalenty a také o jedné úloze 174
Seznam účastníků **177**

ÚVODEM

Úvodní slovo ke čtvrtému setkání

Otvíráte sborník přednášek a dílen z již čtvrtého ročníku konference *Ani jeden matematický talent nazmar*. Historie této konference je poměrně krátká, přesto se její název vryl do paměti učitelů. Pokaždé se na ní setkává poměrně velké množství účastníků. Letošní ročník ale zřejmě zaznamenal hospodářskou krizi, protože počet zúčastněných učitelů byl o něco menší oproti předešlým letům.

K propagaci této akce přispívá jistě i portál SUMA JČMF, kde je možné najít všechny přednesené příspěvky z minulých setkání.

Na konferenci zaznívají plenární přednášky pozvaných hostí, cennější však je, že si přihlašují svá vystoupení i další učitelé. Právě v nich se můžeme seznámit s podnětnými náměty vyvěrajícími z učitelské praxe. Cenné na této konferenci je také to, že se zde setkávají učitelé všech typů a stupňů škol.

Konference má sice v názvu pouze matematiku, je ale snahou programového výboru, aby se konference zúčastnili i učitelé přírodovědných oborů, neboť právě s nimi je matematika nejvíce svázána. V letošním roce se přednášek s přírodovědným zaměřením konalo hned několik.

Na základě osobních zkušeností a referencí učitelů je tedy možné konstatovat, že si konference našla své místo v harmonogramu dalších podobných akcí. Doufejme, že i v dalších letech bude vhodným místem, kde lze prezentovat zkušenosti a práci učitelů s talentovanými žáky v matematice a přírodovědných oborech.

Jaroslav Zhouf

PROGRAM KONFERENCE

Čtvrtek 16. 4.

14.00–14.15	Zahájení
14.15–14.30	Bohumil Vybíral: Mezinárodní soutěžní úspěchy českých studentů ve fyzice
14.30–15.30	František Kuřina: Jak poznat a rozvíjet matematické nadání
15.30–16.00	Přestávka
16.00–16.30	Jaroslav Švrček: Středoevropská matematická olympiáda (MEMO)
16.30–17.00	Jiří Hátle: Přírodovědný klokan
17.00–17.30	Josef Molnár: Výchova talentů v Čechách
17.30–18.00	Emil Calda: Můj zdravý rozum a nekonečno
18.00–19.00	Večeře

Pátek 17. 4.

7.00– 8.00	Snídaně
8.00–12.00	Otevřené hodiny na školách
12.00–13.00	Oběd
13.30–14.30	Jan Veselý: Nekonečný proces hledání a počítání planet
14.30–15.15	Pavel Leischner: Příběh úlohy MO 43-A-S-2
15.15–15.40	Přestávka
15.40–16.00	Příspěvky a dílny účastníků
16.00–17.00	Příspěvky a dílny účastníků
17.00–17.45	Příspěvky a dílny účastníků
18.00–19.00	Večeře
20.00	Společenský večer

Sobota 18. 4.

7.30– 8.30	Snídaně
8.30– 9.15	Jiří Vaníček: Bobřík informatiky, 1. ročník
9.15–10.00	Zdeněk Kluiber: Matematická příprava žáků pro jejich účast na fyzikálních soutěžích
10.00–10.15	Zakončení
10.30–11.30	Oběd

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Můj zdravý rozum a nekonečno

Emil Calda, MFF UK Praha [1]

ABSTRAKT. *V přednášce je uveden příklad tělesa s konečným objemem a nekonečným povrchem, na základě rovnosti* $\lim\,(1+1/n)^n = \mathrm{e}$ *je podán důkaz divergence harmonické řady a na závěr je ukázáno užití nekonečné geometrické řady v Zenónově paradoxu o Achillovi a želvě.*

ZŮSTANE-LI VÁM ROZUM NAD NĚČÍM STÁT,
JE TO ZNAMENÍ, ŽE HO STÁLE JEŠTĚ MÁTE.

Názvem této přednášky bych rád naznačil, že zdravý rozum v současné době pořád ještě mám, i když o tom pochybuji stále častěji. Snad bych měl také podotknout, že k problematice mého zdravého rozumu se často vyjadřuje i má žena, ale pro následující úvahy není zapotřebí, abych zde její závěry reprodukoval.

S nekonečnem jsem měl potíže už v době, kdy jsem učil na střední škole. Na jedné mé vyučovací hodině, ve které jsme probírali limitu posloupnosti a na které byla jako hospitující přítomna zástupkyně ředitele (aprobace matematika, deskriptivní geometrie), jsem několikrát použil formulaci „n jde do nekonečna“. Při následném pohovoru jsem se dověděl, že bych to říkat neměl, protože nekonečno by mohlo v žácích vzbuzovat dojem, že existují věci nepoznatelné, které – jak jistě vím – neexistují. Taky by se prý mohli domnívat, že tam – nedej pámbu! – sídlí Bůh, a že bych měl proto raději říkat „n roste nade všechny meze“. Pomyslel jsem si, že Bůh by mohl sídlit i nade všemi mezemi, ale vzmohl jsem se jen na námitku, že je to obvyklé rčení, a to i v matematice socialistické. Dovolil jsem si dokonce oponovat, že si nemyslím, že když o něčem nebudeme mluvit, tak že to nebude existovat. Byl jsem tenkrát ještě mladý a myslel jsem si, že argumenty mohou někoho přesvědčit. Nicméně však od této doby vždy, když byla ve třídě hospitace, „rostlo n nade všechny meze“ a do nekonečna chodívalo jindy.

[1] e-mail: ecalda@volny.cz

V současné době jsem se s nekonečnem vyrovnal – jedním z důvodů je, že se tam asi brzy odeberu. Nicméně však můj zdravý rozum se s některými nepochybnými fakty, která se nekonečna týkají, vyrovnat nedokázal a stále se jim diví. Některé z nich se pokusím ukázat navzdory tomu, že jde o matematické výsledky dobře známé.

První ukázkou je těleso, které má konečný objem a nekonečný povrch. Představme si válec s poloměrem podstavy rovným $\frac{1}{2}$ a výškou 2, na jehož horní podstavu postavíme druhý s poloměrem podstavy $\frac{1}{4}$ a výškou 4 tak, že osy obou válců splývají. Stejným způsobem připojíme k těmto dvěma válcům třetí, jehož poloměr podstavy je $\frac{1}{8}$ a výška 8, na tyto tři postavíme čtvrtý s poloměrem podstavy $\frac{1}{16}$ a výškou 16 a tímto způsobem pokračujeme tak, aby poloměr podstavy n-tého válečku byl $\frac{1}{2^n}$ a jeho výška byla rovna 2^n. Pro objem V_n a obsah S_n pláště n-tého válce zřejmě platí:

$$V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot 2^n = \frac{\pi}{2^n}$$

$$S_n = 2\pi \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 2\pi$$

Je zřejmé, že pro objem V a obsah S pláště tělesa tvořeného nekonečně mnoha těmito válečky dostaneme:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = \pi$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi \cdot (1 + 1 + \cdots + 1 + \ldots) = \infty$$

Zjistili jsme, že objem vzniklého tělesa je roven π, a je tedy konečný, zatímco obsah jeho pláště konečný není. Každému, kdo něco ví o nekonečné geometrické řadě, je to naprosto jasné, ale můj zdravý rozum, který se mi pořád nedaří potlačit, se proti tomu vzpouzí.

Představ si, povídá, *že poloměr podstavy i výška každého válečku jsou dány v centimetrech a že máme plechovku, ve které je π cm^3 barvy. Představ si dále, že všechny válečky jsou duté a že v jejich podstavách jsou otvory, kterými jsou propojeny, takže barva, kterou přelijeme z plechovky s objemem π cm^3 do uvažovaného tělesa, vyplní celý jeho objem. Neobarví však celou jeho vnitřní plochu, neboť její obsah je nekonečný. Není to divné? Je možné, aby kapalina zcela vyplňující duté těleso nesmáčela celý jeho vnitřek?!*

Chcete-li tuto úvahu zpochybnit argumentem, že uvedené těleso je konstruovatelné pouze myšlenkově a že se nedá realizovat, takže tato situace vůbec nemůže nastat, zdravý rozum vám namítne, že ani v myšlenkových experimentech by žádný rozpor být neměl. A tak se chvíli dohadujete, až vás to oba přestane bavit a k žádnému sblížení rozdílných stanovisek nedojde. Zdravý rozum jen tak nepřesvědčíte, i když se může stát, že v ojedinělých případech úspěšní budete.

Mně se například podařilo dosáhnout toho, že můj zdravý rozum už se nediví tomu, že součet nekonečně mnoha kladných sčítanců nemusí být nekonečně velký, ale že může být roven určitému číslu. Pochopil to na příkladě nekonečné geometrické řady s kvocientem $|q| < 1$, tj. řady, pro jejíž členy a_n je $\lim a_n = 0$. To však mělo za následek, že jsem se začal domnívat, že součet *každé* řady, jejíž členy konvergují k nule, je určité číslo, a není tedy nekonečně velký. Chcete-li mu ukázat, že se mýlí, vezmete nejspíš harmonickou řadu a dokážete mu, že tato řada diverguje k nekonečnu. Pro zajímavost si důkaz tohoto tvrzení ukážeme, a to v jiné podobě, než bývá obvyklé.

Vyjdeme z toho, že víme, že posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a že má za limitu číslo e. Znamená to, že pro všechna přirozená čísla n platí $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$, neboli $n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$, to je $\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Z této poslední nerovnosti dostáváme, že pro všechna n platí:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \ln(n+1)$$

Tento výsledek znamená, že rostoucí posloupnost částečných součtů harmonické řady není shora omezená, takže tato řada diverguje k plus nekonečnu.

Důkaz jste zdárně dokončili, ale už se o slovo hlásí zdravý rozum. *Představ si,* praví, *že z tvrdého papíru vystřihneme čtverečky, jejichž obsah v dm*^{2} *je postupně* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ *a že těmito čtverečky budeme pokrývat plochu strahovského stadionu. Vzhledem k tomu, že posloupnost částečných součtů harmonické řady je rostoucí a není shora omezená, po jisté době celou plochu pokryjeme. To bych tedy rád viděl,* řekne s ironickým úsměvem, a čeká, co vy na to. A můžete mu vykládat, co chcete, stejně jeho pochybnosti nevyvrátíte.

K ukázce, že součet nekonečné řady může být nekonečný, i když její členy konvergují k nule, se harmonická řada používá velmi často. Nevýhodou je, že k důkazu tohoto tvrzení jsou zapotřebí znalosti překračující rámec střední školy. Existují však jiné řady tohoto typu, jejichž divergence se dokáže snadněji.

Vezmeme-li například řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

jejíž členy konvergují k nule, ze vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

dostaneme, že pro její částečný součet s_n platí:

$$s_n = \left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \\ = \sqrt{n+1}-1$$

Rostoucí posloupnost částečných součtů této řady není tedy shora omezená, což znamená, že daná řada diverguje k plus nekonečnu.

Se součtem nekonečné řady se také setkáváme ve známém Zenónově paradoxu o Achillovi a želvě. Na začátku běžeckého utkání se Achilles nachází v bodě A, želva v bodě $\check{Z}_1$ ve vzdálenosti d od bodu A a oba se v daný okamžik dají do pohybu po přímce $A\check{Z}_1$ – Achilles za želvou rychlostí u, želva od Achilla rychlostí $v < u$. Achilles přiběhne do bodu $\check{Z}_1$ za dobu $t_1 = \frac{d}{u}$, ale želva už tam nebude, protože za tuto dobu se přemístila do bodu $\check{Z}_2$, jehož vzdálenost od bodu $\check{Z}_1$ je $d_1 = v \cdot \frac{d}{u}$. Achilles pokračuje ve stíhání a z bodu $\check{Z}_1$ se přemístí do bodu $\check{Z}_2$ za dobu $t_2 = \frac{d_1}{u} = \frac{d}{u} \cdot \frac{v}{u}$. Tímto způsobem se Achilles želvě stále přibližuje, ale podle Zenóna ji nikdy nedohoní, protože vždy, když přiběhne do bodu, kde byla, už v něm nebude. Následující výpočet nám sice neřekne, kde je chyba v Zenónově úvaze, ale umožní nám dobu, za kterou Achilles želvu dohoní, určit. Pro tuto dobu T, která je rovna součtu následující nekonečné řady, platí

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = \frac{d}{u} + \frac{d}{u} \cdot \frac{v}{u} + \frac{d}{u} \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^2 + \frac{d}{u} \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^3 + \ldots = \frac{d}{u-v},$$

neboť kvocient $\frac{v}{u}$ této geometrické řady je kladný a menší než jedna. Achilles tedy želvu dohoní, a to za dobu $T = \frac{d}{u-v}$. Poznamenejme, že ke stejnému výsledku bychom došli snadněji, kdybychom si představili, že želva stojí a Achilles se k ní přibližuje rychlostí $u - v$. Mně ani mému zdravému rozumu není jasné, proč někteří autoři považují tento výpočet za vyvrácení Zenónovy úvahy – tento výpočet pouze potvrzuje to, že Achilles želvu dohoní, a to víme i bez počítání. (Poučení o tom, jak se k tomuto problému staví patamatematika, mohou zájemci najít v [1].)

Doufám, že z řečeného výše bylo vidět, že zdravý rozum, který zde v některých případech zastupoval i názory středoškolských studentů, to při setkání s nekonečnem nemívá lehké. A to před ním skrývám poznatky o tom, že na různě dlouhých úsečkách je stejně bodů, a už vůbec se ho neodvažuji seznámit s paradoxem Banacha a Tarského, který praví, že dvě koule o *různých* poloměrech je možné rozložit na stejný konečný počet disjunktních částí, které jsou navzájem shodné! Zdravý rozum vznikl během historie při práci lidí s množinami konečnými – počet mamutů, které pásl pračlověk, byl vždy konečný a počet žen svedených Donem Juanem také nekonečný nebyl. Nechtějme proto na zdravém rozumu, aby nám radil, když jde o nekonečno, a buďme rádi – i když má řadu nedostatků – že ho máme!

Literatura

[1] Calda, E.: *Základy patamatematiky.* Prometheus, Praha, 2005.

Přírodovědný klokan

Jiří Hátle, Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc [1]

Abstrakt. *V příspěvku je krátce představen projekt „STM-Morava“, při jehož řešení vznikla nová soutěž Přírodovědný klokan, dále samotná soutěž a její jednotlivé ročníky (obzvláště poslední uplynulý ročník) včetně vyhodnocení některých provedených anket, průzkumů a statistik.*

[1] e-mail: jiri.hatle@upol.cz

„STM-Morava“

Projekt „STM-Morava aneb Věda v přímém přenosu“ číslo 2E06029 Národního programu výzkumu II byl řešen pracovníky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci ve spolupráci s kolegy z Pedagogické fakulty UP v Olomouci. Cílem projektu byl výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže zaměřených na motivaci pro vědeckovýzkumnou činnost v oblasti přírodních věd, obzvláště v oborech matematických, fyzikálních a chemických. V jednotlivých podúkolech vznikly a byly organizovány nové soutěže a aktivity jako Věda je zábava, I-soutěže, Přírodovědné jarmarky, Studentská vědecká konference, Hrátky s matematikou, Badatel, Mladý vynálezce, Netradiční workshopy či Turnaj měst, které stále fungují a pokračují dále samostatně. Více informací o projektu, soutěžích a aktivitách na [1].

Přírodovědný klokan

V rámci řešení dílčího úkolu S002 projektu MŠMT ČR „STM-Morava“ vznikla nová soutěž Přírodovědný klokan. Jak název napovídá, tato soutěž vychází z mezinárodní soutěže Matematický klokan [2], která je v České republice dobře zavedená a populární. Obě soutěže jsou jednorázové a individuální, žáci řeší v testu v daném časovém limitu 24 úloh s uzavřenými otázkami s jednou správnou odpovědí z pěti nabízených. K distribuci zadání a k vyhodnocování soutěže se využívá vybudované sítě krajských (okresních a školních) důvěrníků. Přírodovědný klokan však není úzce zaměřen pouze na matematiku, a tak zde nalezneme úlohy i z dalších předmětů, jako je fyzika, chemie a biologie, dále se objevují otázky z vědy a techniky, historie, geografie či filologie. Obě soutěže si kladou za cíl popularizovat matematiku a přírodovědné obory mezi mládeží a vzbuzovat a podporovat zájem žáků a studentů o tyto obory. Soutěže pomáhají mezi žáky vyhledávat talenty a u studentů rozvíjet jejich nadání a podporovat jejich zájem o přírodovědné obory. K celé soutěži vznikly webové stránky [3], na kterých jsou informace k soutěži, kontakty na pořadatele a krajské důvěrníky, či elektronická verze vydávaných sborníčků z jednotlivých ročníků se spoustou zajímavých informací včetně zadání, správných výsledků a statistik.

Přírodovědný klokan 2006/2007

První ověřovací ročník soutěže Přírodovědný klokan proběhl na školách v České republice 24. dubna 2007 ve dvou soutěžních kategoriích –

Kadet (8. a 9. třída základních škol, tj. 14–15 let) a Junior (I. a II. ročník středních škol, tj. 16–17 let). Celkem se zúčastnilo přes 20 tisíc soutěžících. K soutěži byl elektronickou poštou rozeslán dotazník pro učitele po školách Olomouckého kraje, které se soutěže zúčastnily. Učitelé se vyjadřovali např. k náročnosti úloh, ke vhodnosti zařazených úloh, k organizačním záležitostem a účasti v dalších letech. Důležitou připomínkou byl termín soutěže – jarní není tolik vyhovující [4].

Přírodovědný klokan 2007/2008

Druhý ročník se tak ve školním roce 2007/2008 konal 7. listopadu 2007 a zúčastnilo se ho v obou kategoriích přes 30 tisíc soutěžících. Úlohy byly rovnoměrně rozděleny na matematiku, fyziku, chemii a biologii. Opět byl rozeslán dotazník pro učitele a nově také pro účastníky soutěže.

Z odpovědí vyplývá, že soutěžní úlohy byly kromě otázek z chemie (hlavně v kategorii Kadet) vyvážené co do obtížnosti, vhodně vybrané, termín soutěže je již vyhovující, organizační věci byly v pořádku a je velký zájem zúčastnit se dalšího ročníku Přírodovědného klokana.

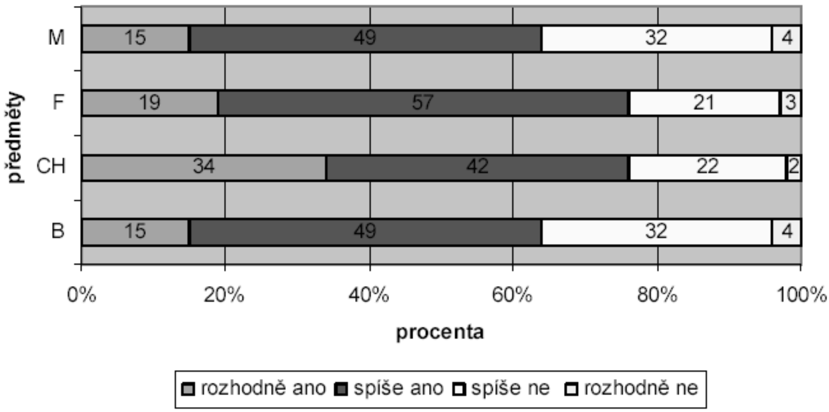
K letošnímu ročníku soutěže Přírodovědný klokan byl sestaven a rozeslán i dotazník pro soutěžící, abychom zjistili jejich názor na soutěž. Dotazníků se pořadatelům soutěže k vyhodnocení vrátilo z Karlovarského kraje 851 v kategorii Kadet a 125 v kategorii Junior.

První dvě otázky zjišťovaly, na jaké škole soutěžící studuje a v kterém ročníku, aby mohly být dotazníky rozděleny. Dále se podívejme na výsledky v jednotlivých kategoriích.

V kategorii Kadet byly odpovědi na třetí otázku, která zněla *Považuješ úlohy v jednotlivých oborech za obtížné, těžké?*, shodné ve všech oborech kromě biologie, která dopadla výrazně lépe. V matematice, fyzice a chemii téměř 20 % dotazovaných uvedlo odpověď rozhodně ano, 50 % spíše ano, kdežto v biologii to bylo pouze po řadě 10 % a 25 %. Z odpovědí na čtvrtou otázku vyplynulo, že soutěžící rozuměli zadání a formulaci otázek ve všech oborech obdobně, a to v průměru na 75 %. Žáci se dozvěděli ze 40 % něco nového či přínosného, což zjišťovala pátá otázka. Soutěžícím se soutěž Přírodovědný klokan líbí a na otázku, zda se zúčastní v dalším roce, odpověděli celkem kladně, i když žáci devátých tříd se zúčastní pouze z poloviny. To lze přičíst tomu, že nevědí, že mohou soutěžit i na střední škole, jak následně potvrdili a uvedli v připomínkách. V poslední otázce se mohli stručně vyjádřit k celé soutěži. Zde je ve zkratce uvedeno několik vybraných nebo častěji uvedených námětů a připomínek: dobré, lepší než učení; opakování do budoucna (na přijímačky, SCIO); zbytečné, když bude SCIO; něco bylo těžké, něco lehké; více předmětů; vytvořit humanitně zaměřeného Klokana; rozdělit na osmou a devátou třídu, hlavně kvůli chemii; jen 4 nabízené odpovědi.

Odpovědi na třetí otázku v kategorii Junior jsou uvedeny v následujícím grafu.

Považuješ úlohy v jednotlivých oborech za obtížné, těžké?



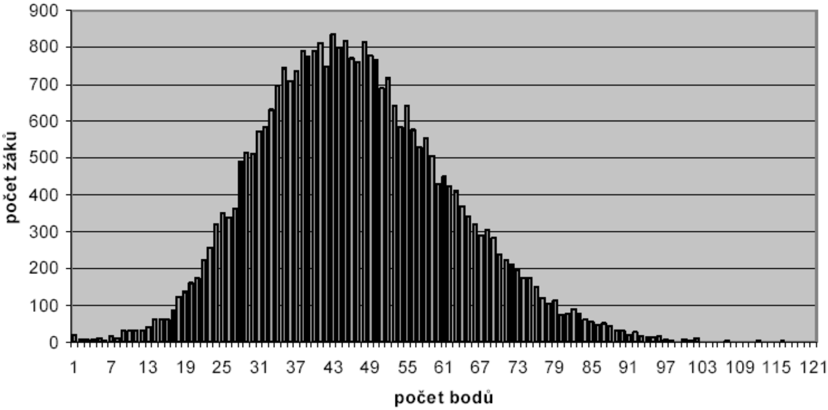
Čtvrtá otázka se ptala *Bylo pro tebe zadání úloh srozumitelné a formulace otázek jasná?* Z dotazovaných uvedlo kladnou odpověď 80 % řešitelů. Na další dotaz, zda se dozvěděli něco nového či přínosného v jednotlivých oborech, odpovědělo kladně v matematice 20 %, ve fyzice 25 %, v chemii téměř 40 % a v biologii polovina dotazovaných, což ukazuje na výběr vhodných otázek. Soutěžícím se celkově soutěž líbí a zúčastní se v dalších ročnících. Mnohem více zájmu o soutěž projevili studenti druhých ročníků, pro které zatím další kategorie nenásleduje. Zde je opět výběr několika námětů a komentářů: líbí se; těžké otázky; rozdělit na jednotlivé předměty; vytvořit humanitně zaměřeného Klokana; vrátit se pouze k matematice; bez připomínek [5].

Na základě připomínek učitelů i soutěžících nebudou v budoucnu v kategorii Kadet otázky z chemie. Ty budou nahrazeny úlohami z ostatních oborů a např. z geografie.

Přírodovědný klokan 2008/2009

Přírodovědný klokan 2008/2009 [6] se uskutečnil v obou svých kategoriích 1. října 2008 a důležitou informací je, že pro školní rok 2008/2009 byl Přírodovědný klokan zařazen do kategorie B soutěží vyhlašované Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

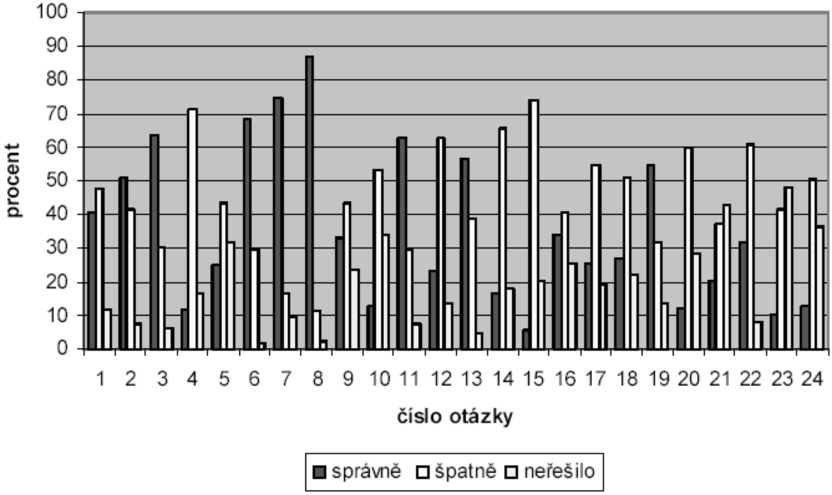
V kategorii Kadet se zúčastnilo 30 942 soutěžících (pozn.: opět nárůst počtu soutěžících v obou kategoriích od minulého ročníku), kteří dosáhli průměrného bodového zisku 45,48 bodu. V následujícím grafu je znázorněno rozložení počtu soutěžících, kteří získali příslušný počet bodů.



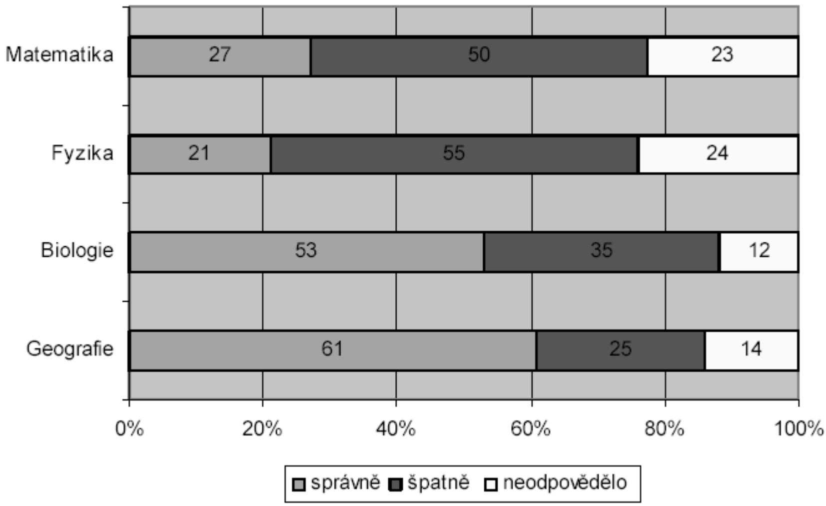
Nejlepší řešitelé v kategorii Kadet jsou uvedeni v následující tabulce:

Příjmení a jméno	Třída	Přesná adresa školy	Body
Novák Marek	9. A	ZŠ a MŠ České Velenice, Čsl. Legií 325, 378 10 České Velenice	120
Janatová Kristýna	3. B	G Jana Nerudy, Komenského nám. 9, 130 00 Praha 3	115
Nechutný Stanislav	4	G Z. Wintra, nám. J. Žižky 180, 269 19 Rakovník	
Kucherková Radka		G a SOŠ, Masarykova třída 1313, 735 14 Orlová–Lutyně	111
Trubák Vojtěch	4ag	G Brno, třída Kpt. Jaroše 14, 658 70 Brno	

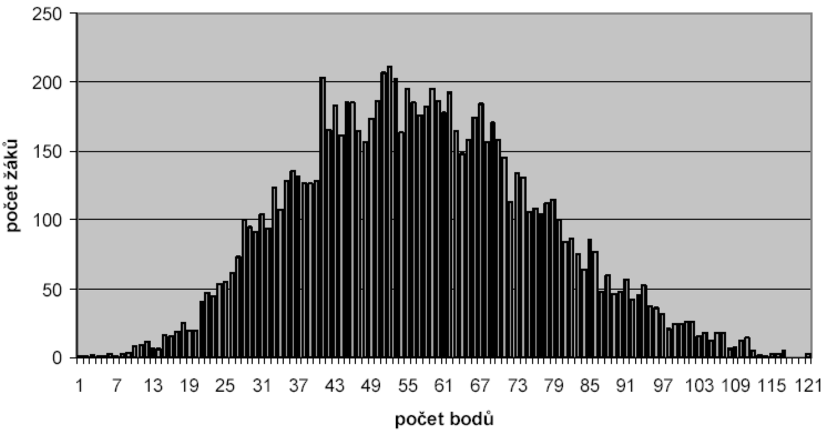
Podrobným rozborem 1 136 výsledků, byla zjištěna obtížnost jednotlivých soutěžních úloh v kategorii Kadet (viz následující graf).



Následující graf ukazuje obtížnost úloh za jednotlivé obory. Je zřejmé, že soutěžící si věděli nejlépe rady s otázkami z biologie.



V kategorii Junior se ročníku Přírodovědného klokana 2008/2009 zúčastnilo 9 793 studentů. Jejich bodový průměr byl 56,15 bodů. V následujícím grafu je znázorněno rozložení počtu soutěžících, kteří získali příslušný počet bodů.

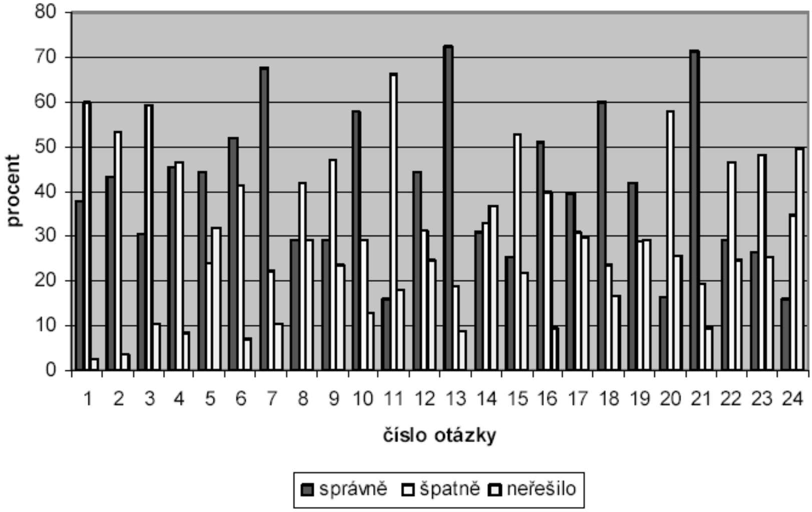


Nejlepší řešitelé v kategorii Junior jsou uvedeni v následující tabulce:

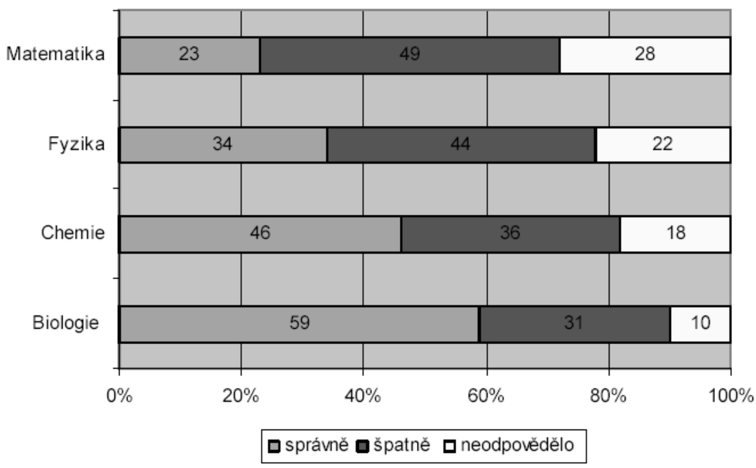
Příjmení a jméno	Třída	Přesná adresa školy	Body
Borecký Zdeněk	sexta	G a SOŠ, Lužická 423, 551 01 Jaroměř	120
Busínský Jan Pokorný Tomáš	2. A	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14, 658 70 Brno	
Bucháček Martin	6. M	G Luďka Pika, Opavská 21, 312 00 Plzeň	116
Dohnal Tadeáš	6. L	G Ch. Dopplera, Zborovská 45, 150 00 Praha 5	
Francírek Pavel	sexta	G Kojetín, Svatopluka Čecha 683, 752 01 Kojetín	
Hála Petr	SA	G Voděradská, 100 00 Praha 10	
Hlubocký Stanislav	5	G Kolín, Žižkova 162, 280 31 Kolín 3	
Hrnčíř Jakub	sexta	G F. X. Šaldy, Partyzánská 530, 460 11 Liberec 11	115
Jurásková Veronika	QB	G J. A. Komenského a Jazyková škola, Komenského 169, 688 28 Uherský Brod	
Rádl Michael	4A6	Klasické a španělské G, Vejrostova 2, 635 00 Brno	

Rozborem 1 163 výsledků byla zjištěna obtížnost jednotlivých soutěžních úloh v kategorii Junior. Na základě podnětů a připomínek a zkušeností z Matematického klokana bude pravděpodobně v následujících ročnících omezen počet otázek z matematiky.

Následující graf vizualizuje uceleně výsledky.



Následující graf ukazuje obtížnost úloh za jednotlivé obory. I v kategorii Junior byli studenti nejúspěšnější při řešení úloh z biologie.



Postavení matematiky v soutěži

Vraťme se zpátky k druhému ročníku soutěže. Z výsledků a dotazníků vyplývá, že úlohy z matematiky byly vnímány jako nejkomplikovanější a studenti v nich dosahovali nejhorších výsledků. Je přirozenou otázkou, proč tomu tak je. Důvodem může být nepřiměřená obtížnost otázek, ale také zhoršené kompetence studentů pro řešení úloh (některých typů).

Konkrétní matematické úlohy

Přejděme ke konkrétnímu rozboru úloh. V každé kategorii měli studenti 6 úloh z každého oboru, přičemž dvě otázky byly malé, dvě střední a dvě velké obtížnosti.

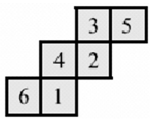
V kategorii Kadet byly zadány matematické úlohy (seřazené podle obtížnosti):

1. Robert má zabalit zásilku pohádkových videokazet. K dispozici má pouze krabice na 10 kusů videokazet. Kolik krabic bude potřebovat, je-li v zásilce 178 kazet pohádky Pyšná princezna, 121 kazet s pohádkou Tři oříšky pro Popelku a v jedné krabici mohou být pouze kazety jednoho druhu?

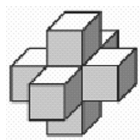
2. Aleš má o 7 spolužáků více než spolužaček. Kolik spolužaček má Alešova spolužačka Jana, je-li ve třídě dvakrát více chlapců než dívek?

3. V rovině je dán čtverec o straně délky 1 cm. Každý z vrcholů tohoto čtverce je středem kružnice o poloměru 1 cm ležící v téže rovině. V kolika bodech roviny se kružnice navzájem protínají?

4. Obrázek znázorňuje síť krychle, jejíž stěny jsou popsány čísly od 1 do 6. Utvořme součiny trojic čísel, která odpovídají stěnám se společným vrcholem krychle. Určete největší z těchto součinů.

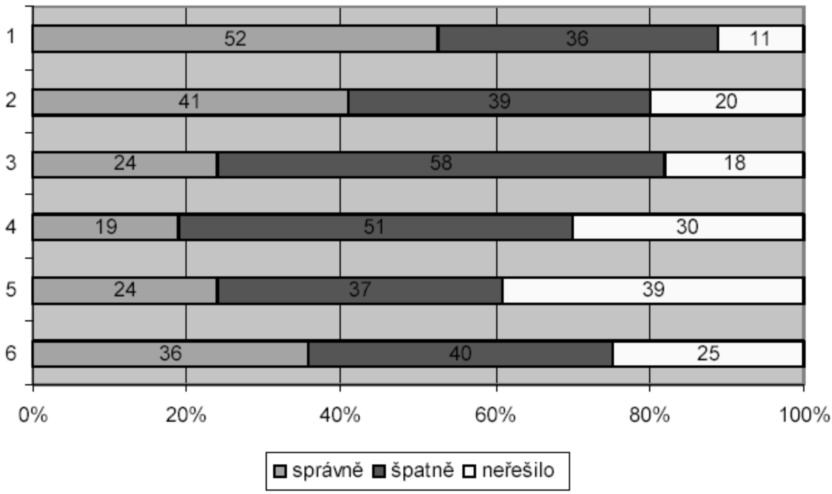


5. Jana vyrobila talisman ze sedmi hracích kostek, které slepila tak, že každá dvojice k sobě přilepených stěn kostek měla na sobě stejný počet ok. Kolik ok je na povrchu tohoto talismanu?



6. Jaká je první číslice nejmenšího přirozeného čísla se součtem číslic 2 001?

Následující graf ukazuje, jak si soutěžící vedli s řešením jednotlivých úloh.

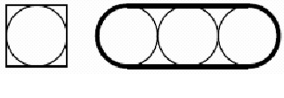


Z grafu je zřejmé, že největší problém dělaly při řešení zde uvedené úlohy 3, 4 a 5. Úlohy 4 (nejméně správných odpovědí) a 5 se soustředily na prostorovou představivost. Domníváme se, že cvičení prostorové představivosti je na základní škole věnováno málo pozornosti. Navíc zvládnutí prostorových úvah je značně komplikované (a závislé na talentu žáka), tedy není překvapením nízká úspěšnost při řešení. Nejvíce chybných odpovědí nacházíme v úloze 3, kde studenti pravděpodobně omezili svou pozornost na vnitřek čtverce (popřípadě opomněli vrcholy čtverce). Za povšimnutí stojí celkem obstojné zvládnutí 6. úlohy. (Pozn.: Nabízené možnosti a správné odpovědi na otázky viz [6].)

V kategorii Junior byly zadány matematické úlohy (seřazené podle obtížnosti):

1. Je-li sud ze 30 % prázdný, je v něm o 30 litrů více, než když je ze 30 % plný. Kolik litrů se vejde do sudu?

2. Obsah čtverce na levém obrázku je a, obsah jemu vepsaného kruhu je b. Kruhy na obou obrázcích jsou shodné. Jaký je obsah oblasti ohraničené silnou čarou na pravém obrázku?



3. Děti A, B, C a D vyslovily následující tvrzení

A: B, C a D jsou děvčata.

B: A, C a D jsou chlapci.

C: A a B lžou.

D: A, B a C říkají pravdu.

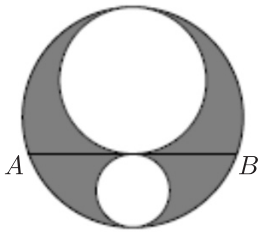
Kolik z těchto dětí říká pravdu?

4. V součtu dole není ani jedna z číslic X, Y a Z rovna nule. Čemu je rovna číslice X?

$$
\begin{array}{r}
X\ X \\
Y\ Y \\
Z\ Z \\
\hline
Z\ Y\ X
\end{array}
$$

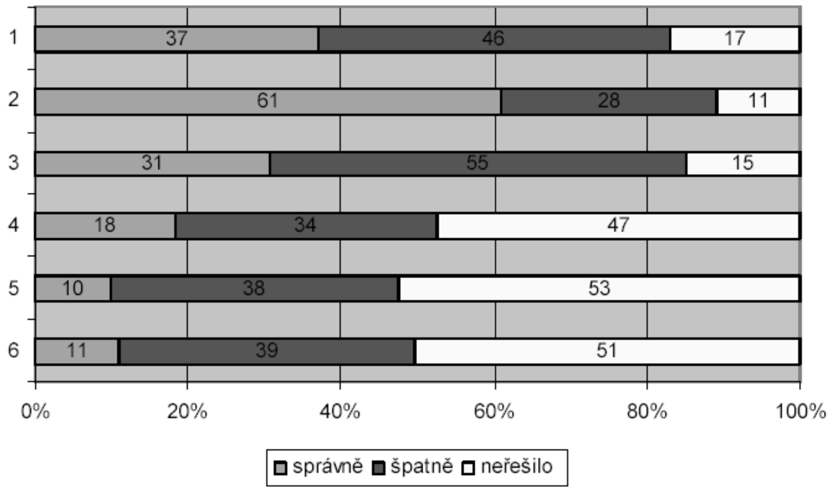
5. Číslo $a = 111\dots11$ je tvořeno 2 003 číslicemi 1. Které z čísel je součtem číslic součinu $2\,003\,a$?

6. Obsah šedě vybarvené části kruhu je roven 2π. Určete délku úsečky AB.



Obecně jsou výsledky v matematice v kategorii Junior horší. Zde uvedená první úloha dělala překvapivě soutěžícím potíže, ač je lehké obtížnosti. Za povšimnutí rozhodně stojí poslední tři úlohy, na které polovina soutěžících neodpověděla. Přitom v 5. a 6. úloze ta druhá polovina pravděpodobně svou odpověď tipovala.

Následující graf ukazuje, jak si soutěžící vedli s řešením jednotlivých úloh:



Závěrem

Do budoucna si přejeme, aby soutěž Přírodovědný klokan nadále podporovalo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a aby získávala na oblibě a popularitě stejně jako její bratr Matematický klokan. Příští ročník soutěže se uskuteční dne 11. listopadu 2009.

Poděkování

Příspěvek byl zpracován s podporou projektu Národního programu výzkumu II MŠMT č. 2E08021 NFS „Výzkum netradičních forem spolupráce středních škol s blízkými základními, středními i vysokými školami, se složkami místní samosprávy, firmami a dalšími subjekty“.

Literatura

[1] `http://www.upol.cz/projects/souteze-up/prirodovedne-souteze/stm-morava/`

[2] `www.matematickyklokan.net`

[3] `www.kag.upol.cz/prirodovednyklokan`

[4] Hátle, J., Molnár, J., Nocar, D.: *Přírodovědný klokan 2006/2007.* VUP, Olomouc, 2007.

[5] Hátle, J., Molnár, J.: *Přírodovědný klokan 2007/2008.* VUP, Olomouc, 2008.

[6] Hátle, J., Molnár, J.: *Přírodovědný klokan 2008/2009.* VUP, Olomouc, 2009.

Matematická příprava žáků pro jejich účast ve fyzikálních soutěžích

Zdeněk Kluiber, KF PF UHK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Žák střední školy může mít bezprostřední srovnání svých kvalit s ostatními vrstevníky prostřednictvím účasti v soutěžích. Je dobře, že soutěží je více. Tato mnohotvárnost jednoznačně koreluje s osobností mladého člověka – „každý je jiný“! Soutěž představuje i prostředek ke zvýšení zájmu žáků o daný obor. Stanovená pravidla hodnocení soutěže umožňují klasifikovat žákovy kvality a tím mu i sdělit, ve které oblasti je, resp. není, dobře odborně připraven.*

Téma svého příspěvku jsem zvolil zejména na základě:
1. zkušeností ze své dřívější práce učitele fyziky na gymnáziu,
2. práce ve fyzikálních soutěžích v ČR,
3. zkušeností z mezinárodních fyzikálních soutěží a odborných aktivit.

To, aby žák střední školy mohl mít bezprostřední srovnání svých kvalit s ostatními spolužáky, mu zpravidla „sdělí“ výsledky ústních a písemných zkoušek ve třídě.

Srovnání se svými vrstevníky pak umožní účast v soutěžích. Je dobře, že soutěží je více. Tato mnohotvárnost jednoznačně koreluje s osobností mladého člověka – „každý je jiný“!

Řada žáků gymnázií se hodlá již v průběhu svého studia před maturitní zkouškou „poměřit se svými soky“, porovnat svoje kvality s kvalitami vrstevníků, žáků ostatních škol v ČR. Tím nejjednodušším způsobem je pak vstup do odborných soutěží a aktivit [1].

Soutěž obecně představuje i prostředek ke zvýšení zájmu o daný obor. Stanovená pravidla hodnocení soutěže umožňují klasifikovat žákovy kvality a tím mu i sdělit, ve které oblasti je, resp. není, dobře odborně připraven.

Ve fyzice ve světě je – zahrnuto ve WFPC (World Federation of Physics Competitions) – v současné době asi 80 různých soutěží. Některé jsou světové, další mezinárodní, kontinentální, regionální, státní atd. Žáci si vybírají „svoji účast v soutěži“ podle svého zájmu a podle svých schopností, kam lze zahrnout zejména vztah k experimentální fyzice, k teoretické fyzice, k individuální práci, k práci v kolektivu.

[1] e-mail: zdenek.kluiber@email.cz

Studenti středních škol v ČR se mohou zúčastňovat pěti náročných soutěží ve fyzice v rámci své mimoškolní práce, která však na výuku fyziky poněkud i bezprostředně navazuje. Všechny tyto soutěže mají mezinárodní nadstavbu.

U všech dále jmenovaných soutěží jsou jednotně uvedeny následující údaje, resp. charakteristiky: rok založení, realizovaný ročník v roce 2009, místo konání, počet účastníků: přibližně 400 – D, přibližně 1 000 – M, základem je písemné řešení úloh, resp. problému – P, základem je ústní prezentace řešení úloh, resp. problému – U, prezentace probíhá v angličtině – A.

- Fyzikální olympiáda [2]: 1959, 50, střídají se města zúčastněných zemí, D – 60 zemí, P, nejosvědčenější systém práce při rozvoji žáků, individualit talentovaných na fyziku, samotná soutěž je vyvrcholením dlouhodobější činnosti se zájemci o fyziku.
- Středoškolská odborná činnost v oboru fyzika: 1978, 31, D, P, U, zpracování písemného řešení (jedním až třemi žáky) zvoleného tématu a na přehlídkách jeho veřejná obhajoba, v mezinárodní nadstavbě – A.
- První krok k Nobelově ceně za fyziku: 1992, 19, Varšava – zakladatel a organizátor soutěže je Fyzikální ústav Polské akademie věd, D – 50 zemí, P, práce předkládány v angličtině, zajímavé a hodnotné výsledky řešení významného fyzikálního problému podle vlastního výběru žáka – individuality.
- Turnaj mladých fyziků: 1979, 22, střídají se města zúčastněných zemí, D – 30 zemí, P, U, A, soutěž pětičlenných družstev žáků středních škol, jsou řešeny originální, náročné úlohy, obecně formulované fyzikální problémy podobné úkolům, jaké řeší vědci při zkoumání fyzikálních jevů.
- Národní přehlídka AMAVET: 1994, 16, zpracované projekty zpravidla velmi úzce navazují na spolupráci žáků s pracovníky z AV ČR.

Nadstavbou nad výše uvedenými soutěžemi jsou světové, resp. mezinárodní přehlídky Intel ISEF, EU Contest, ESI, konference ICYS, studijní pobyt ve Fyzikálním ústavu PAV na základě úspěchu v soutěži První krok k Nobelově ceně za fyziku. Podrobnější informace o těchto aktivitách jsou:

- Intel International Science and Engeneering Fair – Intel ISEF: 1950, 59, střídají se města USA a Kanady, přibližně 1 600 účastníků ze 60 zemí, P, U, A, prezentace řešení odborných problémů z oborů: chování a sociální vědy, biochemie, botanika, chemie, výpočetní technika, vědy o Zemi a vesmíru, strojírenství, vědy o životním prostředí, vědy o stáří člověka, matematika, medicína a zdravotnictví, mikrobiologie, fyzika, zoologie, průměrně je asi 90 prací v jednom oboru, generálním sponzorem je firma INTEL.

- European Union Contest for Young Scientists – EU Contest: 1984, 27, vybrané evropské město, 80 prací ze 30 evropských zemí, P, U, A, je chápána jako soutěž vítězů národních přehlídek – každou zemi mohou reprezentovat maximálně 3 práce, práce nejsou děleny do oborů – soutěž probíhá mezioborově, soutěž pořádá Evropská komise při Evropské unii.
- QUANTA: 1995, 15, Lucknow, Indie, soutěž probíhá na největší střední škole na světě – City Montessori School, D – 40 zemí, P, U, A, soutěží až sedmičlenná družstva – jejich členové jednotlivě nebo ve dvojicích v dílčích soutěžích: debata – mezinárodní společenské téma, skupinová diskuse – moderní technické nebo přírodovědné téma, matematický kviz – soubor teoretických otázek a úloh (písemně), astronomický kviz – soubor teoretických otázek a úloh (písemně), přírodovědný kviz – odpovědi na otázky, obsah fotografií z fyziky, chemie a biologie (ústně), programování – na libovolné téma, vytvoření programu během pěti hodin, jeho předvedení a vysvětlení funkčnosti, koláž – aktuální, např. ekologické téma, předvedení modelu – prezentace předem stanoveného odborného projektu ve výstavním boxu.
- Konference ICYS – International Conference of Young Scientists: 1994, 16, různá města zúčastněných zemí, D – 30 zemí, P, U, A, soutěžní obory: fyzika, matematika, výpočetní technika, ekologie, prezentace řešení kvalitních odborných projektů.
- Přehlídka ESI – Expo Science International: 1988, 10, různá města zúčastněných zemí, 1 600 účastníků ze 70 zemí, prezentace výsledků řešení odborného problému, projektu, pořadatelem přehlídky je MILSET (Mezinárodní hnutí vědeckotechnické činnosti ve volném čase).
- EUSO – European Union Science Olympiad, 2003, 6, různá města zúčastněných zemí, účast – 15 zemí, U, A, soutěž pro tříčlenná družstva žáků ve věku do 16 let, soutěžní obory: spojení fyziky, chemie, biologie – právě odborníků z těchto tří oborů se Evropě v současné době nedostává.
- IJSO – International Junior Science Olympiad, 2004, 5, zakladatel – Fyzikální společnost Indonésie, účast – 30 zemí, soutěž pětičlenných družstev studentů ve věku do 14 let, akcent na přírodovědné vzdělání jako celek.

Existuje tedy několik mezinárodních soutěží, ve kterých je vedle výborných písemných výsledků zpracování úlohy, resp. projektu, výrazně dbáno na prezentaci. Tyto soutěže probíhají v anglickém jazyce. Je tedy možné tvrdit, že od žáků je požadována velmi dobrá angličtina, správná anglická terminologie, schopnost v angličtině diskutovat a argumentovat [3].

V tomto smyslu v podstatě nelze žádnou žákovskou soutěž ve fyzice výrazně upřednostňovat, resp. zatracovat.

Získat skutečně dobré zkušenosti z vyřešeného problému, z perfektního a smysluplného přednesení výsledků vlastní práce, zkušenosti z rytířsky vedené diskuse, to jsou zřejmě nejvyšší kvality provázející účast žáků v mezinárodních soutěžích.

Rozhodnutí žáka střední školy pro určitý směr jeho budoucího, resp. pracovního zaměření, musí vycházet z odpovídajícího se seznámení s kvalifikovanou prací v daném oboru. Splnění tohoto požadavku předpokládá, aby žáci při svém středoškolském studiu získali možnost si osvojovat vědecké poznatky daného oboru (na příslušné úrovni odpovídající střední škole), ale aby měli především možnost projevit aktivní tvůrčí činnost simulující práci vědce, vysoce kvalifikovaného odborníka.

Úkolem proto je zajistit organizační a materiálovou stránku vysoce efektivní přípravy talentovaných žáků střední školy.

Až na základě vlastní práce žáka učitel poznává charakteristické rysy talentovaného studenta. Teprve pak mu může doporučit jeho účast v některé ze zmíněných soutěží. Přirozeně že společným jmenovatelem všech odborných středoškolských fyzikálních aktivit je cílená příprava k vysokoškolskému studiu fyziky, resp. technických oborů.

Dovoluji si uvést jeden konkrétní příklad. Mgr. Martin Schnabl, Ph.D., věk 34 let, současný pracovník Fyzikálního ústavu AV ČR, odchovanec gymnázia Korunní Praha (bývalé Píkárny), se stal před nedávnou dobou jedním z 20 mladých světových fyziků a byl oceněn za svoji dosavadní práci „slušným finančním stipendiem“, které mu umožňuje tři roky intenzivně pracovat ve světě podle svých představ. Kdysi se zúčastnil soutěže Turnaj mladých fyziků a dále Fyzikální olympiády. Upřednostnil TMF: zdůraznil, že nemá rád soutěže, kde musí za 3 hodiny vyřešit nacvičené úlohy. On má zájem „bádat“, postupovat jako opravdový fyzik, vědec. A jemu se to opravdu podařilo!

Všechny fyzikální soutěže v ČR, kterých se žák střední školy může zúčastnit, mají společný jmenovatel: připravují k vysokoškolskému studiu přírodních a technických věd.

Jednotlivé soutěže připravují její účastníky pro studium specifických oborů. Ukazuje se z mezinárodních zkušeností, že účast žáka ve Fyzikální olympiádě je výbornou přípravou pro studium předmětu fyzika, zejména pak pro studium technických a přírodovědných oborů. Většina účastníků soutěže Turnaj mladých fyziků nastupuje ke studiu fyziky.

S odstupem času mohu potvrdit, že největší úspěchy ve fyzice na Gymnáziu Korunní, Praha, později po přestěhování na Gymnáziu Ch. Dopplera, Praha – v letech 1992–2003, což je možné si bezpečně ověřit z výsledkových listin a jiných přehledových tabulek soutěží z uvedené doby – měli žáci této školy ve fyzikálních soutěžích v republice i v zahraničí, když je matematiku učil prof. Jaroslav Zhouf a fyziku já. Teze „znalosti matematiky jsou pro účast ve fyzikálních soutěžích dominantní“ je dále rozvíjena – je předmětem mého dalšího sdělení.

Bez kvalitní matematické přípravy nelze ve fyzikálních soutěžích na střední škole, resp. při výuce fyziky, uspět. Přirozeně, celé učivo středoškolské matematiky je „vysoce“ nezbytné, ale jeho některé části lze považovat za prioritní.

Za zásadní matematická témata považuji:

1. soustavy rovnic
2. funkce, průběh funkce
3. teorii chyb
4. kombinatoriku
5. pravděpodobnost, statistiku
6. metodu Monte Carlo
7. modelování
8. aproximaci – odhad
9. geometrii v rovině
10. geometrii v prostoru

V r. 1992 jsem nezávisle na osnovách pro zájemce ze 2. ročníku – ale zúčastňovali se téměř všichni žáci třídy – stihl vyložit podstatu problematiky „Průběh funkce“ od září do prosince, vždy hodina ráno před vlastním vyučováním. Nesmírně se to vyplatilo všem zájemcům o vstup do fyzikálních soutěží. Všechny aplikace spadaly jednoznačně do fyziky. Dokonce vedení školy mi umožnilo zařadit sice jen hodinový předmět „Fyzika pevných látek“, ale bylo možné studovat např. pásovou teorii, fonony, Fermiho energii atd.

Důležité bylo, že v matematice byly řešeny odpovídající fyzikální úlohy!

Pro účastníka fyzikálních soutěží na střední škole je nezbytná výborná znalost fyzikálních poznatků, znalost souvislostí a vazeb mezi nimi; a k tomu samozřejmě odpovídající matematická nadstavba, samozřejmě korespondující s možnostmi žáka střední školy.

Řešení fyzikálních problémů začíná od hypotézy a modelu. Po svých zkušenostech z absolvování „Intel ACADEMY for Educator" vím, že hodnotitelé světové přehlídky Intel ISEF – a je mezi nimi celá řada nositelů Nobelovy ceny a další špičkoví vědci z celých USA – hodnotí na prvním místě použitou metodologii, tedy kvantitativní „stránku věci" v řešení problému.

Pro všechny vítěze matematických, programátorských a fyzikálních soutěží v daném školním roce pořádá Komise pro talenty JČMF pracovní konferenci (v roce 2009 již po jedenácté), na které žáci přednášejí o řešeních problémů, které je v soutěžích zaujaly.

Literatura

[1] Kluiber, Z.: *Tvořivost učitele a účastníci fyzikálních soutěží.* ARSCI, Praha, 2004.

[2] Volf, I.: *Pro mladé talentované fyziky?* MAFY, Hradec Králové, 2001.

[3] Špulák, F.: Problematika vytváření pojmů ve vyučování fyzice. In: *4. pražská konference o kybernetické fyzice*, UK a ČVUT, Praha, 1991, 349–354.

Jak poznat a jak rozvíjet matematické nadání

František Kuřina, Univerzita Hradec Králové [1]

ABSTRAKT. *Po úvodu je v druhé části příspěvku formulován názor na matematickou gramotnost, matematickou kulturu, matematickou intuici a užitečnost matematiky. Jádrem práce je idea, že zárodky matematického nadání lze poznat na jednoduchých úlohách nerutinní povahy. Výklad je ilustrován souborem úloh a porovnáním dvou různých přístupů k řešení úloh.*

‡Tento příspěvek byl podporován grantem GAČR 406/08/0710.

[1] e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz

Omluva

Omlouvám se všem vám, kteří máte větší zkušenosti z práce s talenty než já, že se odvažuji psát o této problematice. Pro to, že jsem se v praxi relativně málo zabýval studenty matematicky talentovanými, mám svou omluvu: učil jsem jen 5 let na střední škole, kde talentovaní žáci potenciálně mohli být. Žádného svého studenta jsem však nedovedl ani do ústředního kola MO. Sám jako student jsem se olympiády zúčastnit nemohl, první ročník naší olympiády jsem v roce 1951 sledoval jako student MFF Univerzity Karlovy. Nedělám si však iluze, že bych mohl být dobrým olympionikem, k tomu mé matematické nadání nestačilo. Výchovu talentů však pokládám za důležitou a snad jediným výsledkem v tomto směru je má patrně nejúspěšnější kniha *Umění vidět v matematice* [1]. Tato publikace je plodem kroužku matematické olympiády hradeckých studentů a byla přeložena do němčiny.

Má pedagogická vize

Mluvit o problematice rozvíjení talentů v matematice znamená nutně vycházet z názoru na charakter matematického vzdělávání. Mé stanovisko lze k tomuto směru shrnout do čtyř bodů.

1. Škola musí pěstovat matematickou gramotnost všech žáků. Absolvent střední školy by neměl být matematicky negramotný, měl by zvládnout na základní úrovni matematické řemeslo. To znamená s porozuměním aplikovat probírané postupy a pojmy k řešení úloh, které nemají problémový charakter. Zpravidla jde o typové úlohy, které by měly být náležitě procvičeny a jejichž výčet by měl být výslovně znám. Mohu doložit, že naši současnou střední školu absolvují i studenti matematicky negramotní. Uvedu příklady z tohoto semestru. Při rutinním výpočtu udělá student několikrát chybu „ve znaménku před zlomkem“, nenakreslí správný obrázek podle textu „průsečíkem přímek p, q sestrojte přímku rovnoběžnou s přímkou m“, a „počítá“ takto: z toho, že $v^2 = \sqrt{37} - 37$ plyne $v = \sqrt[3]{37} - \sqrt{37}$.

Odráží již tento stav tendence formulované v r. 2001 *Bílou knihou*, že lze dosáhnout *vyšší kvality a funkčnosti vzdělávání tvorbou nových vzdělávacích a studijních programů* ([2], s. 18) zpracovávaných *jednotlivými školami* pro jejich *konkrétní podmínky, záměry a plány* ([2], s. 38) s ohledem na to, aby *každý žák byl úspěšný* ([2], s. 19)? Projevují se důsledky naší reformy již v poklesu úrovně našich žáků v mezinárodních srovnáních? Na tyto otázky nedokáži odpovědět, jsou to však problémy i z hlediska výchovy talentů zásadně důležité. Na nekvalitně obdělávané zahradě mohou jen zázrakem dozrát mimořádně dobré plody.

2. Škola by měla rozvíjet matematickou kulturu „žáků dobrých“. Matematickou kulturu chápu jako vyšší úroveň matematické gramotnosti, kterou nelze docílit u všech absolventů školy. K jejímu dosažení je nezbytně nutná aktivita studentů. Jestliže u gramotného studenta předpokládáme správné vyřešení základních úloh, matematická kultura představuje i jistou eleganci řešení úloh, dobré vyjadřovací schopnosti, dobrou úroveň kalkulativních dovedností, přehledné zacházení s matematickou symbolikou a řešení i obtížnějších matematických úloh.

Na těchto dvou úrovních může začít kultivace matematických talentů. Spočívá podle mého názoru zejména v následujících dvou aspektech.

3. Škola by měla rozvíjet matematickou intuici, aspoň u žáků nadaných. Podstatnou složkou dobrého matematického vzdělání je kultivace umění řešit úlohy problémového charakteru, u nichž nevystačíme s rutinními aplikacemi algoritmů, znalostmi definic, vzorců a vět. Řešení takovýchto úloh není prioritně ani otázkou logiky, ale spíše otázkou zkušeností a intuice. Tato stránka je důležitá i proto, že je základem aplikací matematiky v praxi.

Jsem přesvědčen, že intuici lze rozvíjet od samého začátku (matematického) vzdělávání. Vím, že existují učitelé, kteří tento názor nesdílejí: u nich se pojem definuje, věta dokazuje, úloha řeší tak a tak… Matematiku předkládají tito učitelé jako hotovou disciplínu, matematické pojmy nevyrůstají v procesu řešení problémů (jak to bývá zpravidla v historii), ale jejich definice najdeme ve vytříbené formě v učebnicích, rovněž důkazy matematických vět a řešení úloh jsou jednoznačně určené. Tímto způsobem se utváří u žáků falešný pohled na matematiku a její aplikace, matematika se předvádí jako výtvor mimořádně nadaných jedinců, v nejlepším případě máme šanci jejich myšlenkám porozumět. Různé přístupy k řešení úloh se pokusím ukázat na konkrétních příkladech.

4. Škola by měla ukázat matematiku jako krásnou a užitečnou disciplínu. Krásu matematiky patrně pocítí především ti nadaní, užitečnost matematiky může být motivací pro všechny žáky. Připomínám na okraj aspoň dva příklady, v nichž se snoubí krása s užitečností: útvary konstantní šířky (kruh a Releauxův trojúhelník), binomická rovnice a pravidelné dělení kruhu ve vědě, přírodě, technice a umění. Podrobněji jsem připomněl tyto souvislosti v článku [3].

Prvním předpokladem možnosti zprostředkovat krásu matematiky žákům je její vnímání učiteli. Náš významný matematik *Zdeněk Frolík* formuloval svůj názor na tuto otázku slovy: *Domnívám se, že krása matematiky spočívá především v její harmonii. A nalézání harmonie je, aspoň podle mého názoru, tím nejhlubším zdrojem uspokojení. Je to krása vnímatelná a samotné vnímání této krásy může dát člověku náplň života. Přitom tuto krásu matematiky může člověk pouze vnímat – a vůbec ji nemusí vytvářet. Téměř žádný matematikář na gymnáziu vědecky nepracuje, ale každý by měl mít pro krásy matematiky vytříbenou vnímavost. Bez vnímavosti kantorů si těžko mohu představit úspěch reformy studia matematiky, i kdyby byla sebelíp připravená...* (Mladá fronta, 16. 10. 1976).

Anglický matematik *G. H. Hardy* napsal: *Matematikovy vzorce, stejně jako vzorce malíře nebo básníka, musí být krásné; ideje, jako barvy nebo slova, do sebe musí harmonicky zapadat. Krása je prvním předpokladem: ošklivá matematika nemá na světě trvalého místa* ([8], s. 78).

Učit vnímat krásu matematiky znamená přirozeně pěstovat kladný vztah k této disciplíně. Krásu stěží najdeme v oblasti, kterou nemáme rádi, která je zdrojem napětí, nejistoty a strachu.

Jak poznat a jak kultivovat matematické nadání

Otázkou, co je to matematické nadání, se zde nebudu zabývat. Připomínám v této souvislosti např. stať [4] *Jiřího Mareše* a mé poznámky z naší předminulé konference [5]. Otázka diagnostikování nadání je ovšem podstatná a připomenu v této souvislosti dva názory.

Spisovatel *Fráňa Šrámek* se vyjádřil velmi kategoricky: *Ano, takové profesory máme, blby, jářku blby, že nepoznají hlavu s mozkem* ([6], s. 129).

Filozof *Stanislav Komárek* ukazuje, že problematika je složitější: *I zkušený pedagog odhadne jen někdy, kdo z jeho žáků bude oporou vědy a kdo všedním provinčním úředníkem* ([7], s. 185).

Přes jistou Komárkovou skepsi jsem přesvědčen, že úspěšný řešitel matematické olympiády matematické nadání určitě vykazuje. Takový žák ovšem již musí mít o matematiku zájem, jinak by nemohl obětovat řešení úloh potřebné úsilí, náležité soustředění a čas. Nemůžeme diagnostikovat jistou úroveň matematického talentu dříve? V průběhu své pedagogické dráhy jsem udělal dobrou zkušenost s drobnými úlohami – otázkami, na jejichž řešení lze podle mého názoru elementy matematického nadání dosti spolehlivě prokázat. Jde o úlohy zcela nenáročné na formální matematický aparát, např. na výpočty, přesto však úlohy nikoliv rutinní povahy, ale úlohy, jejichž řešení vyžaduje podívat se na problém nově, vtipně, originálně. Měly by to být úlohy „na jeden pohled“, k jejichž řešení může dopomoci intuice, představivost, uvědomění si (někdy skrytých) souvislostí. Toto umění vidět může být podle mého názoru dosti spolehlivým ukazatelem úrovně matematického nadání, jak se pokusím prokázat v oddílu 4.

Uveďme několik příkladů takovýchto otázek, které lze podle mého názoru příležitostně zařadit např. v počátcích středoškolského studia, kdy je pro učitele důležité vědět, kteří žáci „budou snad v matematice dobří“. Zkusme si u každé z těchto otázek představit, jak by asi měl reagovat na úlohu nadaný žák, jak žák „dobrý“ na matematiku a jak žák, který zvládl na nejnižší úrovni matematickou gramotnost.

O1: *Kolikrát musíme sečíst číslo a, abychom dostali výsledek a^n?*

O2: *Může být pro některé přirozené n číslo $n^2 + n + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla? Tvrzení zdůvodněte.*

O3: *Číše tvaru rotačního kužele je naplněna do poloviny výšky. Jakou část objemu zbývá dolít do plné číše?*

O4: *Je-li součet koeficientů kvadratické rovnice roven nule, má tato rovnice aspoň jeden kořen roven číslu 1. Proč?*

O5: *Každé prvočíslo větší než 5 můžeme psát buď ve tvaru $6k + 1$, nebo $6k + 5$, kde k je přirozené číslo. Proč?*

O6: *V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD je U průsečík úhlopříček. Mají trojúhelníky AUD, BUC stejný obsah?*

O7: *Existují geometrické útvary U, V, pro které platí zároveň: U je částí V, U je shodný s V a V není částí U?*

O8: *Je možné rozdělit krychli na 4 shodné jehlany? Je možné rozdělit krychli na 6 shodných jehlanů?*

O9: *Je možné, aby měl geometrický útvar dva různé středy souměrnosti?*

O10: *Existuje hranol, který má shodné všechny stěny, ale nemá shodné všechny hrany? Existuje hranol, který má shodné všechny hrany, ale nemá shodné všechny stěny?*

O11: *Je možné rozdělit trojúhelník a čtverec na lichoběžníky?*

O12: *Je možné, aby půdorys i nárys tělesa byl čtverec? Nakreslete aspoň čtyři taková tělesa.*

O13: *Kolika způsoby je možné rozdělit čtverec na čtyři shodné části?*

O14: *Je možné, aby každé dvě z kružnic se středy ve vrcholech trojúhelníku měly vnější dotyk?*

O15: *Proč je každé číslo tvaru 123 123, 349 349, 500 500, ..., xyz xyz dělitelné 7, 11 a 13?*

O16: *Je možné z nějaké aritmetické posloupnosti vybrat posloupnost čtverců přirozených čísel 1, 4, 9, 16, 25, ... ?*

O17: *Jak sestrojíte na ramenech* AC, BC *rovnoramenného trojúhelníku po řadě body* X, Y *tak, aby platilo* $|AX| = |XY| = |YB|$ *?*

O18: *Jak sestrojíte na stranách* AC, CB *trojúhelníku* ABC *body* X, Y *tak, aby platilo* $|AX| = |XY| = |YC|$ *?*

O19: *Co je množinou všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od polopřímky* VA *jako od polopřímky* VB *?*

O20: *Jak znázorníte množinu všech dvojic* $[x, y]$ *reálných čísel, pro které platí a)* $sinxcosy \geq 0$, *b)* $|y| = sinx$ *?*

O21: *Je možné, aby středy všech kružnic opsaných trojúhelníkům, které tvoří stěny čtyřstěnu, ležely v jedné rovině?*

O22: *Proč průsečík kružnic* m, n *s průměry v odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku leží na jeho přeponě?*

Otázky tohoto typu vznikají někdy v přirozené diskusi učitele s žáky a je škoda, když zůstanou jen ve výbavě jednoho učitele. Podělme se o ně navzájem.

Důležité je, že na takovýchto ne příliš náročných úlohách může žák prožít svůj první matematický úspěch a je naladěn prožít úspěch další. Úlohy matematické olympiády (i přípravné) bývají příliš obtížné. Máme-li možnost pracovat s žáky, u nichž se začíná projevovat zájem o matematiku, měli bychom jim poskytnout příležitost v řešení pokud možno atraktivních úloh, na jejichž řešení lze opět dosti dobře diagnostikovat matematické nadání studenta. Za takové úlohy považuji např.:

U1: *Kolik čtverců je nakresleno na šachovnici?*

U2: *Popište těleso, které vznikne rotací obdélníku kolem jeho úhlopříčky.*

U3: *O kolik % se změní cena zboží, které bylo nejdříve o* p *% zdraženo a pak byla jeho nová cena opět o* p *% snížena?*

U4: *Rozdělte krychli na 5 čtyřstěnů. Lze rozdělit krychli na 4 čtyřstěny? Proč ne?*

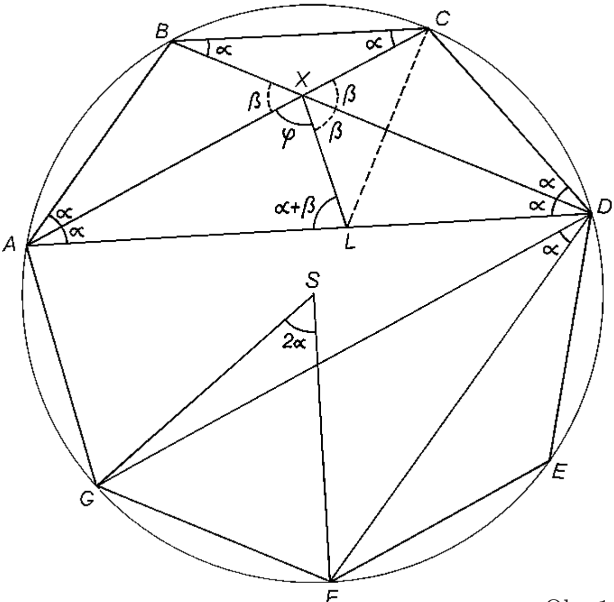
U5: *Nakreslete mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: z některého bodu jeho vnitřku (vnějšku) není vidět žádná jeho strana celá.*

Dokážeme-li získat v každodenním shonu pro řešení úloh své žáky, budou to patrně ti, kteří mají jisté matematické nadání a které můžeme začít připravovat na matematickou olympiádu. Zdá se mi, že mnohý žák potřebuje ještě úlohy poněkud lehčí, než jsou úlohy olympiádní. Uvedu zde pro ilustraci takové přípravné úlohy dvě.

První pochází z knihy *Ravi Vakila*, patrně nejúspěšnějšího amerického olympionika („a legend in the world of math competions").

P1: ([12], s. 100) *$ABCDEFG$ je pravidelný sedmiúhelník. Jeho úhlopříčky AC, BD se protínají v bodě X. Dokažte, že* $|AB| + |AX| = |AD|$.

Jak pomoci studentovi řešit tuto úlohu? Protože pravidelnému sedmiúhelníku lze opsat kružnici, nabízí se využít vlastností obvodových úhlů: úhly označené symbolem α jsou shodné (obr. 1).



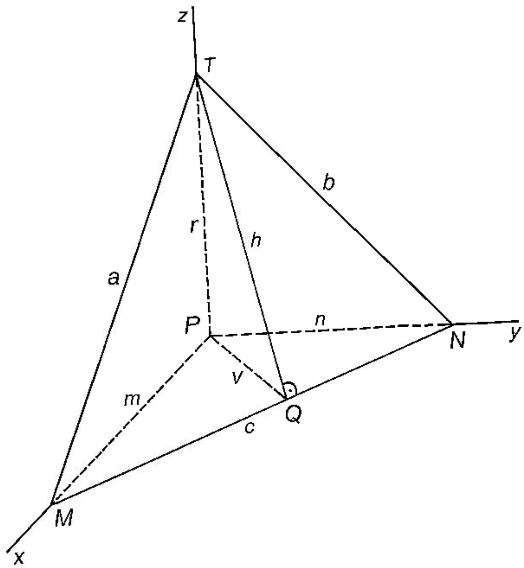
Obr. 1

Sestrojíme-li obraz bodu C v souměrnosti podle osy BD, dostaneme bod L úsečky AD a $|CD| = |AB| = |DL|$. Má-li platit tvrzení úlohy, musí být $|AX| = |AL|$. To se nám podaří dokázat, ověříme-li, že v označení podle obr. 1 platí $\varphi = \alpha + \beta$. Zatím jsme ovšem nevyužili skutečnost, že sedmiúhelník $ABCDEFG$ je pravidelný. Z tohoto faktu odvodíme $\alpha = 180°/7$. Protože $\beta = 2\alpha$ (vnější úhel v trojúhelníku BCX), je $\varphi = \alpha + \beta$ a tvrzení je dokázáno.

Je typické, že řešení úlohy je kombinací intuice a logiky: čeho si všimnout a proč to platí.

Druhá úloha, kterou uvedu, je historická. Je to důkaz *Faulhaberova zobecnění Pythagorovy věty.* (Johann Faulhaber byl německý matematik žijící v létech 1580–1635.)

P2: *Dokažte: Protneme-li po dvou k sobě kolmé přímky x, y, z rovinou MNT podle obr. 2, pak pro obsahy A, B, C, D trojúhelníků PMN, PNT, PTM a MNT platí $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$.*



Obr. 2

Na této úloze připomenu, jak řešení podstatně ovlivní různé teoretické přístupy a různé kalkuly.

1. řešení („algebraické“): V označení podle obr. 2 vypočítáme z pravoúhlých trojúhelníků PMT, PMN a PTN délky a, b, c stran trojúhelníku MNT a pak podle Heronova vzorce určíme jeho obsah.

2. řešení (stereometrické): Obsah D vypočítáme pomocí základny c a výšky h, tuto výšku určíme z pravoúhlého trojúhelníku TPQ.

3. řešení (analytické): Obsah D určíme dvojím vyjádřením objemu čtyřstěnu $MNTP$. Jednou podstavou bude trojúhelník MNP a výška r, podruhé bude podstavou trojúhelník MNT a jeho výška bude vzdálenost počátku od roviny MNT. Tuto vzdálenost určíme podle vzorce pro vzdálenost bodu od roviny.

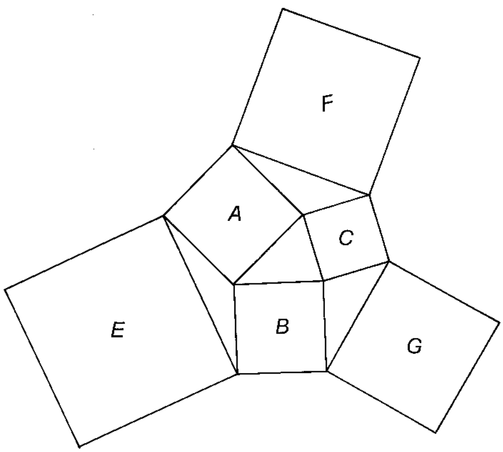
4. řešení (vektorové): Obsah D určíme pomocí vektorového součinu $\overrightarrow{TM} \times \overrightarrow{TN}$.

Učitel matematiky má dnes ovšem „na dosah“ dosti bohatou zásobárnu úloh, např. zprávy o matematické olympiádě v jednotlivých letech, úlohy v časopisech, knihy o řešení úloh a různé sbírky. Z naší nedávné produkce připomínám např. sbírku *Daga Hrubého* [9], *Švrčkovy a Calábkovy* netradiční úlohy [10] a *Caldův* mikroskop [11]. Přesto jsem připravil soubor úloh SOUP, v němž jsou uvedeny (snad) podnětné matematické otázky (označené písmenem O), jen o málo obtížnější úlohy (U) a přípravné úlohy (P).

O umění vidět

Vlastimil Dlab podal v článku [15] pozoruhodnou kritiku řešení tří úloh z mého příspěvku *Úlohy, talent a matematika* [5]. Všimněme si jeho poznámek k úlohám, které zde budu označovat U6, U7 a U8.

U6: *Na obr. 3 jsou sestrojeny čtverce s obsahy* A, B, C *a* E, F, G *„nad stranami“ trojúhelníků. Dokažte, že platí* $E+F+G = 3(A+B+C)$.

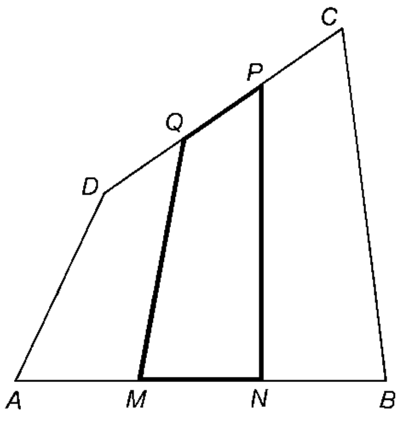


Obr. 3

Můj komentář k úloze ve sborníku [5] zněl: „Přirozená otázka *Jak spolu souvisejí délky stran nakreslených čtverců?* vede k nápadu použít kosinovou větu a řešení je již jen otázkou výpočtu.“ Dlabovo hodnocení mého přístupu k úloze zní: „Ano, použití kosinové věty vede k cíli. Je to však trochu jako vzetí kanónu na zajíčka. Navíc to bohužel ponechává výsledek jako izolovanou záhadu a nevysvětluje podstatu problému. Je to řešení, které rádi kritizujeme. Opět použití nějakého vzorce! Biflování! A věřím, že těm z nás, kdo jsme byli vychováni a zkoušeni z předvádění vzorečků, je těžké si odvykat a nenechat se svést...“ ([15], s. 170).

Úloha není patrně vhodná pro základní školu; je určena pro školu střední. Užití kosinové věty považuje Dlab za biflování? Nač se pak takovéto věty ve škole učí? Přiznávám, že pro nedostatek svého talentu jsem se nechal svést a „příslušnou látku jsem hlouběji neobjasnil“ ([15], s. 169). Tam, kde já jsem viděl aplikaci kosinové věty, vidí Dlab, že podstatou celé úlohy je vztah $u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2)$ mezi stranami a, b a úhlopříčkami u, v rovnoběžníku, který vede k postupnému rozšíření konstrukce a odvození „rekursivního“ vytváření dalších trojic čtverců.

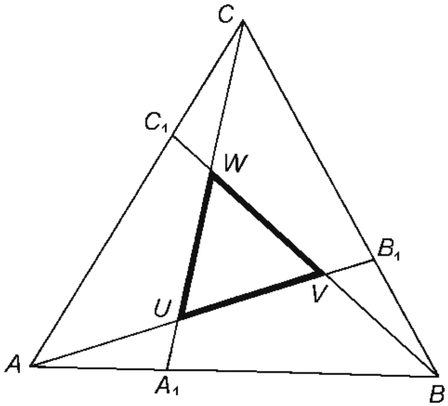
U7: *Jakou část obsahu daného čtyřúhelníku $ABCD$ zaujímá čtyřúhelník $MNPQ$, kde body M, N dělí stranu AB a body Q, P stranu DC na tři shodné části (obr. 4)?*



Obr. 4

Tuto formulaci úlohy považuje Dlab za „zavádějící, neboť zakrývá cestu k obecnému tvrzení“. Já jsem bohužel obecné řešení neviděl a uznávám, že Dlabovo řešení je krásné. Přesto však nepovažuji text úlohy za zavádějící: nenapovídá obecné řešení, ale snad nikam nezavádí.

U8: *Jakou částí obsahu rovnostranného trojúhelníku ABC je obsah trojúhelníku UVW, sestrojený podle obr. 5, kde $|AA_1| = \frac{1}{3}|AB|$, $|BB_1| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CC_1| = \frac{1}{3}|CA|$?*



Obr. 5

Dlab poznamenává, že patřičné tvrzení má být formulováno takto: *Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Nechť délka úsečky AA_1 je $\frac{1}{n}$ délky strany AB, ..., potom obsah trojúhelníku UVW je roven $\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$ obsahu trojúhelníku ABC.*

To je ovšem zcela jiná úloha než úloha U8. Pro pořádek poznamenávám, že se mi nepodařilo vypočítat užitím podobnosti trojúhelníků, že výška trojúhelníku AA_1U spuštěná z bodu U je rovna $\frac{1}{n^2-n+1}$ výšky trojúhelníku ABC spuštěné z bodu C, jak Dlab doporučuje.

Nestydím se přiznat, že mé nadání učitele matematiky je podstatně nižší než nadání profesionálního matematika Vlastimila Dlaba. Tato má reakce na jeho článek slouží jen jako doklad toho, že „umění vidět souvislosti“ je indikátorem matematického nadání člověka a na této schopnosti je možné talent žáků rozpoznat. I na úrovni mého matematického nadání jsem prožíval radost z toho, že jsem „uviděl“ řešení úlohy, a o tento „úspěch“ jsem se občas podělil se čtenáři některých mých publikací.

Výzva

Podle mého názoru lze matematické nadání žáků poznat při neformální školní práci, při reakcích žáků na výklad a otázky učitele a při řešení vhodných úloh. Jeví-li se účastníkům naší konference účelné shromažďovat podnětné matematické otázky a vhodné připravené úlohy, je možné považovat přílohu SOUP spisku [4] za základ postupně budovaného souboru, který by měl sloužit k poznávání a rozvíjení matematického nadání žáků. Jsem si vědom toho, že tyto materiály vznikají u zkušených učitelů v běžném provozu a bylo by záslužné zprostředkovat jejich cenné podněty všem, kdo o ně budou mít zájem.

Vím, že práce s rozvíjením talentů je velmi obtížná, neboť jde mimo jiné o motivaci k aktivitě žáků směrem, který se jim jeví zřídkakdy přitažlivý. Zakončeme naši úvahu tímto příběhem:

Když se ptali Isidora Rabiho, který roku 1944 obdržel Nobelovou cenu za fyziku, na jeho úspěchy, odpověděl, že za vše vděčí své matce. „Přišli jsme domů ze školy a všechny matky se dětí ptaly, co se ve škole naučily. Moje matka ale chtěla vědět, jaké otázky jsem toho dne ve škole položil“ ([13], s. 36).

Literatura

[1] Kuřina, F.: *Umění vidět v matematice.* SPN, Praha, 1989.

[2] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* Tauris, Praha, 2001.

[3] Kuřina, F.: Může být školská matematika matematikou dobrou? *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie* **53**, č. 4 (2008).

[4] Mareš, J.: Žáci nadaní a talentovaní na matematiku. In: *Ani jeden matematický talent nazmar,* Pedagogické centrum Hradec Králové, 2003.

[5] Kuřina, F.: Úlohy, talent a matematika. In: *Ani jeden matematický talent nazmar,* Univerzita Karlova, Praha, 2005.

[6] Šrámek, F.: *Stříbrný vítr.* Československý spisovatel, Praha, 1976.

[7] Komárek, S.: *Příroda a kultura.* Academia, Praha, 2008.

[8] Hardy, G. H.: *Obrana matematikova.* Prostor, Praha, 1999.

[9] Hrubý, D.: *Matematická cvičení pro střední školy.* Prometheus, Praha, 2008.

[10] Švrček, J., Calábek, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh.* Prometheus, Praha, 2007.

[11] Calda, E.: *Středoškolská matematika pod mikroskopem.* Prometheus, Praha, 2006.

[12] Vakil, R.: *Mathematical Mosaic. Pattern and Problem Solving.* Brendan Kelly, Burlington, 2008.

[13] Bonder, N.: *Jidiše kop.* Knižní klub, Praha, 2008.

[14] Kuřina, F.: Diamant aneb DIAgnóza MAtematického Nadání a Talentu. *Práce Katedry matematiky 19,* Pedagogická fakulta, Hradec Králové, 2009.

[15] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky* **17**, č. 3 (2009).

Příběh úlohy MO 43-A-S-2

Pavel Leischner, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice [1]

Abstrakt. *Autorské řešení konstrukční úlohy 43-A-S-2 z matematické olympiády bylo neúplné. Uvádíme dva postupy konstrukce jednoho z vyhovujících útvarů užitím podobnosti, dále pak pozdější úplná řešení a nakonec základní vlastnosti zobrazení zvaného hyperbolická rotace a jejich využití k vyřešení úlohy.*

Úvod

Budeme se zabývat úlohou, která byla zadána v prosinci roku 1993 na klauzurním kole matematické olympiády. Je zajímavá tím, že její řešení je komplikovanější, než si autor úlohy představoval. Text úlohy je následující:

Je dán trojúhelník ABC a bod M na polopřímce opačné k polopřímce AB. Bodem M veďte přímku $p \neq AB$ tak, aby její průsečíky P, Q s přímkami AC, BC určovaly trojúhelník PQC stejného obsahu, jako má trojúhelník ABC.

Naší úloze obecně vyhovují až tři různé přímky p. Myšlenka, na níž autor úlohy postavil své řešení, však umožňuje nalézt pouze jednu z nich. Správnou konstrukci druhých dvou asi nikdo ze soutěžících přímo na soutěži nenalezl. To byl podnět k aktivitě po soutěži. Úplná řešení byla objevena, žádné z nich však nevycházelo jen z běžné středoškolské matematiky. Elementární postup se mi podařilo nalézt teprve nedávno, kdy jsem se náhodou k dané problematice vrátil. Uvedu jej včetně několika starších zajímavých řešení. Pro stručnost jednotlivá řešení nerozvádím do detailů, naznačím jen hlavní myšlenky.

Autorské řešení [2]

Při situaci znázorněné na obr. 1 je podmínka rovnosti obsahů trojúhelníků ABC a PQC zapsaná ve tvaru

$$S_{ABC} = S_{PQC}$$

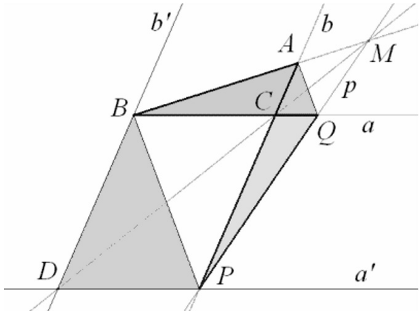
[1] e-mail: leischne@pf.jcu.cz

[2] Upraveno s využitím [1].

ekvivalentní se vztahem

$$S_{ABC} + S_{ACQ} = S_{PQC} + S_{ACQ},$$

což představuje rovnost obsahů trojúhelníků ABQ a APQ se společnou základnou AQ.



Obr. 1

Odtud plyne, že trojúhelníky ABC a PQC vyznačené na obr. 1 mají stejný obsah, právě když je přímka BP rovnoběžná s přímkou AQ. Průsečík přímek a' a b', z nichž první je rovnoběžka s přímkou BC v bodě P a druhá rovnoběžka s přímkou AC v bodě B, označme D. Trojúhelníky AQC a BPD jsou stejnolehlé. Stejnolehlost má střed M a zobrazuje A na B, Q na P a C na D. To umožňuje konstrukci bodu D jako průsečíku přímek b' a CM. Bodem D a přímkou BC je určena rovnoběžka a', která protíná přímku AC v bodě P. S ním jsme ovšem nalezli i požadovanou přímku $p = MP$.

Poznamenejme, že kdyby byly v textu úlohy body P, Q definovány jako průsečíky přímky p s vnitřky polopřímek opačných k polopřímkám CA, CB v daném pořadí (což je při zachování původního textu úlohy ekvivalentní s podmínkou, že bod C leží mezi body A, P), bylo by uvedené řešení úplné. V textu úlohy jsou však P, Q průsečíky přímky p s přímkami AC, BC bez omezení pořadí bodů M, P, Q na p. Proto, jak uvidíme níže, má úloha další možná řešení.

Řešení Jana Rychtáře (3. C, gymnázium Strakonice)

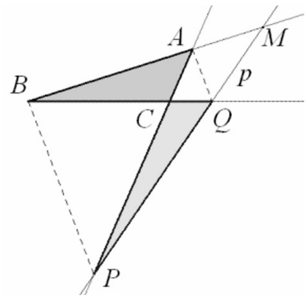
V době, kdy se soutěž konala, jsem byl učitelem na gymnáziu ve Strakonicích. Z tamních studentů úlohu pěkně vyřešil Jan Rychtář. Rovnoběžnost přímek BP a AQ zdůvodnil analogicky, jak bylo již uvedeno.

Dále pak, na rozdíl od předešlého řešení, využil dvojí stejnolehlosti úseček AQ a BP. Jedna ze stejnolehlostí má střed C, druhá střed M. Z podobnosti stejnolehlých trojúhelníků CAQ, CPB a trojúhelníků MAQ, MBP zjistíme (obr. 2)

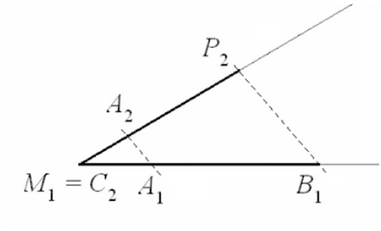
$$\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|AQ|}{|BP|} \quad \text{a} \quad \frac{|AQ|}{|BP|} = \frac{|MA|}{|MB|},$$

odkud

$$\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|MA|}{|MB|}.$$



Obr. 2



Obr. 3

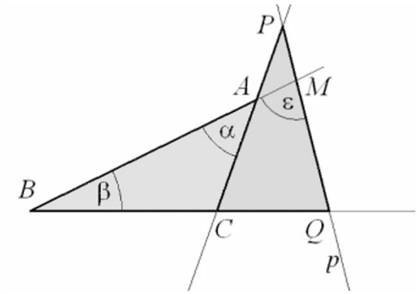
Poslední vztah umožňuje sestrojit úsečku délky $d = |CP|$ jako čtvrtou geometrickou úměrnou podle obr. 3. Bod P pak v zadání úlohy narýsujeme nanesením délky d na polopřímku opačnou k polopřímce CA. Bod Q je průsečík přímek MP a BC.

Situace, kdy bod A leží mezi body P, C (Petr Kaňovský, 3. A, G. tř. kpt. Jaroše, Brno)

Po soutěži se někteří studenti a členové úlohové komise zabývali hledáním přímky p za předpokladu, že její průsečík P s přímkou AC leží uvnitř polopřímky opačné k polopřímce AC. Petr Kaňovský z gymnázia na třídě Kapitána Jaroše v Brně úlohu pro tuto situaci nejprve zobecnil a pak vyřešil pomocí matematické analýzy. Uvedeme jen hlavní myšlenku jeho řešení.

Při označení podle obr. 4 zvolil $|AM|$, $|BM|$, α a β jako veličiny, jejichž hodnoty jednoznačně určují zadání úlohy (trojúhelník ABC včetně bodu M). Jako nezávisle proměnnou, která společně s bodem M určuje přímku p, zvolil velikost ε úhlu AMQ a vyšetřoval průběh funkce $f(\varepsilon) = S_{ABC} + S_{PQC}$, kterou užitím trigonometrie vyjádřil ve tvaru

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{|AM|^2}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\varepsilon} + \frac{|BM|^2}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\varepsilon}\right). \tag{1}$$



Obr. 4

Dále vyšetřil průběh této funkce a zjistil, jaké vztahy musí splňovat veličiny $|AM|$, $|BM|$, α a β, aby pro zvolenou hodnotu obsahu trojúhelníka PQC existovala jedna, dvě nebo žádná přípustná hodnota ε. Řešení naší úlohy lze pak pro dané $|AM|$, $|BM|$, α a β nalézt výpočtem neznámé ε v kvadratické rovnici, kterou dostaneme úpravou vztahu (1) po dosazení daných hodnot a volbě

$$f(\varepsilon) = 2S_{ABC} = (|BM| - |AM|)^2 \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Úplné řešení úlohy na základě výpočtu

K následujícímu řešení, které nalezl autor tohoto článku počátkem roku 2009 (tedy po více než patnácti letech od zařazení úlohy do soutěže), postačí znalost řešení kvadratické rovnice a základní poznatky o goniometrických funkcích v $\mathbb{R}$.

Z rovnosti $S_{PQC} = S_{ABC}$ plyne

$$\frac{1}{2}\,|PC|\,|QC|\,\sin(\pi-\gamma) = \frac{1}{2}\,|BC|\,|AC|\,\sin\gamma$$

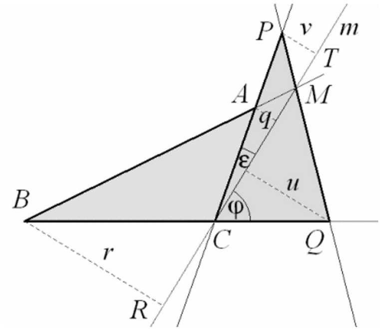
a odtud

$$|BC| \cdot |AC| = |PC| \cdot |QC|.$$

Při označení podle obr. 5 vynásobíme obě strany poslední rovnice součinem $\sin\varphi \sin\varepsilon$ a takto získaný vztah přepíšeme na tvar

$$uv = rq, \tag{2}$$

kde $u = |QC| \sin\varphi$, $v = |PC| \sin\varepsilon$, $r = |BC| \sin\varphi$, $q = |AC| \sin\varepsilon$ jsou po řadě vzdálenosti bodů Q, P, B, A od přímky CM. V souladu se zadáním úlohy platí $r > q > 0$.



Obr. 5

Jsou možné tři situace:

Situace 1. Bod P se nachází uvnitř polopřímky opačné k polopřímce AC. Rovnost $S_{PQC} = S_{ABC}$ lze za této podmínky vyjádřit ve tvaru $S_{CMP} + S_{CMQ} = S_{CMB} - S_{CMA}$, neboli

$$\frac{1}{2}|CM|\,u + \frac{1}{2}|CM|\,v = \frac{1}{2}|CM|\,r - \frac{1}{2}|CM|\,q.$$

Odtud

$$u + v = r - q. \tag{3}$$

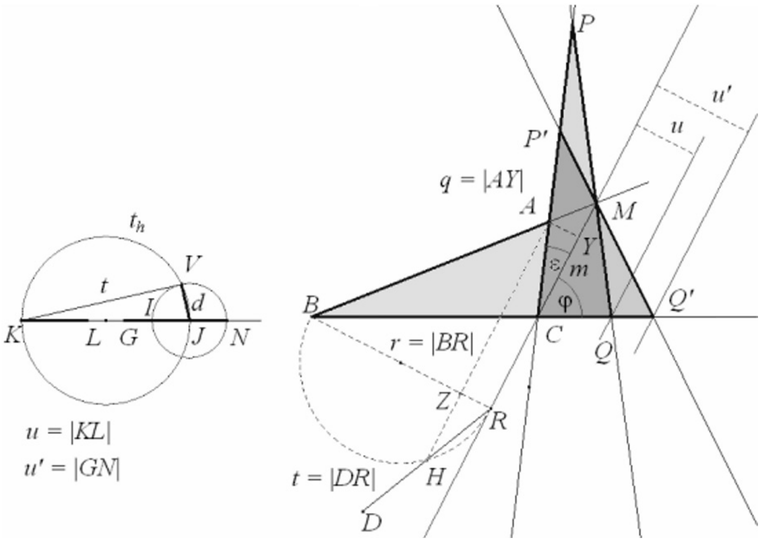
Úlohu jsme tímto převedli na řešení soustavy tvořené rovnicemi (2) a (3) s neznámými u, v. Eliminací neznámé v získáme kvadratickou rovnici

$$u^2 - (r-q)u + rq = 0 \tag{4}$$

s kořeny

$$u = \frac{z-d}{2},\ u' = \frac{z+d}{2}, \quad \text{kde } z = r-q,\ d = \sqrt{z^2 - t^2},\ t = 2\sqrt{rq}. \tag{5}$$

Délky r a q jsou dány zadáním, délku t sestrojíme pomocí některé z Eukleidových vět a délku d pomocí Pythagorovy věty. Pak již snadno sestrojíme úsečky délek u a u' a pomocí nich body P, Q. Jeden z možných postupů vidíme na obr. 6, kde je nejprve sestrojena úsečka HR délky $t/2$, pak bod D jako obraz bodu R v symetrii se středem H. Úsečky s délkami u a u' jsou vytvořeny samostatnou pomocnou konstrukcí v levé části obrázku. Na ní je úsečka KJ (délky t, tzn. shodná s úsečkou RD) průměrem kružnice t_h, bod G je středem úsečky KN a bod L středem úsečky KI.



Obr. 6

Diskuse. Úloha má dvě, jedno, nebo žádné řešení podle toho, zda je výraz

$$z^2 - t^2 = r^2 - 6rq + q^2 \tag{6}$$

kladný, roven nule, nebo záporný. Vyřešením příslušných kvadratických nerovnic zjistíme, že jedno řešení nastává, právě když

$$r/q = 3 + 2\sqrt{2}, \tag{6a}$$

dvě řešení, právě když

$$r/q > 3 + 2\sqrt{2}, \tag{6b}$$

a žádné řešení, právě když

$$0 < r/q < 3 + 2\sqrt{2}. \tag{6c}$$

Přitom $3 + 2\sqrt{2} \doteq 5{,}82$ a $r/q = |BM|/|AM|$.

Situace 2. V další situaci, která připadá v úvahu, se bod P nachází na úsečce AC. Jak vidíme na obr. 7, je $S_{PQC} \leq S_{ABC}$, přičemž rovnost nastane, jen když se bod P nachází ve vrcholu A (trojúhelníky PQC a ABC jsou totožné). Tuto situaci vylučuje zadání úlohy.

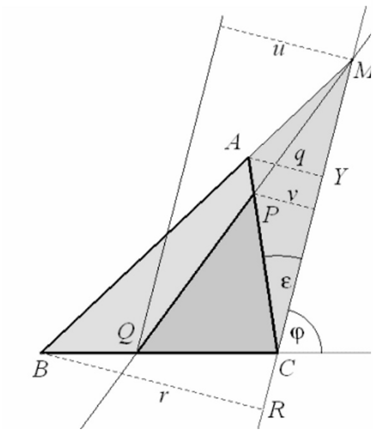
Situace 3. Předpokládejme nakonec, že se bod P nachází uvnitř polopřímky opačné k polopřímce CA (obr. 8). Snadno ověříme, že kromě vztahu (2) platí

$$v - u = r - q.$$

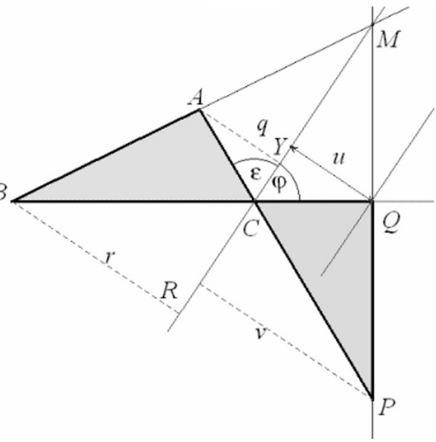
Analogicky, jako při řešení soustavy rovnic (2) a (3), zjistíme, že

$$u = \frac{1}{2}(-r + q \pm (r + q)).$$

Podmínkám úlohy vyhovuje jen kladný kořen, tedy $u = q$ a snadno dopočítáme $v = r$. Toto řešení nastává vždy.



Obr. 7



Obr. 8

Některé vlastnosti hyperboly a hyperbolická rotace

Rovnice hyperboly s hlavní osou v ose x kartézské (tzn. ortonormální) soustavy souřadnic (O, x, y) se středem v počátku O má, jak známo ze střední školy, tvar

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \tag{7}$$

kde a, b jsou po řadě hlavní a vedlejší poloosa hyperboly. Asymptoty této hyperboly mají rovnice $bx + ay = 0$ a $bx - ay = 0$. Součin vzdáleností libovolného bodu $X = [x, y]$ dané hyperboly od jejích asymptot je

$$d_1d_2 = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2}$$

a po úpravě pomocí (7)

$$d_1d_2 = \frac{a^2b^2}{e^2}, \tag{8}$$

kde $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ je excentricita hyperboly. Součin vzdáleností libovolného bodu hyperboly od jejích asymptot je tedy konstantní. Je-li hyperbola rovnoosá, jsou její asymptoty navzájem kolmé, a zvolíme-li je za osy kartézské soustavy souřadnic (O, x, y), je $\{d_1d_2\} = \{|x|, |y|\}$. Odtud plyne, že rovnice takové hyperboly má tvar

$$xy = k, \quad \text{kde } |k| = \frac{a^2}{2}. \tag{9}$$

Uvažujme hyperbolu, která není rovnoosá a její asymptoty svírají úhel γ. V kosoúhlé soustavě souřadnic (O, x, y), jejíž osy jsou asymptotami hyperboly, má hyperbola rovnici

$$xy = k, \quad \text{kde } |k| = \frac{a^2b^2}{e^2 \sin^2 \gamma}, \tag{10}$$

jak čtenář jistě snadno ověří pomocí vztahu (8) a obr. 9.

Z provedených úvah plyne:

Věta 1 *Hyperbola má v lineární soustavě souřadnic (O, x, y), jejíž osy jsou totožné s asymptotami hyperboly, rovnici $xy = k$, kde $k \neq 0$ je reálná konstanta.*

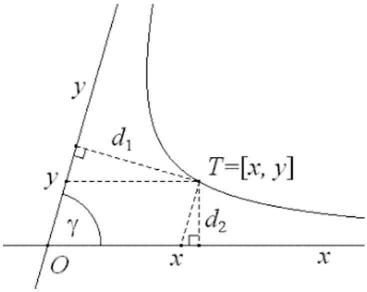
Poznámka: Ve větě 1 i všech dalších úvahách mlčky předpokládáme, že soustava souřadnic je normální (tzn. že nevolíme různé jednotky na souřadnicových osách).

Zobrazení, které je v lineární soustavě souřadnic (O, x, y) dáno rovnicemi

$$x' = hx, \quad y' = \frac{1}{h}y \quad (h \notin \{0, 1\}), \tag{11}$$

se nazývá *hyperbolická rotace* (též *hyperbolické otočení*). Z jeho analytického vyjádření plyne, že je to afinita. Dokonce přímá ekviafinita, neboť modul transformace je

$$\delta = \begin{vmatrix} h & 0 \\ 0 & 1/h \end{vmatrix} = 1.$$



Obr. 9

Z vlastností, které odtud plynou, připomeneme jen následující, jež lze žákům zdůvodnit i na středoškolské úrovni:

- *Obrazem přímky je přímka a obrazem úsečky úsečka.*
- *Střed úsečky se zobrazí do středu jejího obrazu.*
- *Obrazem průsečíku (resp. bodu dotyku) dvou čar je průsečík (resp. bod dotyku) jejich obrazů.*
- *Zobrazení zachovává rovnoběžnost.*
- *Obsah útvaru se zobrazením nezmění.*
- *Počátek O je jediný samodružný bod v hyperbolické rotaci.*
- *Souřadnicové osy jsou v hyperbolické rotaci jediné samodružné přímky.*

Věta 2 *Ke každým dvěma bodům $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$ hyperboly $xy = k$ lze nalézt hyperbolickou rotaci, která zobrazí A na B.*

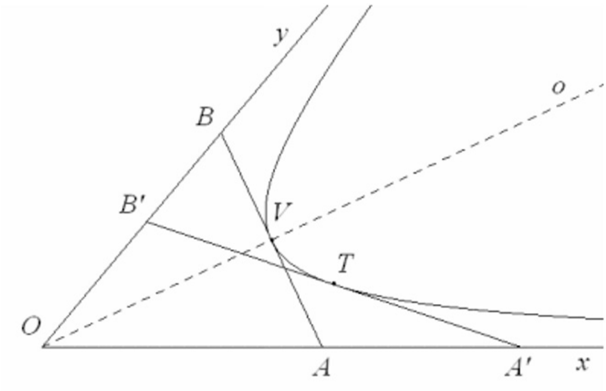
Důkaz je zřejmý. Jsou-li A, B body dané hyperboly, pak $x_1y_1 = x_2y_2 = k \neq 0$ a ve vztahu (11) stačí zvolit $h = x_2/x_1 = y_1/y_2$.

Poznámka: Hyperbolická rotace přemisťuje bod hyperboly do jiného bodu téže hyperboly. Je-li $h > 0$ (resp. $h < 0$), přemístí se bod do bodu na téže (resp. opačné) větvi hyperboly.

Věta 3 *Bod dotyku tečny hyperboly je středem úsečky, kterou na tečně vytínají asymptoty hyperboly.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé pro tečnu ve vrcholu V hyperboly (obr. 10), neboť plyne ze souměrnosti podle osy o.

Nechť T je libovolný další bod hyperboly. Pak podle věty 2 existuje hyperbolická rotace, která přemístí bod V do bodu T. Průsečíky A, B vrcholové tečny s asymptotami se zobrazí na průsečíky A', B' tečny hyperboly v bodě T s jejími asymptotami. Střed úsečky se zobrazením zachovává, a tak bod dotyku T je středem úsečky $A'B'$.



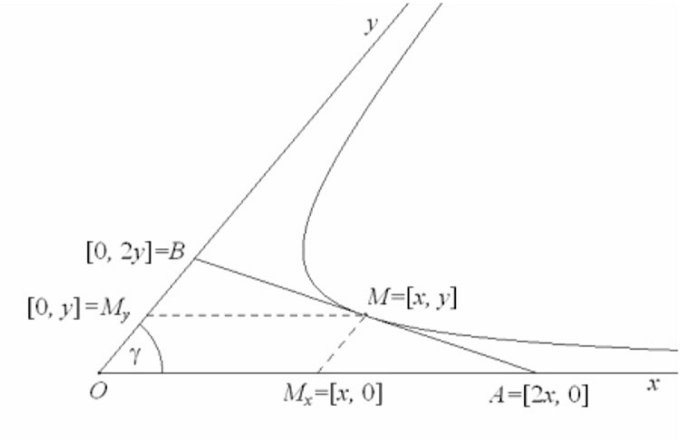
Obr. 10

Věta 4 *Nechť je dána soustava lineárních souřadnic (O, x, y) v rovině. Přímky p, které spolu se souřadnicovými osami ohraničují trojúhelníky konstantního obsahu S, obalují dvojici hyperbol daných rovnicemi*

$$xy = \frac{S}{2\sin\gamma} \quad a \quad xy = \frac{-S}{2\sin\gamma}, \tag{12}$$

kde γ je úhel souřadnicových os. Tato dvojice hyperbol je také množinou středů všech úseček, které jsou na přímkách p ohraničeny souřadnicovými osami.

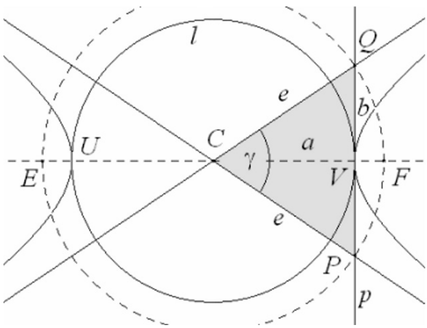
Věta 4 je důsledkem věty 3. Ponecháváme na čtenáři, aby si to ověřil například pomocí obr. 11, z něhož plyne, že $S_{OAB} = 2xy \sin \gamma$.



Obr. 11

Řešení úlohy užitím hyperbolické rotace

Na základě poznatků z předchozího odstavce snadno převedeme úlohu MO43-A-S-2 na konstrukci tečen z bodu M ke dvojici hyperbol. Přímka PQ je totiž podle věty 4 tečnou k některé z hyperbol daných vztahy (12), pokud v zadání úlohy za osy x a y zvolíme přímky AC a BC, za S dosadíme obsah trojúhelníka ABC a za γ velikost úhlu ACB.



Obr. 12

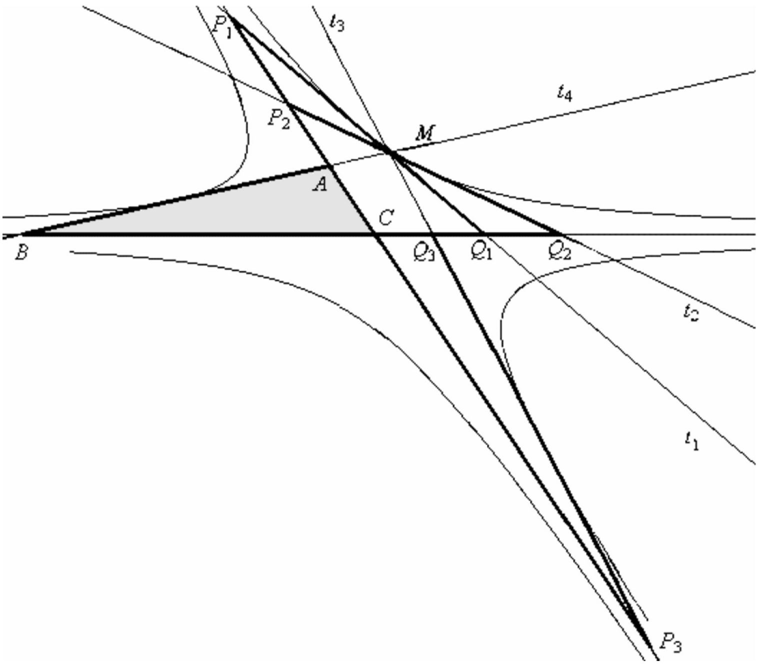
V případě vrcholové tečny p lze obsah ohraničený přímkou p a asymptotami vyjádřit z obr. 12 pomocí excentricity a úhlu asymptot. Z dvojího vyjádření obsahu,

$$\frac{1}{2}\,|AC|\,|BC|\,\sin\gamma = \frac{1}{2}\,e^2\,\sin\gamma,$$

plyne

$$e = \sqrt{|AC|\cdot|BC|}. \tag{13}$$

Vztah (13) umožňuje sestrojit vrcholy, ohniska i vrcholovou kružnici l každé z obou hyperbol. Vrcholová kružnice je, jak známo z učebnic deskriptivní geometrie, množinou všech pat kolmic z ohnisek hyperboly na její tečny. Je-li F jedno z ohnisek, pak každý z jejích společných bodů X s Thaletovou kružnicí nad průměrem MF určuje tečnu MX z bodu M k dané hyperbole.



Obr. 13

Na obr. 13 jsou znázorněna všechna řešení. (Tečna t_4 ohraničuje, jak bylo již dříve uvedeno, daný trojúhelník ABC, který text úlohy jako možné řešení vylučuje.) V souladu s diskusí z odstavce *Úplné řešení úlohy na základě výpočtu* vidíme, že trojúhelník CQ_3P_3 existuje vždy, kdežto trojúhelníky CQ_1P_1 a CQ_2P_2 existují, jen když je M vnějším bodem příslušné hyperboly. Neexistují, je-li M jejím vnitřním bodem, a splývají v jediný trojúhelník, nachází-li se bod M na hyperbole. Obrázek tedy zároveň představuje geometrickou interpretaci vztahů (6a), (6b) a (6c).

Závěr

Záměrem příspěvku bylo ukázat různé přístupy k řešení dané úlohy. Úloha je polohová, a tak můžeme pro naši práci volit různé veličiny (základní, jednoznačně určující zadanou geometrickou situaci, i neznámé, jejichž hodnoty po nalezení určují útvar, jenž máme sestrojit). Čtenář si jistě uvědomil, jak výrazně závisí obtížnost řešení na volbě těchto veličin. Zároveň jsme se seznámili s hyperbolickou rotací, užitečným a v české literatuře neprávem opomíjeným zobrazením, které lze využít při práci s talentovanými středoškoláky. K podrobnějšímu studiu doporučujeme zde uvedenou literaturu.

Literatura

[1] Šervatov, V. G.: *Giperboličeskie funkcii, Populjarnye lekcii po matematike 16.* GITTL, Moskva 1954, www.math.ru/lib/book/plm/v16.djvu.

[2] Šervatov, V. G.: *Hyperbolické funkce.* SNTL, Praha, 1956 (český překlad [1]).

[3] Kotin, O., Majorov, A.: Semjejstvo prjamych děljaščich ploščaď popolam. *Kvant* **8** (1990), s. 20–24, kvant.mirror1.mccme.ru/1990/08/semejstvo_pryamyh_delyashchih.htm.

[4] Tabačnikov, S.: Segmenty postojannoj ploščadi. *Kvant* **8** (1990), s. 26–31, kvant.mirror1.mccme.ru/1990/08/segmenty_postoyannoj_ploshchad.htm.

Výchova talentů v Čechách [1]

Josef Molnár, PřF UP Olomouc [2]

Abstrakt. *Pojednání o některých pozitivech a negativech péče o mimořádně nadané žáky v matematice v České republice.*

[1] Příspěvek byl zpracován v rámci řešení projektu NPV II „NFS“ č. 2E08021.

[2] e-mail: molnar@inf.upol.cz

Pokusme se položit na pomyslné misky vah pozitiva a negativa současného stavu péče o mimořádně nadané žáky v ČR a o mimořádně nadané žáky v matematice zvlášť.

Začněme stručným popisem činností, které čekají mladé nadšené učitele pečující o rozvoj matematického talentu svých svěřenců, a to ve formě parafráze na charakteristiku filmu, jenž byl inspirací pro název tohoto článku:

Mladý učitel matematiky Oskar přijme nabídku milionáře Krále, aby soukromě doučoval jeho dceru, aby si tak vylepšil hluboce podprůměrný učitelský plat. Oskar si myslí, že jeho žákyně bude neohrabaná netalentovaná dívenka, ale hned po prvním setkání sotva lapá po dechu. Z ujeté Beáty se postupně vyklube mimořádně nadaná osmnáctiletá dívka, která má potíže se světem a také sama se sebou. Život vyrovnaného učitele se mění v šílenství a zběsilé kličkování mezi pracovními povinnostmi ve škole, výukou a dozorem v jídelně, vlastním zájmem o matematiku a získáváním prostředků na splácení hypotéky a na účast na MAKOSu, péčí o talent Beáty a její mladší sestry, opravováním bytu a písemek, Matematickou olympiádou, Matematickým klokanem a jinými soutěžemi, dalším vzděláváním učitelů a suplováním, podáváním projektů ESF a zpracováváním ŠVP. Přes jeho veškerou snahu si Beáta podává přihlášku na právnickou fakultu.

Problematické už je vymezit, co se rozumí talentem či nadáním. Mezi teoretiky i praktiky panuje značná nejednotnost názorů – od toho, že nadání a talent jsou ekvivalentním označením vysoké míry schopností, přes zdůrazňování potenciální složky a vysokého IQ nadání proti specializovaným předpokladům a výkonové složce talentu, až po chápání nadání jako velmi vysokého talentu, či naopak. Následující teoretické informace jsou čerpány a kompilovány zejména z prací [3], [4] a [6], ale i dalších v seznamu literatury uvedených titulů.

Není nezajímavé sledovat, jak se postupně vyvíjel obsah pojmu nadání (tzv. modely nadání): Renzulli specifikoval tři základní složky – nadprůměrné intelektové schopnosti, tvořivost a motivaci; Mōnks přidává vliv školy, rodiny a vrstevníků; Czeisel doplňuje specifické intelektové schopnosti a faktor štěstí (šance) a Tannenbaum navíc zdůrazňuje dvě dimenze – dynamickou (projevenou výkonem) a statickou (projevenou potenciálem).

Podobně jako žáci se speciálními vzdělávacími potřebami mají své specifické edukační potřeby i žáci mimořádně nadaní. Patří mezi ně zejména: (1) výrazná stimulace, (2) argumentačně založená komunikace,

(3) individuální přístup, (4) modifikované kurikulum, (5) kontakt s vrstevníky podobného zaměření.

Z charakteristik nadaných od Winebrennerové vybíráme:

v pozitivních ohledech:

- Jsou extrémně vyspělí v jakékoliv oblasti učení.
- Vykazují asynchronní vývoj.
- Mají na svůj věk širokou slovní zásobu a vyspělý verbální projev.
- Mají excelentní paměť.
- Některé věci se naučí neuvěřitelně rychle bez pomoci druhých.
- Zvládají složitější myšlenkové operace než jejich vrstevníci.
- Vykazují schopnost práce s abstraktními myšlenkami s minimem konkrétní zkušenosti.
- Vidí jasně vztahy příčiny a následku i souvislosti.
- Vždy přicházejí s „lepším řešením“ – ne vždy vhodným způsobem.
- Dávají přednost komplexním a náročným úkolům.
- Jsou schopni přenášet své vědomosti do nových situací a řešení problémů.
- Chtějí se podělit o vše, co vědí.
- Jsou zvědaví ve všem, co se děje okolo nich a kladou nekonečné otázky.
- Jsou nadšení a ostražití pozorovatelé.
- Jsou horliví, někdy extrémně citliví či vznětliví. Dokážou být zcela pohlceni svými aktivitami.
- Mají často mnoho (neobvyklých) zájmů, koníčků a sbírek.
- Jsou silně motivováni dělat věci, které je zajímají, a to svým vlastním způsobem.
- Mají ohromnou míru energie.
- Mají cit pro krásno a lidské pocity, emoce a očekávání.
- Mívají zvýšený smysl pro spravedlnost, morálku, fair play a globální problémy.
- Mají sofistikovaný smysl pro humor.
- Rádi jsou ve vedení, mohou být přirozenou autoritou.

v negativních ohledech:

- Odmítají práci nebo pracují nedbale.
- Jsou nervózní při tempu práce třídy, když nevidí jasný pokrok práce.
- Protestují proti rutinní a předvídatelné práci.
- Ptají se na choulostivé otázky, vyžadují zdůvodnění, proč se mají věci dělat určitým způsobem.
- Odmítají určování práce a příkazy.
- Sní v průběhu dne.
- Ovládají třídní diskuze.
- Bývají panovační ve vztahu k učitelům i spolužákům.
- Jsou netolerantní k nedokonalosti vůči sobě i ostatním.
- Jsou přecitlivělí vůči kritice, snadno se rozpláčou.
- Odmítají se podřídit.
- Odmítají kooperativní učení.
- „Hrají divadlo“ a ruší spolužáky.
- Mohou se stát „třídním šaškem“.

Připomeňme si, jak bývají vymezovány matematické schopnosti a matematické nadání:

Verdelin – schopnost chápat povahu matematických (a podobných) úloh, znaků, metod a důkazů; naučit se je, uchovat je v paměti a reprodukovat je; kombinovat s jinými úlohami, symboly, metodami a důkazy, používat je při řešení matematických (a podobných) úloh. (Doplnil bych vyšší úroveň – tvořit úlohy, objevovat nové matematické poznatky, dokazovat je a třídit.)

Krutěckij – individuálně-psychologické zvláštnosti, které odpovídají potřebám vyučování matematiky. Podmiňují při ostatních stejných podmínkách úspěch tvořivého zvládnutí matematiky jako vyučovacího předmětu zvláště vzhledem na rychlost, lehkost a hloubku ovládání vědomostí, zručností a návyků v oblasti matematiky.

Makrides – nadprůměrná schopnost rozumět matematice a matematicky myslet, nikoli nadprůměrná schopnost provádět matematické výpočty a dostávat dobré známky z matematiky.

Burjan – projevuje se ve třech rovinách: všeobecné rozumové předpoklady, motivace, aktuální rozumová výbava.

Ve struktuře matematických schopností vyčleňuje Dubrovinová s odkazem na Krutěckého tyto komponenty:

- Schopnost formalizovaně chápat matematický materiál, zachycovat formální strukturu úlohy.
- Schopnost rychle a zeširoka zobecňovat matematické objekty, vztahy a úkony.
- Schopnost myslet zkrácenými strukturami.
- Pružnost procesů myšlení v matematické činnosti.
- Schopnost rychle a volně přizpůsobit zaměření myšlenkového procesu, přechod z přímého na zpětný myšlenkový pochod.
- Jasnost, jednoduchost, ekonomičnost a racionálnost řešení.
- Matematická paměť (zobecněná paměť na matematické vztahy, schémata úsudků a důkazů, metody řešení úloh a principy přístupu k nim).

Po literaturou podložené úvodní teoretické části se pusťme na „tenký led“ a pokusme se hledat možné příčiny nezájmu o technické a přírodovědné obory. Často slýcháme, že je to způsobeno nedostatečnou až negativní popularizaci v médiích, podprůměrnou prestiží a finančním ohodnocením přírodovědně vzdělaných lidí, učitelů zvlášť. V našich podmínkách to jistě zájmu o tyto obory nepřidá, nicméně vzhledem k tomu, že podobný stav lze vysledovat i v jiných zemí Evropy, včetně zemí tzv. vyspělých (viz např. mezinárodní projekty Socrates–Comenius „Promote MSc“ a „Motivate Me“), budou kořeny této situace zřejmě hlubší a obecnější. Projevuje se zde patrně mimo jiné vliv přetížení oblastí mozku zaměřených na techniku a současně působící ztráta vnitřního kontaktu s technikou denní potřeby. Pravidelně používáme čím dál více sofistikovaných technických zařízení od počítačů, faxů a mobilních telefonů, přes televizory, ledničky, pračky a mixéry až po vrtačky, sekačky a automobily, přičemž většinou nevíme nic o jejich vnitřní struktuře, o principech, na kterých pracují, a navíc mnohdy neumíme nebo nemáme ani možnost nahlédnou „do střev“ nebo aspoň „pod kapotu“. Další možnou příčinou může být zaměření evropské společnosti na úspěch (bez ohledu na vynaložené úsilí).

Tradice péče o matematické talenty je v našich zemích bohatá, připomeňme si: MO, SOČ, SVOČ, Pythagoriáda, korespondenční semináře, matematické tábory, časopisy pro učitele a žáky, publikace edice Škola mladých matematiků, kroužky na školách a dalších výchovně vzdělávacích zařízeních atd.

Objevují se ale i nové formy a metody propagace matematiky a dalších přírodovědných předmětů a práce s mimořádně nadanými jedinci, jako jsou Matematický klokan a mladší Přírodovědný klokan, Turnaj měst, Matematický Duel, Badatel, Celostátní matematická soutěž žáků SOŠ a SOU, různé virtuální internetové soutěže a semináře atd.

Specifická situace je v oblasti matematických tříd na základních školách a na gymnáziích. V bývalém Československu bylo 10 speciálních gymnázií s matematickými třídami a další matematicky zaměřené třídy na gymnáziích, téměř na každém okrese byla minimálně jedna třída ZŠ zaměřená na matematiku. Po rozdělení republiky se následnické země vydaly v tomto případě diametrálně odlišnými cestami. Na Slovensku jsou matematické třídy přímo finančně dotovány z veřejných zdrojů, takže lze s jistou nadsázkou říci, že vznikly na každé větší škole, která pro to měla podmínky. V České republice nejsou naopak vyčleněny finanční prostředky na přímou dotaci matematických (ani jiných, s výjimkou sportovních – viz vyhláška MŠMT ČR č. 73/2005 Sb.) tříd, takže pokud existují, jsou financovány jako běžné třídy.

Finanční prostředky jsou však v ČR přidělovány prostřednictvím konkurzů a projektů. Každoročně je na jejich základě obnovován seznam soutěží vyhlašovaných MŠMT ČR ve třech kategoriích – A: zcela financované MŠMT, B: částečně financované MŠMT, C: financované plně z jiných zdrojů. S povděkem lze kvitovat, že pro školní rok 2008/09 to byly mimo jiné tyto soutěže:

Typ A:

A 1) Matematická olympiáda (58. ročník, pořadatel JČMF)

A 9) Středoškolská odborná činnost (31. ročník, NIDM)

A 10) Matematický klokan (15. ročník, JČMF a UP v Olomouci)

A 13) Pythagoriáda (32. ročník, VÚP)

A 39) Soutěž v programování (23. ročník, NIDM)

Typ B:

B 1) Celostátní matematická soutěž žáků SOŠ a SOU (17. ročník, JČMF)

B 2) Přírodovědný klokan (3. ročník, Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci)

B 31) České hlavičky (3. ročník, Česká hlava, s.r.o.)

Jako optimální se jeví kompromis mezi oběma cestami – část veřejných prostředků směřovat na školy přímo, část rozdělovat prostřednictvím projektů a grantů.

Pozitivně lze hodnotit financování účastníků mezinárodních oborových olympiád a dalších srovnatelných soutěží. Další prostředky na práci s mimořádně nadanými žáky lze získat prostřednictvím projektů Národního programu výzkum II, z Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost z ESF aj. Sponzoři jsou ochotni přispět jen zřídka, což se v současném období hospodářské krize ještě prohloubilo. Na druhou stranu stále neumíme správně oslovit potenciální mecenáše. Ne náhodou bylo zásadní vystoupení Australana Petera O'Hallorana na II. kongresu Světové federace národních matematických soutěží (WFNMC) v roce 1994 v bulharském Pravci věnováno právě problematice získávání sponzorů na matematické soutěže a práci s talenty. V neposlední řadě podporují mimořádně nadané žáky různé nadace a organizace, mezi nimiž nehraje nepodstatnou úlohu JČMF, a samozřejmě jejich rodiče.

Takže nezbývá než získávat prostředky přes konkurzy a projekty. To však má i své negativní stránky. Existuje nemálo učitelů, kteří se budou rádi věnovat péči o mimořádně i nemimořádně nadané žáky, z různých příčin však zpracovávat projekty nemohou.

Náměty pro práci s matematickými talenty lze díky Společnosti učitelů matematiky (SUMA JČMF) získávat na různých akcích, jako jsou např. konference „Ani jeden matematický talent nazmar" v Hradci Králové, Letní školy didaktiky matematiky v Uherském Hradišti, podzimní školy MAKOS a semináře Klokani v Jeseníkách. Další formace o aktivitách SUMA lze najít v časopisech Matematika, fyzika, informatika, Učitel matematiky a Rozhledy matematicko-fyzikální, které sehrávají nezanedbatelnou úlohu v oblasti péče o talenty. A úspěšně lze taky hledat např. na webových stránkách `www.math.muni.cz/mo`, `www.nidm.cz`, `www.soc.cz`, `www.matematickyklokan.net`, `www.stv.cz`, `www.oavm.cz`, `www.vuppraha.cz`, `www.firstlegoleague.org`, `www.debrujar.cz`, `www.upol.cz/projects/souteze-up/`, `www.rvp.cz/clanek/6/630`, `www.msmt.cz/`, `kag.inf.upol.cz`, `class.pedf.cuni.cz/newsuma`, `spolupraceskol.cz/`.

Mezi negativní jevy v dané oblasti patří např. „přetahování" mimořádně nadaných žáků nejen mezi MO a FO, ale i dalšími soutěžemi, a nedostatečná informovanost a návaznost péče o talenty mezi jednotlivými stupni škol. Aktivní učitelé jsou mnohdy „trestáni" např. snížením platu za účast na akcích podporujících mimořádně nadané žáky nebo posměšky (někdy i výčitkami) pasivních kolegů, nedostatečné jsou i preference práce s mimořádně nadanými žáky v RVP a ŠVP. Pomohly by také jednotné celostátní institucemi MŠMT organizované zkoušky na závěr 1. stupně ZŠ, 2. stupně ZŠ a nižších tříd gymnázií a jasně deklarované státní maturity zvlášť pro všeobecně vzdělávací a zvlášť pro odborné střední školy, jejichž součástí by vždy byl aspoň jeden povinně volitelný přírodovědně či technicky zaměřený předmět.

Základem péče nejen o mimořádně nadané žáky zůstává dostatečně připravený a motivovaný učitel. V současné době se však učitelské profese octly na okraji zájmu společnosti vzhledem k jejich nízké prestiži a neodpovídajícímu finančnímu ohodnocení – učitelé jsou u nás nejhůře placená profese vysokoškolsky vzdělaných odborníků. Důsledkem je, že se na učitelství matematiky, fyziky a dalších, zejména přírodovědných, předmětů hlásí, a vzhledem k nedostatku kvalitnějších uchazečů, i přijímají absolventi z odborných škol s trojkami z profilových předmětů. Raději nedomýšlet, kam to může vést.

Literatura

[1] Calábek, P., Švrček, J., Vaněk, V.: *Péče o matematické talenty v České republice.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2007.

[2] Hátle, J.: Přírodovědný klokan. In: *Ani jeden matematický talent nazmar,* PedF UK a JČMF, Praha, 2009.

[3] Hotová, E.: *Matematické vzdělávání žáků mimořádně nadaných na 2. stupni ZŠ.* UP, Olomouc, 2008 (disertační práce).

[4] Jurášková, J.: *Základy pedagogiky nadaných.* IPPP ČR, Praha, 2006.

[5] Ulovec, A. a kol.: *Motivating and Exciting Metods in Mathematics and Science: Glosary of Terms.* UP Olomouc a University of Vinna, Olomouc, 2007.

[6] Vaněk, V.: *Péče o talenty v matematice.* UP, Olomouc, 2006 (disertační práce).

[7] *Věstník MŠMT ČR.* ročník 64, sešit 8, srpen 2008.

[8] Zhouf, J.: *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice.* UK, Praha, 2001 (disertační práce).

Středoevropská matematická olympiáda

Jaroslav Švrček, PřF UP [1]

Abstrakt. *Článek informuje o nově vznikající soutěži — Středoevropské matematické olympiádě (MEMO). Jde o analogickou soutěž, jako je Mezinárodní matematická olympiáda (MMO, IMO). Součástí článku jsou všechny úlohy, které byly zadány v prvních dvou ročnících MEMO.*

[1] e-mail: svrcek@inf.upol.cz

Středoevropská matematická olympiáda (Middle European Mathematical Olympiad – MEMO) je poměrně mladou matematickou soutěží. Vznikla z podnětu organizačního výboru rakouské matematické olympiády (ÖMO). V průběhu 47. Mezinárodní matematické olympiády (IMO) ve Slovinsku (v roce 2006) byly osloveny delegace devíti středoevropských zemí (Švýcarska, Rakouska, Německa, Slovinska, Chorvatska, České republiky, Slovenska, Polska a Maďarska) a seznámeny s návrhem vytvořit pro matematicky talentované středoškoláky uvedených zemí novou soutěž. Snahou iniciátorů vzniku této soutěže bylo umožnit (kromě členů reprezentačních družstev pro IMO) také dalším matematicky talentovaným středoškolským studentům zemí střední Evropy porovnat své znalosti z matematiky v mezinárodním měřítku. Na tomto jednání byly také předběžně stanoveny cíle a pravidla této nové mezinárodní matematické soutěže. Iniciátoři jejího vzniku přitom vycházeli z pravidel dvojstranné mezinárodní matematické soutěže středoškoláků „Polsko – Rakousko“, která existovala až do roku 2006 plných 29 let.

První ročník Středoevropské matematické olympiády se uskutečnil již v roce 2007, a to v termínu 20. – 26. září v rakouském Eisenstadtu – hlavním městě spolkové země Burgenland. Soutěže se však v jejím prvním ročníku zúčastnilo pouze sedm (z devíti) pozvaných středoevropských zemí (soutěže se tehdy nezúčastnilo Německo a Maďarsko). Každou zemi reprezentovalo 6 soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulé MMO ve Vietnamu a ve školním roce 2007/08 byli studenty středních škol. Úvodního ročníku soutěže se nakonec zúčastnilo 40 jednotlivců z uvedených sedmi střeoevropských zemí (slovinské družstvo přicestovalo do Eisenstadtu pouze se čtyřmi účastníky).

Soutěž se dle propozic konala ve dvou částech, a to v soutěži jednotlivců a jako soutěž družstev (pro každou z obou soutěží byly pro soutěžící připraveny vždy zvlášť čtyři úlohy, jejichž návrhy měly možnost (podobně jako na IMO) zaslat jednotlivé země s jistým časovým předstihem přímo organizačnímu výboru soutěže. V soutěži jednotlivců si dva členové našeho družstva odvezli z Rakouska dvě bronzové medaile a v samostatné soutěži družstev skončilo naše družstvo celkově na velmi pěkném 3. místě, viz např. [1].

Pro zájemce uvádíme obě sady soutěžních úloh zadaných na 1. MEMO v rakouském Eisenstadtu. V závorce je uvedena země, která úlohu do soutěže navrhla.

1. MEMO – Soutěž jednotlivců

Příklad 1

Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující rovnost $a+b+c+d=4$. Dokažte, že

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4.$$

(*Švýcarsko*)

Příklad 2

Je dáno k (k je celé číslo větší než 1) sad míčů. Každá sada obsahuje n míčů, které jsou označeny čísly $1, 2, \ldots, n$. Každý míč obarvíme jednou ze dvou barev (bílou nebo černou) tak, že

a) míče označené stejným číslem mají stejnou barvu,

b) každá $(k+1)$-prvková množina míčů, které jsou označeny (ne nutně různými) čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ tak, že platí $a_1+a_2+\cdots+a_k = a_{k+1}$, není jednobarevná.

V závislosti na k určete největší možné číslo n, pro něž existuje takové obarvení míčů.

(*Slovinsko*)

Příklad 3

Nechť k je daná kružnice a k_1, k_2, k_3 a k_4 jsou čtyři menší kružnice, jejichž středy po řadě O_1, O_2, O_3 a O_4 leží na kružnici k. Pro $i = 1$, 2, 3, 4 se kružnice k_i a k_{i+1} ($k_5 = k_1$) protínají ve dvou bodech A_i a B_i, přičemž body A_i leží na kružnici k. Předpokládejme, že body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 jsou navzájem různé a leží v tomto pořadí na kružnici k. Dokažte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravoúhelník.

(*Švýcarsko*)

Příklad 4

Určete všechny dvojice (x, y) kladných celých čísel, které vyhovují rovnici

$$x! + y! = x^y.$$

(*Česká republika*)

1. MEMO – Soutěž družstev

Příklad 1
Nechť a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla z uzavřeného intervalu $\langle\frac{1}{2}; 2\rangle$, která vyhovují podmínce $abcd = 1$. Určete největší možnou hodnotu výrazu

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right).$$

(*Česká republika*)

Příklad 2
Pro libovolnou množinu P pěti bodů v rovině (v obecné poloze) označme $a(\mathsf{P})$ počet všech ostroúhlých trojúhelníků s vrcholy v množině P. Určete největší možnou hodnotu $a(\mathsf{P})$.
(Pět bodů v rovině je v obecné poloze, jestliže žádné tři z nich neleží na téže přímce.)

(*Švýcarsko*)

Příklad 3
Označme $s(T)$ součet délek všech hran čtyřstěnu T. Uvažujme všechny čtyřstěny, jejichž délky hran jsou navzájem různá kladná celá čísla, přičemž jedno z nich je 2 a jedno 3. Takové čtyřstěny budeme nazývat MEMO-čtyřstěny.

a) Určete všechna kladná celá čísla n, pro něž existuje MEMO-čtyřstěn T s vlastností $s(T) = n$.
b) Určete počet navzájem *různých* MEMO-čtyřstěnů T, pro něž platí $s(T) = 2\,007$.

   Dva čtyřstěny považujeme za *různé*, jestliže jeden z nich nelze převést na druhý pomocí složení souměrností podle roviny, posunutí nebo otočení.

(Není třeba dokazovat, že čtyřstěny nejsou degenerované, tj. mají kladný objem.)

(*Rakousko*)

Příklad 4
Určete všechna kladná celá čísla k s vlastností: existuje celé číslo a takové, že $(a+k)^3 - a^3$ je násobkem čísla 2 007.

(*Rakousko*)

Druhý ročník Středoevropské matematické olympiády se uskutečnil v září 2008 v Olomouci pod záštitou rektora Univerzity Palackého. Soutěže se zúčastnilo 52 soutěžících již ze všech devíti zemí střední Evropy (České republiky, Chorvatska, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska). Organizací 2. ročníku MEMO bylo ÚK MO pověřeno olomoucké centrum MO. Předsedou organizačního výboru byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Celý realizační tým odvedl pod jeho vedením kvalitní práci, a představil tak Českou republiku ve velmi dobrém světle.

Soutěžícím byly (stejně jako v 1. ročníku soutěže) předloženy dvě čtveřice úloh; jedna v soutěži jednotlivců, druhá v soutěži družstev. Tyto úlohy vybrala mezinárodní jury na svém zasedání před zahájením soutěže pod vedením předsedy komise pro přípravu úloh *doc. RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.* Jednání mezinárodní jury přitom řídil a moderoval *RNDr. Karel Horák, CSc.* Zvláštní poděkování patří týmu koordinátorů soutěžních úloh, který tvořili čeští a slovenští specialisté na problematiku řešení nadstandardních matematických úloh.

Účastníci soutěže byli ubytováni ve vysokoškolských kolejích Univerzity Palackého a samotná soutěž probíhala ve fyzikálním pavilonu Přírodovědecké fakulty UP. Organizátoři soutěže připravili pro všechny účastníky soutěže atraktivní doprovodný program. Během svého pobytu v místě konání soutěže se soutěžící seznámili s historií a pamětihodnostmi Olomouce a blízkého okolí. Kromě „arcibiskupského“ zámku v Kroměříži navštívili všichni účastníci soutěže Javoříčské jeskyně a měli také možnost obdivovat architektonickou krásu hradu Bouzova.

V rámci vlastní soutěže byly soutěžícím předloženy dvě čtveřice úloh; jedna pro soutěž jednotlivců, druhá pro soutěž družstev. Na vypracování řešení první čtveřice úloh měl každý soutěžící 5 hodin čistého času a za každou úlohu mohl získat nejvýše 8 bodů. Druhou čtveřici úloh řešily jednotlivé národní týmy společně, opět po dobu pěti hodin. Každá úloha byla stejně jako na 1. MEMO ohodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovým ziskem v rozpětí 0–8 bodů). Dále uvádíme obě čveřice úloh zadaných ve 2. ročníku MEMO v Olomouci.

V soutěži jednotlivců naši soutěžící vybojovali v Olomouci po jedné stříbrné a jedné bronzové medaili. V soutěži družstev jsme však skončili na 7. místě, když za Českou republikou v celkovém pořadí zůstaly pouze družstva Chorvatska a Slovinska. V obou soutěžích se prokázala výrazná převaha soutěžících především z Německa, Maďarska a Polska, viz [2].

2. MEMO – Soutěž jednotlivců

Příklad 1
Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných celých čísel taková, že $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \geq 1$. Předpokládejme, že pro libovolnou čtveřici indexů (i, j, k, l), kde $1 \leq i < j \leq k < l$ a $i + l = j + k$, platí nerovnost $a_i + a_l > > a_j + a_k$. Určete nejmenší možnou hodnotu členu a_{2008}.

(*Rakousko*)

Příklad 2
Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Kolika způsoby na ni můžeme rozmístit $2n - 2$ identických kamenů (každý kámen leží na jiném poli) tak, že žádné dva kameny neleží na stejné diagonále? (Dva kameny leží na stejné diagonále, jestliže přímka spojující středy odpovídajících polí je rovnoběžná s některou z úhlopříček šachovnice.)

(*Švýcarsko*)

Příklad 3
Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny BC a AC. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran AB a BC po řadě v bodech D a E. Přímka různá od AE a procházející bodem A protíná kružnici vepsanou v bodech F a G. Přímka AB pak protíná přímky EF a EG po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$.

(*Maďarsko*)

Příklad 4
Najděte všechna celá k taková, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n.

(*Maďarsko*)

2. MEMO – Soutěž družstev

Příklad 1
Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

(*Švýcarsko*)

Příklad 2
Buď $n \geq 2$ přirozené číslo. Na tabuli je napsáno n čísel. V každém kroku vybereme na tabuli dvě čísla a každé z nich nahradíme jejich součtem. Určete všechna n, pro která můžeme vždy po konečném počtu kroků dostat n stejných čísel.

(*Slovensko*)

Příklad 3
Buď ABC ostroúhlý trojúhelník a nechť body E, D jsou takové, že body B a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AC a bod D leží uvnitř úsečky AE. Dále nechť

$$|\angle ADB| = |\angle CDE|, \qquad |\angle BAD| = |\angle ECD|$$

a

$$|\angle ACB| = |\angle EBA|.$$

Dokažte, že body B, C a E leží na jedné přímce.

(*Slovinsko*)

Příklad 4
Jestliže je součet kladných dělitelů kladného celého čísla n mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem, pak je i jejich počet mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem. Dokažte.

(*Česká republika*)

Podrobnější informace, texty úloh z dalších ročníků soutěže výsledky a fotogalerii můžete najít na českých internetových stránkách této soutěže na adrese `http://www.kag.upol.cz/`.

Literatura

[1] Horák, K. a kol.: *56. ročník matematické olympiády na středních školách.* JČMF, Praha, 2009.

[2] Horák, K., Šimša, J., Švrček, J.: *Second Middle European MO, Problems and Solutions.* UP, Olomouc, 2008.

Bobřík informatiky, 1. ročník

Jiří Vaníček, PdF JU, České Budějovice [1]

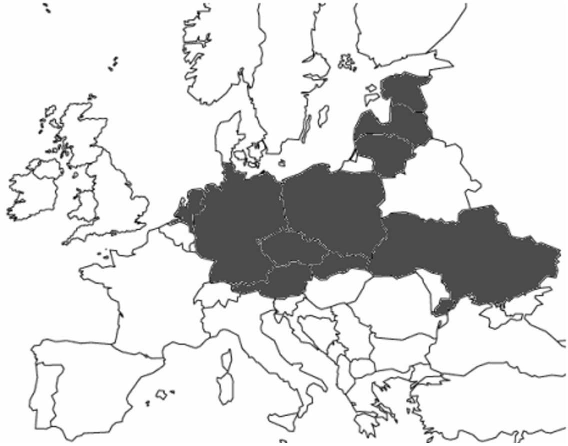
ABSTRAKT. *V článku představujeme novou celostátní soutěž žáků SŠ a druhého stupně ZŠ v informatice, jejíž první ročník proběhl v listopadu 2008. Jde o soutěž organizačně a zaměřením podobnou Matematickému klokanu. Soutěžení spočívá v online testu informatických znalostí, soutěž není jednostranně zaměřena na programování ani na uživatelský přístup k počítači. V článku je vysvětlena organizace a průběh soutěže na školách a jsou ukázány typy soutěžních úloh pro jednotlivé kategorie soutěžících. Jsou zde dále komentovány výsledky národního kola prvního ročníku po jednotlivých vybraných úlohách. V neposlední řadě představujeme web soutěže* `www.ibobr.cz`*, který obsahuje návod, jak zorganizovat soutěž na škole a jak ji využít ve školní informatice.*

Úvod

V listopadu 2008 proběhl první ročník soutěže v informatice pro žáky základních a středních škol s názvem *Bobřík informatiky*. Soutěž si klade za cíl prohloubit a formovat zájem mládeže o informační a komunikační technologie a jejich využívání při svém učení. Tato soutěž není zaměřena jednostranně na programování ani na uživatelský přístup a není závislá na nějaké konkrétní platformě.

Soutěž se hlásí k mezinárodní skupině soutěží s podobným zaměřením, které metodicky koordinují svůj postup, nicméně poskytují zúčastněným státům volnost ve způsobu organizace soutěžního testu i výběru jeho obsahu. Pod názvy Bebras, Beaver, iBobor, Biber atd. jsou organizovány informatické soutěže v desítce evropských států; loňské kolo proběhlo v Česku, Estonsku, Holandsku, Litvě, Lotyšsku, Německu, Polsku, Rakousku, Slovensku a na Ukrajině [1]. Již po 5 let je každoročně organizováno společné mezinárodní setkání organizátorů z jednotlivých zemí pořádajících soutěž, kde se připravují, recenzují, vybírají a zdokonalují úlohy, které jsou uloženy do databáze, z níž potom jednotlivé země čerpají (obr. 1, 2).

[1] e-mail: vanicek@pf.jcu.cz



Obr. 1. Mapa států, v nichž v r. 2008 proběhla soutěž Bebras

Obr. 2. Socha maskota soutěže v Pasvalys v Litvě

Cíl soutěže

V České republice dosud chyběla soutěž podobná Matematickému klokanu, která by popularizovala předmět mezi žáky i na škole, a která by přinášela informatické problémy a úlohy ke školní mládeži. Informatika bývá často v kurikulu jednotlivých škol zužována na informační gramotnost. Soutěž žákům ukazuje, jaké znalosti a dovednosti se vyžadují po odborníku v oblasti informačních technologií [2]. Podle našich zkušeností čeští maturanti z informatiky nejen že často nemají základy pro to, aby (na rozdíl od přírodovědných předmětů) mohli studovat informatiku na vysoké škole, ale často ani nemají představu o tom, co tento vědní obor představuje. Zájemci o studium informatiky na vysoké škole, jejichž motivací je často pouze to, že rádi pracují s počítačem, pak jsou často po příchodu na vysokou školu zaskočeni. V této souvislosti je dalším cílem soutěže zaměřit pozornost školní informatiky také k tématům základů informatiky jako oboru a posílit postavení informatiky a hodinovou dotaci (tab. 1), která je věru slabá [3].

Educational Area	Educational Field	Stage 1	Stage 2
		Grades 1–5	Grades 6–9
		Minimum time allotment	
Language and Communication through Language	Czech Language and Literature	35	15
	Foreign Language	9	12
Mathematics and Its Applications		20	15
Information and Communication Technologies		1	1

Tab. 1. Anglická verze Českého vzdělávacího systému od r. 2007, výřez z tabulky. Porovnání hodinové dotace ICT na 1. a 2. stupni ZŠ s dalšími vzdělávacími oblastmi. Zdroj: web Ministerstva školství, http://www.msmt.cz.[2]

Proč právě bobřík?

Bobr je názvem těchto soutěží ve všech okolních zemích, ten český má však jiné souvislosti. Zatímco např. na Slovensku je sloganem soutěže „Zakousni se do problému“, v Čechách je to „Ulov bobříka“, což může neznalému nebo cizinci znít necivilizovaně.

Ovšem kdo četl knihu Jaroslava Foglara Hoši od Bobří řeky, ví, že bobřík představuje určitou zkoušku, prokázání dovednosti, umu a kvality. Kdo by neznal Rikitanova bobříka hladu, bobříka mlčení, bobříka odvahy! Ulovení bobříka znamená překonání sebe sama, splnění nelehké zkoušky. V této soutěži, která takovou zkoušku představuje, lze ulovit bobříka dosažením určitého počtu bodů při testu na počítači. Nejde sice o prokázání mrštnosti nebo odvahy, ale jistě o prokázání důvtipu, schopnosti přemýšlet a rozumět světu počítačů.

[2] Poznámka redakce: http://www.msmt.cz/uploads/Areas_of_work/basic_education /Basic_Education_EN.doc [cit. 27. 6. 2009], s. 109.

Organizace soutěže

Soutěž probíhá jednokolově, je vyhlašováno pouze národní kolo. Soutěž je organizována na školách, probíhá jako jednorázový online test na počítačové učebně, nejčastěji volbou z nabízených odpovědí. Soutěžící odpovídá na 15 otázek z oblastí [4]:

- počítače v každodenním životě (fakta, informační technologie v jiných předmětech, sociální a etické otázky, autorská práva, globalizace),
- praktické a technické otázky (terminologie, kódování, generování, základní aplikace, formáty souborů, bezpečnost),
- programování a algoritmizace (tvorba a analýza algoritmů, formální zápis),
- porozumění informacím (hledání relevantních informací, třídění informací, modelování, reprezentace informací),
- matematické základy informatiky (logické hry, predikátová logika, argumentace a zdůvodňování, řešení problémů).

Soutěžící jsou rozděleni do tří kategorií podle věku. Pro žáky základních škol je určena kategorie Benjamin, pro žáky středních škol (včetně devátých tříd) kategorie Junior, pro předmaturitní a maturitní ročníky kategorie Senior. Kvůli snadnější organizaci soutěžního kola na škole jsou žáci rozděleni nikoliv podle data narození, ale podle ročníku, který navštěvují (tab. 2).

Ročník ZŠ/SŠ	5.	6.	7.	8.	9.	I.	II.	III.	IV.
Kategorie	Benjamin				Junior			Senior	

Tab. 2. Rozdělení kategorií soutěže (studenti víceletých gymnázií podle odpovídajícího ročníku, sloupec IV představuje maturitní ročník).

Testové otázky jsou členěny podle obtížnosti, za správně zodpovězenou těžší otázku lze získat více bodů, ovšem za nesprávnou se body odečítají. Soutěžící má možnost na otázku neodpovědět, pak nezískává ani neztrácí žádné body. Čtyřicetiminutový limit pro test nelze překročit, za předčasné ukončení testu soutěžící nezíská žádné body navíc.

Soutěž na škole organizuje učitel-dobrovolník, tzv. školní koordinátor soutěže, který školu registruje na webu soutěže a podle podrobných pokynů soutěž pro své žáky připraví (to znamená většinou zajistit učebny a rozvrh školy na testovací den). Výhodou online testu je, že se žák okamžitě dozví, jak byl úspěšný, škola dostane velice brzy (vloni do 30 hodin) výsledky a pořadí svých žáků a také komentované správné odpovědi pro možný rozbor při výuce. Další výhodou pro organizaci soutěže na škole může být, že škola nemusí své žáky registrovat před soutěží; daní za tuto svobodu je nutnost zkontrolovat, zda všichni zúčastnění jsou správně podepsáni (kupodivu to zdaleka není samozřejmost) a zda jsou opravdu žáky školy (vloni si soutěž vyzkoušeli někteří učitelé i ředitelé škol, což vnímáme jako pozitivní, ovšem potřebujeme tyto „soutěžící" vyjmout z výsledkových listin).

Výsledky 1. ročníku soutěže

Soutěže se zúčastnilo 4 069 účastníků ze 79 škol ze všech 14 krajů České republiky. V kategorii Benjamin soutěžilo 1 758, v kategorii Junior 1 686 a v kategorii Senior 625 soutěžících. Díky podpoře Jednoty školských informatiků a štědrosti sponzorů soutěže IT Systems, E-ON IS, Burda, Vapet jsme mohli cca 60 nejlepším soutěžícím ze všech kategorií rozeslat dárky.

Kategorie Junior byla kvůli pádu serveru z důvodu přetížení okamžitým množstvím soutěžících realizována ve dvou soutěžních dnech. Soutěžící, kteří test nedokončili nebo nemohli začít, byla nabídnuta možnost zopakovat testování o 14 později. Této možnosti využilo 20 % soutěžících v této kategorii. V tzv. doplňkovém testování kategorie Junior byly soutěžní úlohy modifikovány. Protože úspěšnost v obou soutěžních dnech nevykazovala významné odchylky, byly započítány do společné analýzy oba dva soutěžní dny (tab. 3, obr. 3).

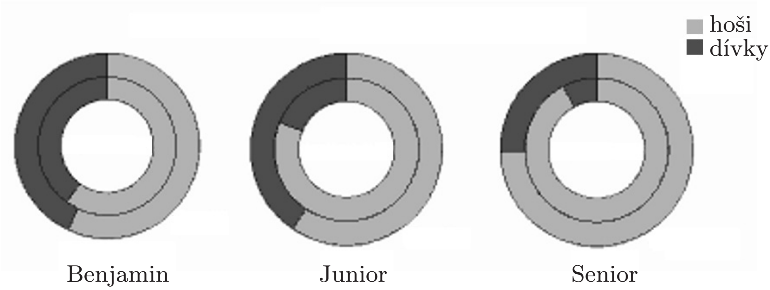
Kategorie	Podíl úspěšných řešitelů[3]	Podíl absolutních vítězů[4]	Podíl neúspěšných řešitelů[5]
Benjamin	45 %	1,6 %	3,8 %
Junior	27 %	0,2 %	9,4 %
Senior	34 %	1,0 %	2,2 %

Tab. 3. Porovnání náročnosti kategorií podle různých kritérií. Tabulka porovnává, jak byly testové otázky náročné pro jednotlivé kategorie soutěžících.

[3]Podíl úspěšných řešitelů k celkovému počtu soutěžících. Úspěšný řešitel získal více než polovinu maximálního počtu bodů po odečtení vstupní bodové dotace (což odpovídá 9–10 správným odpovědím).

[4]Podíl počtu absolutních vítězů k celkovému počtu soutěžících. Absolutní vítěz získal plný počet bodů.

[5]Podíl neúspěšných řešitelů k celkovému počtu soutěžících. Tzv. neúspěšný řešitel získal záporný počet bodů (po odečtení vstupní bodové dotace), což odpovídá cca čtyřem a méně správným odpovědím.



Obr. 3. Porovnání účastníků soutěže Bobřík informatiky 2008 v jednotlivých kategoriích podle pohlaví. Vnější kruh představuje počty účastníků, vnitřní kruh počty úspěšných řešitelů (úspěšný řešitel získal alespoň polovinu maximálního počtu bodů). Je vidět, že zastoupení dívek i jejich úspěšnost je na základní škole srovnatelná s chlapci a s věkem oba ukazatele klesají.

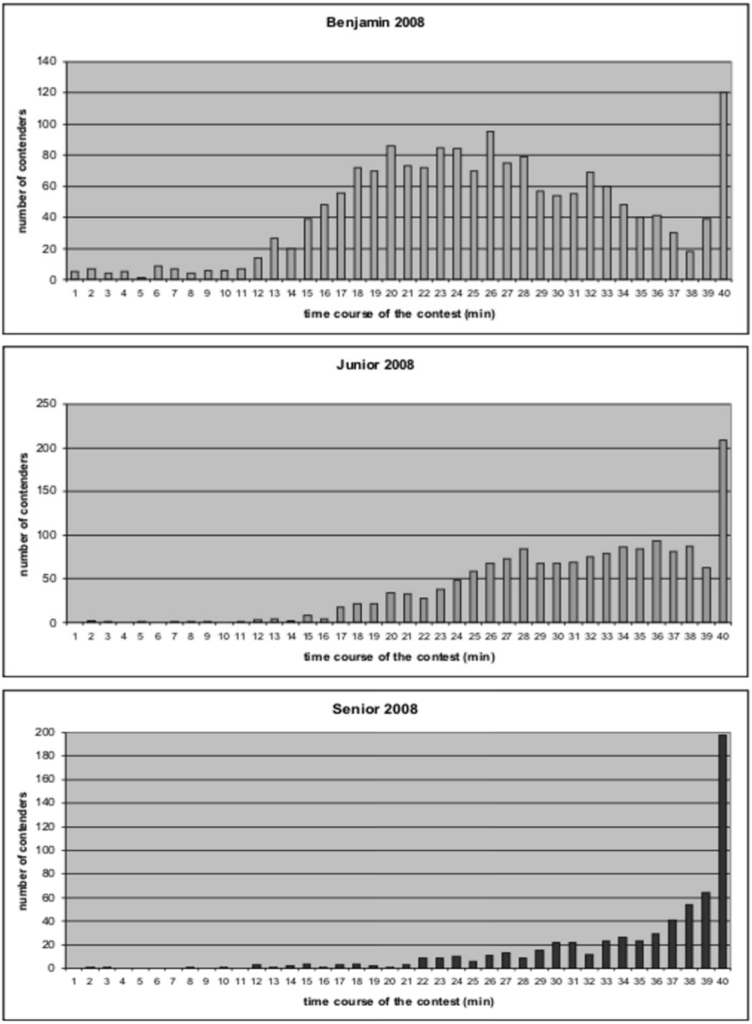
Ze srovnání v tab. 3 vyplývá, že nejlepší výsledky byly dosaženy v kategorii Benjamin, naopak nejslabší v kategorii Junior. Nemusí to znamenat, že úlohy pro kategorii Junior byly nejtěžší, je také možné, že v kategorii Senior rozhodovalo o přihlášení sebehodnocení studentů v daní oblasti, zatímco v kategorii Junior převládala atraktivnost tématu a zájem či zvědavost (a možná též neznalost obsahu disciplíny). Je také možné, že na některých školách byli studenti do soutěže přihlášeni bez dostatečné motivace, což se mohlo projevit částečnou snahou soutěž bojkotovat.

Jak dlouho žáci vyplňovali test

Počítačový systém, který realizoval soutěžení, umožnil také měření doby vyplňování testu u každého účastníka. Na obr. 4 je pro jednotlivé kategorie sloupcovým grafem znázorněn časový průběh testu. Na vodorovné ose je vynesen čas, na svislé ose pak počet soutěžících, kteří po tuto dobu vyplňovali test.

Z grafů vyplývá, že s věkem rostla doba nejčastějšího ukončení testu. Zde je potřeba pominout krajní hodnotu 40 minut maximálního trvání testu, protože zde byl test násilně přerušen a navíc byl test ukončen i tam, kde žák z různých důvodů test neukončil sám.

Zatímco u Benjaminů byla nejčastější doba testu 26 minut, u Juniorů 36 minut a u Seniorů takové maximum nebylo. Doba testu tedy rostla s věkem. Na první pohled to vypadá, že ve starších kategoriích jsou obtížnější otázky, což se ovšem neslučuje se zjištěním z tab. 3, kde nejtěžší kategorií byl Junior. Pravděpodobnějším vysvětlením je, že s věkem soutěžících roste délka koncentrace a žáci z kategorie Benjamin se po 25 minutách hůře soustředí a test ukončují. Je otázkou, zda nebude praktičtější pro mladší kategorii zkrátit dobu testování.

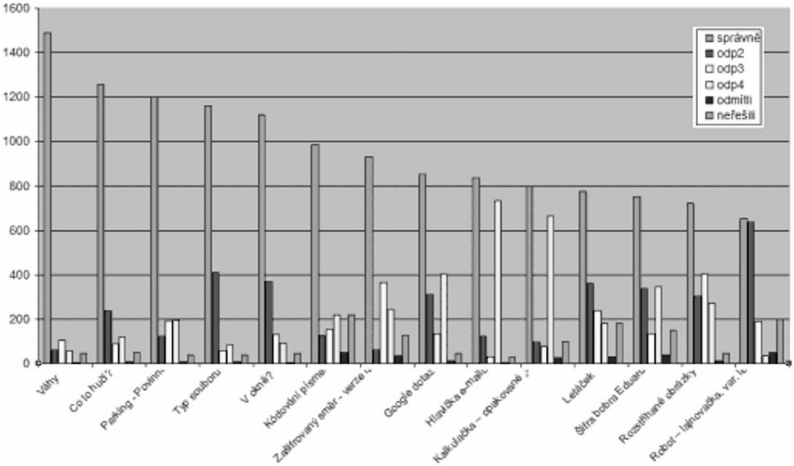


Obr. 4. Závislost počtu žáků na době testování v jednotlivých kategoriích

Snadné a těžké otázky

V této části článku chceme komentovat výsledky u některých úloh.

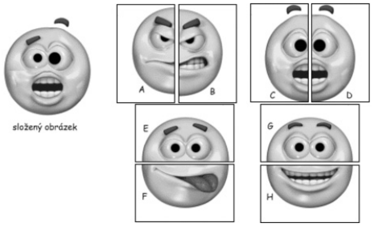
Nejlehčími úlohami v kategorii Benjamin (obr. 5) byly *Váhy* (matematická úloha, vyvažování tělísek na vahách) a otázka *Co to hučí v počítači*, které správně zodpovědělo 85 %, resp. 71 %, soutěžících. V kategorii Junior byly nejlehčími otázkami *Rozstříhané obrázky* a *Vzorce v tabulce* (kontrola výpočtů podle vzorců v tabulkovém procesoru) s 79 %, resp. 72 %, správných odpovědí. V kategorii Senior byly nejlehčími otázkami *Na pláži* (soutěžící měli určit, kterou z technologií GPS, GPRS, Bluetooth, WiFi by mohli použít k odeslání e-mailu z notebooku na pláži – 91 % správně) a stejně jako u Juniorů i Seniorů *Vzorce v tabulce* – 72 %, resp. 78 %.



Obr. 5. Počty odpovědí na jednotlivé otázky v kategorii Benjamin (odpověď 1 je vždy správná) ukazuje na obtížnost jednotlivých otázek. Vlevo otázky nejlehčí, vpravo nejtěžší.Vyrovnané dva sloupce znamenají výskyt matoucí špatné odpovědi. Časová řada „odmítli“ znamená počet soutěžících, kteří záměrně označili možnost *Bez odpovědi* (nejčastěji jako korekci původní odpovědi, kdy si nebyli jisti), „neřešili“ znamená, že soutěžící neodeslali žádnou odpověď (přeskočili úlohu nebo ji nestihli).

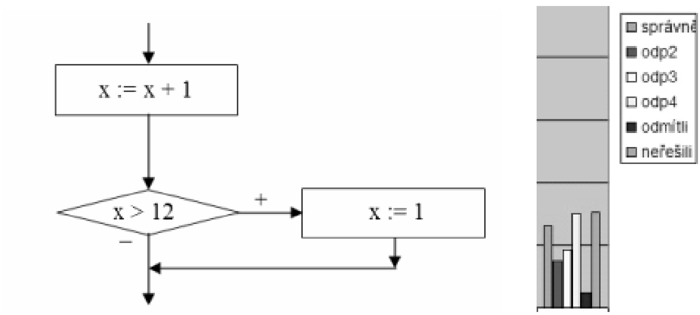
Jako nejtěžší byly vyhodnoceny otázky:

– *Rozstříhané obrázky* pro kat. Benjamin – 41 % (je vidět kontrast v řešení této úlohy mezi žáky ZŠ a SŠ, patrně tedy v tomto věku se člověk učí rozumět takovémuto druhu abstrakce a představivosti) (obr. 6).



Obr. 6. Rozstříhané obrázky.

- *Robot lajnovačka* (programování, změna parametrů v cyklu při kreslení kružnice polovičního průměru) – 37 %. Tuto otázku také vynechalo nejvíce soutěžících této kategorie.
- Úloha, která měla ověřit, zda žáci kategorie Benjamin rozumí pojmu *Předmět zprávy*, ukázala, že žáci tomuto pojmu nerozumí (počet žáků, kteří do Předmětu zprávy se žádostí o upřesnění domácího úkolu z fyziky vybrali text „Pane učiteli prosím, napište mi, jaký úkol jste zadal na příští týden. Děkuji.“ byl stejný, jako počet žáků, kteří vybrali správnou volbu „Domácí úkol na příští týden.“.
- Jako nejtěžší otázka byla v kategorii Senior hodnocena otázka *Opakovaný algoritmus.* Všechny z nabízených odpovědí měly zhruba stejnou četnost, každý čtvrtý soutěžící úlohu přeskočil (obr. 7).



Obr. 7. Diagram k zadání úlohy Opakovaný algoritmus. Z vývojového diagramu měli maturanti poznat, kolikrát je třeba algoritmus zopakovat, aby se v paměti x objevilo opět stejné číslo jako na začátku (na začátku bylo libovolné jednociferné). Nabízené odpovědi: dvanáctkrát, jedenáctkrát, nikdy se totéž číslo nezopakuje, záleží na konkrétním vloženém číslu. Vpravo četnost odpovědí odpovídající náhodné volbě ukazuje, že úloha byla velice obtížná.

- Soudě podle počtu soutěžících, kteří se neodvážili nějakou úlohu řešit (42 %), byla nejtěžší úlohou *Páry čísel* v kategorii Senior. Formální zápis úlohy a jeho délka asi spolehlivě odradila velké procento soutěžících.
- V kategorii Junior byla velice matoucí odpověď *výsečový* na otázku, jaký typ grafu je vhodný pro zobrazení dat z tabulky (volilo ji více než 20 % soutěžících). Je vidět, že žáci o úloze *Typ grafu* (viz níže) nepřemýšleli; jakmile spatřili procenta, volili výsečový graf.
- Podobně matoucí byla odpověď na otázku *Proč je v PC větrák?* Kromě správné „počítač je podobně jako žehlička elektrické zařízení a musí být chlazen“ byla hojně vybírána odpověď „chladí počítač, který se zahřívá třením při otáčení pevného disku“ (patrně se žáci nechali zmást srovnáním počítače s žehličkou).
- Úloha, ve které byl počet správných odpovědí nižší než 25 % (při čtyřech možnostech odpovědi), byla úloha *Křižovatka* v kategorii Senior (šlo o orientaci v plánu křižovatky a určení celkového úhlu otočení).
- Jako náročnou se ukázala algoritmická úloha *Hromádky karet* v kategorii Senior, v níž byl značný počet odpovědí „vyhraje první hráč“ namísto správného „vyhraje druhý hráč“. Studenti jakoby nedokáží z popisu algoritmu rozeznat koncový stav (jak budou zpracovávaná data na konci algoritmu vypadat).

Porovnání úspěšnosti u jednotlivých otázek

U každé otázky uvádíme zadání, obrázek a graf, zobrazující, kolik soutěžících volilo správnou odpověď, kolik chybnou a kolik neodpovědělo.

Šifra bobra Eduarda

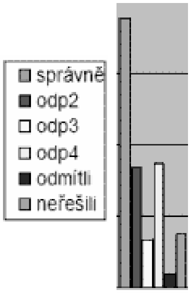
Zadání: Šifra bobra Eduarda se používá tak, že
- samohlásky a mezery se v textu nemění,
- každá souhláska se nahradí další souhláskou v jejich abecedě,
- poslední souhláska abecedy (Z) se nahradí první (B).

Jak vypadá zpráva DNESKA V JEDNU ZA ZAHRADOU zašifrovaná pomocí šifry bobra Eduarda?

Odpovědi:
- FPETLA W KEFPU BA BAJSAFOU (správná)
- DNISKE V JIDNY ZE ZEHREDUY
- FPFTLB W KFFPV BB BBJSBFPV
- EOFTLB W KFEOV AB ABISBEPV

Zdůvodnění: Jestliže se samohlásky nemění, musí zůstat nezměněn konec věty (poslední dvě písmena OU). Tomu vyhovuje pouze šifra z prvního řádku.

Poznámka: Z grafu vpravo (obr. 8) vyplývá, že otázka zdaleka nebyla jednoduchá, šlo o třetí nejtěžší otázku u kategorie Benjamin.



Obr. 8

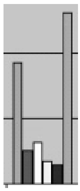
Páry čísel

Zadání: Pracujeme s čísly a páry čísel. Pár zapisujeme ve tvaru (AB), jestliže obě A i B jsou čísla. Definujeme dvě funkce: první$(X\ Y) = X$, poslední$(X\ Y) = Y$, X a Y mohou být páry čísel.
Co je
poslední(poslední(první(1 2) (3 4)) poslední((5 6) první(první((7 8) 9) (2 3))))?

Odpovědi: (7 8) – správná, 1, (3 4), (1 2)

Zdůvodnění: Postupně budeme výraz zjednodušovat. Výsledek funkce, kterou zkoumáme, podtrhneme.

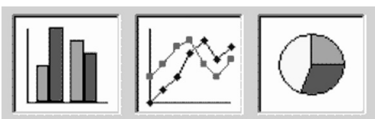
poslední(poslední(první(1 2) (3 4))poslední((5 6) první(první((7 8) 9) (2 3))))
poslední((5 6)první(první((7 8) 9) (2 3)))
první(první((7 8) 9) (2 3)))
první((7 8) 9)
(7 8)


Obr. 9

Poznámka: Z grafu (obr. 9) vyplývá, že otázka zdaleka nebyla jednoduchá, šlo o třetí nejtěžší otázku u kategorie Benjamin.

Typ grafu

Zadání: Žáci měli za úkol vytvořit graf k tabulce, v níž byly zadány názvy všech států EU a počet procent vysokoškoláků v každé zemi (kolik procent občanů země má vysokoškolské vzdělání). Žáci si mohli vybrat ze tří typů grafu, který použijí: sloupcový, spojnicový nebo výsečový.



Obr. 10

Který typ grafu měli vybrat?

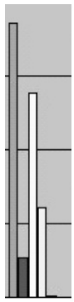
Odpovědi: sloupcový (správně), spojnicový, výsečový, mohli vybrat libovolný. K dispozici byl soutěžícím obrázek, zobrazující jednotlivé typy grafů (obr. 10).

Zdůvodnění: Spojnicový graf nemůže být vybrán jako správný. Má ukazovat trendy, časový vývoj hodnot v grafu (např. záznam teplot během dne, prodej automobilů během roku).

Výsečový graf často uvádí údaje v procentech. Všechny hodnoty však musí dávat dohromady 100 % (graf je uzavřený, znázorňuje celek). V úloze jde sice o procenta, ovšem jistě nebude součet všech procent roven 100 % (např. kdyby v každé z 27 zemí EU bylo 10 % vysokoškoláků, byl by celkový součet procent $27 \cdot 10 = 270$ %).

Sloupcový graf znázorňuje hodnoty, které stojí „vedle sebe", mezi nimiž není žádná časová souvislost a jež nemusí dávat dohromady nějaký celek. Vyhovuje naší úloze.

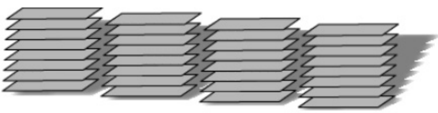
Poznámka: Úloha z tabulkového procesoru, to je úloha, kterou nepohrdne žádný středoškolák, jak ukazují takřka nulové počty soutěžících bez odpovědi. Ovšem s úspěšností to nebylo tak slavné (obr. 11): třetí nejvyšší četnost měla odpověď „všechny typy grafů jsou správně", což ukazuje, že se problematika typů grafu na mnoha školách vůbec nevyučuje. Druhá nejčastější volba „výsečový" ukazuje na povrchnost přemýšlení soutěžících: „kde jsou procenta, tam půjde o kruhový graf".



Obr. 11

Hromádky karet

Zadání: Máme N hromádek po M kartách. Dva hráči hrají hru, v níž se střídají na tahu, začíná první hráč. Při jednom tahu hráč vezme jednu z hromádek a rozdělí ji na dvě (počet karet přitom nemusí být v obou hromádkách stejný). Vítězem se stává ten, po jehož tahu již nezbyla žádná hromádka, kterou by bylo možno rozdělit.

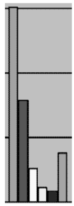


Obr. 12

Na obr. 12 je hra, v níž je $N = 4$, $M = 8$. Který z hráčů vyhraje tuto hru?

Odpovědi:
- Druhý hráč (správně)
- První hráč
- Je jedno, kdo začne
- Tuto hru nemůže vyhrát ani jeden z hráčů

Zdůvodnění: Po každém tahu se zvětší počet hromádek o jednu (hráč vezme jednu hromádku a udělá z ní dvě). Na začátku jsou 4 hromádky, na konci 32 hromádek (každá karta leží zvlášť). Hra se tedy vždy skládá z 28 tahů. Poslední, 28. tah udělá druhý hráč. Druhý hráč vyhraje.


Obr. 13

Poznámka: Volba jednotlivých odpovědí je na obr. 13.

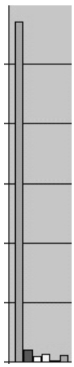
Na pláži

Zadání: Karel vyrazil na dovolenou na Mallorku. Potřebuje si však kontrolovat své e-maily pomocí mobilního telefonu. Která z následujících technologií mu to pomůže realizovat?

Odpovědi: GPRS (správná), Irda, Bluetooth, GPS

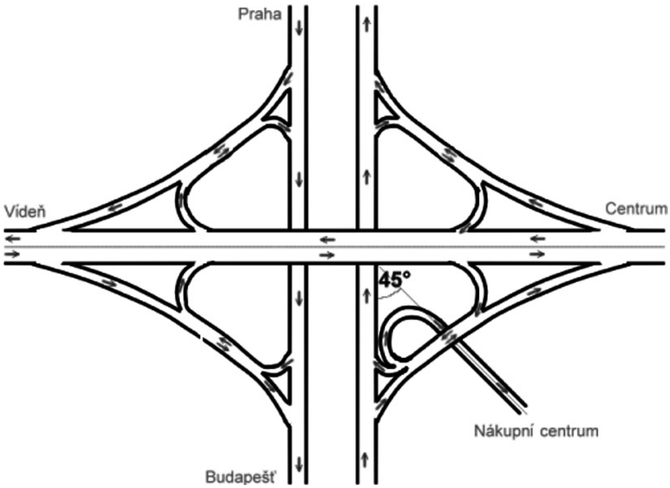
Zdůvodnění: GPRS slouží k přenosu dat v rámci sítě mobilního operátora. Bluetooth slouží k přenosu dat mezi blízkými zařízeními různého druhu (počítač, myš, mobil, sluchátka a pod.) na vzdálenost několika metrů. Irda, infračervený přenos, slouží k přenosu dat na krátkou vzdálenost mezi „navzájem se vidícími“ zařízeními (mobil–mobil, nebo také televize–dálkový ovladač). GPS zjišťuje aktuální polohu zařízení, jeho globální souřadnice.

Poznámka: Byla to nejlehčí úloha pro kategorii Senior. Je vidět, že maturanti se v technologiích vyznají. Nebo také (v porovnání s úlohami *Opakovaný algoritmus* a *Páry čísel*) maturanti znají fakta, jakmile jde ovšem o přemýšlení, výsledek rapidně klesá (obr. 14).


Obr. 14

Křižovatka – kategorie Senior

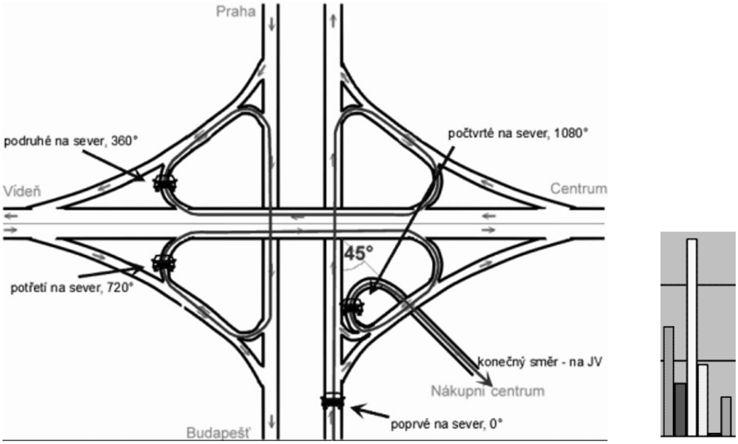
Zadání: Na obr. 15 vidíme zjednodušené schéma dálniční křižovatky u města Bratislavy. Obě dálnice jsou na sebe kolmé. Když přijíždí auto od Budapešti a chce jet do centra, stačí se otočit o 90 stupňů vpravo. Ale kdyby se chtělo na křižovatce otočit a vrátit do Budapešti, muselo by se otočit nejméně o 540 stupňů doprava. Všimněte si, že na takovýchto křižovatkách se vždy auta točí pouze doprava. Přijíždíte od Budapešti a chcete jet do nákupního centra. O kolik stupňů doprava se celkem musí otočit vaše auto? Pomůcka: Od Budapešti přijíždí auto směrem na sever. Spočítejte si, kolikrát auto během otáčení bude znovu natočeno na sever. Během jedné otáčky „ze severu na sever“ se otočí o 360 stupňů.



Obr. 15. Křižovatka.

Odpovědi: 1215 (správná), 810, 1125, 405

Zdůvodnění: Auto jelo podle čáry na obrázku, před křižovatkou jelo směrem na sever. Počítejme, kolikrát se během této cesty znovu natočilo do směru na sever (na obr. 16 znázorněno polohou auta). Pokaždé, když znovu bylo otočeno na sever, se otočilo o dalších 360°, celkem se otočilo více než třikrát ($3 \cdot 360° = 1\,080°$). K nákupnímu středisku zbývalo autu otočit se ze severního směru na jihovýchod. Úhel mezi severem a jihovýchodem je 135°. Celkem se auto otočilo o $3 \cdot 360° + 135° = 1\,215°$.



Obr. 16. Křižovatka – obrázek k zdůvodnění úlohy, vpravo graf úspěšnosti, ukazující na velice těžkou otázku.

Web soutěže

Na adrese `www.ibobr.cz` najdete další informace o soutěži, o soutěžních úlohách a pravidlech, o způsobu organizace soutěže na škole. Zde je možno registrovat školu pro příští ročník soutěže a vyzkoušet si tzv. test nanečisto, složený z podobných otázek jako ostré soutěžní testy. Web obsahuje privátní část pro školní koordinátory, v němž jsou k dispozici mj. testové otázky z loňského roku se správnými odpověďmi a komentáři, pořadí žáků školy v rámci kategorie a seznam nejlepších účastníků.

Literatura

[1] Informacinių technologijų konkursas „BEBRAS“ [online]. Vilnius: Matematikos ir informatikos insitutas, `http://www.bebras.org`, [cit. 20. 11. 2008].

[2] Neumajer, O.: Sedm mýtů o informatice a ICT ve vzdělávání. [online]. In: *Metodický portál RVP pro základní vzdělávání,* `http://www.rvp.cz/clanek/2747`, [cit. 4. 11. 2008].

[3] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (se změnami provedenými k 1. 9. 2007).* VÚP, Praha, 2007.

[4] Hrušecká, A., Pekárková, A., Tomcsányi, P., Tomcsányiová, M.: Informatický bobor – nová súťaž v informačných technológiách pre žiakov základných a stredných škôl. [online]. In: *Portál Česká škola,* `http://www.ceskaskola.cz/ICTveskole/Ar.asp?ARI=104994&CAI=2129`, [cit. 21. 4. 2008].

Nekonečný proces hledání a počítání planet

Jan Veselý, Hvězdárna a planetárium v Hradci Králové [1]

Abstrakt. *Článek se zabývá „příběhy planet“ – historickými souvislostmi a jejich využitím k motivaci studentů při výuce fyziky, matematiky a jiných přírodovědných oborů. Popisuje vývoj pojmu planeta, hledání matematického řádu v uspořádání planet, objevy nových planet a postupy při jejich hledání. Diskutuje také definici planety sluneční soustavy přijatou 26. Valným shromážděním Mezinárodní astronomické unie v Praze roku 2006.*

Úvod

V době všeobecného společenského odklonu od přírodovědných a technických oborů je důležitá otázka motivace žáků a studentů ke studiu těchto věd. Ve fyzice na střední škole mohou motivační úlohu sehrát astrofyzikální témata, neboť výzkum vesmíru přitahuje pozornost lidí k přírodním vědám nejvíce. V astrofyzice se integrují poznatky fyziky a uplatňují matematické postupy z předchozí výuky na střední škole a demonstrace jejich užití v atraktivním oboru může pomoci motivovat studenty k výběru přírodovědného směru dalšího vzdělávání.

Hvězdárna a planetárium v Hradci Králové zřizovaná Královéhradeckým krajem je instituce na pomezí kultury, školství a cestovního ruchu. Těžištěm činnosti je popularizace astronomie a příbuzných oborů. Naprostou většinu návštěvníků představují žáci základních a středních škol. Následující kapitoly pojednávají o „příbězích planet“, jež jsou součástí výukových pořadů o astronomii pro žáky různých stupňů základního a středoškolského vzdělání. Kombinují historický a fyzikální pohled na vývoj pojmu planeta a slouží jako motivační pasáže mezi fyzikálně zaměřenými částmi programu. Jsou používány samostatně nebo spojovány do větších celků. Dohromady mohou tvořit ucelenou přednášku, která zazní poprvé na této konferenci.

Pojem planeta

Najít fyzikální definici planety se astronomové poprvé pokusili až na počátku 21. století. Ačkoli pojem planeta pochází ze starověku a v průběhu posledních dvou tisíciletí několikrát změnil svůj obsah, žádnou

[1] e-mail: vesely@astrohk.cz

„úředně stanovenou“ definici planety dosud nikdo nepotřeboval. Pojem planety byl tedy intuitivní. Příčinou hledání definice byly nové objevy těles ve sluneční soustavě, jež se svými rozměry blížily tělesům považovaným za planety, a diskuse o tom, je-li vhodné je zařadit mezi planety či nikoli.

Definice planety byla schválena 24. srpna 2006 na 26. Valném shromáždění Mezinárodní astronomické unie v Praze. Stejně jako některé další významné události týkající se pojmu planeta má tedy toto téma vztah k Čechám, což dále zvyšuje jeho motivační potenciál v českém prostředí.

Schválená verze definice planety (text vysázený kurzívou představuje český překlad definice planety) je tedy tato:

Rozhodnutí IAU: Definice planety sluneční soustavy

Současná pozorování mění naše chápání planetárních soustav a je důležité, aby názvosloví odráželo naše současné znalosti. To se zvlášť týká označení „planety“. Slovo „planeta“ původně označovalo tuláky (poutníky), kteří byli známí jen jako světla pohybující se po obloze. Nedávné objevy nás přivedly k vytvoření takové nové definice, kterou můžeme získat na základě dostupných vědeckých informací.

Rozhodnutí 5A

IAU proto rozhoduje, že planety a ostatní tělesa naší sluneční soustavy se budou dělit do tří kategorií následujícím způsobem:

(1) Planeta[2] *je nebeské těleso, které (a) obíhá okolo Slunce, (b) má dostatečnou hmotnost, aby jeho vlastní gravitace překonala vnitřní síly pevného tělesa, takže dosáhne tvaru odpovídajícího hydrostatické rovnováze (přibližně kulatého) a (c) vyčistilo okolí své dráhy.*

(2) „Trpasličí planeta“ je nebeské těleso, které (a) obíhá okolo Slunce, (b) má dostatečnou hmotnost, aby jeho vlastní gravitace překonala vnitřní síly pevného tělesa, takže dosáhne tvaru odpovídajícího hydrostatické rovnováze (přibližně kulatého)[3]*, (c) nevyčistilo okolí své dráhy a (d) není satelitem.*

(3) S výjimkou satelitů by všechny ostatní objekty[4] *obíhající okolo*

[2] Těmito osmi planetami jsou: Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn, Uran a Neptun.

[3] IAU zahájí proces prověření objektů blízko této hranice a jejich zařazení mezi trpasličí planety nebo do jiné kategorie.

[4] Mezi ně v současnosti počítáme většinu asteroidů sluneční soustavy, většinu transneptunických objektů (TNO), komet a další malá tělesa.

Slunce měly být označovány společným termínem „malá tělesa sluneční soustavy".

Z definice planety byla vyčleněna pasáž týkající se Pluta, která, jak se ukázalo, představovala politikum, jež způsobilo, že diskuse byla velmi bouřlivá.

Rozhodnutí IAU: Pluto

Rozhodnutí 6A

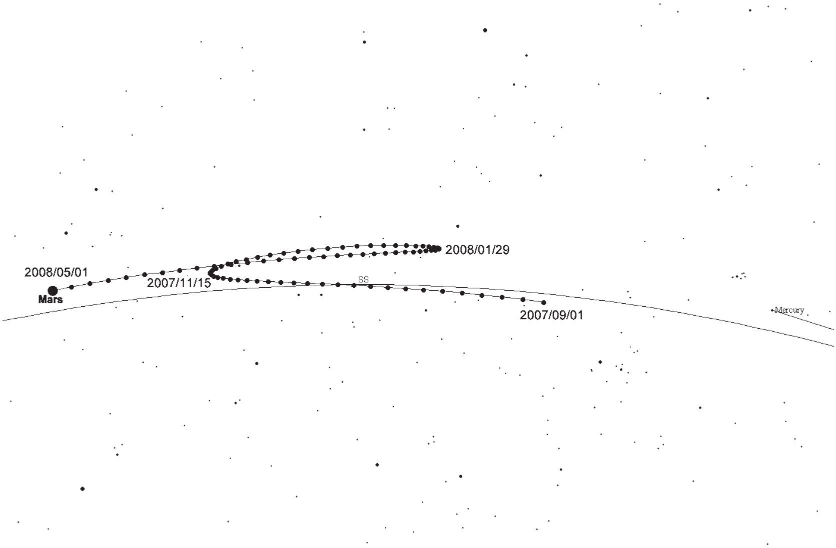
IAU dále rozhoduje: Pluto je dle výše uvedené definice trpasličí planetou a je shledáno prototypem nové kategorie transneptunických objektů.

Na počátku 21. století tedy máme definici planety. Všechny tři podmínky zařazení tělesa mezi planety jsou gravitační. Definici nelze považovat za dokonalou. Například objev tělesa, které je menší než Pluto, ale splňuje podmínku dosažení hydrostatické rovnováhy, jež obíhá tak daleko od Slunce, že v jeho okolí žádná další tělesa dosud neznáme, formálně splňuje všechny podmínky, aby podle definice bylo planetou. Přesto by se jej astronomové mezi planety zařadit zdráhali, protože nepřítomnost dalších těles v jeho okolí je dána nemožností je objevit současnými přístroji a nikoli tím, že diskutované těleso gravitačně vyčistilo své okolí. V následujících příbězích se podíváme, co přijetí definice planety předcházelo.

Příběh první: Bludice

Starověký pojem planeta se vztahoval na nebeské objekty, jež se pohybovaly vůči vzájemně nepohyblivým *stálicím*. V češtině máme dnes již pozapomenutý pojem *bludice*, jiné pokusy o překlad slova planeta zní tulák či poutník. Starověkou představu o geocentrickém uspořádání světa s nehybnou Zemí obklopenou sférami Měsíce, Merkuru, Venuše, Slunce, Marsu, Jupitera, Saturna a stálic (pořadí je dáno rychlostí pohybu objektů po obloze) poněkud narušovalo „kličkování" planet (obr. 1).

Problém uspokojivě vyřešil ve 2. století Ptolemaios zavedením deferentů (hlavní sféra) a epicyklů (pomocná sféra). Jeho práce Mathematike Syntaxis ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \varsigma\acute{\upsilon}\nu\tau\alpha\xi\iota\varsigma$) se zachovala jen v arabském překladu Al-kitabu-I-mijisti a stala se základním astronomickým dílem po návratu do Evropy pod zkomoleným názvem Almagest (obr. 2). Systém deferentů a epicyklů je například pro nouzovou námořní navigaci použitelný dodnes. V geocentrickém systému jsme tedy měli sedm planet, podle nichž bylo pojmenováno sedm dní v týdnu a sedm kovů [1, s. 27 a násl.], [2, s. 20] a díky Ptolemaiovu zdokonalení se udržel až do začátku 17. století.



Obr. 1. Pohyb planety Mars mezi hvězdami na podzim 2007 a na jaře 2008.

Obr. 2. Ilustrace deferentů a epicyklů v arabském překladu Ptolemaiova Almagestu [3].

Příběh druhý: Hudba sfér

V roce 1543 vydaná práce Mikuláše Koperníka De revolutionibus omnium coelestium [4] stála na začátku příběhu, který byl již mnohokrát popsán v literatuře, a proto jej na tomto místě popíšeme jen velmi stručně.

Nové heliocentrické myšlence stály v cestě překážky nejen vědecké, ale také společenské. Zásadním problémem z pohledu křesťanství možná nebylo samo uvedení Země do pohybu, ale rozpor s Biblí, podle níž Bůh stvořil nejprve Zemi a teprve později Slunce a Měsíc ve funkci „osvětlovacích těles“. Z astronomického pohledu představovala největší překážku autorita Tychona Brahe a jeho požadavek, aby se úvahy o uspořádání světa opíraly o pozorování [5]. Těmito argumenty také Brahe odmítl Mysterium Cosmographicum Johanna Keplera [6, s. 341–346], v němž autor hledá a nachází geometrický řád v uspořádání světa vkládáním pravidelných mnohostěnů (platónských těles) mezi sféry planet. Motivační účinek tohoto příběhu znásobuje skutečnost, že se částečně odehrával v Praze na dvoře císaře Rudolfa II. a je opředen legendou o příčině smrti Tychona Brahe, jehož hrobku v Týnském chrámu mohou studenti navštívit. Keplerův spis Astronomia nova vydaný tiskem v roce 1609, v němž opustil představu sfér a našel první dva zákony pohybu planet, znamenal zavedení pojmu planeta v dnešním významu. Podstatná je také odbočka k Platónovu a Pythagorovu učení. Druhého z antických filosofů znají studenti díky větě o pravoúhlém trojúhelníku, ale informace o jeho hledání hudebních poměrů v přírodních dějích se k nim ve škole nedostane. Završení Keplerovy práce v díle Harmonices Mundi (obr. 3), kde spojil dohromady všechny obory kvadrivia (aritmetiku, muziku, geometrii a astronomii) můžeme nazvat moderním pojmem „teorie všeho“, jenž bude studenty jistě oblíben. Příběh lze rozšířit až k Newtonovu gravitačnímu zákonu a využít k motivaci při výkladu o gravitaci.

Příběh třetí: Posloupnost

Zatímco Keplerovo Mysterium cosmographicum hledalo řád v uspořádání světa pomocí geometrie, Johann Titius v 18. století hledal aritmetickou posloupnost vzdáleností planet. Protože význam Titiovy myšlenky odhalil astronomům Johann Bode, známe onu posloupnost pod názvem Titius–Bodeho řada:

$$a = \frac{n+4}{10}, \quad n = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, \ldots, \tag{1}$$

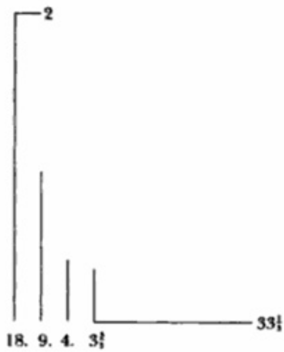
a je velká poloosa eliptické dráhy planety. Jiný tvar Titius–Bodeho řady je:

$$a = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^k, \quad k = -\infty, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

a je opět velká poloosa dráhy planety.

HARMONIC MOTIONS OF THE PLANETS 413

portion of the periodic times, from which the proportion of the orbits is elicited, by Number VIII stated above: then *by taking the mean proportional between one or the other apparent motion and their mean, it turns out that this mean proportional is to the semidiameter*, which has already been revealed, of the *orbit, as is the mean motion to the separation or distance, which is required.* Let the periodic times of two planets be 27 and 8. Then the proportion of the mean daily motion of the former to the latter is as 8 to 27. Hence the semidiameters of the orbits will be as 9 to 4. For the cube root of 27 is 3; that of 8 is 2; and the squares of these roots are 9 and 4. Now let the apparent motion at aphelion of one be 2, and at perihelion of the other 33 and a third. The mean proportionals between the mean motions 8 and 27, and these apparent motions, will be 4 and 30. Therefore, if the mean 4 gives an average distance for the planet of 9, then a mean motion of 8 yields a distance at aphelion of 18, corresponding with an apparent motion of 2. And if the other mean, 30, gives an average distance for the other planet of 4, then its mean motion of 27 gives its distance at perihelion as $3\frac{3}{5}$. Therefore, I say that its distance at aphelion is to its distance at perihelion as 18 to $3\frac{3}{5}$. From that it is evident that the harmonies dictated between the extreme motions of the two, and the periodic times prescribed in each case, entail the extreme and average distances, and so also the eccentricities.[47]



Obr. 3. Keplerovo vysvětlení třetího zákona pohybu planet v anglickém překladu Harmonices mundi [7].

Z Titius–Bodeho řady ve tvaru (2) vychází následující tab. 1, z níž je patrné, že hodnoty vypočtené podle Titius–Bodeho řady jsou ve velmi dobrém souladu s pozorovanými velkými poloosami drah tehdy známých planet (až po Saturn). Velkou mezeru mezi Marsem a Jupiterem, kterou

Johannes Kepler vysvětlil vložením čtyřstěnu mezi sféry těchto planet, zaplňuje v Titius–Bodeho řadě další neznámá případně chybějící planeta.

k	a (T–B) [AU]	těleso	a (skut.) [AU]
$-\infty$	0,4	Merkur	0,39
0	0,7	Venuše	0,72
1	1,0	Země	1,00
2	1,6	Mars	1,52
3	2,8	Ceres	2,77
4	5,2	Jupiter	5,20
5	10,0	Saturn	9,54
6	19,6	Uran	19,20
		Neptun	30,66
7	38,8	Pluto	39,48
		Eris	67,67
8	77,2		
9	154,0		
10	307,6		
		Sedna	525,86

Tab. 1. Vzdálenosti planet plynoucí z Titius–Bodeho řady v porovnání se vzdálenostmi skutečných těles sluneční soustavy. AU (Astronomical Unit) je astronomická jednotka – délka velké poloosy dráhy Země. Ceres, Pluto a Eris jsou trpasličí planety, Sedna patří mezi tzv. rozptýlená tělesa s velkou excentricitou dráhy.

Příběh čtvrtý: Lázně

Hledání oné chybějící planety odstartoval až náhodný objev Uranu. V anglickém městě Bath pracoval učitel hudby William Herschel. Tento příběh se okrajově dotýká našich zemí, tentokrát Moravy. Jeho údajný prapředek jménem Jelínek je zaznamenán v Heršpicích [8, s. 272]. Dne 13. března 1781 Herschel vlastnoručně vyrobeným dalekohledem objevil nové těleso pohybující se mezi stálicemi, které považoval za kometu. Později se ukázalo, že jde o novou planetu sluneční soustavy. Herschelem navrhované pojmenování podle krále Jiřího přineslo objeviteli prospěch v podobě stálého příjmu. William Herschel se stal profesionálním astronomem, začal stavět největší dalekohledy své doby a spolu se sestrou Caroline systematicky katalogizoval nebeské objekty.

V 19. století se ustálilo jméno nové planety Uran. Je prakticky neviditelná pouhým okem (hvězdná velikost 5,8 mag je na samé hranici dosahu lidského oka), byla objevena dalekohledem a přesně zapadala do Titius–Bodeho schématu (tab.1). To naznačilo, že mohou existovat ještě další očima nepozorovatelné planety a posílilo snahy o hledání chybějící planety mezi Marsem a Jupiterem.

Příběh pátý: Palermo

Na konci 18. století se astronomové (Bode, von Zach) snažili objevit planetu, která obíhá mezi Marsem a Jupiterem. Dne 1. ledna 1801 večer (19. století bylo „staré" jen 20 hodin) objevil v podstatě náhodou při práci na systematickém mapování oblohy ředitel observatoře v Palermu Giuseppe Piazzi slabě svítící pohybující se těleso, jehož dráha odpovídala hledané chybějící planetě (tab. 1). Navrhovaný název Ceres Ferdinandea tentokrát nepřinesl objeviteli finanční prospěch a byl později zkrácen na Ceres. Jména navrhovaná jinými astronomy – Hera (von Zach), Juno (Bode) – byla použita až pro další tělesa [9]. Krátce po objevu Cerery se však v Evropě zhoršilo počasí natolik, že nová planeta byla ztracena.

Do příběhu vstupuje Carl Friedrich Gauss, matematická celebrita využívaná učiteli matematiky k motivaci žáků již nejméně půl druhého století. Mezi jeho slavné počiny patří i nalezení metody nejmenších čtverců na zakázku od astronomů, kteří potřebovali extrapolovat polohu ztracené planety z měření poloh na krátkém úseku dráhy. Gaussova metoda byla účinná a proslavila se natolik, že vstoupila i do beletrie. Německý spisovatel Daniel Kehlmann zašel dokonce tak daleko, že popisuje objev metody nejmenších čtverců uprostřed erotické scény Gaussova pokusu o pohlavní styk s novomanželkou. Kniha Vyměřování světa [10] líčí paralelně osudy Carla Friedricha Gausse a Alexandra von Humboldta. Oba přírodovědci jsou zobrazeni jako individua nepoužitelná v normálním životě, což posiluje ještě zmatený až naprosto nesmyslný popis přírodovědných experimentů, jimž autor (či překladatel) zřejmě nerozumí. Kniha se, bohužel, stala nejen v Německu bestsellerem a její četba bude mít na potenciální studenty přírodních věd spíše demotivující účinek.

V následujících letech byly mezi Marsem a Jupiterem objeveny ještě další tři planety – Pallas (1802, Olbers), Juno (1804, Harding), Vesta (1807, Olbers). Další hledání již bylo neúspěšné, a to zřejmě proto, že se astronomové soustředili jen na oblast, v níž byla první čtyři tělesa objevena, a současně nebyly k dispozici dostatečně spolehlivé a podrobné mapy oblohy. Počet planet se tedy na téměř čtyřicet let ustálil na čísle 11 (Merkur, Venuše, Země, Mars, Ceres, Pallas, Juno, Vesta, Jupiter, Saturn, Uran).

V polovině 19. století začaly přibývat objevy dalších planet mezi Marsem a Jupiterem rychlým tempem – Astraea (1845, Hencke), Hebe (1847, Hencke), Iris (1847, Hind), Flora (1847, Hind), Metis (1848, Graham), Hygiea (1849, de Gasparis)... Astronomové začali tato slabě svítící, a tudíž, jak správně předpokládali, malá tělesa označovat jako planetky (minor planets, kleine planeten). Kromě tohoto pojmu se ujal ještě název asteroidy prosazovaný Williamem Herschelem. Johann Encke je v Berliner Astronomisches Jahrbuch pro rok 1854 začal číslovat. Dnes je očíslováno více než 200 000 planetek [11] a seznam se rozrůstá o desítky tisíc očíslovaných planetek ročně.

Příběh šestý: Vypočtená planeta

Podstatnou roli při škrtání v seznamu planet v polovině 19. století sehrál objev Neptunu, jehož poloha byla nejprve vypočtena na základě odchylek v pohybu Uranu od předpokládané dráhy, jejichž příčinou měla být gravitační přitažlivost neznámé planety za Uranem. V literatuře tradované nezávislé vypočtení polohy Neptunu Johnem Adamsem a Urbainem Le Verierrem bylo věrohodně zpochybněno nedávnou historickou studií. Motivační účinek tohoto příběhu posilují soutěžní a téměř špionážní prvky, které se v něm objevují. Angličan John Adams postupnými iteracemi vypočetl elementy dráhy nové planety už v srpnu 1845, ale nepopsal astronomům polohu tělesa dost přesně. Na žádost o upřesnění Adams reagoval tak, že začal koncipovat odpověď, ale nikdy ji neodeslal, takže k pokusu o nalezení planety sice došlo, ale bez výsledku. O rok později francouzský matematik Le Verrier vypočetl polohu nové planety nezávisle na Adamsovi a prvním pokusem Johann Galle a Heinrich d'Arrest dalekohledem observatoře v Berlíně 23. 9. 1846 novou planetu našli. K jejich úspěchu významně přispěla tehdy nová mapa té části oblohy, na níž se planeta podle Le Verrierova výpočtu měla nacházet. Britové objevili Neptun o pět dní později (28. 9. 1846) podle nového Adamsova výpočtu. Spor mezi Francouzi a Brity o prvenství byl urovnán obviněním britských astronomů z liknavosti při hledání planety a mezinárodní remízou, jejímž výsledkem bylo tvrzení o nezávislém současném vypočtení

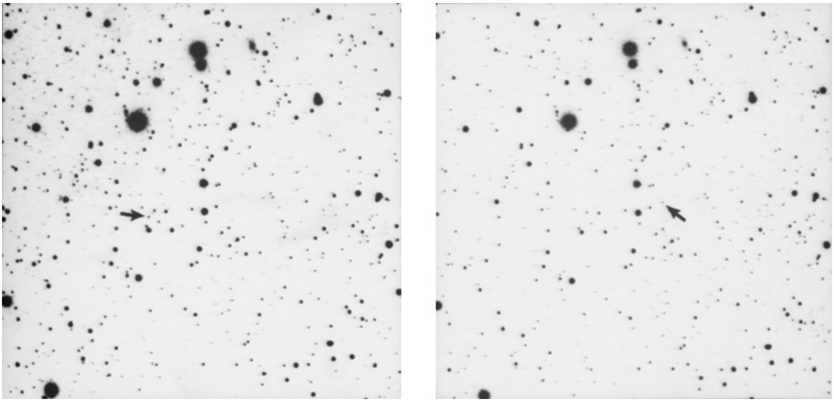
Neptunu. Historici však v dokumentární pozůstalosti Johna Adamse našli důkaz, že nový výpočet v roce 1846 provedl podle Le Verrierových elementů dráhy planety, protože své záznamy z předchozího roku ztratil. Dokumenty byly dokonce ve dvacátém století odcizeny z archivu Grenwichské observatoře, protože autor připravující knihu o historii hvězdárny narazil na „kompromitující“ fakta a rozhodl se materiály nevrátit. Teprve po jeho smrti byly všechny dokumenty objeveny v jižní Americe a vráceny do Británie. V roce 2004 zveřejnili Sheenan, Kollerstorm, a Waff tato zjištění v časopise Scientific American [12].

Příběh sedmý: Na ztracené vartě

Při výpočtu polohy nové planety ji oba matematici podle Titius–Bodeho řady (tab. 1) umístili do vzdálenosti 40 AU, skutečná vzdálenost Neptunu je však 30 AU. Nelze tvrdit, že oba výpočty byly špatné, bylo však zřejmé, že použitá metoda vedla k výsledku nezávisle na vzdálenosti planety od Slunce. To bylo také podstatou oné žádosti o upřesnění, na kterou Adams v roce 1845 neodpověděl. Protože astronomové dospěli k závěru, že za Neptunem musí být ještě jedna planeta, snažili se od konce 19. století o nové výpočty, jež nevedly k úspěchu. Uspěl až Clyde Tombaugh v únoru 1930, když na fotografických deskách z ledna téhož roku objevil nový objekt s velkou poloosou dráhy odpovídající Titius–Bodeho řadě.

Tento veskrze americký příběh začíná u Percivala Lowella, bohatého astronoma, který založil u Flagstaffu v Arizoně soukromou hvězdárnu s cílem dokázat, že kanály na Marsu budují marťané. Pokračuje hledáním náhradního pozorovacího programu po zjištění, že kanály na Marsu neexistují, a zaměstnáním pozorovatele Clyda Tombaugha, který teprve po objevu nové planety (obr. 4) dosáhl středního a vysokoškolského vzdělání, což bylo komplikováno také tím, že ředitelé škol se obávali situace, kdy ve třídě mezi patnáctiletými dětmi sedí dospělý muž, o němž se píše v učebnicích jako o objeviteli nové planety.

Do příběhu patří i veřejná soutěž na pojmenování nové planety, v níž zvítězil návrh tehdy jedenáctileté britské školačky Venetie Burneyové, aby se planeta jmenovala Pluto. Jméno bylo přijato jako nejvhodnější nejen proto, že dodržuje systém pojmenování planet podle antických bohů, ale také proto, že první dvě litery názvu jsou iniciálami jména Percivala Lowella. Zdomácnění názvu završili hollywoodští filmaři pojmenováním kreslené postavičky psa podle nové planety.

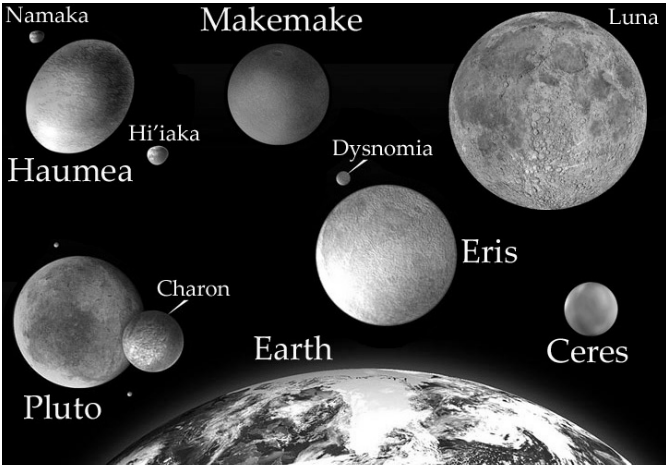


Obr. 4. Fotografické desky z 23. a 29. ledna 1930, na nichž Clyde Tombaugh objevil Pluto (označen šipkou).

V této atmosféře zcela zanikl fakt, že Pluto je mnohem slabší, a tedy menší těleso, než astronomové očekávali a potřebovali k vysvětlení odchylek v pohybu Uranu a Neptunu, že jeho dráha je velmi excentrická, skloněná k rovině ekliptiky a kříží dráhu Neptunu. Ještě než se ukázalo, že zbývající odchylky v pohybu planet zřejmě neexistují a jsou dány jen chybami měření, byl v roce 1978 objeven satelit Pluta Charon. Teprve téměř šedesát let po objevu Pluta se podařilo zjistit, že průměry obou těles jsou řádově srovnatelné (2 300 km, resp. 1 200 km) a hmotnost obou těles společně dosahuje pouhé pětiny hmotnosti našeho Měsíce.

V roce 1992 bylo za Neptunem objeveno další těleso [13] a vzápětí začaly objevy objektů v mrazivé pustině (název tohoto příběhu inspiroval obraz zmrzlé krajiny na obraze Na ztracené vartě Jakuba Schikanedera) tzv. Kuiperova pásu, teoreticky předpovězeného v polovině 20. století, rychle přibývat. Jde pravděpodobně o zmrzlá ledová tělesa příbuzná planetkám a kometám. Některá z transneptunických těles byla mediálně diskutována jako kandidáti na zařazení mezi planety – Varuna (2000), Quaoar (2002), Sedna (2003).

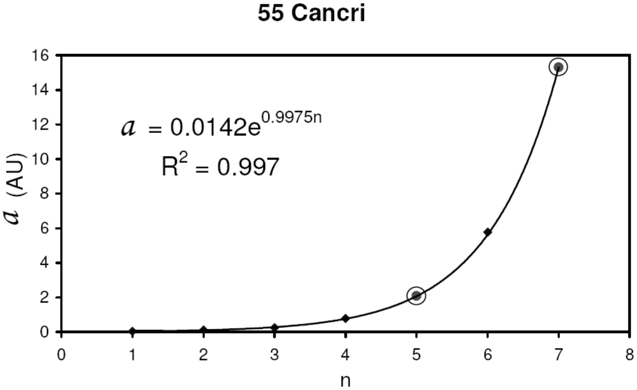
Objev tří těles, z nichž jedno velikostí Pluta překonalo, donutil v roce 2005 Mezinárodní astronomickou unii k ustavení pracovní skupiny, která měla za úkol najít definici planety. Zbytek tohoto příběhu už byl popsán v úvodu: Na 26. Valném shromáždění Mezinárodní astronomické unie v Praze byla po bouřlivé diskusi přijata definice planety sluneční soustavy a zavedena nová kategorie trpasličích planet, do níž jsou zařazovány planetky, které mají dostatečnou hmotnost, aby svou vlastní gravitací dosáhly tvaru odpovídajícího hydrostatické rovnováze (přibližně kulatého). Na seznamu trpasličích planet je nyní pět těles: (1) Ceres, (134 340) Pluto, (136 108) Haumea, (136 199) Eris a (136 472) Makemake. V závorkách před jmény jsou čísla těles na seznamu planetek [11]. U dalších přibližně dvaceti kandidátů bude o jejich zařazení mezi trpasličí planety teprve rozhodnuto (obr. 5).



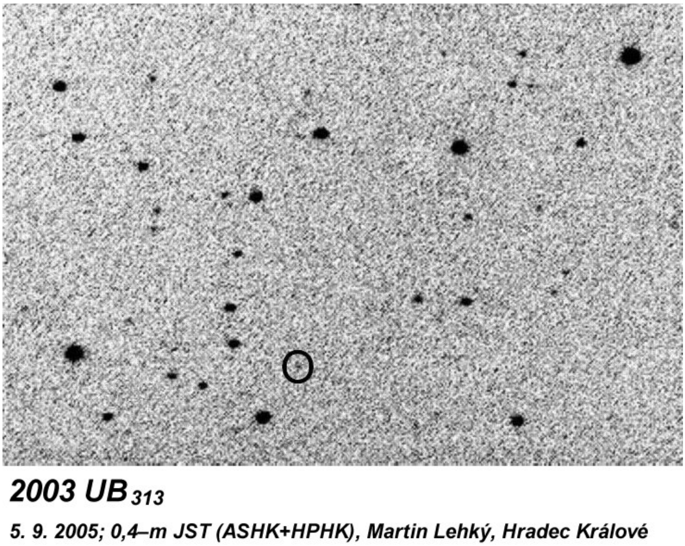
Obr. 5. Porovnání velikosti trpasličích planet Ceres, Pluto, Haumea, Eris a Makemake se Zemí. Vzdálenosti zobrazených satelitů uvedených těles nejsou ve správném měřítku.

Ponaučení (místo závěru)

Vyplývá z uvedených sedmi příběhů nějaké ponaučení? Astromové jsou zřejmě neponaučitelní. V roce 1994 se Michelu Mayorovi a Didieru Quelozovi podařil objev planety obíhající hvězdu 51 Pegasi, tedy planety mimo sluneční soustavu. V roce 2007 byly planety obíhající okolo hvězdy HR8799 (opět v souhvězdí Pegasa) přímo vyfotografovány. Na konci dubna 2009 jsme znali 344 těchto tzv. exoplanet obíhajících okolo 291 hvězdy; na konci října téhož roku už 403 planet u 340 hvězd. Z toho plyne, že u některých hvězd známe celé planetární soustavy. Nejpočetnější dosud známá soustava obíhá okolo hvězdy 55 Cancri (souhvězdí Raka), kde známe 5 planet. Přestože ze sluneční soustavy víme, že aritmetické posloupnosti typu Titius–Bodeho řady odpovídají vzdálenosti jen některých planet, pokusili se mexičtí astronomové najít posloupnost pro planety soustavy 55 Cancri a předpovídají existenci dalších dvou planet (obr. 6).



Obr. 6. Posloupnost vzdáleností v planetární soustavě 55 Cancri a předpověď existence dvou dalších planet [14].



Obr. 7. Největší známé těleso za Neptunem – trpasličí planeta (136 199) Eris (v kroužku) na snímku pořízeném zrcadlovým dalekohledem o průměru 40 cm na hvězdárně v Hradci Králové. Autorem snímku je Martin Lehký z Astronomické společnosti v Hradci Králové.

Nové kosmické teleskopy (Herschel; start 16. 5. 2009) a specializované družice (Kepler; start 6. 3. 2009) slibují objevy nových exoplanet včetně těch podobných Zemi, jež zatím současným přístrojům unikají. Bez ohledu na to, že prestižní časopisy s vysokým impaktovým faktorem práce založené na předpovídání planet pomocí aritmetických posloupností odmítají, mohou být takové úlohy využity v práci s nadanými studenty jako zajímavé matematické cvičení.

Literatura

[1] Malíšek, V.: *Co víte o dějinách fyziky.* Horizont, Praha, 1986.

[2] Štoll, I.: Svět očima fyziky. Prometheus, Praha, 1996.

[3] Academie Strasbourg: *m@ths et tiques* (Ptolemaios) [online] `www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=671&IDD=0` [cit. 2007-08-30].

[4] Koperník, M.: *Nicolai Copernici Torinensis de revolutionibus orbium coelestium.* Sumptibus Pragopress, Praha, 1971.

[5] *tychobrahe.com* [online] `http://www.tychobrahe.com` [cit. 2007-08-31].

[6] Grygar, J., Horský, Z., Mayer, P.: *Vesmír.* Mladá fronta, Praha, 1979.

[7] Kepler, J., transl. Duncan, A. M. et al.: *The Harmony of the World.*

[8] Jáchim, F.: *Jak viděli vesmír.* Rubico, Olomouc, 2003.

[9] Fodera S. G., Manara, A., Sicoli, P.: Giuseppe Piazzi and the Discovery of Ceres. In: Bottke, W. F., Jr., Cellino, A., Paolicchi, P., Binzel, R. P.: *Asteroids III.* [online] University of Arizona Press, Tucson, Arizona, `http://www.lpi.usra.edu/books/AsteroidsIII/pdf/3027.pdf`, s. 17–24, [cit. 2009-04-15].

[10] Kehlmann, D.: *Vyměřování světa.* Vakát, Praha, 2007.

[11] Small-Body Orbital Elements, NASA, JPL [online] `http://ssd.jpl.nasa.gov/?sb_elem` [cit 2009-04-15].

[12] Sheenan, W., Kollerstorm, N., Waff, C.B.: *The Case of Pilfered Planet.* Scientific American.com, 2004.

[13] Jewitt, D., Luu, J.: 1992 QB1 – First Object Discovered in Kuiper Belt [online] `http://www.ifa.hawaii.edu/faculty/jewitt/kb/qb1.html` [cit. 2009-04-15].

[14] Poveda, A., Lara, P.: The Exo-planetary System of 55 Cancri and the Titius–Bode Law. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* **44** (2008), s. 243–246.

Mezinárodní soutěžní úspěchy českých studentů ve fyzice

Bohumil Vybíral, PdF, Univerzita Hradec Králové[1]

Abstrakt. *Článek pojednává o mezinárodních fyzikálních soutěžích, zejména o Mezinárodní fyzikální olympiádě (MFO). Krátce se zmiňuje o její čtyřicetileté historii, na jejímž začátku stál český profesor Rostislav Košťál. Soustřeďuje se na úspěchy českých studentů od roku 1993, tedy od vzniku České republiky. Na MFO nás od té doby reprezentovalo 80 soutěžících, z nichž 9 získalo zlatou, 14 stříbrnou a 25 bronzovou medaili a 26 dostalo čestná uznání. Ocenění tedy získalo 74 studentů a úspěšnost české reprezentace byla velmi velká, neboť se dá vyčíslit na 92,5 %. V závěru je hodnoceno zapojení českých studentů do Fyzikální olympiády také na národní úrovni, které je co do kvantity stále menší, i když ve světovém srovnání čeští studenti dosahují velmi dobrých úspěchů. Jsou analyzovány příčiny tohoto stavu.*

Přehled mezinárodních fyzikálních soutěží

Čeští středoškolští studenti se dlouhodobě úspěšně zúčastňují čtyř mezinárodních soutěží s fyzikálním zaměřením. Jsou to:

- International Physics Olympiad (IPhO), neboli Mezinárodní fyzikální olympiáda (MFO). Soutěže se může zúčastnit maximálně 5 jednotlivců z každého státu. Soutěžící samostatně (a bez literatury) řeší 3 teoretické a 2 experimentální problémy, které jsou jim zadány v mateřském jazyce. Soutěž má 40letou tradici.
- Young Physicits' Tournament (YPT), neboli Turnaj mladých fyziků. Účastní se jí pětičlenná družstva zastupující střední školy. Jde o kolektivní soutěž družstva k řešení náročných problémů v anglickém jazyce. V roce 2009 probíhá její 22. ročník.
- First Step to Nobel Prize in Physics, neboli První krok k Nobelově ceně ve fyzice. Soutěže se zúčastňují jednotlivci, nejlepší se účastní republikové přehlídky středoškolské odborné činnosti (SOČ) ve fyzice. Účastník předkládá svou práci na zvolené téma vlastní výzkumné činnosti ve formě zprávy v angličtině. Soutěž First Step to Nobel Prize in Physics od svého vzniku v roce 1993 každoročně pořádá Institut fyziky Polské akademie věd ve Varšavě.

[1] e-mail: bohumil.vybiral@uhk.cz

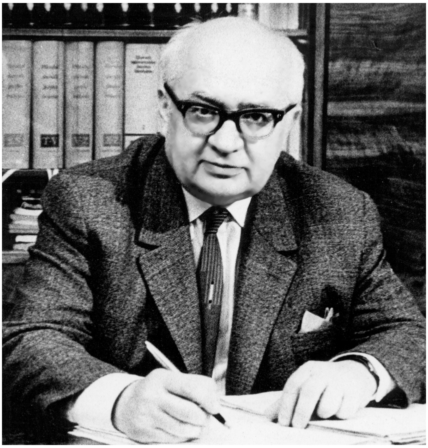
- European Union of Science Olympiad (EUSO). Je to soutěž tříčlenných družstev studentů mladšího věku (15–16 let) postavená na bázi integrovaného výukového předmětu Science (zahrnuje fyziku, chemii a biologii). Tato evropská soutěž byla zahájena v roce 2003 v Irské republice a čeští zástupci se ji zúčastňují od roku 2005.

V článku se zaměřím na Mezinárodní fyzikální olympiádu. Důvodem je to, že jde o nejstarší soutěž (letos proběhne její 40. ročník), zcela samostatnou soutěž jednotlivců (lze snadněji porovnávat úspěšnost), a že s touto soutěží mám vlastní zkušenosti – byl jsem roku 1967 u jejího založení, podílel se na přípravě československých (resp. od roku 1993 českých) soutěžících pro všech 39 ročníků a zúčastnil jsem se 19 ročníků MFO.

Přínos České republiky ke vzniku a rozvoji MFO

Nejprve několik slov k historii Mezinárodní fyzikální olympiády. Má kořeny u nás, v české části někdejšího Československa (ČSSR), neboť vznikla z podnětu prof. RNDr. Rostislava Košťála (profesora fyziky na VUT v Brně a na Vysoké vojenské škole ve Vyškově) (obr. 1). Ten se roku 1966 stal předsedou ústředního výboru Fyzikální olympiády (ÚVFO) a krátce poté (hned roku 1966) jménem ÚVFO oslovil prof. dr. Czeslava Ścislowského z Polska a prof. dr. Rezsö Kunfálviho z Maďarska s výzvou založit mezinárodní fyzikální soutěž (po vzoru matematiky). Vypracovali návrh statutu Mezinárodní fyzikální olympiády a s vládními orgány Polska se dohodli, že 1. MFO bude uspořádaná již roku 1967 ve Varšavě. Zúčastnilo se jí jen pět trojčlenných družstev. Následovala 2. MFO, která se konala roku 1968 v Budapešti. Na ČSSR připadl politicky nejméně vhodný termín – rok 1969; 3. MFO ale nakonec hladce proběhla v Brně. Zásluhu na tom má především profesor Košťál, který pro její průběh připravil vhodné podmínky. Zde také předložil ke schválení návrh nového Statutu MFO (podle něj již brněnská olympiáda zkušebně probíhala v pětičlenných týmech, účastnilo se tehdy 8 států). Jubilejní 10. MFO byla opět v ČSSR, konala se roku 1977 a její organizace byla svěřena samostatné Pedagogické fakultě v Hradci Králové. Tehdy hlavní organizační tíha připadla na současného předsedu ÚKFO prof. Ivo Volfa. Brzy se k pořádajícím východoevropským zemím připojily i státy západní Evropy – Francie (1972), Spolková republika Německo (1974), Švédsko (1976) a později i státy mimoevropské. Dnes se této již celosvětové soutěže zúčastňují řešitelé ze všech pěti kontinentů. Např. 39. MFO se roku

2008 konala ve Vietnamu za účasti 376 studentů z 81 států a teritorií. V současné době se v Mexiku (Mérida, oblast Yucatán) připravuje na červenec 2009 jubilejní 40. ročník MFO.

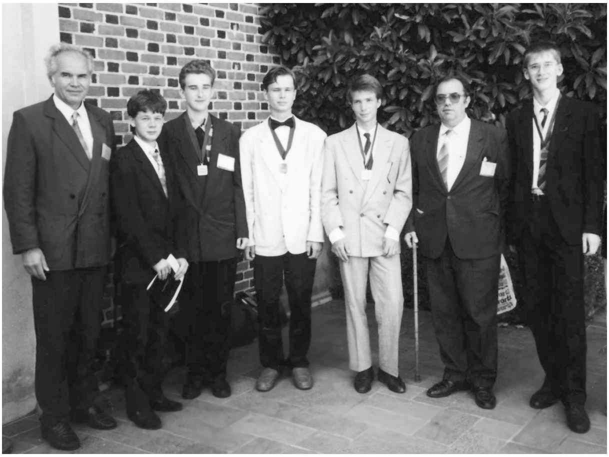


Obr. 1. Prof. RNDr. Rostislav Košťál (1905–1980), profesor VUT v Brně a Vysoké vojenské školy ve Vyškově, spoluzakladatel MFO.

Úspěchy českých studentů na MFO

Od roku 1993 se MFO za Českou republiku zúčastnilo celkem 80 soutěžících. Členové českého družstva dosahují na MFO dobrých úspěchů, někdy i vynikajících. Např. hned na první ryze české reprezentaci (USA, 1993) získali čeští soutěžící dvě zlaté a dvě stříbrné medaile a jedno čestné uznání. Na 38. MFO (Írán, 2007) byl český úspěch ještě výraznější, když naši studenti získali dvě zlaté, jednu stříbrnou a dvě bronzové medaile. Podobně na 39. MFO (Vietnam, 2008) byli čeští soutěžící velmi úspěšní: dvě zlaté a jedna stříbrná medaile, dvě čestná uznání. Na obou těchto posledních soutěžích se Češi v neoficiálním hodnocení účasti jednotlivých států dosaženými výsledky umístili na prvním místě v rámci 25 soutěžících států Evropské unie. Za dobu existence České republiky čeští studenti v souhrnu dosáhli vynikajícího úspěchu ziskem 9 zlatých, 14 stříbrných a 25 bronzových medailí; 26 dalších soutěžících získalo čestné uznání, tedy v souhrnu dovezli 74 ocenění. Úspěšnost 80 členů českých družstev na MFO se tak dá vyčíslit jako 92,5%. Je to úspěšnost např. u našich sportovců naprosto nevídaná a přesto o ní ví tak málo lidí

– je opět zřejmé, jaké hodnoty média upřednostňují. Nejúspěšnější česká reprezentace byla na MFO v USA, Íránu a ve Vietnamu (obr. 2–4).



Obr. 2. Úspěšné české družstvo na MFO v USA roku 1993. Zprava: Martin Beneš (zlatá medaile), prof. I. Volf, vedoucí delegace, Tomáš Kočka (zlatá medaile), Jiří Vaníček (stříbrná medaile), Jaromír Fiurášek (stříbrná medaile), Daniel Průša (čestné uznání), prof. B. Vybíral, pedagogický vedoucí.

Obr. 3. Úspěšné české družstvo na MFO v Íránu roku 2007. Zleva: RNDr. Jan Kříž, pedagogický vedoucí, Marek Scholle (bronzová medaile), Pavel Motloch (zlatá medaile), Jakub Benda (stříbrná medaile), íránský průvodce, Dalimil Mazáč (zlatá medaile), Jakub Ledvina (bronzová medaile), prof. B. Vybíral, vedoucí delegace.

Obr. 4. Úspěšné české družstvo na MFO ve Vietnamu roku 2008. Zleva: RNDr. Jan Kříž, pedagogický vedoucí, Jakub Marian (bronzová medaile), Dalimil Mazáč (zlatá medaile), vietnamská průvodkyně, Jan Hermann (zlatá medaile), Marek Nečada (bronzová medaile), Jakub Ledvina (stříbrná medaile), prof. B. Vybíral, vedoucí delegace.

Přehled českých úspěchů je v následujících dvou tabulkách.

Rok	Místo konání	Soutěžící	Střední škola
1993	USA, Virginia	Tomáš Kočka	G. Praha
		Martin Beneš	G. Bílovec
1997	Kanada	Tomáš Brauner	G. Moravský Krumlov
1999	Itálie	Jan Houštěk	G. Pelhřimov
2004	Korejská rep.	Matouš Ringel	G. Broumov
2007	Írán	Pavel Motloch	G. Frýdek-Místek
		Dalibor Mazáč	G. J. Keplera, Praha
2008	Vietnam	Jan Hermann	G. Český Krumlov
		Dalibor Mazáč	G. J. Keplera, Praha

Tab. 1. Čeští nositelé zlatých medailí na MFO.

V absolutním světovém neoficiálním hodnocení bývá česká reprezentace v první čtvrtině zúčastněných států. Na předních místech absolutního pořadí se zpravidla umísťují reprezentanti asijských států (zejména Číny, Koreje, Tchaiwanu, Íránu, Vietnamu), avšak také USA a Ruska.

MFO	Rok	Pořádající stát (Místo konání)	Počet států	G	S	B	HM	Úspěšnost
XXIV.	1993	USA, Virginia (Williamsburg)	42	2	2	0	1	100 %
XXV.	1994	Čínská lid. rep. (Peking)	47	0	0	1	2	60 %
XXVI.	1995	Austrálie (Canberra)	51	0	0	3	2	100 %
XXVII.	1996	Norsko (Oslo)	55	0	1	2	2	100 %
XXVIII.	1997	Kanada (Sudbury)	56	1	2	0	2	100 %
XXIX.	1998	Island (Reykjavik)	56	0	0	3	0	60 %
XXX.	1999	Itálie (Padova)	62	1	2	1	1	100 %
XXXI.	2000	Velká Británie (Leicester)	63	0	1	1	1	60 %
XXXII.	2001	Turecko (Antalya)	65	0	1	4	0	100 %
XXXIII.	2002	Indonésie (ostrov Bali)	67	0	0	2	3	100 %
XXXIV.	2003	Čínská rep. (Tchaj-pei)	54	0	1	2	2	100 %
XXXV.	2004	Korejská rep. (Pohnang)	71	1	0	1	3	100 %
XXXVI.	2005	Španělsko (Salamanca)	72	0	1	0	4	100 %
XXXVII.	2006	Singapur	83	0	1	3	1	100 %
XXXVIII.	2007	Írán (Isfahán)	73	2	1	2	0	100 %
XXXIX.	2008	Vietnam (Hanoj)	81	2	1	0	2	100 %
Celkem za dobu existence ČR				9	14	25	26	92,5 %

Vysvětlivky: G – zlatá medaile, S – stříbrná medaile, B – bronzová medaile, HM – čestné uznání (Honorary mention)

Tab. 2. Úspěchy českých studentů na MFO.

Hodnocení zapojení českých studentů do fyzikálních soutěží

Český student (a obecně český člověk vůbec) má velký rozumový potenciál (je to zřejmě mj. dáno dlouholetou a stále ještě dobrou úrovní českého školství, které má výborné kořeny již z dávných dob císařovny Marie Terezie). O tom mj. hovoří i výše uvedené velmi dobré dlouhodobé výsledky české reprezentace na MFO. A nejen na této fyzikální soutěži. Např. před krátkou dobou (začátkem dubna 2009) se konala evropská přírodovědná soutěž EUSO, na níž soutěžilo 40 tříčlenných družstev z Evropy. Českou republiku reprezentovala dvě družstva, přičemž jedno bylo absolutně první a druhé celkově osmé. Jde tedy „jen" o to rozumový potenciál českého studenta odhalit a poté talent rozvíjet žádoucím směrem – správně a účelně studenta motivovat ke studiu přírodních věd a rozvíjet u něj schopnost tvůrčím způsobem myslet a tvořit. Toto je mimo jiné také cílem soutěží, jakou je Matematická olympiáda, Fyzikální olympiáda a další přírodovědné soutěže. Ukazuje se však, že toto úsilí je v současné době málo efektivní, protože podchycuje stále méně středoškolských studentů a žáků základních škol.

Výše uvedené vynikající soutěžní výsledky totiž dosáhla jen velmi úzká špička českých studentů. Zájem o soutěžení ve Fyzikální olympiádě (podobně i v MO) bohužel soustavně klesá. Svědčí o tom počty soutěžících. Např. ve 29. ročníku FO (1987/88) v české části ČSSR soutěžilo 7 246 středoškoláků. Po změně politických poměrů v roce 1990 se začaly měnit i priority našeho obyvatelstva k různým společenským hodnotám a to se také projevilo v přístupu studentů k soutěžení ve FO. Dnes přesné statistiky bohužel již nevedeme, avšak soutěžících je určitě o celý řád méně. Tímto přístupem veřejnosti (avšak i škol) ztrácejí nejen schopní mladí lidé, avšak ve svém důsledku také celá společnost. Vždyť mezi bývalými úspěšnými fyzikálními olympioniky je řada dnes velmi úspěšných fyziků, např. prof. RNDr. Mojmír Šob, DrSc., člen Vědecké rady AV ČR, prof. RNDr. Jana Musilová-Štěpánková, CSc., prorektorka MU, prof. RNDr. Petr Dub, CSc., emeritní prorektor VUT, prof. RNDr. Bohumila Lenzová-Vlachová, CSc. aj. (růst dalších olympioniků jsme bohužel soustavně nesledovali, i když některé údaje lze najít na stránkách FO: `http://fo.cuni.cz`).

Obecně také dlouhodobě všeobecně klesá zájem středoškolských studentů o následné studium přírodních věd, zejména matematiky a fyziky. Lze to jednoduše dokumentovat např. na počtu studentů studujících učitelství fyziky u nás na Pedagogické fakultě v Hradci Králové. Před

25 lety to bylo 80 studentů v ročníku a nyní je jich jen 8, avšak málo kvalitních (toto studium jich dokončuje zpravidla jen polovina). Tento stav bude bezpochyby mít všeobecně neblahé důsledky do budoucna, protože dnešní malý zájem mládeže o tyto obory budou velmi obtížně oživovat budoucí odborní učitelé matematiky, fyziky a jiných přírodovědných předmětů, protože nebudou na dostatečné úrovni anebo prostě nebudou vůbec (učit začnou neaprobovaní). Jak tento velký společenský problém co nejúčinněji řešit?

Je třeba především účelně zvyšovat motivaci pro tato studia. Osobně jsem se snažil společensky i ekonomicky zvýšit motivaci českých reprezentantů k účasti v přírodovědných olympiádách a roku 2000 jsem inicioval u *Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji* zavedení ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ pro úspěšné reprezentanty na světových olympiádách z fyziky, chemie, biologie, matematiky a informatiky. Cena se uděluje od roku 2001 a dosud ji získalo již 151 studentů v celkové výši 3 miliony Kč (v loňském roce 2008 bylo toto oceňování přerušeno, protože se soudně řešily dědické záležitosti po smrti donátora; předpokládá se, že ceny za rok 2008 budou zpětně uděleny letos). Efekt těchto cen je pro tuto úzkou špičku talentů sice značný, avšak všeobecně se tato aktivita na celkovém zvýšení zájmu o přírodní vědy nemůže výrazně projevit. Musí se změnit postoj celé společnosti k výchově a vzdělávání dětí a mládeže. Bude žádoucí je účelně a účinně motivovat pro studia přírodních a technických věd. Přitom je třeba začít již v rodině, v mateřských školách a na prvním stupni základní školy – vést děti k objevování tajů přírody, vysvětlovat jim podstatu jednoduchých věcí (začít od hraček) a upozorňovat je na využití jevů v technických aplikacích; prostě je učit tvůrčímu myšlení. Ty starší je třeba nejen vést k invenci, ale motivovat je i ekonomicky – aby měli jistotu, že společnost jejich podíl na vědecko-technickém rozvoji dokáže také patřičně ocenit. To je dlouhá cesta a zapracovat musí nejen učitelé a rodiče, ale především také politici. Jinak postupně dojde k degeneraci tvůrčích schopností naší společnosti a pokrok v technických a přírodních vědách bude záviset jen např. na imigrantech z Asie.

Literatura

[1] Gorzkowski, W.: *International Physics Competentions.* Instytut Fizyki PAN, Warszawa, 1999.

[2] Kluvanec, D., Zelenický, L., Hašková, A.: *30 rokov Fyzikálnej olympiády v ČSSR.* ÚVFO, Nitra, 1989.

[3] Kluvanec, D., Volf, I.: *Mezinárodní fyzikální olympiády.* MAFY, Hradec Králové, 1993.

[4] Kluvanec, D., Volf, I.: *Čtyřicet let Fyzikální olympiády.* `http://sf.zcu.cz/rocnik06/cislo04/40fo.html`.

[5] Kříž, J., Volf, I., Vybíral, B.: Hanoj 2008: 2 zlaté, 1 stříbrná a 2 čestná uznání. *Rozhledy matematicko–fyzikální* **83** 4 (2008), 53–56.

[6] Kříž, J., Volf, I., Vybíral, B.: Úspěch českého týmu na Mezinárodní fyzikální olympiádě v Hanoji. *Československý časopis pro fyziku* **58** 5 (2008), 295–296.

[7] Ročenka *Fyzikální olympiády.* SPN, Praha, 1962–1993 (29 svazků).

[8] Vybíral, B.: *PRÆMIUM BOHEMIÆ 2001–2007.* Nadace B. J. Horáčka Českému ráji, Turnov, 2001–2007 (almanachy).

[9] Vybíral, B.: Ohlédnutí za padesáti léty Fyzikální olympiády. In: *III. ročník mezinárodní konference Nové metody propagace přírodních věd mezi mládeží aneb Věda je zábava; Science is fun.* Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2008, 10–14.

[10] `www.uhk.cz/fo` a `http://fo.cuni.cz`.

Matematické pojmy, úvahy a výpočty v hodinách středoškolské biologie
aneb
proč by měl být nadaný biolog také talentovaným matematikem

Michal Hruška, První soukromé jazykové gymnázium Hradec Králové a Univerzita Hradec Králové [1]

Abstrakt. *V příspěvku jsou uvedeny konkrétní vazby mezi matematikou a biologií, které mohou sloužit jako náměty pro rozvíjení aktivity žáků středních, ale i základních škol – nejen v hodinách matematiky a biologie. Na konkrétních příkladech je poukázáno na celou řadu možností vytváření mezioborových a mezipředmětových asociací, včetně asociací mezi učivem různých ročníků téhož předmětu. Autor neudává uzavřená řešení předložených úloh, naopak předpokládá, že čtenáři z řad aktivních učitelů, popř. žáci a studenti vyhledají a doplní další postupy – sestaví obdobné úlohy atp. Hlavním cílem a také přínosem podobných úloh je podle názoru autora vyšší aktivita a zájem žáků, výraznější schopnost chápání významu (důležitosti) sdělovaných informací, snižování pojmové náročnosti a nakonec schopnost vyvozování a nacházení vlastních – i netradičních – postupů a metod (nejen při řešení neznámých či méně známých úloh) jak samotnými žáky, tak i jejich učiteli.*

Motto:

Jestliže chceme rozkládat současnou úroveň znalostí o vesmíru kolem nás a v nás, izolujíce ji na jednotlivé předměty a obory, pak je to jenom proto, abychom žákům a studentům zpočátku usnadnili porozumění a pochopení dané jeho části a nikoli proto, abychom předměty a obory chápali izolovaně. Ve skutečnosti, kdykoli chceme přiřadit informaci její správnou hodnotu a pravý význam, vždy ji musíme posuzovat ve vztahu k celku a odvozovat konečné závěry pouze se zřetelem na uplatnění jevu v rámci tohoto celku.

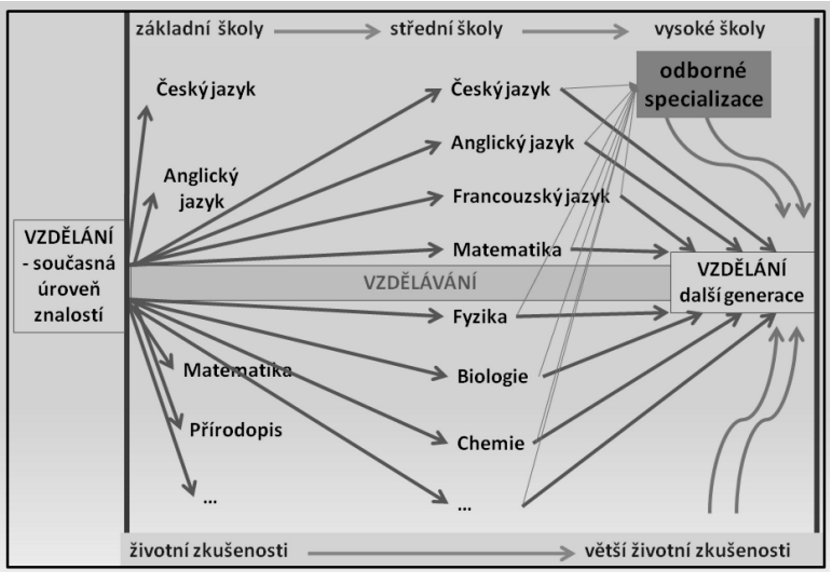
M. Hruška podle C. Bernarda

[1] e-mail: michal.hruska@wo.cz

Úvod

V závěru poslední konference, konané před dvěma lety, jsem byl vybídnut, abych představil některé vazby mezi biologií a matematikou, využitelné při výuce biologie (přírodopisu) a matematiky na základní a střední škole. Ve svém příspěvku některé tyto závislosti zviditelním a přiblížím nejen na obsahu konkrétních úloh.

V současné době jsou dobře patrné snahy snížit pojmovou náročnost, začlenit do výuky mezipředmětové vztahy, průřezová témata atp. (obr. 1).



Obr. 1. Divergence a zejména *konvergence* vzdělávání (zatímco divergenci poznatků věnujeme velkou pozornost, konvergenci poznatků v individuálním vědomí každého studenta se v řadě případů věnujeme velmi okrajově a povrchně, nebo vůbec ne)

Ze své pětadvacetileté pedagogické a odborné praxe na základních a středních školách i vysoké škole vím, že pouze někteří studenti jsou schopni používat v daném ročníku nebo dokonce v životě informace odučené v minulých ročnících, uvažovat mezioborově, mezipředmětově a jinak – v nejširších souvislostech. Většině ostatních takové uvažování v souvislostech činí velké problémy a najdou se i takoví, kteří vůbec ne-chápou, proč je např. v biologii najednou zařazena matematika. Se slovy „to nikdy nepochopím“, „to není biologie, ale matematika“ jejich aktivní a často i pasivní přístup k získávání potřebných mezipředmětových asociací skončí. Podle mého názoru to není pouze jejich chyba.

Jestliže např. u studentů jazykového gymnázia vidím již v prvním ročníku, že se – až na výjimky – všichni bojí matematiky, a já vím, že bych u nich měl vypěstovat k matematice kladný vztah, snažit se, aby žák (student) byl vnímavý, viděl potřebné souvislosti, byl zvídavý a hlavně přemýšlel, připadám si poté několik měsíců a občas i let jako „podvodník“. Proč? Přinejmenším proto, že studentům, pro které byla v minulosti (a pro mnohé i zůstane) např. matematika psem, který je pokousal a mnoho z nich ještě kouše, při každé vhodné příležitosti říkám, že matematika neubližuje a nekouše, má svůj význam, má své kouzlo...

A nejen proto by si měl každý učitel matematiky odpovědět např. na otázky: „Opravdu se snažím, aby se studenti nebáli matematiky, předmětů, které učím, předmětů, kterým se učí? Opravdu se snažím, aby žáci viděli potřebnost, zajímavost, pestrost, zábavnost a nepřeberné možnosti praktického využití – *vzdělání?*“

Samozřejmě je velmi žádoucí připravit např. vynikající studenty pro studium vysokoškolské matematiky, vynikající studenty, kteří budou vítězit např. v matematických olympiádách. Za ty jsem rád, fandím jim. V okamžiku, kdy rozpoznám jejich talent, nadání, schopnosti, zájem, snažím se je všemožně podpořit a rozvíjet. Ale současně je neméně a – podle mého názoru – dokonce více než potřebné budovat pozitivní mezipředmětové vztahy u všech studentů. Na konkrétních příkladech se dále pokusím ukázat, jakým způsobem je to možné pomocí matematiky v biologii a biologie v matematice.

Než přistoupím k příkladům, ještě se zmíním o tom, jakým způsobem chápu termíny „nadaný biolog“ a „talentovaný matematik“ – zejména s ohledem na studenty středních škol. Jakého „cílového“ studenta mám tedy na mysli (v tomto příspěvku s ohledem na matematiku)?

- Neděsí se matematiky, jestliže matematické prostředky použijeme v jiném oboru než v matematice (fyzice, chemii).
- Používá bez výraznějších obtíží potřebné matematické operace a termíny nejen v hodinách matematiky.
- „Nevypíná myšlení“ – neříká si dopředu: „To stejně nepochopím.“
- Spolupracuje při rozvíjení matematických úvah.

- Postupně je schopen formulovat, zobecňovat, vyvozovat, rozvíjet, ... vlastní závěry.

Pokud tedy je např. nadaný biolog talentovaným matematikem, bude specialistou v biologii a nebude se bát matematiky. Možná nevyhraje matematické soutěže, ale bude aktivně a podle potřeby využívat matematické prostředky a postupy v životě a při své odborné práci, která může mít k matematice i dosti daleko.

Pro učitele obou předmětů se nabízejí otázky: Co získá matematik zařazením biologických témat do hodin matematiky? Co získá biolog zařazením matematických témat do hodin biologie? Zkušený učitel si po představení následujících témat jistě odpoví sám. Podle mého názoru a mých zkušeností, *vhodné a přiměřeně časté zařazovaní matematických pojmů, úvah a výpočtů do hodin biologie a biologických témat do matematiky výrazně posiluje a rozvíjí u žáků a studentů vnímavost, zvídavost, přemýšlivost a současně (s přihlédnutím k věku dětí) schopnost vidět maximum možných souvislostí a zejména praktických, v životě využitelných aplikací.*

Témata, která mají místo v biologii i v matematice

Absolutní a relativní četnosti

Termíny „absolutní a relativní četnost“ chápou jako cosi cizorodého, „nepochopitelného“ a příliš matematického i studenti čtvrtých ročníků gymnázia. Přesto již na základní škole může učitel biologie přispět k jejich aktivnímu osvojení, a stejně tak i učitel matematiky posílit vztahy s biologií.

Existují názorné příklady, zaměřené na: absolutní a relativní četnost listů, absolutní a relativní četnost květů, absolutní a relativní četnost kostí atp. Posuďte sami obtížnost následujících testových úloh:

Úloha 1 *Kolik zubů mají dohromady tatínek, maminka a jejich dvě děti (syn a dcera), jestliže oba rodiče mají úplný trvalý chrup a obě děti mají úplný mléčný chrup?*

a) 104 *b)* 108 *c)* 110 *d)* 112

Podle mých zkušeností, je řada (předem nepřipravených) studentů zaskočena matematikou v biologii, a pokud v úloze vidí čísla, vůbec ji neřeší nebo ji řeší špatně, protože buď nemají ani tušení, že úplný mléčný chrup má 20 zubů a úplný trvalý chrup má 32 zubů nebo zpaměti chybně sčítají čtyři čísla atp.

Úloha 2 *Jestliže syn má úplný mléčný chrup (20 zubů) a otec úplný trvalý chrup (32 zubů), určete, kolik procent zubů má otec, jestliže za základ vezmeme 20 zubů syna? Kolik procent zubů má syn, jestliže za základ vezmeme 32 zubů otce?*

Úlohy i řešení je samozřejmě možné různě upravovat, ale přinejmenším na první otázku této druhé úlohy by měli studenti střední školy reagovat např. tak, že zlomek 32/20 rozšíří zpaměti pěti.

Úloha 3 *O kolik procent se vzájemně liší (absolutní) četnost jednotlivých vyobrazených složených listů u jetele bílého na obr. 2?*

Obr. 2. Jetel bílý

Rovněž u třetí úlohy předpokládám, že žák odhalí čtyřčetné a trojčetné listy (tyto termíny by měl učitel matematiky používat v souladu s biologií a samozřejmě očekávat, že matematické termíny v hodinách biologie bude správně používat učitel biologie; absolutní četnosti listových čepelí, které tvoří složené listy na obrázku, jsou tři – list trojčetný – a čtyři – list čtyřčetný). Žák by měl sám zvolit za základ buď četnost čtyři (nebo tři) a zpaměti vypočítat procenta (zejména, bude-li základ dělitelem čísla sto, tzn. např. 3/4 rozšíří 25) atp.

Odhady a sledování přírodnin, jevů a skutečností kolem nás

Podle mých zkušeností učitelé často mylně předpokládají, že některé poznatky studenti znají naprosto dokonale, že je přece „takovou samozřejmost“ někdo/někde/někdy dříve naučil.

Úloha 4 *Kolik prvků je uvedeno v Periodické tabulce prvků? Porovnejte počet prvků tabulky např. s počtem kostí lidské kostry.*

Úloha 5 *Kolik (kráčivých) nohou dohromady (celkem) mají pavouk, klíště a motýl?*

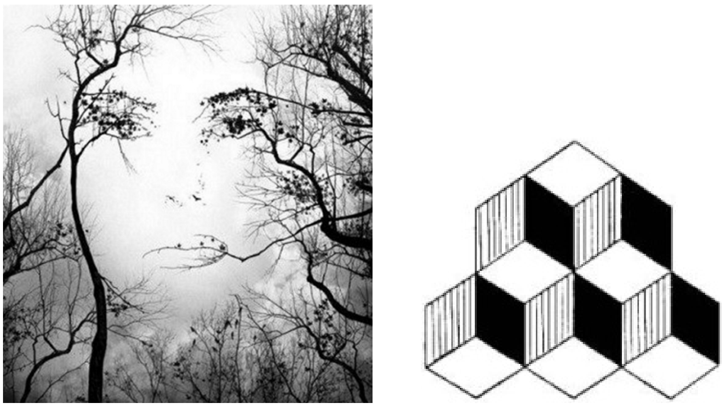
Úloha 6 *Kolik* párů *křídel mají 3 mouchy, 2 motýli a 1 blecha?*

Přestože studenti vidí Periodickou tabulku prvků již na základní a střední škole téměř každý týden, např. na stěnách chemické laboratoře (v učebnicích aj.) – navíc jsou prvky součástí učiva nejen biologie a chemie, ale i fyziky, jsou i takoví, kteří studují např. učitelství biologie–chemie, a neznají odpověď – ani s přesností na desítky. Osobně jsem slyšel ve třetím ročníku na vysoké škole i odpověď: „Je jich padesát nebo šedesát – víc jich určitě není!?“

O tom, že členovci jsou nejpočetnější skupinou organismů na Zemi a potkáváme se s nimi každý den, snad hovořit nemusím. Nemám také na mysli informaci, že motýl babočka má šest končetin, ale mnohem komplexnější znalost (využitelnou při „řešení noh babočky“), že zástupci hmyzu, tj. více než jednoho milionu živočišných druhů, mají šest kráčivých končetin atp. Dále by bylo možné opět uvést chybné pamětní sčítání (a to i při řešení úloh při přijímacím řízení na vysoké školy) a špatnou představivost uchazečů o studium biologie atp.

Prostorová představivost a představivost obecně

Úloha 7 *Co vidíte na obr. 3?*



Obr. 3. Příklady zrakových klamů (Obrázek vlevo je převzat ze stránek http://www.maniacworld.com/face-in-trees-illusion.html)

Úlohy týkající se zrakových klamů často potrápí (a také rozvíjí myšlení) biologa i matematika. Existují studenti, kteří na obrázku vlevo vidí pouze obličej, přestože obličej na obrázku vůbec není, nebo vidí osm krychlí současně, přestože osm krychlí na obrázku také není, atp. Obdobných úloh je možné najít a náhodně zařadit desítky.

Nejen počítání zpaměti

Úloha 8 *Odpovězte na následující otázky:*

- *Jaká je normální minutová (hodinová) klidová tepová frekvence vašeho srdce?*
- *Jaká je normální minutová (hodinová) klidová dechová frekvence dospělého člověka?*
- *Jaký je poměr stisků hrudního koše (masáže srdce) a umělé plicní ventilace (umělého dýchání) při poskytování první pomoci?*
- *Kolik krve proteče v klidu srdcem člověka za 1 minutu (hodinu, den)?*
- *Kolik červených krvinek je z červené kostní dřeně uvolněno do krevního oběhu za jednu vteřinu (minutu, den)?*
- *Kolik vznikne bakterií z jedné bakterie za 2 minuty (4 hodiny, za den) v optimálních podmínkách jejího životního prostředí, např. v polévce, která nebyla za teplého letního dne uložena v ledničce?*

  Pozn.: Lze doplnit údaj, že k rozdělení bakterie dochází např. jednou za 20 minut.
- *Počet buněk, které vznikají ze zygoty v těle ženy po oplození vajíčka, tvoří posloupnost. O jakou posloupnost se jedná? Určete prvních osm členů.*

Pozn. 1: Na řadu těchto otázek bez přípravy odpovídají chybně i mnozí dospělí lidé.

Pozn. 2: Obdobné otázky dovolují po jejich „matematickém“ vyřešení nenásilné zmínky, např. o zdravém životním stylu, ekologii atp.

Obecné vyjádření sudých a lichých čísel, prázdná množina, výroky, jevy nemožné a jisté

Úloha 9 *Odpovězte buď* ano *(výrok je pravdivý) nebo* ne *(výrok je nepravdivý):*

- *V každé buňce člověka je sudý počet chromozomů, který lze vyjádřit výrazem $2n$.*

- *Ve zdravé buňce hladkého svalu člověka je sudý počet chromozomů, který lze vyjádřit číslem* $2n + 1$.
- *Ve zdravé (normální) pohlavní buňce (např. v neoplozeném lidském vajíčku) je vždy lichý počet chromozomů, který lze vyjádřit výrazem* $2n - 1$.
- *Většina eukaryotních buněk savců má uvnitř jádra sudý počet chromozomů, který lze vyjádřit výrazem 2n.*
- *Kost radličná patří do množiny lebečních kostí.*
- *Kost hlezenní patří do množiny lebečních kostí.*

Úloha 10 *Jevy popsané následujícími formulacemi označte termínem „jev jistý" nebo „jev nemožný".*

- *V jádře nervových buněk člověka najdeme diploidní počet 46 chromozomů.*
- *Ve zralých červených krvinkách člověka najdeme diploidní počet 46 chromozomů.*

Převody jednotek

Úloha 11 *Kolik procent krve odebrali v transfůzní stanici muži o hmotnosti těla 70 kg, jestliže daroval (jestliže mu odebrali) 300 ml krve?*

a) 1 % *b) 3 %* *c) 6 %* *d) 9 %*

Pozn. 1: Pokud je třeba, doplníme, že v těle muže je 5 litrů krve.

Pozn. 2: Požadujeme řešení zpaměti, např.: muž 70 kg má asi 5 l krve, tj. 5 000 ml. $300/5000 = 3/50 = 6/100$, tj. 6 %, nebo $300/5000 = 600/10000 = 6/100$, tj. 6 %, atp.

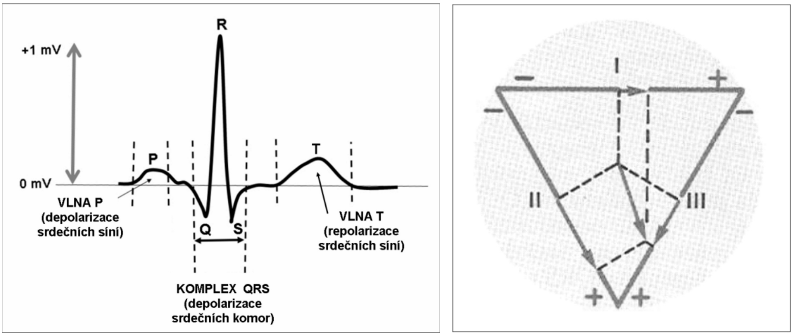
Úloha 12 *Maximální rychlost vedení informací po nervových vláknech je přibližně 120 m/s. Kolik je to kilometrů za hodinu? Porovnejte tuto rychlost s rychlostí vedení elektřiny v kabelech nebo s rychlostí signálu mobilních telefonů atp. Za jaký čas by tyto signály obletěly zeměkouli na rovníku?*

Pozn. 1: Předpokládáme, že studenti znají (vyhledají, vypočítají ze znalosti poloměru) obvod zeměkoule.

Pozn. 2: Pozorný čtenář si jistě povšimne, že úloha studenta (řešitele) nutí využít přinejmenším znalostí biologie, matematiky, fyziky a geografie současně.

Analytická geometrie a periodické funkce

Úloha 13 *Podle předloženého (změřeného) záznamu EKG (podle křivky EKG) (obr. 4) zakreslete směr hlavního vektoru srdeční činnosti.*



Obr. 4. Křivka EKG a Einthovenův trojúhelník

Pozn. 1: Pokud se náročnějšímu čtenáři zdály předcházející úvahy „příliš jednoduché a zřejmé“, je třeba uvést, že pro pochopení podstaty a smyslu této úlohy je třeba mít soubor informací, které přesahují rámec tohoto příspěvku. Přesto považuji zmínky o podobných úlohách při hodinách biologie a matematiky za velmi potřebné, neboť tím předejdeme otázkám typu: „A k čemu nám to bude (znát vektory a jejich grafický součet)?“

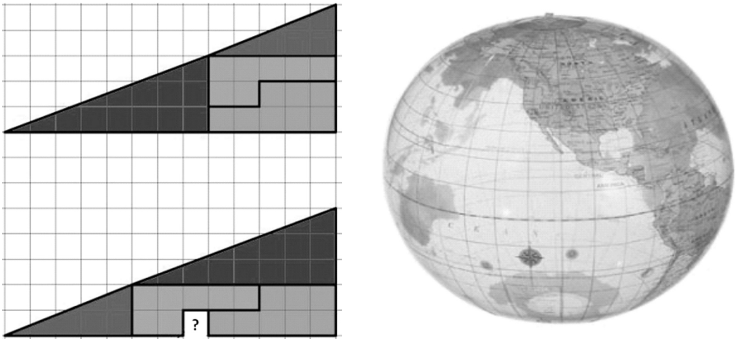
Pozn. 2: Záznam činnosti zdravého lidského srdce (křivka EKG – elektrokardiogram) je v podstatě periodická funkce.

Pozn. 3: Samotné řešení úlohy spočívá – po vynesení naměřených hodnot (z trojice různých křivek EKG změřených třemi různými svody) na strany trojúhelníku – v grafickém sečtení tří vektorů. Pokud studenti v hodinách biologie vůbec připustí, že znají z matematiky a fyziky grafické sčítání dvou vektorů, jsou často příliš „svázáni s úhlopříčkou rovnoběžníku“ a neznají, jakým způsobem graficky sečíst tři vektory, a to ani na vysoké škole.

Není trojúhelník jako trojúhelník

Úloha 14 *Jaké vlastnosti (součet vnitřních úhlů, „tvar“) bude mít trojúhelník, který vznikne tak, že si graficky znázorníme dráhu letadla, které by letělo z Prahy zpět do Prahy s mezipřistáními např. v městech Sydney a Rio de Janeiro (nebo Hradec Králové a Pardubice)?*

Úloha 15 *Proč se – po přemístění – liší součet obsahů (viz otazník ve druhém trojúhelníku) čtyř vyobrazených geometrických útvarů, které tvoří trojúhelníky na obr. 5 vlevo?*



Obr. 5. „Podivné“ trojúhelníky

Pozn. 1: V otázce úlohy 15 je záměrně podsunuta nepřesnost (zamlčena skrytá příčina), obdobné úlohy proto nemohou v žádném případě sloužit k testování znalostí nebo jako podklad pro hodnocení práce žáků, ale mám s nimi dobré zkušenosti, neboť aktivizují a nutí posluchače (žáky) k přemýšlení.

Pozn. 2: Při řešení podobných úloh většina studentů „zná až příliš“. Např. tvrdošíjně trvají na poznatku, že součet úhlů v trojúhelníku je $180°$, takže nejsou ochotni ani uvažovat o jiných trojúhelnících.

Podobně při hledání možných řešení úlohy 15 se setkávám i na vysoké škole s neuvěřitelným názorem, že pouhým přemístěním geometrických obrazců se může změnit jejich obsah atp.

Nekonečno v lidském těle – kombinatorika a genetický kód

Genetický kód je trojznakový. V každé trojici znaků mohou být (v případě ribonukleových kyselin mRNA, tRNA, rRNA, . . .) zastoupeny v libovolném pořadí některé tři ze čtyř různých bází, které značíme písmeny A, U, C, G. Proces syntézy bílkoviny podle genetického kódu mRNA na ribozomu nazýváme translace.

Úloha 16 *Kolik různých kódů používá translace, kolik existuje různých tripletů (trojic) bází? Bylo by možné se také zeptat: Kolik existuje různých uspořádaných trojic ze čtyř prvků?*

Pozn. 1: Samozřejmě je nutné vyvodit (doplnit se studenty či jinak), že se v tomto případě prvky mohou opakovat a záleží na jejich pořadí.

Pozn. 2: Je až s podivem, že téměř žádný student není v hodinách biologie schopen vyjádřit, že se jedná o variace s opakováním nebo dokonce uvést: $V'(3,4) = 4^3 = 64$.

Pozn. 3: Pokud má učitel či student další potřebné informace, je možné uvést, že až na tři trojice bází (z uvedených 64), které mají funkci tečky (a tudíž nekódují aminokyselinu), platí pro všechny ostatní trojice bází právě jeden z následujících výroků: (1) Každá trojice bází kóduje právě jednu aminokyselinu, (2) Každá aminokyselina je kódována právě jednou trojicí bází.

Pozn. 4: Nejedná se o vzájemně jednoznačné zobrazení.

Přestože živé organismy fungují především díky enzymům (bílkovinám), je velmi nežádoucím stavem, že i mnozí studenti vysokých škol (nutno doplnit, že „nechemiků“) mají značné potíže s definicí bílkoviny jako makromolekuly složené z více než 100 aminokyselin (aminokyselinových zbytků) spojených peptidickými vazbami atp. Tuto informaci osobně považuji v biologii za klíčovou a je možné ji zajímavě rozvíjet i v hodinách matematiky (úloha 17).

Úloha 17 *Uvažujte, kolik různých (primárních struktur, řetězců) bílkovin bychom mohli sestavit.*

Pozn. 1: Pokud je to nutné, je třeba studentům zopakovat, že počet různých základních aminokyselin, potřebných k syntézám peptidů a bílkovin (proteinů) je 20.

Některá z možných „řešení“:

Dipeptid vznikne spojením dvou aminokyselin, tj. až $20 \cdot 20 = 400$ různých molekul.

Tripeptid vznikne spojením tří aminokyselin, tj. až $20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^3$ různých molekul.

Bílkovina vznikne z nejméně 100 aminokyselin, tj. 20^{100} různých molekul.

Pozn. 1: Existují i molekuly bílkovin, které mají několik tisíc aminokyselin, např. bílkovina v sojových bobech je tvořena řetězcem z přibližně 4 500 aminokyselin. Tzn. že tato makromolekula je jednou z $20^{4\,500}$ možností (možných variací s opakováním). Také počet, kterým by bylo možné aminokyseliny dané molekuly přerovnat, je možné vyjádřit zajímavým číslem 4 500! (faktoriál) atp.

Pozn. 2: Odhadovaný počet atomů ve vesmíru je menší než 10^{100}.

Pozn. 3: Obdobné úvahy lze provádět se sacharidy (vazbou dvojice monosacharidů vzniká disacharid atp. jako v případě bílkovin) nebo s nukleovými kyselinami (vazbou dvou nukleotidů vznikne dinukleotid atp., jako v případě bílkovin).

Úloha 18 *Kolika různými způsoby je možné sestavit např. 1 000 nukleotidů?*

Řešení. Primární řetězec molekuly mediátorové ribonukleové kyseliny (mRNA) připomíná vlákno, které vzniklo (až na minoritní báze apod.) postupným připojováním některého ze čtyř různých nukleotidů, tj. až $4^{1\,000}$ možností.

Pozn.: „Průměrný“ strukturní gen (molekula mRNA) může být sestaven z přibližně 1 000 nukleotidů. A přestože je počet různých klíčových genů v těle člověka pouze přibližně 30 000, je počet všech možných variací nukleotidů opět mnohem větší než výše zmíněný počet všech atomů ve vesmíru.

Základy matematické statistiky v biologii

Podle mého názoru není třeba ve sborníku z matematické konference uvádět, že matematická statistika a biologie poskytuje nepřeberné možnosti pro prohlubování vazeb mezi biologií a matematikou. Přesto uvedu několik postřehů a v učebnicích nedořešených souvislostí, o kterých by se měl učitel matematiky (a samozřejmě i biologie) zmínit. Pokud např. zavedeme pouze vzorce pro výpočet průměrů (zejména aritmetického), rozptylu (variance), směrodatné odchylky, variačního koeficientu, snad budou studenti umět tyto hodnoty počítat, ale zcela jim unikají tolik potřebné souvislosti. Podle mého názoru je třeba se zmínit o sběru dat a jejich prvotním záznamu, např. o „tabulkových stazkách a čárkovacích metodách“, a poté o grafickém vyjádření výsledků a hlavně o jejich možných praktických interpretacích.

Úloha 19 *U studentů ve věku* 17 *let byla zjišťována optimální výška sedátka školní židle (měřeno od podlahy). Byly naměřeny tyto hodnoty v centimetrech:* $40, 41, 42, 45, 43, 45, 40, 39, 39, 41, 41, 41, 41, 44, 43$. *Vypočítejte aritmetický průměr, směrodatnou odchylku a variační koeficient.*

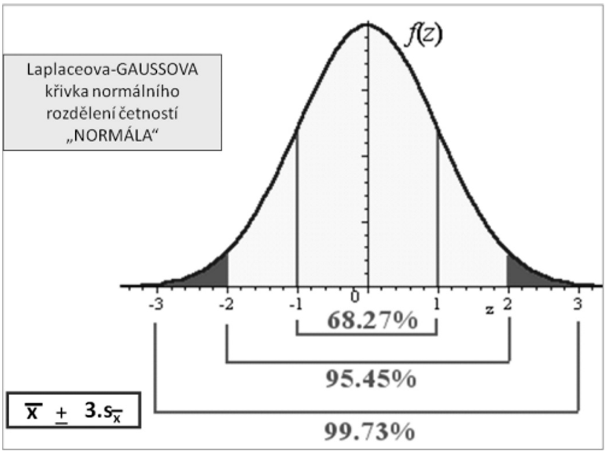
Výsledky vyjádřete graficky a vyslovte některé obecnější závěry. Na základě výpočtů navrhněte hypotetickému výrobci židlí, kolik procent židlí různých výšek by měl vyrobit, aby při splnění státní zakázky na 100 000 židlí uspokojil požadavky většiny studentů dané věkové skupiny na „komfortnější“ pobyt ve škole.

Řešení je zpracováno v tab. 1 a na obr. 6.

x_i	„stazka“	n_i	$x_i \cdot n_i$	$(x_i \cdot n_i)/\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
39	//	2	$39 \cdot 2$	13,33	14,22
40	//	2	$40 \cdot 2$	13,33	5,56
41	~~////~~	5	$41 \cdot 5$	33,33	2,22
42	/	1	$42 \cdot 1$	6,67	0,11
43	//	2	$43 \cdot 2$	13,33	3,56
44	/	1	$44 \cdot 1$	6,67	5,44
45	//	2	$45 \cdot 2$	13,33	22,22
celkem		15	625	100	53,33

Aritmetický průměr $\bar{x}$	41,67
Rozptyl s^2	3,56
Směrodatná odchylka s	1,89
Výsledný interval pro $\pm 3s$	$\langle 36{,}01; 47{,}32\rangle$

Tab. 1. „Základní statistika“ pro výšku židle



Obr. 6. Křivka normálního rozdělení četností

Pozn.: Z biologického úhlu pohledu získáme vzhledem k malému počtu hodnot zcela neprůkazné výsledky.

Úloha 20 *Určete, zdali odpovídá teoretickému štěpnému poměru, jestliže v F_2 generaci křížení červenoplodých a žlutoplodých rajčat vyrostlo na pokusném políčku ze souboru náhodně vybraných semen 27 rostlin se žlutými plody a 74 rostlin s červenými plody.*

Pozn. 1: Přibližně lze řešit úlohu zpaměti. Chceme-li shodu potvrdit, je třeba použít některý z testů shody (testování hypotéz).

Pozn. 2: Genetických (biologických) úloh, které vyžadují užití matematických úvah a postupů, existují více než desítky.

Genetika populací – jednoduchý matematický vztah v praxi

Úloha 21 *Jestliže bylo zjištěno, že 84 % lidí sledované velké panmiktické populace má krev Rh+, určete kolik procent alel pro Rh– a pro Rh+ je v populaci. Dále určete, kolik heterozygotů a kolik homozygotů recesivních a dominantních je v této populaci.*

Zjednodušené řešení. Jedinec Rh+ je (modelově) buď dominantní homozygot (AA) nebo heterozygot (Aa), tzn. zbývajících 16 % obyvatel tento znak nemá a jsou to homozygoti recesivní, tj. aa. Podle Hardy–Weinbergova zákona (tj. $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$) platí, že $q^2 = 0{,}16$ (16 % homozygotů recesivních = aa). Dále lze snadno odvodit, že $q = 0{,}4$ (v populaci je alela a zastoupena 40 %). Protože $p+q = 1$ (100 %), musí být v populaci 36 % homozygotů dominantních – AA). Jestliže je tedy homozygotů recesivních 16 % a homozygotů dominantních 36 %, musí být heterozygotů 48 %.

Pozn. 1: Úlohu lze dále využít zejména pro určení počtu jedinců populace, kteří jsou přenašeči zmutované alely pro dané homozygotně recesivně děděné postižení, přestože sami toto postižení nemají.

Pozn. 2: Řešení úlohy vychází ze zjednodušeného předpokladu, že v populaci existují dvě různé alely. V případě, že existuje alel více, např. tři, platí vztah $(a+b+c)^2$ – a tento vztah lze zobecnit až na n alel. Zobecňování je rovněž možností, jak rozvíjet matematické úvahy nejen v biologii. Např. lze sdělit žákům: „Pomocí jedné souřadnice lze vyjádřit polohu bodu na přímce, pomocí uspořádané dvojice souřadnic lze určit polohu bodu v rovině, pomocí uspořádané trojice souřadnic poté určit polohu bodu v prostoru. A co pomocí čtveřice až uspořádané n-tice souřadnic. . . ???“

Dále je vhodné se zmínit (např. při výše uvedených úvahách) o biologické využitelnosti systému GPS jako o možnosti přesné lokalizace biologických objektů na Zemi (např. naleziště endemitního druhu rostliny nebo živočicha) nebo možnosti přesné evidence množství sklizeného obilí a jiných zemědělských produktů z různých míst rozsáhlých sklízených ploch atp.

Metabolismus

Úloha 22 *Vypočítejte vlastní bazální metabolismus a celkový energetický metabolismus za den (týden, měsíc) v kJ. Dále vypočítejte celkovou energetickou hodnotu potravin, které jste zkonzumovali za jeden den (týden, měsíc). Výsledné hodnoty vzájemně porovnejte a posuďte, do jaké míry odpovídají současným zásadám racionální výživy a zdravého životního stylu, vyhledejte pozitiva a negativa.*

Doporučený postup. Při výpočtech použijte skutečné hodnoty aktivit konkrétních studentů, včetně jejich „jídelníčku“ (způsobu stravování). Podobné úlohy jsou vhodné zejména pro referáty, seminární aj. projekty, při kterých je požadováno, aby studenti sami neveřejně písemně porovnali vlastní zjištěné výsledky s výsledky svých spolužáků.

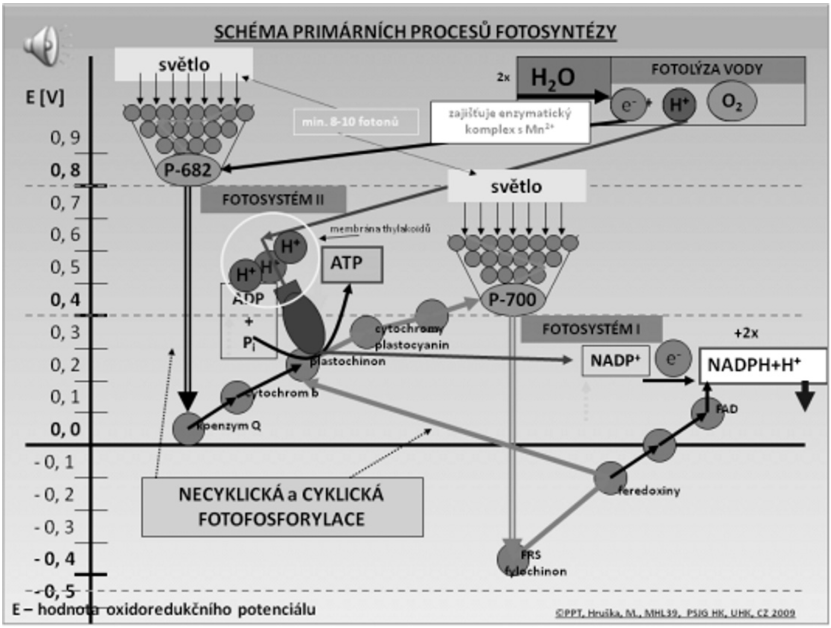
Pozn. 1: K této úloze jsou nezbytné tabulky, ze kterých lze zjistit energetickou náročnost různých lidských aktivit, a dále tabulky s energetickou hodnotou potravin atp. Tyto tabulky lze dnes nejjednodušším způsobem získat na internetu.

Pozn. 2: Kromě energetické hodnoty lze (ze znalosti zkonzumovaných potravin) vyjádřit množství přijatých (snědených) bílkovin, cukrů a tuků nebo i různých vitaminů, minerálních látek atp.

Matematika a software

Úloha 23 *Zpracujte některou z předcházejících úloh jako referát nebo seminární práci (s využitím např. aplikace Word) nebo tabulku (s využitím např. aplikace Excel) nebo prezentaci či výukovou prezentaci (s využitím např. aplikace PowerPoint) atp.*

Ukázka jedné takové prezentace je na obr. 7.



Obr. 7. Primární procesy fotosyntézy – schéma doplněné animací ze souboru výukových prezentací autora příspěvku (schéma čerpá a využívá zejména poznatků biologie, chemie, matematiky, fyziky a informatiky a nebylo by možné je demonstrovat bez širších uživatelských znalostí potřebného software).

Co např. chybí v současných učebnicích středoškolské matematiky a biologie

V současných učebnicích středoškolské matematiky a biologie chybí zejména:

A) zdůraznění konkrétní využitelnosti závěrů matematické statistiky, provázání vypočítaných (tabulkových) hodnot s jejich grafickou interpretací a praktickou využitelností výsledků,

B) zmínka o záznamu čárkovací metodou, která je nezbytná např. při terénním sběru nejen biologických dat (viz druhý sloupec tab. 1),

C) výsledný interval (viz např. interval uvedený v posledním řádku tab. 1) a jeho interpretace; jak vyplývá z obr. 6 (za předpokladu normálního rozdělení četností a postačujícího počtu měřených znaků biologických objektů, což v této, pouze demonstrační úloze, není splněno), leží více než 99,00 % všech reálných hodnot právě v uvedeném intervalu; navíc je třeba studentům sdělit, že ze zobecněných relativních četností (úloha 19) je poté např. dále možné zjistit, kolik kusů židlí různých výšek musíme vyrobit, abychom co nejvíce uspokojili poptávku dané věkové skupiny studentů (s ohledem na jejich anatomické rozměry),

D) zmínka o tom, jak souvisí n (počet naměřených hodnot) a $n-1$ (počet stupňů volnosti), důvody, které vedou k takovémuto dvojímu používání „shodných“ vzorců, atp.,

E) zmínka o tom, jak – s ohledem na matematickou statistiku – chápeme genotypový a fenotypový štěpný poměr, např. 1 : 2 : 1 nebo 3 : 1 atp.

Závěr

V samotném závěru svého příspěvku se zmíním o některých aplikacích. Podle mého názoru je dostatečně zřejmé, že dnešní studenti musí umět pracovat s různým software, např. tabulkami Excel a prezentacemi PowerPoint. Dále musí zvládnout vyhledávání libovolných a zejména přesných (pravdivých) informací na internetu.

Internet je dnes třeba chápat jako obrovskou knihovnu, do které jsou ovšem zejména (většinou) ukládány „nerecenzované“ příspěvky. Je na učiteli, aby odpovídajícím způsobem odměnil studenta, který vyhledal pravdivé (vědecky správné) informace, pracuje s přesnými informacemi a je dokonce schopen rozvíjet je vlastními aktivitami.

Naopak všechny studenty, kteří nekriticky přejímají polopravdy a někdy i zcela nepravdivé informace nebo bezostyšně zcizují na internetu cizí myšlenky, je třeba účinně odradit od dalších podobných pokusů.

Ve sborníku samozřejmě není možné předvést animace studentů ani mé vlastní, ale považuji za potřebné zmínit, že názornost je již od dob J. A. Komenského při výuce biologii na jednom z prvních, ne-li vůbec na prvním místě.

Pouze studenti, kteří se nebojí matematiky a informatiky a mají nezbytné odborné znalosti z jiných oborů (předmětů), včetně znalostí jazykových, mohou sami aktivně nejen využít možností současného software, možností současné vědy, potřebných souvisejících informací jiných oborů a zejména – a to zdůrazňuji – v určitém okamžiku školní docházky vlastními silami aktivně rozvíjet vlastní schopnosti.

Závěrečná poznámka: Autor příspěvku *nedoporučuje* svým mladším kolegům (přes desítky pozitivních efektů, přínosů a praktických zkušeností se zařazováním podobných úloh při výuce, zkoušení, samostatné práci apod.), aby větší počet úloh – podobných úlohám v tomto příspěvku – zařazovali v inspekčních hodinách, neboť již před dvaceti čtyřmi lety byla jeho obdobná snaha hodnocena paní inspektorkou slovy: „Vy mlčte, zvolil jste nevhodně podlézavý způsob výuky.“

Literatura

[1] Campbell, N. A., Reece, J. B.: *Biologie.* Computer Press, Brno, 2006.

[2] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 1991.

[3] Rosypal, S. a kol.: *Nový přehled biologie.* Scientia, Praha, 2003.

[4] Svoboda, E. a kol.: *Přehled středoškolské fyziky.* Prometheus, Praha, 2003.

[5] Vacík, J.: *Přehled středoškolské chemie.* SPN, Praha, 1999.

Mathematica a interaktivní tabule

Antonín Jančařík, PedF UK Praha [1]

Abstrakt. *V článku jsou ukázány možnosti použití produktů firmy Wolfram Research ve spolupráci s interaktivní tabulí. Postupně jsou představeny možnosti tvorby interaktivních ukázek s využitím příkazu Manipulate, možnost využití ukázek zdarma dostupných na portálech Wolfram Demonstrations Project a Wolfram Education Portal a možnosti využití nástroje Mathematica Classroom Asistent.*

Úvod

Jedním z moderních trendů v současném školství je zavádění výpočetní techniky do škol. Téměř všechny školy jsou vybaveny počítačovými učebnami s připojením na internet, stále častější jsou na školách diaprojektory, vizualizéry a interaktivní tabule. Pouze vlastnit moderní výčetní techniku však nestačí, je nutné ji také efektivně ve vzdělávacím procesu využívat. Především v oblasti interaktivních tabulí hardware předběhl software, takže zatímco ceny interaktivních tabulí klesají (v současnosti

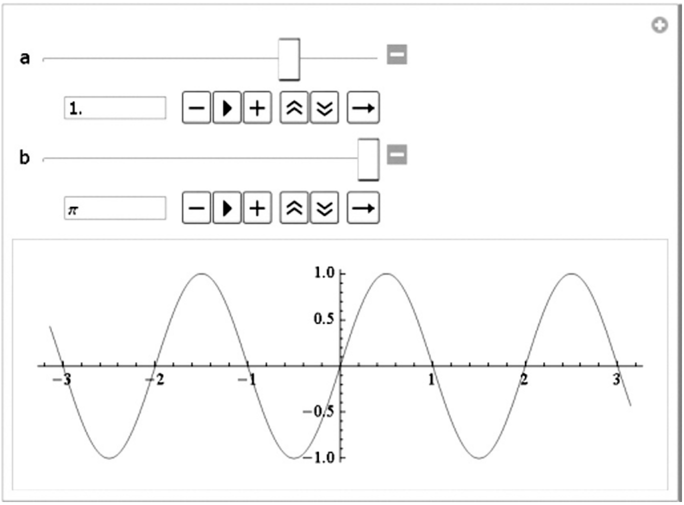
[1] e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

hluboko pod dvacet tisíc), nalézt software, který by bylo možné efektivně s interaktivní tabulí při výuce matematiky využívat, je obtížné. První vlaštovkou na našem trhu jsou interaktivní učebnice nakladatelství Fraus, které vznikají jak v klasické, tak v interaktivní podobě určené pro využití ve spolupráci s interaktivní tabulí [1].

Cílem tohoto článku je představit nástroje, které pro využití interaktivní tabule nabízejí produkty firmy Wolfram Research. Představeny budou interaktivní ukázky, které lze vytvářet pomocí programu Mathematica od verze 6.0 a přehrávat pomocí bezplatného software Mathematica Player, a nástroj ClassRoom Assistent, který je integrován od verze Mathematica 7.0.

Příkaz Manipulate, aneb tvorba interaktivních ukázek

Program Mathematica je Computer algebra systém (CAS) primárně určen pro využití ve výzkumu a vývoji. Pro svoji komplexnost a s ní související komplikovanost byl v minulosti na středních školách využíván jen sporadicky. Změnu přinesla verze 6.0, respektive nově integrované příkazy, které umožňují vytvářet interaktivní ukázky snadno využitelné při výuce. Současně s touto změnou otevřela firma Wolfram Research webový portál, na kterém lze několik tisíc vytvořených ukázek nalézt, stáhnout a bezplatně využívat.



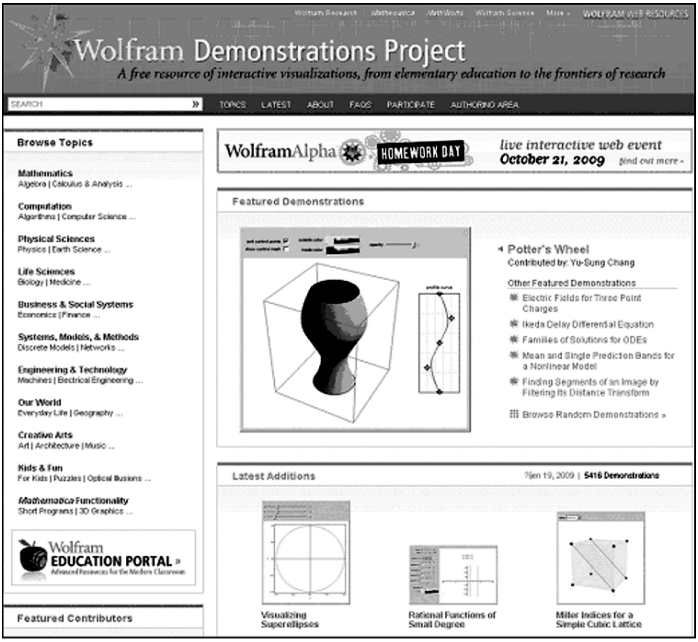
Obr. 1

Z příkazů, určených pro vytváření interaktivních ukázek, je asi nejdůležitější příkaz Manipulate. Ukážeme si tedy, jak tento příkaz funguje.

Asi nejzajímavější použití příkazu Manipulate je při tvorbě grafů. Většina CAS systémů dovede vytvářet grafy funkcí. Dá se říci, že to patří mezi jejich nejzákladnější funkce. Výhodou, kterou přináší příkaz Manipulate, je, že uživatel může u vytvořeného grafu měnit parametry funkce a systém „v reálném čase“ ukazuje změnu grafu (obr. 1).

Není tedy nutné nechat vykreslovat vždy nový a nový graf, ale je možné změny grafu demonstrovat na jediné ukázce. Učitel tak v jediné hodině může žákům ukázat desítky grafů, které se od základního grafu liší pouze parametrem. Při přímé práci s počítačem si žáci mohou s funkcí sami experimentovat. Mezi vhodné kandidáty na samostatnou práci studentů jistě patři lineární a kvadratická funkce, ale také funkce goniometrické.

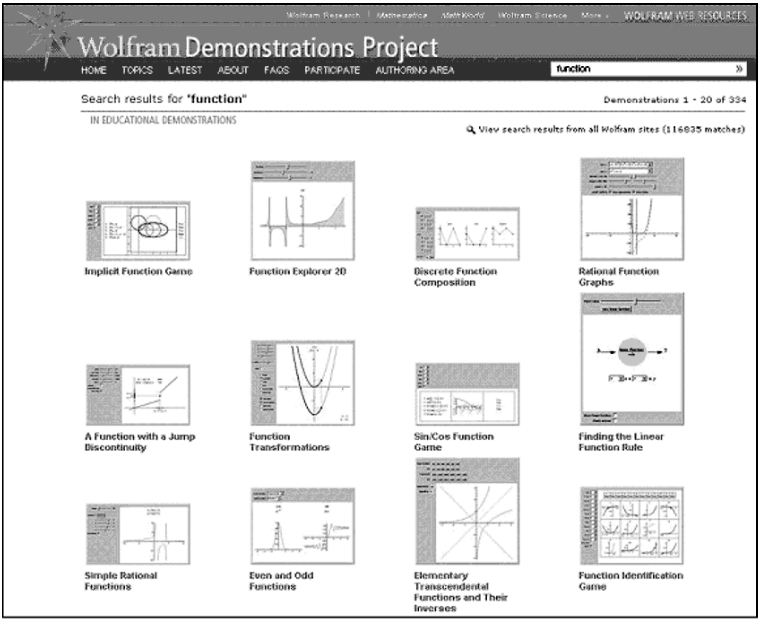
Wolfram Demonstrations Project



Obr. 2

Současně s zavedením příkazu Manipulate učinila firma Wolfram Research velice vstřícný krok, kdy umožnila ukázky vytvořené pomocí programu Mathematica sdílet a využívat i bez vlastnění licence k programu Mathematica.

Celý systém funguje tak, že autor ukázky může soubor s ukázkou zaslat přes web firmě Wolfram Research. Pokud se jedná o nekomerční využití programu, je ukázka firmou Wolfram Research „podepsána“ a buď umístěna na portál Wolfram Demonstrations Project [3], popřípadě Wolfram Education Portal [4]. Ukázky obdařené digitálním podpisem od firmy Wolfram Research lze spouštět pomocí programu Mathematica Player, který je zdarma dostupný na stránkách portálu Wolfram Demonstrations Project (obr. 2, 3).



Obr. 3

Všechny ukázky lze používat přímo při výuce a v mnoha případech je velice efektivní je ovládat přímo s využitím interaktivní tabule.

ClassRoom Assistent

Od verze Mathematica 7.0 je součástí nástrojů, které tento program nabízí, také ClassRoom Asistent. Tento nástroj byl vytvořen na základě zkušeností a potřeb učitelů středních škol a umožňuje sestavování příkazů pro program Mathematica přímo prostřednictvím interaktivní tabule. Upozorňuji předem, že nástroj je vytvořen pro interaktivní tabuli, takže i když jej lze využívat i s pomocí myši na obrazovce, tak takové využití nemusí uživateli připadat jako užitečné.

Pomocí ClassRoom Asistent lze několika klepnutími pera do tabule vytvořit převážnou většinu základních a středně obsáhlých příkazů, včetně interaktivních ukázek zmiňovaných v předchozí kapitole. Učitel tak může velice snadno ukázky přímo od tabule vytvářet, modifikovat a i ovládat, což velmi zjednodušuje jeho práci a umožňuje lepší komunikaci se studenty (obr. 4).

Obr. 4

Závěr

Programů, které lze efektivně ovládat pomocí interaktivní tabule, je na našem trhu stále velice málo. Každá aktivita v této oblasti je proto vítána a přináší cenné zkušenosti, které lze následně využít při vývoji nových aplikací či výběru a nákupu nového software. Aktivity, které vzhledem ke středním školám v této oblasti vyvíjí firma Wolfram Research, lze hodnotit jako velice zdařilé. Možnost bezplatného využívání ukázek z portálů Wolfram Demonstrations Project a Wolfram Education Portal lze doporučit každému učiteli matematiky, fyziky a dalších přírodovědných předmětů (více [2]).

Literatura

[1] *Fraus.cz Matematika – Učebnice.* http://ucebnice.fraus.cz/matematika-2/

[2] Kováčová, M., Záhonová, V., Dobrakovová , J.: *MATHEMATICA pre stredoškolských učiteľov.* STU, Bratislava, 2007.

[3] *Wolfram Demonstrations Project.* http://demonstrations.wolfram.com/

[4] *Wolfram Education Project.* http://www.wolfram.com/edu/

Hodnocení nadprůměrnosti žáků jejich rodiči

Michaela Kaslová, Pedagogická fakulta UK, Praha [1]

Abstrakt. *Na základě čeho identifikuje okolí žáka (dítě) jako nadprůměrného v matematice? Opíráme se o diskuse s učiteli mateřských škol a prvního stupně ZŠ, dále o rozhovory s rodiči, kteří se domnívají, že mají doma výjimečné dítě, které vyžaduje speciální ohledy a hodnocení. Shrnuje se několikaleté šetření a zamyšlení, jak s výsledky dále nakládat.*

Zdroje identifikace nadprůměrného žáka

Nadprůměrný žák je identifikován zpravidla dvěma zdroji: a) rodinou, b) školou (mateřskou nebo základní). Pokud má některá ze stran pochybnosti, dochází k vyhledání třetího zdroje: c) zpravidla pedagogicko-psychologické poradny nebo různých dalších center, někdy též internetových zdrojů – testy.

[1] e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

Nehodnoťme zatím termín nadprůměrný, ani kvalitu identifikace. Sledujme nejprve profesionalitu výstupu takové identifikace. Zdroj a) je svojí podstatou laický, ovlivněn projekcí rodičů, emocemi, tedy zákonitě nekritický. Tento zdroj má však značný vliv na sebehodnocení dítěte a je vybaven takovými nástroji, které ovlivňují i vztah žáka ke škole, které mohou ať přímo či nepřímo zasahovat i do samotného vyučovacího procesu.

Oblast b) je do jisté míry profesionální, a to na úrovni pedagogiky, speciální pedagogiky, základů psychologie a didaktik předmětů, avšak v oboru práce s nadprůměrnými není speciálně žádný učitel zatím hlouběji vzděláván. Jeho výhodou je možnost průběžného porovnávání průběhu a výstupu aktivit řady odlišných dětí v různých kontextech.

Mluvíme-li o oblasti c), je nutné i zde se zamyslet nad profesionalitou přípravy pracovníků. Pomiňme internetové testy, neboť zde nejsou výsledky analyzovány individuálně, pokud vůbec jsou, a nemusejí rodičům dát ty informace, které by o svém dítěti potřebovali. Pracovníci pedagogicko-psychologických poraden se většinou rekrutují z oboru poradenství nebo psychologie, kde se didaktika matematiky ani matematika nevyučují. Takový profesionál má zpravidla matematické znalosti na úrovni žákovské ze ZŠ nebo SŠ. Chybí u nich matematický nadhled (jsou případy, kdy jsou žákům kladeny otázky z pohledu matematiky chybně formulované, leckdy matematicky správná odpověď je tedy mylně hodnocena). Jsou země, které chápou provázanost výkonu žáka na prostředí, a tamní poradci pracují ve dvou prostředích: v prostředí školy v běžné situaci pro žáka/dítě, izolovaně v prostředí poradenského centra (například Japonsko). Sledujme další možnosti: těmi jsou různé spolky (sem zahrňme i sekty), které pod pláštíkem odhalení rezerv dítěte/žáka nabízejí svoji pomoc. Jejich testy mají mnohdy především reklamní funkci a rozbory nemusejí mít jiný cíl než přitáhnout další členy (viz dostupná literatura o sektách a vlastní i další zprostředkované zkušenosti).

Nezmínili jsme dosud další možný zdroj d), čímž je dítě samo, respektive autodiagnostika dítěte. Je obtížné rozhodnout, zda se dítě cítí nadprůměrné nezávisle na okolí a do jaké míry je jeho pocit výjimečnosti posílen sociálně. Přesto jsou případy, zejména v tradičně pojatém vyučování založeném na frontální výuce s dominantou v transmisívním stylu, kdy žáka řešení úloh nebaví a ví, že by s radostí vyřešil úlohy náročnější. Pro nechuť a odmítání práce je hodnocen negativně či hůře, než na co má. Nemusí jít vždy o reálné sebehodnocení. Milující neobjektivní rodiče již při prvních „úspěších“ dítěte mají tendenci dítě nezřídka projektovat do pozice špičkového matematika, do role osoby hodné adorace a žáka, kterému musejí být poskytnuta jistá privilegia včetně zvýšení tolerance vzhledem k jiným oblastem, než ve kterých se dítě jeví nadprůměrné (i v oblasti sociální a hygienické).

Talentovaný nebo nadprůměrný žák?

Vztah *nadaného a talentovaného* žáka byl již v podstatě na mezinárodní úrovni vyřešen a oba termíny jsou v matematice chápány jako synonyma. *Nadprůměrný žák* je pojem relativní, je to žák, který v daném období „vyčnívá“ nad průměr dané skupiny v řešení vybraného souboru otázek a úkolů. Ve školním prostředí to znamená zpravidla dosahování nejlepších výkonů v aktuální třídě nebo v daném ročníku. U některých učitelů dochází k porovnávání výkonu vzhledem k jejich letitým zkušenostem u dané věkové skupiny na daném tématu. Podobně jsou hodnoceny podprůměrné děti. Jak z vymezení plyne, nad/podprůměrnost je do značné míry vázána na jisté standardy (oficiální či osobní), na typ pozorovatele a také na výběr toho, v čem a za jakých okolností je dítě sledováno. Vybrané příklady z pozorování jsou podnětem pro zamyšlení.

Učitelka U1 v mateřské škole ve skupině heterogenních dětí: „Takové dítě, které by s radostí počítalo ve třech letech od jedné do sta a zpátky, jsem ještě nezažila.“ Učitelka U2 v mateřské škole ve věkově homogenní třídě předškoláků: „Toto dítě vůbec nic nebaví, je strašně pasivní. Kouká jen do zdi, nechce tancovat, zpívat, ani kreslit, pohádky ho nezajímají, občas si hraje se skládankami nebo stavebnicí, kouká do knížek, ale moc nemluví.“

Bylo první dítě opravdu nadprůměrné? V čem? Bylo druhé dítě podprůměrné? Proč? Obě děti byly dlouhodobě sledovány. U prvního v dlouhodobém horizontu byla identifikována nadprůměrná slovně akustická paměť. Ve škole se podobně snadno naučilo převyprávět pohádky, články v čítance i vlastivědě. V oblasti uvažování a usuzování, v prostorové představivosti se neoddělovalo od většiny třídy, reakce byly adekvátní kalendářnímu věku. Druhé dítě, kterému na doporučení mateřské školy i pedagogické poradny byl navržen odklad školní docházky, nastoupilo na přání rodičů do školy v termínu a tam se brzy projevilo jako vysoce nadprůměrné a v pátém a šestém ročníku se stalo velmi úspěšným řešitelem matematických olympiád na úrovni školy (dále nebylo sledováno).

Učitel U3 na prvním stupni charakterizoval žáka 4. ročníku v matematice: „…průměrný, trochu líný, upovídaný, nepřesně se vyjadřuje, písmo ani rýsování za nic nestojí, vyrušuje, aktivní... někdy, počítání jak kdy.“ V řešení nestandardních úloh žák nevykazoval žádnou z uvedených charakteristik. Obtížnější úkoly pro něho byly dostatečnou výzvou, tam cítil smysl – ekonomičnost své práce a vnitřní angažovanost. Tento žák podobně jako dítě u U2 neměl v mateřské škole do té doby dostatek podnětů pro to, jak prezentovat svoji nadprůměrnost, dokonce nadání pro matematiku. Odkrytí nadprůměrnosti učitelem úzce souvisí s jeho filosofií výuky a volbou podnětů pro uplatnění žákových specifických schopností. Další faktory můžeme hledat vně jeho práce. Je to chyba osnov, přípravy učitelů nebo je to ovlivněno vysokým počtem dětí/žáků ve sledovaných třídách? Matematici si tímto kritickým přístupem k současné situaci neosobují právo jako jediní rozhodnout, zda je či není žák v matematice nadprůměrný ani jaký je jeho potenciál, identifikovat další možnosti jeho rozvoje v období adolescence a dospělosti. Je zde nutná užší kooperace mezi institucemi a obory, dále konstituce nových přístupů k práci s žáky, z nichž někteří jsou nadprůměrní, někteří nadaní.

Kriteria pro identifikaci nadprůměrného žáka v matematice

V předškolních zařízeních podobně jako v rodinách je dítě označováno za nadprůměrné, pokud v řeči často (před dospělým) užívá základní číslovky. Jak ukázal výzkum [6], je užívání číslovek v předškolním věku podmíněno sociálně. Dítě brzy chápe, že používání číslovek je atributem „dospělosti“ (podobně jako je dospívajícími chápána cigareta), je dospělými oceňováno, dítě je na základě toho výrazně pozitivně hodnoceno. Toto zbožštění čísla je typické pro současnou evropskou kulturu (ne například pro inuity a další soudobé kultury). Užívání čísel se zde stává jedním z hlavních kriterií pro identifikaci nadprůměrnosti společností. Rodina a často i mateřská škola se spokojí s tím, že dítě číslovky užívá, nikoli však jak a za jakých okolností, co si představuje, jak tomu rozumí, jak dítě k adaptaci číslovek do komunikace dospělo. Není málo dětí, které především velmi dobře zvládají řadu slov od jedné po třicet (padesát, sto,...), ale představu kvantity nemají, a pokud ano, tak jen k vybraným číslovkám ve specifických kontextech [5], tedy např. akceptují tři prsty, tři rohlíky, ale neakceptují tři ve spojení s dřepy, tři u nestejnorodých nebo velkých objektů apod. Vedle těchto dětí (bývají to starší sourozenci se schopností adaptovat svoji řeč na úroveň okolí) komunikují se sourozencem o kvantitě, aniž by k tomu potřebovali základní číslovky. Další schopnosti důležité pro nástup školní matematiky nejsou „brány vážně“, jako například schopnost tvořit a zpracovávat (tedy i korigovat) prostorové a časové představy. Sledování matematických schopností především v práci s číslem má další příčinu, a tou je redukování matematiky na aritmetiku [4].

Kriteria identifikace nadprůměrných a styly učení

Přistupme k problému nyní z pohledu rodičů v kontextu současné relativní snadnosti „dostat dítě na gymnázium". Představa rodičů je „stačí snaha a trénink dítěte", a naplní se tak ambice rodiny – mít dítě na gymnáziu. Rodinou podporovaný styl učení zejména u „problematicky rodinou diagnostikovaných nadprůměrných" se opírá o mechanické učení stavějící na reprodukci. V období předškolním je to opakování slov „jedna", „dvě", „tři", při nástupu do školy je to především trénink rychlosti kalkulu, tudíž domácí zkoušení dítěte ze spojů na sčítání a odčítání a podobně. Identifikací je zejména u matek hodnocení dítěte učitelem, tedy dítě hodnocené jako vzorné s jedničkami. V polovině sledovaných případů šlo jen o slabě nadprůměrné, avšak submisívní typy žáků, kteří vzorně reprodukovali vše, co dělal učitel, nebo detailně pracovali tak, jak si to učitel přál. Dominantou jejich řešení bylo vciťování, nikoli uvažování. Mají opravdu tyto skutečnosti vliv na identifikaci dítěte rodiči jako nadprůměrného?

Argumentace rodičů a učitelů

Rodičům a učitelům byly v průběhu několika let předkládány úlohy (řešené jejich dětmi/žáky, i neřešené), které měli dotázání označit, pokud se domnívali, že jde o úlohy, které pomohou identifikovat nadprůměrné dítě. Např. $3 + 2$ u předškolního dítěte a podobně. Na to navazoval rozhovor vedený tak, aby tázaní volně vypovídali o tom, podle čeho se nadprůměrný pozná. Zde 92 % rodičů se domnívá, že dítě je nadprůměrné, počítá-li rychle, přesně a spolehlivě (převažuje u matek), řeší aritmetické úlohy mimo obor (velká čísla – uvádějí stejně otcové jako matky), než ve kterém se právě pohybují ve škole. Rozlišuje sudá a lichá čísla, násobky deseti, ví, kolik nul je v zápise tisíce, miliónu (uvádějí otcové, ale současně připouštějí – zde je výjimka – že je to učili). To také vede některé z nich k tomu, že s dítětem předbíhají výuku ve škole. Nepotřebuje k počítání prsty, počitadlo, kalkulačku, psát si,... (uvádějí výhradně matky). Pro některé rodiče (stejně pro matky jako otce) je významné, že dítě v předškolním věku umí spočítat, kolik mu mají při nákupu vrátit. Někteří zdůrazňují znalost slov jako milión, trilión, schopnost tato čísla zapsat (častěji otcové než matky), znalost čtení či psaní dalších znaků, jako např. π, ∞, α, druhá odmocnina (otcové) či schopnost pracovat s kalkulačkou („...vydrží si hrát s kalkulačkou i 20 minut...“) nebo počítačem („...sám si pustí počítač a hraje na něm i hodinu i déle...“) již v pěti či šesti letech (častěji otcové než matky). Jen 40 % rodičů připouští, že nadprůměrnost či dokonce talent se projeví i v aritmetických úlohách, kde řešitel musí uplatnit nenacvičený postup, respektive si musí vlastní postup vytvořit, kde objeví nějakou pravidelnost, zákonitost a podobně. Zejména pro otce je významné, že dítě umí reprodukovat některou matematickou větu nebo zapsat vzorec již na prvním stupni (přesnost a souvislost s tím, co dítě umí, nehodnotím). Jen 4 % rodičů akceptují, že řešení slovní úlohy patří do matematiky a vyžaduje nadprůměrné schopnosti, pokud se jedná o „netypovou“ úlohu (úlohu, jejíž řešení se netrénovalo ve škole či doma), protože se vyskytují v matematických soutěžích. Srovnejme to s motivací opravdu talentovaných žáků, které pouze o něco obtížnější úlohy až „tolik“ nemotivují. Takoví žáci mohou i v aritmetických úlohách chybovat právě pro sníženou motivaci a pro orientaci na primární motivaci (vně hodnocení dospělým). Typově nové slovní úlohy jsou pro takové žáky zajímavé, avšak po vyřešení málo oceňované okolím. Geometrie je až na 2 % podobně jako v ČR [4], tak ve Španělsku, Portugalsku (Lisabonská výzkumná skupina) rodiči chápána jako obor ležící vně matematiky, jako pouhé rýsování. Ti, kteří geometrii „akceptují“, spatřují nadprůměrnost ve schopnosti zapsat popis konstrukce či ve znalosti převodů jednotek či znalosti historických jednotek měření (otcové), v žákově znalosti toho, kolik má krychle stěn či vrcholů, v pamatování si vzorců pro výpočty obsahů a objemů, zejména tehdy, kdy se to neprobíralo nebo si to ostatní ještě nepamatují. Otcové často zdůrazňují, že dítě již v předškolním věku hrálo šachy, dámu, go nebo jiné stolní strategické hry.

Shrnutí rodičovské charakteristiky nadprůměrných dětí

Podle rodičů je charakteristika nadprůměrných dětí taková, že nejčastěji (u 58 %) sem patří: rychlost a přesnost výpočtů bez opory, znalost velkých čísel, čísel z nových číselných oborů, hraní „inteligentních“ her, používání nových technologií. Celých 40 % argumentuje řešením aritmetických úloh, které v daném věku ještě nikdo neřeší. Z dotázaných 32 % zdůrazňuje, že jejich dítě čte, píše, používá matematické znaky, vzorce, matematické věty. Pro 27 % je významné, že to tvrdí učitelka jejich dítěte či někdo vzdělaný z příbuzných. To, že dítě prošlo nějakými testy nebo že řeší zajímavé úlohy určené starším nebo pro matematickou olympiádu, je argumentem pro 15 %. Pro pouhá 4 % je to schopnost řešit obtížné slovní úlohy a pro 2 % je to úspěšnost v geometrii, především v oblasti výpočtů.

Komunikace škola–rodina

Škola má v současnosti možná až příliš úkolů a podmínky učitelů (ač je škola na lepší technické vybavenosti) jsou stále redukovanými pravomocemi a opětným nárůstem počtu dětí ve třídách některých regionů zhoršeny. V komunikaci školy s rodiči hrají priority jiné faktory – akcent na úspěch a posílení kázně. Soustavné zdůrazňování nutnosti individualizovat přístup k žákům, zohledňovat žáky se specifickými poruchami učení či chování směruje komunikaci jinam, což vyčleňuje téma nadprůměrný či dokonce nadaný žák na okraj. Zákonitě pak rodiče domnívající se, že jejich žák je vysoce nadprůměrný, vyhledávají či zakládají speciální zařízení pro své děti. Změna pohledu na opravdu nadprůměrné/nadané žáky by jistě pomohla ovlivnit mnohé, tedy dívat se nejen na celou problematiku žáka komplexněji, ale chápat takového žáka jako žáka se „specifickou odchylkou“, tedy žáka, o kterém toho učitel musí více vědět, podobně jako se učil o dyslexii, dyspraxii. Ovlivnit tento stav znamená vytvářet pro to i mediálně klima, nespoléhat jen na izolované semináře pro učitele a rodiče, ale nabídnout seriózní literaturu, která nevidí nadprůměrného/nadaného žáka jako unifikovaný prototyp.

Literatura

[1] Hadjmoussová, Z.: *Intervence. Pedagogicko-psychologické poradenství.* UK, Praha, 2004.

[2] Hadjmoussová, Z., Duplinský, J.: *Diagnostika. Pedagogicko-psychologické poradenství II.* UK, Praha, 2002.

[3] Jurášková, J.: *Základy pedagogiky nadaných.* Formát, Pezinok, 2003.

[4] Kaslová, M.: *Comment on voie les Maths.* Poster ICME, Sevilla, 1996.

[5] Kaslová, M.: *Číslo I, II.* Raabe, Praha, 1998.

[6] Kaslová, M.: Vnímání a vyjadřování kvantity u 5–7letých dětí. In: *Sborník Matematika 3.* (Uhlířová, M., ed.), Vydavatelství UP, Olomouc, 2008, s. 124–129.

[7] Laznibatová, J.: *Nadané dieťa jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie.* IRIS, Bratislava, 2001.

[8] Machů, E.: *Identifikace a vzdělávání nadaných žáků.* MSD, Brno, 2005.

[9] Mackintosh, N. J.: *IQ a inteligence.* Grada, Praha, 2000.

[10] Mönks, F. J., Ypenburgová, I. H.: *Nadané dítě.* Grada, Praha, 2002.

Matematické kurzy projektu Talnet

Karel Pazourek, MFF UK, Praha [1]

Abstrakt. *Projekt Talnet se věnuje talentovaným a nadaným dětem v přírodních vědách a matematice. V jeho rámci se pořádají již dva matematické kurzy. Článek popisuje jejich matematický obsah a přínosy pro rozvoj schopností jejich účastníků.*

Projekt Talnet

Projekt Talnet [1] vzdělává děti se zájmem o přírodní vědy ve věku od 14 do 18 let. Je realizován Laboratoří distančního vzdělávání KDF MFF UK v Praze. Projekt byl spuštěn v roce 2003, od té doby se počet kurzů rozrostl z jednoho na sedmnáct.

Jednotlivé kurzy probíhají kombinovanou formou, převažuje však distanční část vedená v online prostředí. Studenti zde studují materiály připravené instruktory a řeší zadané problémy. Přitom mohou s instruktory dle potřeby komunikovat. Online prostředí tak umožňuje individuální přístup k talentovaným studentům. Vyvrcholením kurzu je pak vypracování seminární práce, kterou studenti nejdříve obhajují v online prostředí před účastníky kurzu a poté před živým publikem na soustředění, kde se setkávají studenti a instruktoři všech kurzů Talnetu.

Matematické kurzy Talnetu

První matematický kurz Talnetu byl spuštěn ve školním roce 2007/8, následující rok pak i druhý z kurzů. Oba kurzy jsou rozděleny do dvou tématických částí. První kurz seznamuje studenty s přeměnou mnohoúhelníků na čtverec a s aplikacemi polynomů. Druhý kurz se zabývá geometrickými zobrazeními, v jarní části pak kombinatorikou, číselnými řadami a grafy.

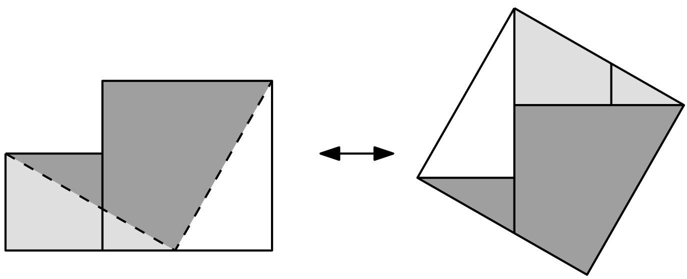
[1] e-mail: kajakajakaja@seznam.cz

Přeměna mnohoúhelníků na čtverec

Problém přeměny mnohoúhelníků, obecně rovinných útvarů, na čtverec o stejném obsahu je úzce svázán s měřením obsahů těchto mnohoúhelníků.

Každý si asi dokáže představit, že pokud máme dán mnohoúhelník o obsahu S, pak dokážeme zkonstruovat čtverec o obsahu S. Je však možné takový mnohoúhelník vhodně rozřezat, vzniklé dílky přeskládat a dostat čtverec o obsahu S? Existuje nějaký obecný postup? Teprve v 18. století bylo dokázáno, že takové rozřezání ke každému mnohoúhelníku existuje.

V kurzu se nejprve zabýváme přeměnou trojúhelníku na obdélník o stejném obsahu (aplikace Cavalieriho principu), poté přeměnou obdélníku na čtverec (geometrické využití Pythagorovy věty, konstrukce úseček jako součet, rozdíl nebo druhá odmocnina součinu jiných dvou úseček). Dále se ukazuje rozřezání mnohoúhelníku na trojúhelníky, následuje přeskládání na obdélníky o vhodných délkách stran a složení výsledného čtverce; jiná metoda používá Pythagorovu větu ke konstrukci čtverce, jehož obsah je součtem obsahů několika daných čtverců (viz následující obrázek).



Podrobněji se tomuto tématu věnujeme v článku [2].

Polynomy a polynomiální funkce

Polynomy, jejich kořeny, polynomiální funkce a jejich grafy a jejich vlastnosti jsou vděčným tématem ve středoškolské matematice, také se často vyskytují při řešení praktických problémů. V současnosti se polynomy často používají ve výpočetní technice a v průmyslovém designu, ale i v dalších oblastech.

V první části kurzu se soustředíme na vztah dělitelnosti polynomů a jejich kořenů, ukazujeme algebraické metody, jak kořeny nalézt. Dále zavádíme na polynomech operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a též i „operace“ derivování a integrování. V druhé části kurzu se věnujeme polynomiálním funkcím, pomocí iteračních metod hledáme průsečíky jejich grafů s osou x (jinými slovy řešíme rovnici $f(x) = 0$). V jednotlivých lekcích se pak objeví metody bisekce (půlení), sečen, Newtonova metoda, Sturmovy posloupnosti, v závěrečné lekci pak i konstrukce interpolačních polynomů (polynomů, jejichž grafy procházejí předem danými body).

Více informací o této části kurzů lze naleznout v článku [3].

Zobrazení v rovině a prostoru

Šest lekcí zahajujících druhý matematický kurz Talnetu je věnováno geometrickým zobrazením, především těm rovinným, zobrazením v prostoru se věnujeme pouze okrajově. Důraz byl kladen na základní přehled shodných a podobných zobrazení, na jejich charakteristiku pomocí matic a na zavedení pojmu invariant zobrazení.

Nejprve jsme zavedli pojem zobrazení pomocí kartézského součinu a relací. Zopakovali jsme základní vlastnosti zobrazení, prostotu, surjektivnost, vzájemnou jednoznačnost (studenti by je měli znát jako vlastnosti funkcí), v souvislosti s těmito pojmy bylo uvedeno inverzní zobrazení. Pomocí skládání zobrazení je ukázána základní vlastnost inverzního zobrazení

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(\alpha(x)) &= x, \\ \alpha(\alpha^{-1}(y)) &= y. \end{aligned}$$

V prvních dvou lekcích se zdůrazňuje obecnost pojmu zobrazení, že se netýká pouze zobrazení v rovině, ale je možné zobrazovat množiny jiných objektů (například čtverců, znaků Morseovy abecedy). Třetí lekce je z velké části věnována zopakování nejznámějších zobrazení v rovině, posunutí, otočení, středové a osové souměrnosti, stejnolehlosti, ale také je zavedeno identické zobrazení. Poté je představen pojem projekce, ukázány projekce v rovině (na přímku nebo na kružnici) a zmíněny i projekce v prostoru a jejich využití v kartografii. Praktický příklad projekce si studenti vyzkouší při kreslení stínu hromady kostek.

V návaznosti na zopakování zobrazení v rovině se pak zavádí pojem invariantů zobrazení, vysvětluje se, proč se některým zobrazením říká shodná nebo podobná.

V druhé půli tématického celku se věnujeme maticím a maticovému vyjádření zobrazení v rovině. Nejprve se zavedou matice a početní operace s nimi, determinant matice. Ilustruje se vztah mezi soustavou rovnic a maticí této soustavy, řeší se soustavy rovnic pomocí determinantů jejich matic. Zavádí se pojem vektoru v soustavě souřadnic, ukazuje se sčítání a odčítání vektorů, posléze matice zobrazení. Díky tomu je možné ukázat i skládání zobrazení pomocí matic a ukázat, že determinant matic shodných zobrazení je roven ± 1. To se pak plně projevuje při skládání zobrazení, kdy se absolutní hodnota determinantu shodných zobrazení zachovává, je tedy invariantem těchto zobrazení.

Tématická struktura kurzu je uvedena v následující tabulce:

Lekce 1	Kartézský součin a relace. Pojem zobrazení. Vlastnosti zobrazení.
Lekce 2	Skládání zobrazení. Zobrazení v rovině.
Lekce 3	Projekce v rovině a v prostoru. Invarianty zobrazení.
Lekce 4	Matice. Operace s maticemi. Determinant. Matice a soustavy rovnic.
Lekce 5	Vektorová algebra. Matice shodných zobrazení v rovině.
Lekce 6	Skládání zobrazení a matice. Zobrazení na sféře.

Kombinatorika, číselné řady a grafy

Druhou část druhého kurzu připravil doc. RNDr. Emil Calda, CSc. Zabývá se základy kombinatoriky, číselnými řadami a úvodními partiemi teorie grafů.

V prvních lekcích se věnujeme permutacím, permutacím s opakováním a nepořádkům (permutacím prvků a_1, a_2, $\ldots a_n$, ve kterých žádný prvek a_i není na i-tém místě), jsou odvozeny vzorce pro počty všech takových uspořádání. Je představen přihrádkový (Dirichletův, holubníkový) princip, který je pak aplikován na různé problémy. V lekci o Fibonacciho číslech se ukazují problémy počtu dláždění chodby nebo počtu různých vyjití schodiště. Studenti se poprvé v kurzu setkávají se sčítáním různých skupin čísel (sudých Fibonacciho čísel), toto téma je pak rozvíjeno v závěrečné lekci, kdy se například sčítá prvních n přirozených čísel nebo jejich druhých mocnin. Myšlenky a prostředky elementární teorie grafů jsou častým motivem různých matematických soutěží a jsou vděčným námětem problémových úloh. V páté lekci se studenti kurzu seznamují se základními pojmy (stupeň uzlu, rovinný graf) a tvrzeními (Eulerův vzorec) a zkoušejí si tyto pojmy aplikovat na rozličné typy problémů.

Jednotlivá témata jsou procvičována (a do značné míry i vykládána) na situačních příkladech, celá třetí lekce je dokonce věnována procvičování přihrádkového principu. Studenti např. počítají, kolik Pražanů má stejný chrup, kolika způsoby lze vyjít schodiště, na kolik částí dělí určitý počet přímek rovinu atd. Názornost výkladu je umocněna videoukázkami odvození probíraných vzorců nebo vysvětlení typů řešených problémů.

Lekce 1	Permutace a nepořádky.
Lekce 2	Permutace s opakováním. Přihrádkový princip.
Lekce 3	Úlohy o přihrádkovém principu.
Lekce 4	Fibonacciho čísla.
Lekce 5	Elementární poznatky z teorie grafů.
Lekce 6	Sčítání přirozených čísel.

Přínosy matematických kurzů Talnetu

Velkou výhodou matematických kurzů Talnetu je možnost individuální práce s matematickými talenty a nadšenci. Díky online prostředí není problém věnovat se každému studentu zvlášť, komunikovat s ním a rozvíjet jeho zájmy v konkrétních oblastech matematiky.

Online komunikace také umožňuje vedle dopracovávání řešení i zdokonalování argumentačních schopností studentů: Je možné studenty vést k vylepšování zdůvodnění a tříbit tak jejich myšlení.

Studenti také sepisují, mnohdy poprvé, rozsáhlejší odborný text, seminární práci. Vedle odborných a výzkumných aktivit (hledání literatury a dalších zdrojů, studium textů, provádění výpočtů nebo měření) se soustředíme i na formální stránku práce. Studenti se tak učí strukturovat odborný text, citovat zdroje, formulovat své myšlenky a závěry. Přímo se tak připravují na své další odborné vzdělávání.

Literatura

[1] Projekt Talnet, www.talnet.cz

[2] Šír, Z., Pazourek, K.: Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných žáků I: Wallace–Bolyai–Gerwienova věta. In: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol,* ZČU, Plzeň, 2008, s. 291–296.

[3] Pazourek, K., Šír, Z.: Zkušenosti s distančním vzděláváním talentovaných žáků II: Polynomy. In: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol,* ZČU, Plzeň, 2008, s. 231–235.

Matematika a její aplikace – práce s rozdílnými skupinami žáků

Jana Plíšková, ZŠ Josefa Ressla, Pardubice [1]

Abstrakt. *Článek se zabývá použitím projektů při práci se žáky základní školy. Jsou uvedeny čtyři nejúspěšnější autorčiny projekty: Trojčlenka, Statistika, Kam na školu v přírodě? Matematika v běžném životě.*

Úvod

Jsem učitelkou matematiky na 2. stupni základní školy. Svoji dráhu učitele jsem zahájila na škole se standardními třídami a třídami s rozšířenou výukou TV – plavání. Po čase jsem přešla na školu se standardními třídami, s třídami s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů a třídami s rozšířenou výukou TV – hokeje.

Práci s dětmi považuji za neustálé hledání a střídání vhodných metod a strategií, které vedou k úspěchům při motivaci žáků a při jejich zvládání učiva. Zabývám se aktivizujícími pomůckami, využitím her, k aplikaci učiva využívám projektů. Mojí snahou je zpřístupnit matematiku žákům formami, které jsou pro ně příjemné a které vnímají jako hru a ne učení.

Můj příspěvek byl připraven jako pracovní dílna, ve které si učitelé mohou sami vyzkoušet některé metody práce a navzájem si vyměnit své zkušenosti a nápady. Popis této dílny uvádím ale poněkud obecněji.

Pracovat s úlohami, které přináší život kolem nás, nikoli učebnice, jsem se rozhodla až po několikaleté praxi, když jsem vychovávala žáky své tehdejší třídy a přistoupila na hru otázek: „K čemu nám to bude?“. Začala jsem sbírat zkušenosti z různých pracovních oborů, a připravovat tak žáky na výběr povolání. Práce a úkoly, kterým se nyní říká projekty, jsem zprvu zadávala bez přílišné předchozí rozvahy. Při výuce se rozvíjely debaty, při kterých jsme se dostávali do oblastí, které naznačovaly různost chápání, a při nichž jsem občas zadala úkol cosi zjistit, propočítat, vyzkoušet. Až vyhodnocování zadaných úkolů ukázalo velký význam takové práce. Postupně jsem získala zkušenost, jaké reakce mohu od žáků očekávat a co musím v zadání upřesnit, aby byly práce smysluplnější, zajímavější a měřitelnější. Vytvořila jsem řady návazných úloh, kterým nyní již sama říkám projekty. Mezi klady takto zadávaných úloh patří

[1] e-mail: pliskova.jana@seznam.cz

samostatnost při vypracovávání, originalita v pochopení a jejich zpracování a seznámení žáků s oblastmi či prostředím každodenního života. Často se mi tak podařilo zapojit i rodiče do práce vedoucí ke zjištění informací, a tím přispět k větší informovanosti dětí o problematice rodinného života. Omylů žáků při pochopení úlohy využívám v rozborech vhodnosti výběru témat, řešení, ukázkách jiných přístupů a při motivaci k další práci. Různorodost prací napomáhá i k motivaci slabších žáků a dává možnost je vyzdvihnout například za volbu témat či preciznost zpracování, přestože ostatní stránky práce nejsou nejlepší. Individuálním řešením je nutné věnovat větší časový prostor na zpracování i na vyhodnocení, proto nepovažuji za vhodné zadávat příliš mnoho takových úloh v krátkém časovém sledu. Podle potřeby, tématu, obtížnosti či rozsahu práce volím různé formy zadávání úloh: k vypracování ve škole či doma, zpracování individuální nebo ve skupinách.

Popis projektů

V následující části tohoto příspěvku popíšu čtyři své nejúspěšnější projekty. První je ukázkou individuální práce žáků, druhý je založen na kolektivní práci, ze které žáci uplatní zkušenosti v závěrečné individuální práci, třetí ukazuje možnost spolupráce učitelů a propojení výuky v několika předmětech a čtvrtý představuje spolupráci všech učitelů matematiky ve všech ročnících a třídách.

I. projekt: 7. ročník – Trojčlenka

Téma k procvičení je přímá a nepřímá úměrnost, procenta a finanční matematika. Původním záměrem bylo ukázat žákům složitost tvorby slovních úloh a učit je přesnému vyjadřování. Tato snaha byla následně spojena s cílem dokázat, že matematika základní školy je matematikou potřebnou pro běžný život. Výsledkem projektu jsou individuální práce žáků. Zadávám ho v několika krocích v sedmém ročníku ZŠ.

1. úkol: *Přečti si nějaký článek v časopise, novinách atp. a z informací v něm obsažených formuluj a vypočítej slovní úlohu na přímou úměrnost.*

Žákům stanovím formu výstupu: na papír formátu A4 vybraný článek nalepit a na stejný papír i úlohu zapsat a vyřešit. Doba na vypracování je jeden týden. Takto zadaný úkol skrývá nečekané možnosti věnovat se různým tématům, které se objeví po vypracování. Nikdy se nedá odhadnout, jaká témata si žáci vyberou, a tím je tato práce zajímavá a tvořivá i pro nás, učitele. Složitějším úkolem pro žáky je vytvořit úlohu na nepřímou úměrnost, proto tento úkol zadávám pouze jako doplňkový „pro zájemce“.

2. úkol: *Podobně jako u prvního úkolu najdi článek v novinách či časopisu a z jeho textu sestav a následně vyřeš slovní úlohu na procenta.*

Nejčastěji se vyskytují úlohy čerpající z nabídkových letáků obchodů. Proto zařazuji opět úkol „pro zájemce“, najít klamavou reklamu.

3. úkol: *Máš fiktivních 10 000 Kč. Ulož je na dobu jednoho roku do nějaké banky či spořitelny a vypočítej, kolik korun tímto vkladem za jeden rok získáš. Své rozhodnutí dokumentuj nabídkou zmíněného finančního ústavu.*

Tento úkol předpokládá seznámení se se základními pojmy finanční matematiky, tedy pojmy vklad, úrok, úroková sazba. Je to úkol dlouhodobější, žáci hledají potřebné informace na internetu, v bankách, komunikují s rodiči. Najdou se i žáci, kteří se snaží uložit peníze do všech dostupných bank a výsledky porovnávají. Tuto snahu motivuji soutěží, komu se podaří uložit peníze nejvýhodněji.

Zkušenosti s projektem: Žáci podobnou formu vítají. Mohou se realizovat a něčím vyniknout. Proto se snažím i na chybně řešených úlohách najít nějaký klad, který vyzdvihnu a autora pochválím. Může jím být zvolené zajímavé téma, forma zpracování či úprava. Protože se jedná o individuální úkol, nestává se, že by ho žáci opisovali ve škole před vyučováním. Naopak je ve většině případů vypracován včas a samostatně. Setkala jsem se i se sebekritikou, a to v případě, kdy si žáci ponechali úkol „na poslední chvíli“ a nebyli schopni si zajistit potřebné údaje. Některé práce svým obsahem předčily moje očekávání. Setkala jsem se i s vtipným zadáním, kdy se dluhy splácely porodným, řešily se případy hromadných sňatků ale i vlastnictvím střelných zbraní.

V poslední části mnozí žáci uložili peníze do více bank dostupných na našem trhu. Ukládali ale také do pojišťoven či stavebních spořitelen a to mi umožnilo vysvětlit některé pojmy, se kterými se v životě budou setkávat. Velmi výrazným kladem právě popsaného projektu je zapojení rodiny. Často žáci vedou o dané problematice diskuzi s rodiči. V současné době má již řada z nich vlastní účet, který si spravují.

II. projekt: 8. ročník – Statistika

Téma k procvičení je statistika, statistické šetření a vyhodnocování pomocí diagramů.

Nejprve se seznamujeme ve třídě se statistickým šetřením na příkladu výpočtu známek z matematiky. Protože si přehledy známek a jejich aritmetický průměr dělají žáci již několik let sami, připadá jim učivo jednoduché a známé. Diagram jim pak viditelně ukazuje výsledky jejich práce. V další části se žáci formou skupinové práce zabývají šetřením nějakého jevu ve třídě. Obvykle volí témata týkající se barvy triček, očí, velikostí bot atd. Volbě ponechávám volnost a teprve po zpracování šetření je vedena diskuse o využitelnosti a smysluplnosti zvoleného tématu a o formě zpracování.

Projekt A: Třetím úkolem bývá sledování nějakého jevu ve škole. S tématy tentokrát pomáhám a pokud žáci vstupují do vyučovacích hodin, domluvím se předem s kolegy. Jedná se opět o skupinovou práci. Skupiny zpracovávají např. témata: volba SŠ v devátém ročníku, počet zaměstnanců ve škole a jejich pracovní zařazení, docházka žáků na obědy atd. Hodnocení volím formou slovní, o tématech a zpracování vedeme s žáky diskusi.

Projekt B: V poslední fázi žákům zadávám úkol zabývat se statistickým šetřením v jejich okolí. Zpracování provádí jednotlivci a vyčleňuji na ni více času – asi dva až tři týdny. Práce bývají po odevzdání vyvěšeny na nástěnku, kde si je všichni mohou prohlédnout. Následně v třídním kolektivu opět diskutujeme o vhodnosti témat, využití šetření a způsobu jejich zpracování. Ke zpracování šetření doporučuji připravit jednotný pracovní list.

Zkušenosti s projektem: Domnívám se, že popsaný projekt žáky zaujal. Byla vidět snaha o volbu zajímavého tématu. Mnozí věnovali práci spoustu času díky velikosti zvoleného souboru. Mezi nejúspěšnější témata patřila šetření: Můj denní rozvrh činností, Programová nabídka komerční televize, Přijetí žáků na SŠ, Věkové složení obyvatel domu, Způsob dopravy lidí do zaměstnání, Typ automobilů na našich silnicích atd. Nejpilnější žáci využili znalostí práce s počítačem a šetření zpracovali pomocí nejrůznějších, a to i prostorových diagramů.

Při posledním použití tohoto projektu jsem využila nápadu předchozích žáků a nechala jsem ve třídě zpracovat programovou nabídku dne různých televizních stanic, a to, kolik času věnují filmům, seriálům, dokumentům atd. Výsledky byly očekávané.

III. projekt: 8. ročník – Kam na školu v přírodě?

Nyní uvedu svůj první příklad vzájemné mezipředmětové spolupráce s kolegy. Nápad uskutečnit tento projekt se zrodil při školení na kurzech ESF [1], které má za cíl ukázat učitelům matematiky nové přístupy k výuce, a to nejen matematiky. Právě v rámci tohoto školení jsme se snažili připravit projekt s názvem „Kam na výlet?“. Poprvé jsem se tak sama setkala s důkladnou přípravou zadávacího listu pro učitele i pro žáky včetně podrobného rozboru kompetencí, zapojení průřezových témat, a co pro mne bylo to nejdůležitější, s přípravou projektu, který zahrnoval více oblastí a předpokládal mezipředmětovou spolupráci kolegů. Využila jsem nabytých zkušeností, a tak vznikl projekt „Kam na školu v přírodě?“. Toto téma jsem zpracovala pro žáky naší školy s cílem zjistit, ve kterých rekreačních zařízeních je možné zajistit školu v přírodě pro větší skupinu dětí. Rozhodli jsme se projekt zadat žákům 8. ročníků, kteří se již s obdobnou prací setkali a navíc mají i poměrně reálný odhad, co vše je potřeba k uskutečnění školy v přírodě.

Projekt byl zahájen v hodině rodinné výchovy. Žáci si povídali, co na které škole v přírodě zažili, co se jim líbilo, co by chtěli vidět, v jakém prostředí by se jim škola v přírodě líbila. Součástí hodiny byla i diskuze o tom, co vše je třeba zjistit a zajistit pro tak velkou akci. Žáci se nejdříve rozdělili do pracovních skupin po 3 až 5 žácích. Rozdělili si úkoly, kdo jaké informace zjistí. Následně byl žákům v hodině výpočetní techniky umožněn přístup na internet, kde se snažili vyhledat vhodné objekty a zjistit potřebné kontakty, ceníky, vybavení. V hodině matematiky jsme se zabývali propočty nákladů, cestovného, vzdálenostmi apod.. Na závěr pak žáci v hodině výtvarné výchovy vytvářeli katalogy pro „svoji“ školu v přírodě.

Motivací pro žáky bylo vyhlášení soutěže o nejzajímavěji připravenou školu v přírodě. Odměnou pro vítěze byl slib, že se pokusíme jejich školu v přírodě uskutečnit.

Odevzdání prací bylo spojeno se slovní prezentací, při které nás žáci udivovali nápaditostí, výmluvností, či videonahrávkou ze zvoleného místa. Nejdříve proběhlo žákovské hlasování o nejzajímavější školu v přírodě, pak jsme hodnotili my, učitelé.

Zkušenosti s projektem: U takto připraveného projektu není důležité, jestli žáci na závěr získají známku, ale že se seznámí s problematikou přípravy akce pro skupinu osob. Vyzkouší si smysluplné využití výpočetní techniky, zvládnou propočítání nákladů, zjistí zajímavosti o různých místech a v neposlední řadě se učí komunikovat v pracovní skupině, rozdělovat si spravedlivě práci, hodnotit přínos jednotlivců pro práci skupiny, či prezentovat svoji práci před ostatními. Učí se i posuzovat přednosti a výhody zvoleného místa, odlišovat důležité a nepodstatné informace. I když byl žákům dán prostor pro práci ve škole, využili i možnost získávat informace doma, ve městě, do vybraných zařízení i telefonovali, kontaktovali autodopravce. Úroveň zpracování je samozřejmě různá. Některé skupiny zvolily zpracování pomocí počítače, fotografií, webových stránek zařízení, jiné propracovaly více otázku náplně týdenního pobytu. Překvapením nejen pro nás byla videonahrávka, která ukázala rekreační zařízení a jeho okolí.

Přestože se některým skupinám práce nepovedla k plné spokojenosti, věřím, že tento projekt byl pro všechny žáky velkým přínosem. Byl přínosem nejen pro žáky, ale i pro nás, učitele, a to proto, že jsme si vyzkoušeli vzájemnou spolupráci ve více předmětech, kde by nás zřejmě dříve společná práce nenapadla. Navíc jsme pro školu získali materiál, který můžeme dále využívat. Tímto projektem jsme také předvedli možnost zařazení průřezových témat do výuky nenásilnou formou.

Školu v přírodě, která měla největší ohlas a úspěch u žáků, jsme uskutečnili, a všem, dětem i nám, se opravdu líbila.

IV. projekt: II. stupeň ZŠ – Matematika v běžném životě

Při výuce se stále snažím ukazovat žákům, kde se mohou s matematikou v běžném životě setkat. Vymýšlím úlohy, projekty, místa pro vhodné exkurze. Toto snažení mne dovedlo k nápadu nechat žáky sjednotit jejich poznatky a prezentovat je formou posteru. Jako motivaci jsem použila nápad základní školy v Uherském Hradišti udělat matematickou rozhlednu. Na té mé žáci pomyslně stoupají vzhůru, při cestě si upevňují matematické kompetence a na jejím vrcholu, v devátém ročníku, se rozhlížejí do okolí a dotváří si představu o tom, kde v životě se s matematikou setkají. A své pozorování, kde je matematika potřeba, zpracují na čtvrtku formátu A2. Při postupu na vrchol rozhledny se žáci též rozhlíží z jednotlivých pater. Projekt jsem tedy rozšířila, s omezenými tématy, i v 7. a 8. ročníku. Témata pro toto zpracování jsem zvolila podle zvládnutého učiva: 7. ročník – Domov, Sport, 8. ročník – Cestování, Finance, Obchod, 9. ročník – Cestování, Stavebnictví, Strojírenství. Jako motivační pomůcku jsme nakreslili velkou rozhlednu a kolem ní umístili práce žáků.

Zkušenosti s projektem: Tento projekt jsme uskutečnili s kolegy zatím pouze jednou a byl první spoluprací všech učitelů matematiky na naší škole tohoto druhu. Zadali jsme ho ve stejnou dobu ve všech zvolených ročnících. Získané materiály pak obohatily naši školní matematickou nástěnku. Byl též vhodným vyplněním času v závěru školního roku.

Závěr

Mým velkým přáním je, aby se všichni žáci dobře orientovali v reálném životě, ve kterém je matematika provází na každém kroku, a měli rádi matematiku alespoň v takové míře, aby na hodiny strávené ve školních lavicích vzpomínali v dobrém, přestože hodnocení na vysvědčení, které jim musím udělit, mnohdy není příliš lichotivé.

Literatura

[1] Kubínová, M.: *Projekty ve vyučování matematice – cesta k tvořivosti a samostatnosti.* PedF UK, Praha, 2002.

Kontinuální korespondenční soutěž jako zdroj zajímavých matematických a fyzikálních úloh [1]

Lucie Růžičková, Jaroslav Zhouf, Pedagogická fakulta UK, Praha [2]

Abstrakt. *Příspěvek představuje korespondenční soutěž v řešení úloh z matematiky a fyziky, která probíhá v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální, a naznačuje možnosti využití zařazovaných úloh i jejich přínos pro čtenáře.*

V letošním ročníku časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální byla obnovena tradiční rubrika *Naše soutěž* [1], kde čtenáři naleznou vždy dvě úlohy, jednu z matematiky a jednu z fyziky. Způsob organizace soutěže

[1] Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

[2] e-mail: lucie_ruzickova@seznam.cz; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

je obdobou korespondenčních seminářů: čtenáři posílají svá řešení do redakce, kde jsou jednotlivá čtenářská řešení opravena, obodována a s podrobným komentářem pak zaslána zpět řešitelům. V dalším čísle jsou pak zveřejněna autorská nebo zajímavá čtenářská řešení jednotlivých úloh a průběžné výsledky soutěže. Zadávané matematické a fyzikální úlohy nebývají tradičně školské, při jejich řešení si však čtenáři většinou vystačí se znalostmi na úrovni prvního či druhého ročníku střední školy, v některých případech dokonce i se znalostmi na úrovni základní školy.

Naše soutěž je tedy, stejně jako celý časopis, určena širokému okruhu čtenářů z řad učitelů, studentů i dalších zájemců o matematiku a fyziku. Učitelé mohou v předkládaných úlohách najít inspiraci pro práci s talentovanými žáky v hodinách matematiky a fyziky, zejména při přípravě studentů na účast v matematické a fyzikální olympiádě. Při vhodném pedagogickém vedení však mohou úlohy sloužit ke zpestření hodin matematiky nebo fyziky obecně v jakékoli třídě. Studentům poskytují soutěžní úlohy příležitost, jak samostatnou tvořivou prací rozvíjet svůj potenciál. Způsob organizace soutěže zároveň výhodně kombinuje tento princip samostatné práce s principem individualizované zpětné vazby, kterou po opravení zaslaného řešení získává každý jednotlivý řešitel. Právě tento individuální přístup k hodnocení čtenářských řešení spolu s kontinuálním zveřejňováním výsledků v průběhu jednotlivých etap podporuje přirozenou soutěživost a zvyšuje atraktivitu soutěže.

Obdobná soutěž probíhá v časopise MFI, kde jsou však zadávány pouze úlohy matematické, jejichž souhrnný přehled za uplynulých 13 let je uveřejněn v publikaci [2]. Zajímavým aspektem, který Naši soutěž poněkud odlišuje od jiných aktivit podobného formátu, je souhrnné hodnocení matematických i fyzikálních úloh. Tímto způsobem jsou zejména studenti vedeni k rovnocennému rozvoji v matematice i fyzice, zároveň si uvědomují vzájemnou provázanost těchto dvou oborů. V souladu s tematickým zaměřením časopisu bylo původní snahou redakce zařazovat do soutěže i úlohy z informatiky, tam se však v současné době ustupuje od úloh založených na obecné algoritmizaci směrem ke konkrétním programovacím úkolům v určitém programovacím jazyce, jejichž zadání často přesahuje několik stránek textu. Mezi soutěžními úlohami tedy čtenáři naleznou pouze úlohy matematické a fyzikální.

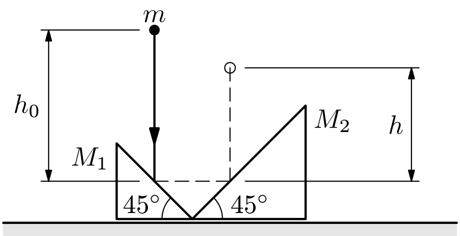
Naše soutěž tak nabízí zájemcům o matematiku a fyziku další zdroj zajímavých úloh, při jejichž řešení mohou uplatnit a dále rozvíjet své znalosti těchto oborů. Pro ilustraci dále uvádíme dvojici úloh, která byla zadána v čísle 1/2009.

Úloha 1. V lichoběžníku $ABCD$ je K střed základny AB a L střed základny CD. Dokažte, že lichoběžníku $AKLD$ lze opsat kružnici, právě když $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$, kde α a β jsou vnitřní úhly při vrcholech A a B lichoběžníku. (*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 2. Na hladkém vodorovném ledě leží dva klíny o hmotnostech M_1 a M_2, jejichž úhly sklonu jsou 45° (obr. 1). Na první klín dopadne volným pádem kulička o hmotnosti m z výšky h_0. Tato kulička se od klínu dokonale pružně odrazí a dopadne na druhý klín, kde opět dojde k dokonale pružné srážce s klínem. Kulička potom vystoupí do výšky h.

a) Určete poměr výšek $\frac{h}{h_0}$.

b) Určete rychlost, s jakou se od sebe klíny vzdalují po odrazu kuličky od druhého klínu.



Obr. 1

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty

$$\frac{M_1}{m} = 10, \quad \frac{M_2}{M_1} = 2, \quad h_0 = 0{,}5 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Tření mezi ledem a klíny zanedbejte.

Miroslava Jarešová

Literatura

[1] Zhouf, J. (ed.).: Naše soutěž. *Rozhledy matematicko-fyzikální,* roč. 84, č. 1 (2009), s. 62–63.

[2] Švrček, J., Calábek, P.: *Sbírka netradičních matematických úloh.* Prometheus, Praha, 2007.

Jak může pomoci matematický software při řešení úloh

Miroslav Tichý, Střední škola aplikované kybernetiky, Hradec Králové

Abstrakt. *Příspěvek ukazuje, jak žáku znalému použití matematického softwaru pomůže počítač při řešení matematických úloh. Zaměřen je na použití programů Mathematica a GeoGebra.*

Ve školách se vždy říkalo, že k výuce matematiky stačí učiteli křída a tabule, další pomůcky nejsou potřeba. Je to samozřejmě míněno s nadsázkou, přesto je zřejmé, že v současné době toto tvrzení přestává platit.

Žáci i učitelé dnes už běžně pracují s počítači a právě v matematice mohou s výhodou použít matematický software. Učím na Stření škole aplikované kybernetiky v Hradci Králové. Tato škola je, jak je zřejmé už z jejího názvu, zaměřena na práci s počítači, snažíme se podporovat výuku jednotlivých předmětů počítačem všude tam, kde je to smysluplné. V matematice využíváme Excel, resp. tabulkové procesory pro zpracování dat, v oblasti dynamické geometrie program GeoGebra, případně Cabri Geometry.

Naším největším problémem byl výběr programu CAS (Computer Algebra System) pro použití v matematice. Nejprve jsme používali program Derive s českou lokalizací. Následně se nám podařilo zakoupit program Mathematica pro jednu učebnu. Program vyhovoval učitelům i žákům, kteří k němu měli přístup při vyučování matematiky i při přípravě na výuku. Proto jsme nyní pro školu zakoupili zatím tříletou verzi programu Mathematica, která umožňuje neomezené použití programu pro všechny žáky i učitele školy.

Použití programu Mathematica ve výuce matematiky se nám jeví jako přínosné, žáci mají možnost používat profesionální matematický program. Mathematica umožňuje symbolické i numerické výpočty, vynikající je ve vizualizaci dat. Velmi výhodné je použití programu pro učitele při výkladu i procvičování látky. Pomocí datového projektoru připojeného k notebooku může i v „nepočítačové“ učebně řešit příklady pomocí systému Mathematica, spouštět předem připravené prezentace k probírané látce i „on line“ počítat úlohy přímo při hodině, sestrojovat přesné grafy.

To vše je výhodné jak pro učitele, tak i pro žáky. Jaké další výhody přináší výuka matematiky s podporou programu Mathematica žákům?

Kromě výhod popsaných výše je to jistě možnost naučit se pracovat s programem, se kterým se mohou setkat jako studenti vysokých škol, které často Mathematicu používají. Důležité pro žáky je pochopitelně nejen zvládnutí syntaxe programu, ale především zvládnutí jeho použití. Nejen řešit rovnice a nerovnice, sestrojit graf funkce, ale žáci se musí naučit také matematizovat reálné problémy, sestavit postup řešení, s jehož technickou realizací jim počítač pomůže. Žáci při řešení úloh vidí, že především musí umět matematiku, pak teprve se mohou naučit použít matematický program. Bez znalosti matematiky mnoho nedokážou, program sám žádnou úlohu nevyřeší.

Podívejme se na řešení úloh z matematiky s podporou matematického softwaru. V prvním a druhém příkladě ukážeme použití programu Mathematica.

Příklad 1. *Dodefinujte funkci*

$$f\colon y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

tak, aby byla v bodě 1 spojitá.

Řešení. Je zřejmé, že funkce f není definována v bodě 1, není tam tedy ani spojitá. Funkce f je však definována v okolí bodu 1, což je izolovaný bod nepatřící do definičního oboru této funkce. Pokud v tomto bodě bude existovat limita funkce, bude možné v tomto bodě funkci dodefinovat a za její funkční hodnotu zvolit hodnotu této limity:

$\mathrm{f[x\_] := (x^2 - 1)/(x^3 - 1)}$

$\mathrm{Limit[f[x], x -> 1]}$

$$\frac{2}{3}$$

Funkce f má limitu v bodě 1, dodefinujme ji:

$\mathrm{f[x\_] := Piecewise[\{\{(x^2 - 1)/(x^3 - 1), x\ != 1\}, \{2/3, x == 1\}\}]}$

Funkce je předchozím příkazem definována jako podíl $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ pro všechna reálná $x \neq 1$, v bodě $x = 1$ je definována funkční hodnota $\frac{2}{3}$. Spočtěme funkční hodnoty v několika bodech.

Na vstupu zadáme:

f[0]

f[1]

f[2]

Výstupem budou odpovídající funkční hodnoty:

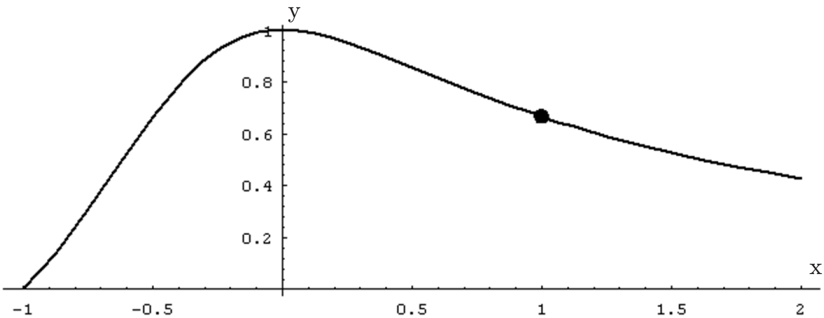
1

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{7}$

Sestrojme graf funkce pro $-1 \leq x \leq 2$:

Plot[f[x], {x, −1, 2}, AspectRatio −> Automatic,
Epilog −> {Disk[{1, 2/3}, 0.03]}]



Obr. 1. Graf funkce z příkladu 1

Vidíme, že graf (obr. 1) plně odpovídá naší představě o této funkci.

Příklad 2. *Sklenka na sekt má osový řez tvaru půlelipsy. Průměr sklenky je 8 cm a její hloubka je 3,5 cm. Vypočtěte, v jaké výšce bude hladina, je-li do sklenice nalit 1 dl kapaliny.*

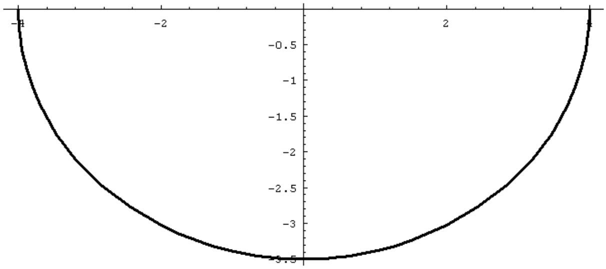
Příklad je převzat z písemné práce z matematiky v rakouském Bad Ischlu; našel jsem ji při procházení zajímavých stránek s matematickou tématikou na Internetu. Překvapilo mě, že dle vzorového řešení mohli žáci použít k řešení matematický software. Vyřešme tedy i my tuto úlohu s pomocí programu Mathematica.

Řešení. Využijme nejprve vizualizačních schopností programu k sestrojení zadané křivky (obr. 2) a následně k sestrojení modelu zadané sklenky (obr. 3). Pro zobrazení použijeme parametrické rovnice:

$a = 4$

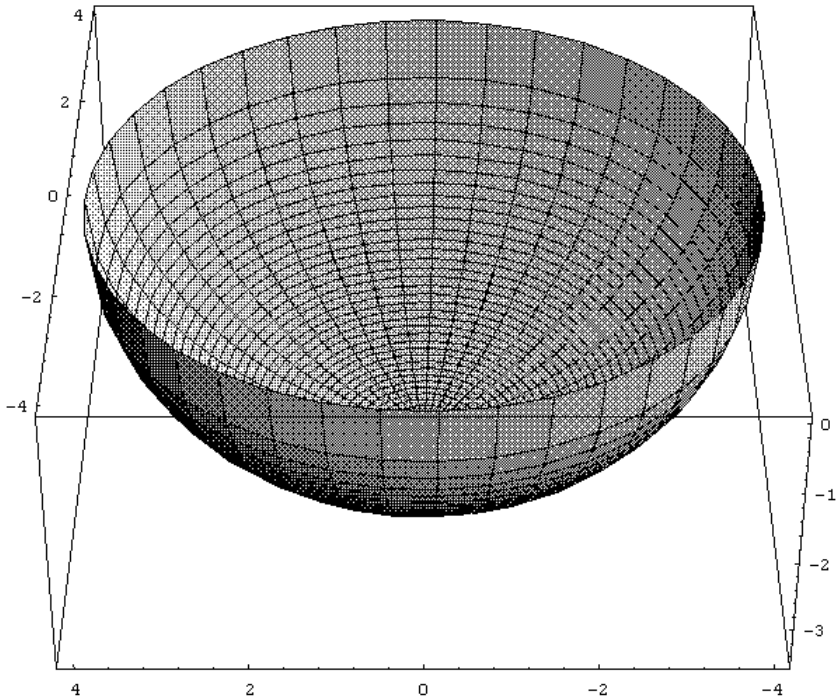
$b = \frac{7}{2}$

ParametricPlot[{a * Cos[t], b * Sin[t]}, {t, Pi, 2Pi}, AspectRatio -> Automatic]



Obr. 2. Půlelipsa sestrojená parametricky

ParametricPlot3D[{x*Cos[t], −Sqrt[a^2*b^2−b^2*x^2]/a, x*Sin[t]}, {t, Pi, 2Pi}, AspectRatio -> Automatic, ViewPoint -> {0, 3, −4}]



Obr. 3. Sklenka – plocha vzniklá rotací půlelipsy

Úlohu vyřešíme pomocí integrálního počtu. Zapíšeme rovnici elipsy a z ní vyjádříme proměnnou x, abychom získali funkci pro integrování:

$$\mathrm{el = b\hat{}2 * a\hat{}2 + a\hat{}2 * y\hat{}2 == a\hat{}2 * b\hat{}2}$$

$$\frac{49\mathrm{x}^2}{4} + 16\mathrm{y}^2 == 196$$

$$\mathrm{Solve[el, x]}$$

$$\{\{\mathrm{x} -> \frac{-\mathrm{Sqrt}[784 - 64\mathrm{y}^2]}{7}\}, \{\mathrm{x} -> \frac{\mathrm{Sqrt}[784 - 64\mathrm{y}^2]}{7}\}\}$$

Výsledek Mathematica vrací formou přepisovacích pravidel. Pro výpočet určitého integrálu reprezentujícího objem sklenice použijeme druhý z kořenů:

$$\mathrm{objem = Pi * Integrate[(784 - 64y\hat{}2)/49, \{y, -b, h\}]}$$

$$(\frac{112}{3} + 16\mathrm{h} - \frac{64\mathrm{h}^3}{147})\,\mathrm{Pi}$$

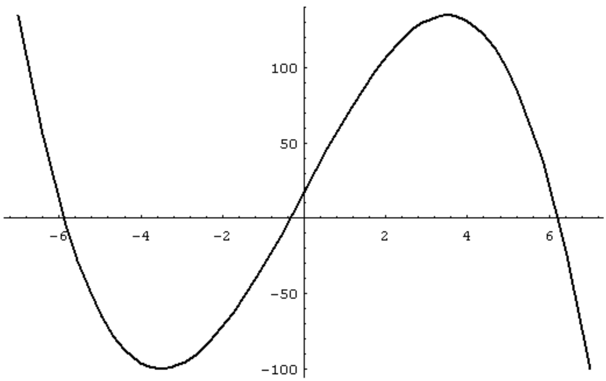
Zajímá nás, pro kterou hodnotu výšky h bude objem roven 100 cm^3. Řešení získáme numericky, pomocí příkazu NSolve:

$$\mathrm{reseni = NSolve[objem == 100, h]}$$

$$\{\{\mathrm{h} -> -5.8823\}, \{\mathrm{h} -> -0.345014\}, \{\mathrm{h} -> 6.22732\}, \}$$

Rovnice má tři kořeny. Z grafu (obr. 4) zjistíme, které řešení vyhovuje podmínkám úlohy:

$$\mathrm{Plot[\{(112/3 + 16h - h\hat{}3 * 64/147)\, Pi - 100\}, \{h, -7, 7\}]}$$



Obr. 4. Graf pomocné funkce

Vyhovuje pouze druhý kořen; dalším příkazem zjistíme výšku hladiny ve sklenici:

b + h/.reseni[[2]]

3.15499

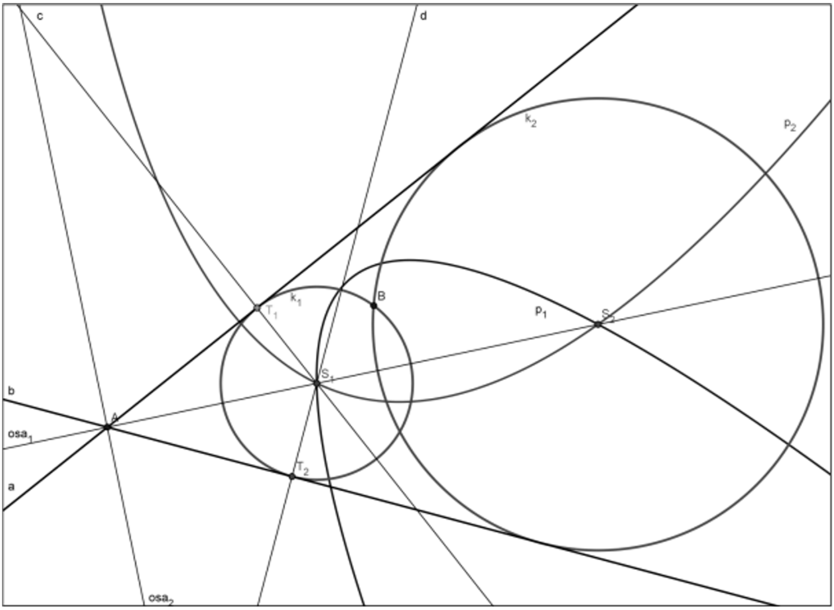
Hladina bude ve výšce 3.154 99 cm od dna. Výsledek by pochopitelně bylo vhodné ještě zaokrouhlit.

V dalších dvou příkladech ukážeme použití programu dynamické geometrie GeoGebra. Program je volně šiřitelný, bližší informace o něm jsou např. na `www.geogebra.org`.

Příklad 3. Řešme s pomocí programu GeoGebra klasickou úlohu z planimetrie: *Jsou dány dvě přímky a, b, dále bod B, který na žádné z nich neleží. Sestrojte kružnici, která se obou daných přímek dotýká a daným bodem prochází.*

Jedná se o Apollóniovu úlohu „ppb“, která je běžně řešena v prvním ročníku středních škol pomocí stejnolehlosti. Zde ukážeme jiné řešení; využijeme možnosti programu GeoGebra pracovat s kuželosečkami, zde s parabolou. U kuželoseček v programu GeoGebra nemusíme pracovat jen s jejich analytickým vyjádřením, stačí nám v tomto příkladu vycházet z ohniskových vlastností paraboly.

Řešení. Sestrojíme dané útvary libovolně na nákresně – grafickém okně programu GeoGebra (obr. 5). Hledáme střed kružnice splňující podmínky uvedené v zadání. Tento střed S musí být stejně vzdálen od přímky a i od bodu B. Leží tedy na parabole p_1 určené ohniskem v bodě B a řídicí přímkou a. Tuto parabolu můžeme v programu GeoGebra zkonstruovat příkazem v příkazové řádce `Parabola[B,a]`. Analogicky sestrojíme parabolu p_2 s ohniskem v bodě B a řídicí přímkou b. V průsečících obou parabol leží středy hledaných kružnic; úlohu je pak už snadné dokončit. Konstrukce je znázorněna na následujícím obrázku. Je zde dále sestrojena osa úhlu, který dané přímky svírají. Při konstrukci výše uvedeným způsobem jsme ale tuto osu nepotřebovali. Úloha ukazuje, jak využít program GeoGebra ke konstrukcím nejen euklidovskými prostředky.

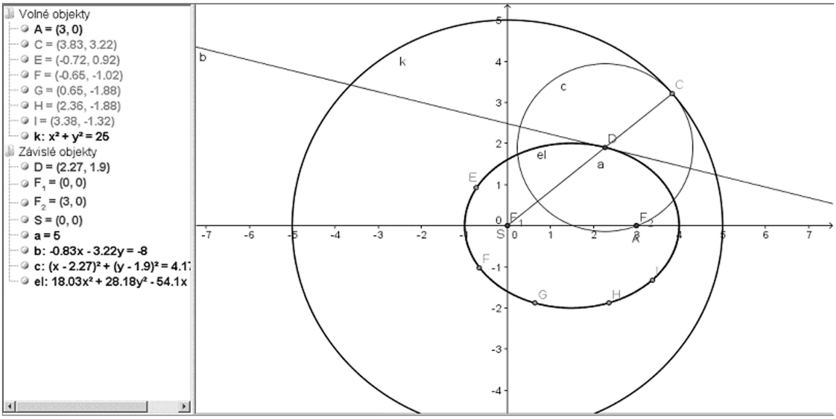


Obr. 5. Geometrické okno programu GeoGebra – řešení př. 3

Příklad 4. *Určete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem $A[3,0]$ a dotýkají se kružnice $k\colon x^2 + y^2 = 25$.*

Řešení. GeoGebra umožňuje pracovat se souřadnicemi a rovnicemi. Toho využijeme k řešení. Na kružnici k zvolíme libovolný bod C. Ten bude dotykovým bodem jedné z hledaných kružnic. Střed této kružnice D bude ležet na ose úsečky AC, dále na poloměru SC. Můžeme tak sestrojit jednu z hledaných kružnic. Pomocí nástroje programu GeoGebra „Množina bodů“ získáme hledanou množinu středů všech kružnic vyhovujících zadání. Vytvoříme-li kuželosečku el z libovolných pěti bodů této množiny, můžeme se v algebraickém okně programu přesvědčit, že se jedná o elipsu. Celé řešení je na obr. 6. Příkaz `Ohnisko[el]` určí ohniska této elipsy. Vidíme, že jsou právě ve středu dané kružnice a v daném bodě A.

GeoGebra pochopitelně nenahrazuje analytické řešení této úlohy, je ale zajímavé (nejen pro naše žáky), že umožňuje řešit úlohy tohoto typu rychle a efektivně.



Obr. 6. Geometrické okno programu GeoGebra – řešení př. 4

Závěr

Příspěvek ukazuje, že žáci znalí použití matematických programů je mohou používat efektivně ke svému prospěchu. Musí však při řešení příkladů s pomocí softwaru znát především matematiku tak, aby příslušným programům mohli zadat, „co a jak“ chtějí řešit. Znalost jen syntaxe programu Mathematica nebo GeoGebra pro řešení úloh s pokročilejší matematikou nestačí. Při příslušných znalostech matematiky a uvedených programů mají žáci výhodu proti těm, kterým matematické programy při řešení úloh nepomohou ať už proto, že je na příslušné škole nemají, nebo proto, že je na jejich použití učitelé matematiky nepřipravují.

Literatura

[1] Trott, M: *The Mathematica GuideBook for Symbolic.* Springer Science & Business Media, Inc., 2006.

[2] Dobrakovová, J., Kováčová, M., Záhonová, V.: *Mathematica pre stredoškolských učiteľov.* STU Bratislava, 2006.

[3] `http://www.wolfram.com`

[4] `http://www.geogebra.org`

[5] `http://home.eduhi.at/teacher/alindner/sites/math/matura/schriftliche_Matura_2008.pdf`

Co se do Matematického klokana nedostalo

Vladimír Vaněk, KAG PřF UP, Olomouc [1]

Abstrakt. *V příspěvku uvádím několik úloh „klokanského“ typu spolu s jejich řešením, které byly představeny v letech 2007 a 2008 na setkáních organizátorů mezinárodní soutěže Matematický klokan jako návrhy soutěžních úloh, ale v konečné baterii soutěžních úloh se neobjevily. Jde o monotématicky zaměřené úlohy na výpočet obsahů neobvyklých geometrických útvarů.*

Úvod aneb základní informace o přípravě a průběhu soutěže

Jak známo, Matematický klokan je mezinárodně koordinovaná individuální jednorázová soutěž. Většinou koncem března usednou děti do lavic a během určeného času se pokoušejí vyřešit spolu s 5 miliony vrstevníků ve více než 40 zemích tří kontinentů, Evropy, Asie a Ameriky, 24 soutěžních úloh. Než ovšem přijde takový „klokanský den“, čeká organizátory spousta práce. Obvykle koncem června na pravidelné schůzce českého republikového výboru Klokana, který je zastřešen Jednotou českých matematiků a fyziků, konkrétně její olomouckou pobočkou, jsou garanti jednotlivých kategorií vyzváni, aby do konce prázdnin připravili několik „klokanských“ úloh. „Klokanské“ úlohy mají být vtipné, krátké, neotřelé, vícevýběrové (multiple-choice). Tento postup je zažitý ve všech zemích, které se soutěže Matematický klokan účastní. Úlohy se začátkem září v anglickém jazyce odešlou pořadatelům každoročního setkání pořadatelů Matematického klokana v jednotlivých zemích, které jsou sdruženy v asociaci Kangourou sans frontières. V roce 2008 se toto setkání konalo 15.–19. 10. v Berlíně. (Česká republika byla pořadatelem v roce 2000.) Hlavním cílem setkání je vybrat ze zaslaných návrhů soutěžní úlohy pro následující ročník. Obvykle jde o 600-700 úloh v každé kategorii (Klokánek, Benjamín, Kadet, Junior a Student). Až do této chvíle se organizací zabývá pouze několikačlenný tým vysokoškolských pracovníků. Následující období až do konce kalendářního roku je věnováno úpravě souborů soutěžních úloh (překlad do češtiny, případná úprava našim podmínkám, neboť vzhledem k odlišnosti školních osnov a kurikulárních dokumentů v jednotlivých zemích je dovoleno maximálně 5 úloh v kategorii pozměnit).

[1] e-mail: vanek@inf.upol.cz

Do tak náročných úprav musí být zapojeni i učitelé základních a středních škol, kteří zde mohou uplatnit své zkušenosti a znalost dětí, kterým je soutěž určena. Spolupráce je neustále zlepšována a systém kontrol soutěžních úloh vrcholí na soustředění konaném v lednu pod názvem Klokani v Jeseníkách. Prioritou soustředění je tedy finální korekce úloh a jejich bodového ohodnocení.

Jak již bylo zmíněno, v každé kategorii se ve finální verzi objevuje jen zlomek předložených úloh všemi zúčastněnými zeměmi, přesněji jde asi o 4 %. Co se však děje se zbytkem úloh? Některé jsou předloženy opakovaně v příštím roce, ale většina zůstává bez povšimnutí ležet v archivech účastníků mezinárodních setkání. Neznamená to však, že by se jednalo o úlohy nezajímavé nebo všeobecně známé. Takové úlohy by se v nabídkách jednotlivých zemí neměly ani vyskytnout; jedná se většinou o původní autorské příklady [1].

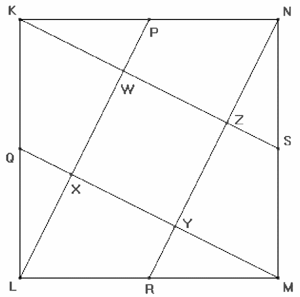
Vzhledem k faktu, že se mi naskytla možnost navštívit minulé soustředění v Berlíně, rád bych se podělil o několik úloh, které se mi zdály zajímavé nebo typické pro sortu „klokanských úloh“. Jsou určeny především učitelům středních škol, kteří je mohou využít při probíraní příslušné látky v hodinách matematiky, v matematických kroužcích při přípravě na různé soutěže, případně jako zpestření práce s matematicky nadanými studenty. Předkládané úlohy jsou vybrány převážně z kategorií Kadet, Junior a Student (studenti ve věku 13 až 19 let) a jsou zde uvedeny především úlohy vyšších obtížností, tedy čtyřbodové a pětibodové.

V Matematickém klokanovi se již řadu let vyskytují úlohy, které jsou zaměřeny na grafické řešení daného problému. Tyto úlohy mají jednu velice pozitivní vlastnost – vyhovují nárokům kladeným na „klokanské“ úlohy. Jsou krátké a k velice jednoduchému a krátkému řešení vedou po nalezení jednoho, maximálně dvou stěžejních kroků. Ty ovšem nebývají na první pohled vidět. Příspěvek se proto zabývá právě touto skupinou úloh. Typickými jsou pak příklady na nalezení obsahu oblasti (obrazce) bez jejich přímého algebraického výpočtu. Většinou jde o postupné doplňování obrazce tak, abychom hledanou plochu zobrazili jako poměrnou část celkového útvaru. Samozřejmě lze úlohy řešit několika způsoby. Ne všechny postupy však využívají pouze školských znalostí, jež mají studenti příslušného věku. Nalezení optimálního řešení tak mnohdy nebývá jednoduché a jednotlivé pokusy troskotají na neznalosti vztahů, které si žáci osvojují až ve vyšších ročnících.

Předeslané úlohy

Nejprve si předveďme úlohy „na rozehřátí“.

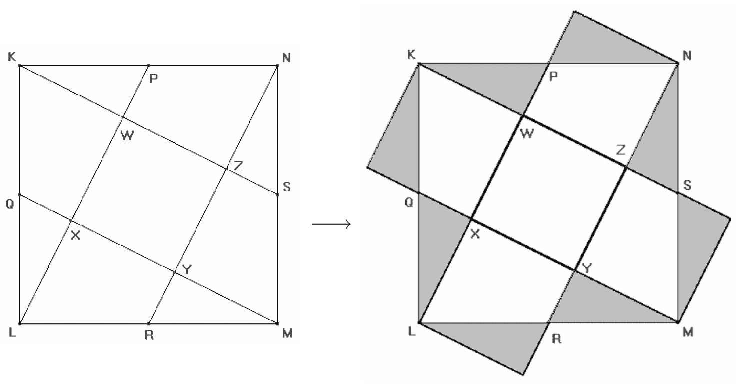
Úloha 1. (Junior 4 body) Je dán čtverec $KLMN$. Body P, Q, R, S jsou po řadě středy stran KN, KL, LM a MN. Úsečky KS, LP, QM a RN se protínají v bodech W, X, Y, Z. Určete poměr obsahů čtyřúhelníka $WXYZ$ a čtverce $KLMN$.



A) $1 : 2\sqrt{3}$ B) $1 : 4$ C) $1 : 3\sqrt{2}$ D) $1 : 5$ E) $1 : 4\sqrt{2}$

Řešení. Nejprve je vhodné (nikoliv nutné) ukázat, že čtyřúhelník $WXYZ$ je čtverec. Vzhledem ke konstrukci úseček KS, PL a NR platí: $|\sphericalangle KSN| = |\sphericalangle LPK| = |\sphericalangle RNK|$, dále $|\sphericalangle RNK| + |\sphericalangle MNR| = \frac{\pi}{2}$. Odtud přímo plyne, že $|\sphericalangle NZS| = \frac{\pi}{2}$; cyklickou záměnou obdržíme obdobnou rovnost pro ostatní vnitřní úhly čtyřúhelníku $WXYZ$ a spolu s rovností délek stran čtyřúhelníku $WXYZ$ dostáváme tvrzení.

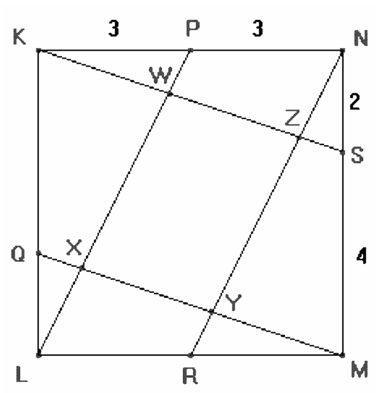
Jako jednodušší postup řešení se jeví doplnění na kříž podle obrázku.



Pro korektní řešení je třeba ukázat, že se kříž skládá z pěti shodných čtverců. Jedním ze způsobů je využití podobnosti trojúhelníků KWP a KZN, kde koeficient podobnosti je 2. Poměr obsahů čtverce $WXYZ$ a čtverce $KLMN$ je tedy 1 : 5.

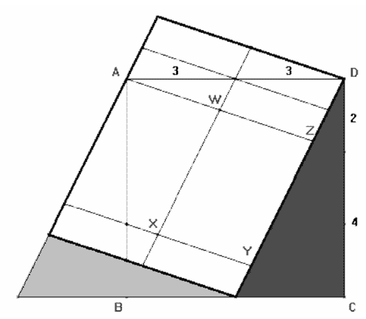
Následující úloha je zadáním velmi podobná, přesto nelze postupovat (na první pohled) stejným způsobem. Idea řešení je však stejná: pokusit se sestrojit mnohoúhelník (nejlépe rovnoběžník, který má strany rovnoběžné s čtyřúhelníkem $WXYZ$. Zadáním obou úloh za sebou vede k mnohem hlubšímu pochopení zákonitostí a lze je využít k dalšímu zobecňování.

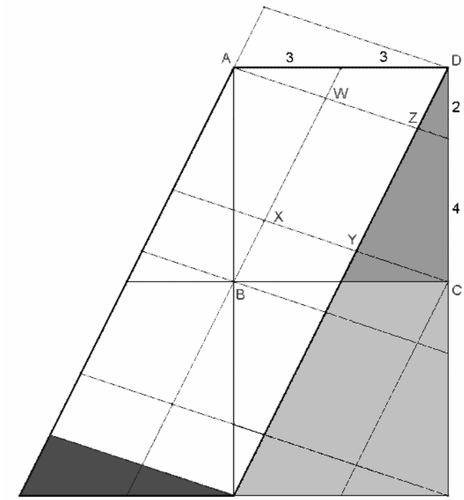
Úloha 2. (Junior 5 bodů) Na obrázku je dán čtverec $KLMN$ o délce strany 6. Body P, Q, R, S dělí strany čtverce v poměru 1 : 1, resp. 1 : 2. Úsečky KS, LP, QM a RN se protínají v bodech W, X, Y, Z. Určete poměr obsahů čtyřúhelníka $WXYZ$ a čtverce $KLMN$.



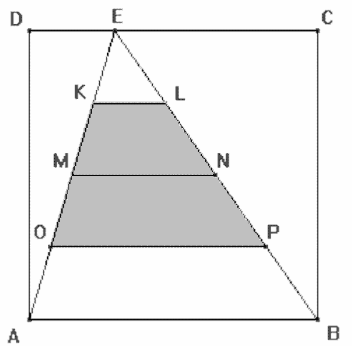
A) 1 : 3 B) 1 : $\frac{10}{3}$ C) 1 : 3,5 D) 1 : $\frac{11}{3}$ E) 1 : 4

Řešení. Postup je zřejmý z následujících obrázků. Uvádím zde dvě grafická řešení a na čtenáři nechávám, které je pro něj zřetelnější. Bíle vybarvená oblast v menším obrázku je svým obsahem totožná s obsahem čverce $KLMN$, ve větším obrázku jde o dvojnásobek obsahu čtverce. V obou případech, vzhledem k zachování dělících poměrů $(YZD) = 6 : 2$, můžeme prohlásit, že hledaný poměr obsahů je 1 : 3,5.





Úloha 3. (Kadet 5 bodů) Na obrázku je dán čtverec $ABCD$ a platí $|AO| = |OM| = |MK| = |KE|$ a $|BP| = |PN| = |NL| = |LE|$. Určete obsah čtyřúhelníku $OPLK$, jestliže $|OP| = 3$ cm.

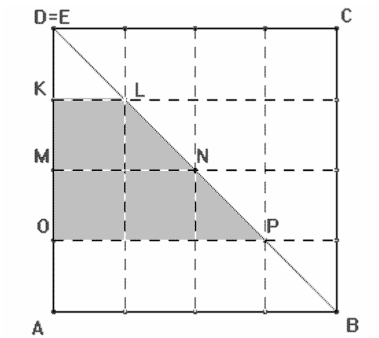


A) 3 cm^2 B) 4 cm^2 C) 4,5 cm^2 D) 5,5 cm^2 E) 6 cm^2

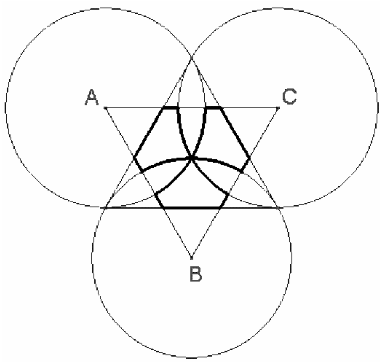
Řešení. a) Velmi elegantní a rychlé řešení je postaveno na znalosti dělících poměrů, resp. stejnolehlosti či podobnosti jednotlivých trojúhelníků s vrcholem E a základnou rovnoběžnou se stranou AB. Výsledek je pak objeven okamžitě:

$$S = \frac{|KL| + |OP|}{2} \cdot \frac{1}{2}\,|AB| = \frac{4}{9}\,|OP|^2 = 4\ \text{cm}^2$$

b) Pro mladší žáky je vhodnější jiný způsob řešení. Stačí si uvědomit, že rovnosti ze zadání a délky úseček KL, MN a OP se nemění, jestliže pohybujeme bodem E po úsečce CD. Při takovém pohybu zůstává zachován i obsah čtyřúhelníku $OPLK$. Výsledek je viditelný na první pohled z obrázku.

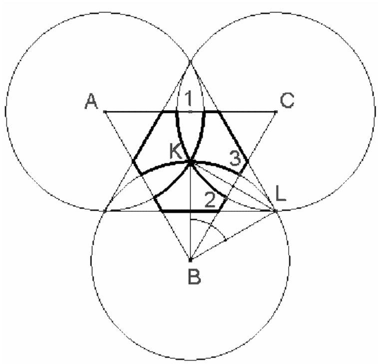


Úloha 4. (Junior 5 bodů) Na obrázku je dán rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany 1 cm a tři kružnice se středy shodnými s vrcholy trojúhelníka ABC. Určete obsah tučně ohraničené oblasti.



A) $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{24}$ cm^2 B) $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{12}$ cm^2 C) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$ cm^2 D) $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{4}$ cm^2 E) jiný

Řešení. Metoda doplňování obrazce se v tomto případě ukazuje jako problematická, neboť hledaný útvar není mnohoúhelník. Obsah obrazce proto hledáme jako rozdíl obsahů pravidelného šestiúhelníka a trojnásobku útvaru $K23$ na obrázku.



Obsah $K23$ je dále roven rozdílu obsahu kruhové výseče KBL a rovnostranného trojúhelníku KBL. Celkově tedy:

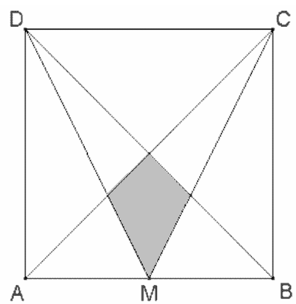
$$S = S_{\text{6úhelník}} - 3S_{\text{útvar } K23} = \frac{2}{3}\,S_{\triangle ABC} - 3\,(S_{\text{kruhová výseč } KBL} - S_{\triangle KBL})$$

Numericky pak je

$$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1^2}{4} - 3\left(\frac{1}{6}\,\pi r^2 - \frac{1}{4}\,r\right),$$

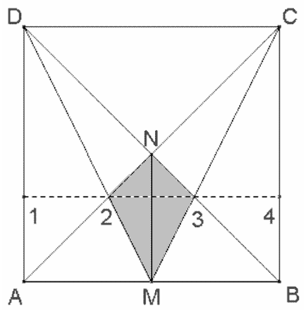
kde $r = |KB| = \frac{2}{3}\,|B1| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Po dosazení pak dostáváme výsledek $S = \frac{5\sqrt{3}-2\pi}{12}$.

Úloha 5. (Junior 5 bodů) Na obrázku je dán čtverec $ABCD$ o délce strany 1 a bod M, který je středem úsečky AB. Určete obsah šedé plochy.



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{\sqrt{48}}$ E) $\frac{1}{13}$

Řešení. Uvedená úloha názorně ukazuje, jak jsou v jednotlivých zemích odlišné názory na obtížnost některých úloh. Proto se dostala do kategorie pětibodových, tedy nejobtížnějších, přičemž k jejímu řešení není nutných nikterak sofistikovaných úvah, či znalostí. Stačí si uvědomit následující:



Délka úsečky $|MN|$ je rovna polovině strany čtverce a

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|12|}{|23|} = \frac{|23|}{|34|} = 1.$$

Odtud zapsáno pomocí dělících poměrů platí

$$(123) = \frac{|13|}{|23|} = 2 \quad \wedge \quad (243) = \frac{|23|}{|43|} = -1,$$

$$(123) \cdot (243) = -2 = \frac{|13|}{|43|},$$

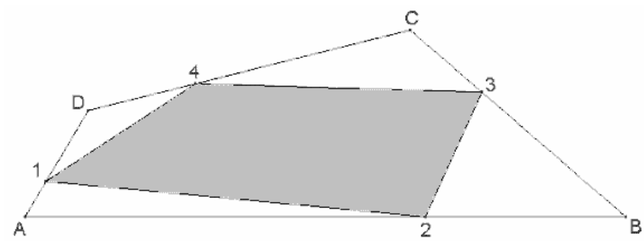
tedy

$$|12| = |23| = |34| = \frac{|AB|}{3}.$$

Známe tedy délky úhlopříček v deltoidu a pro jeho obsah platí:

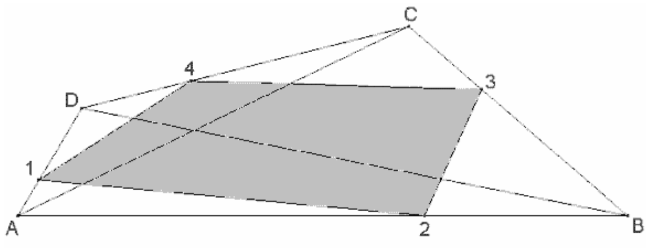
$$S = \frac{|MN| \cdot |23|}{2} = \frac{1}{12}$$

Úloha 6. (Junior 5 bodů) Na obrázku je konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a body 1, 2, 3, 4, které dělí strany čtyřúhelníka v poměru 1 : 2. Určete obsah čtyřúhelníka 1234, jestliže víte, že rozdíl obsahů čtyřúhelníků $ABCD$ a 1234 je 100.



A) 90 B) 100 C) 120 D) 125 E) 150

Řešení. Jedním z možných postupů je rozdělení čtyřúhelníku na čtyři trojúhelníky pomocí jeho úhlopříček.



Označme úhly při vrcholech A, B, C, D po řadě α, β, γ, δ. Nyní lze podle obrázku vyjádřit poměry obsahů jednotlivých bílých trojúhelníků vzhledem ke čtyřem výše zmíněným trojúhelníkům:

$$\frac{S_{\triangle A12}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{\frac{1}{2}|A1||A2|\sin\alpha}{\frac{1}{2}|AD||AB|\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}|AD|\right)\left(\frac{2}{3}|AB|\right)}{\frac{1}{2}|AD||AB|} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{S_{\triangle C43}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{\frac{1}{2}|C3||C4|\sin\gamma}{\frac{1}{2}|CB||CD|\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}|CB|\right)\left(\frac{2}{3}|CD|\right)}{\frac{1}{2}|CB||CD|} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{S_{\triangle A12} + S_{\triangle C43}}{S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CDB}} = \frac{S_{\triangle A12} + S_{\triangle C43}}{S_{\square ABCD}} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{S_{\triangle B23} + S_{\triangle D14}}{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}} = \frac{S_{\triangle B23} + S_{\triangle D14}}{S_{\square ABCD}} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{S_{\triangle A12}+S_{\triangle C43}}{S_{\square ABCD}}+\frac{S_{\triangle B23}+S_{\triangle D14}}{S_{\square ABCD}}=$$

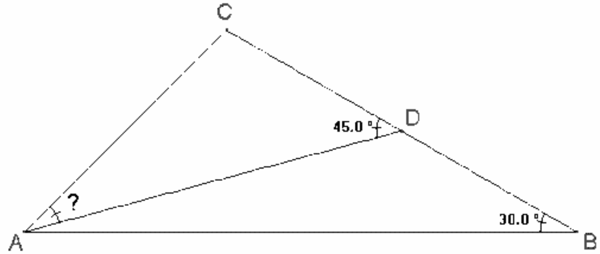
$$=\frac{S_{\triangle A12}+S_{\triangle C43}+S_{\triangle B23}+S_{\triangle D14}}{S_{\square ABCD}}=\frac{4}{9}$$

$$S_{\square ABCD}-S_{\square 1234}=\frac{4}{9}S_{\square ABCD}=100\ \mathrm{cm}^2$$

$$S_{\square 1234}=125\ \mathrm{cm}^2$$

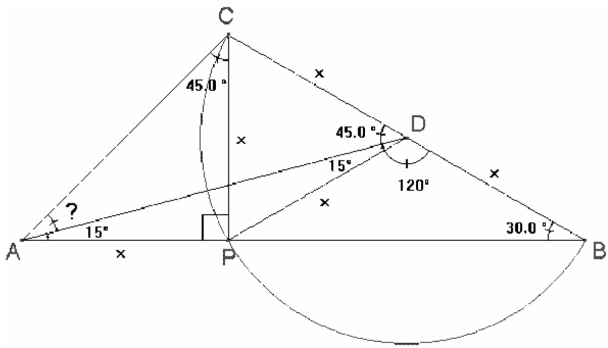
V úvodu tohoto příspěvku zaznělo, že bude obsahovat pouze úlohy, které se v soutěži neobjevily, přesto si dovoluji udělat výjimku. Následující úloha se objevila v letošním ročníku a vzhledem k množícím se dotazům na řešení ji zde uvádím.

Úloha 7. (Junior 5 bodů) Je dán trojúhelník ABC, bod D, který je středem strany BC a velikosti úhlů $|\sphericalangle ABC| = 30°$ a $|\sphericalangle ADC| = 45°$. Určete velikost úhlu CAD.



A) 45° B) 30° C) 25° D) 20° E) 15°

Řešení. Nejprve sestrojme výšku CP na stranu c a úsečku PD. Trojúhelník CPB je pravoúhlý (s pravým úhlem při vrcholu P). Thaletova kružnice se středem v bodě D a poloměrem $|BD|$ prochází bodem P, tedy $|BD| = |PD| = |CD|$, tudíž trojúhelník PBD je rovnoramenný. Odtud $|\sphericalangle BDP| = 120°$ a $|\sphericalangle PDA| = 15°$. Z věty o součtu úhlů v trojúhelníku ABD plyne, že $|\sphericalangle DAP| = 15°$, a tedy trojúhelník APD je rovnoramenný, kde $|PD| = |AP|$. Nyní je nutné ukázat, že $|PC| = |AP|$. Stačí si však uvědomit, že trojúhelník PDC je rovnostranný ($|PD| = |CD|$ a $|\sphericalangle PDC| = 60°$). Již jsme v podstatě úlohu vyřešili, neboť trojúhelník APC je rovnoramenný ($|\sphericalangle CAP| = 45°$), z čehož vyplývá, že hledaný úhel má velikost $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAP| - |\sphericalangle DAP| = 30°$.



Závěr

Výše uvedené příklady jsou pouhým zlomkem ze seznamu, který je předložen k výběru pro soutěž Matematický klokan, a vzhledem k jejich kráse by byla škoda je nepředstavit širší učitelské veřejnosti, resp. žákům. Pevně věřím, že čtenáře úlohy zaujaly. Pokud ano, budu se snažit uveřejňovat podobné monotématické stati i nadále.

Literatura

[1] Calábek, P., Švrček, J., Vaněk, V.: *Péče o matematické talenty v České republice.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2008.

[2] *Känguru der Mathematik.* Gratz, 2007, (soubor příkladů k setkání organizačních týmů soutěže Matematický klokan).

[3] *Känguru der Mathematik.* Berlín, 2008, (soubor příkladů k setkání organizačních týmů soutěže Matematický klokan).

Motivační logické úlohy

Marta Volfová, PdF UHK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Matematický talent vyžaduje objevení, motivaci a podporu. Jednou z forem motivace (i podpory) je zadávání nestandardních úloh, např. i z logiky. Může jít o nejrůznější úlohy, např. ze sportovního prostředí, úlohy typu „zebra“, úlohy vznikající užitím Dirichletova principu aj.*

[1] e-mail: marta.volfova@uhk.cz

Matematické talenty jsou „bohatstvím národa“ a jako s takovými by bylo třeba zacházet.

Často převládá mínění (a z historie ho potvrzují některé příklady velkých matematiků), že talent je vrozený dar, který se jistě rozvine vlastní vnitřní silou i třeba navzdory nepříznivému prostředí. Mnohdy tomu tak je, ale většinou potenciální nadání vyžaduje objevení, motivaci a podporu.

Jestliže se v běžné výuce matematiky stále znovu táž látka probírá, řeší se obdobné úlohy, a to týmž algoritmickým postupem, nadaný žák se může nudit a dojít k přesvědčení, že matematika není dost náročná, že je spíše věcí paměti než přemýšlení, neboť v ní stačí znát několik vzorců a algoritmů, a obrátí svou pozornost a intelekt k jiným disciplínám, které mu připadají přitažlivější.

Učitel by měl proto probouzet jeho zájem a motivaci předkládáním podnětných a náročnějších úloh.

Může jít o zajímavé problémové úlohy, vztahující se k probírané látce, ale je možné využít i jiných oblastí, často i z tzv. rekreační matematiky.

Na minulých konferencích „Ani jeden matematický talent nazmar“ jsem připomněla možnosti využívání „matematiky na šachovnici“, „kalendářových úloh“ a nyní předkládám úlohy z oblasti logiky.

Již od konce 1. stupně základní školy mohou talentovaní žáci řešit logické úlohy takovéhoto typu:

Úloha 1. Třída 7. A se zúčastnila akce DDD (Dárek dětem z DD) a každý žák donesl dvě hračky. Kamarádi Ivo, Petr, Míša a Jarda to provedli takto: Kromě Ivy každý přinesl autíčko a Jarda hned dvě (jinak dvě stejné hračky už nedonesl z celé třídy nikdo). Jediný malý tank přinesl Míša. Mezi dárky byly i medvídci a knížky.

a) Co donesl Ivo?
   Dvě knížky? Knížku a tank? Medvídka a tank?
   Medvídka a knížku?
b) Kolik čtyři kamarádi donesli celkem medvídků? Lze to určit?
   8? 7? 6? 5? 4? 3? 2? 1? Žádného?
c) A kolik autíček?
d) Co mohl přinést Míša?
   Autíčko a knížku? Medvídka a knížku? Medvídka a tank?
   Autíčko a tank?
e) Dá se určit, co přinesl Petr?

Dobrou motivací mohou být i logické úlohy ze sportovního prostředí, řešitelné promyšlenou úvahou, jako např.:

Úloha 2. Závodů se zúčastnilo 5 družstev, hrálo se „každé s každým“ právě jednou. Za výhru byl zisk 2 body, za remízu 1 bod, za prohru nic. Každé družstvo získalo jiný počet bodů. Víme, že

a) 1. družstvo nemělo žádnou remízu,
b) 2. družstvo ani jednou neprohrálo,
c) 4. družstvo ani jednou nevyhrálo.

Zapište tabulku závodů, uveďte do ní výhry, prohry, remízy a určete, kolik bodů získalo každé družstvo.

Relativně známé a u dětí oblíbené jsou logické úlohy typu „zebra“. Jednoduchou úlohou tohoto typu je tato úloha:

Úloha 3. O třech dívkách víme, že (1) Lenka se bojí výšek, (2) ta, co provozuje jógu, nestuduje medicínu, (3) horolezkyně studuje tělovýchovný institut, (4) psychologii nestuduje Lenka, (5) Jana nedělá jógu. Kdo z nich cvičí aikido a co studuje Kája?

	PS	med.	Tv	jóga	hory	aikido
Jana						
Lenka						
Kája						
jóga						
hory						
aikido						

Jde o přitažlivé logické úlohy, které vyžadují vzájemně správně přiřadit k sobě prvky několika různých množin na základě sdělení o neslučitelných a správných spojeních.

Mladší žáci mohou pro řešení využít zejména tabulku (je připravená u úlohy 3) a do ní vyznačovat správná (třeba svislou čarou) a nemožná (vodorovnou čarou) spojení. Řešit lze i úvahou s přehledným zápisem možností.

Pro řešení je možné použít i strom logických možností nebo mnohoúhelníky. (Více o řešení najdete v [1].)

Pěkné úlohy vznikají na základě užití Dirichletova principu. Děti ho ovšem neznají a řeší jen logickou úvahu (úlohy 4 a 5):

Úloha 4. Ve sklepě je tma a 7 borůvkových, 3 meruňkové a 5 jablkových kompotů. Kolik jich musíme přinést, aby mezi nimi byl určitě

a) aspoň 1 borůvkový,
b) aspoň 1 od každého druhu,
c) aspoň 2 jablkové?

Úloha 5. Ve třídě je 30 žáků. Tedy určitě

- aspoň .... mají narozeniny ve stejném měsíci,
- aspoň .... mají narozeniny ve stejný den týdne.

Doplňte za tečky číslovku.

Pravidelným zařazováním nestandardních úloh – i těch logických – podpoříme zájem (zejména nadaných) žáků o matematické činnosti.

Literatura

[1] Volfová, M.: *Metody řešení matematických úloh.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2000.

Nadaní na Metodickém portálu www.rvp.cz

Eva Zelendová, Výzkumný ústav pedagogický v Praze [1]

Abstrakt. *Výzkumný ústav pedagogický v Praze realizuje od roku 2006 za podpory ESF projekt Metodika. Jednou s částí tohoto projektu je i poskytování komplexní metodické podpory učitelům při práci s nadanými a mimořádně nadanými žáky. Jako nástroj této podpory byl vytvořen rozsáhlý, strukturovaný metodický portál www.rvp.cz. Příspěvek se zaměřuje na strukturu a obsah tematického vstupu Nadaní žáci.*

> Nadání je vzácný dar, předpoklad,
> který není-li rozvíjen, může přijít nazmar.
> Je to velká škoda
> pro jednotlivce i pro společnost.

Tato slova naleznete na Metodickém portálu `www.rvp.cz`, který provozuje z pověření MŠMT Výzkumný ústav pedagogický v Praze. Roz-

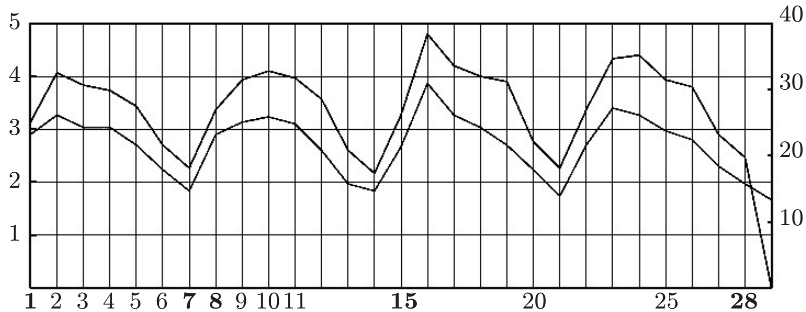
[1] e-mail: zelendova@vuppraha.cz

sáhlý projekt, který byl zahájen v létě 2006, je spolufinancován Evropským sociálním fondem a rozpočtem České republiky. Podstatou tohoto projetu je zvýšení kvality učitelské profese, což je spojeno se schopností efektivně využívat různých forem a metod učení, se vzájemným sdílením zkušeností a s celoživotním učením pedagogů. Projekt se proto zaměřuje na systematickou podporu učitelů v oblasti metodiky a didaktiky učení, na rozvoj učících se komunit a na efektivní způsoby vzdělávání.

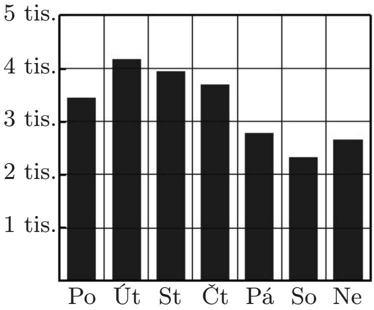
Podívejme se nejprve na to, jak je Metodický portál navštěvovaný a jestli jsou učitelé ochotni podělit se o své zkušenosti s kolegy zveřejňováním článků a metodických materiálů. K porovnání využijme údaje z října 2008 (zhruba po dvou letech provozování portálu) a z dubna 2009 (porovnání po půl roce). Následující tabulka nás přesvědčí o tom, že nárůst je patrný ve všech uvedených kategoriích:

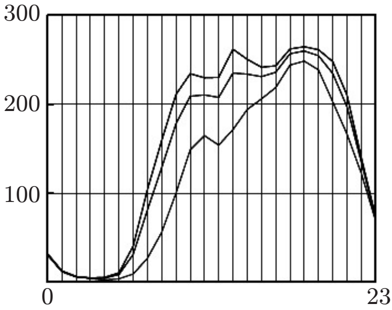
Kategorie	**Říjen 2008**	**Duben 2009**
Počet příspěvků	1 894	3 087
Počet digitálních učebních materiálů	945	1 099
Počet denních návštěv	2 800	3 500
Celkový počet návštěvníků	1 200 000	1 865 062

Od číselného porovnání přejděme ke grafickému. Jako modelový měsíc použijme únor 2009. Křivka, která je „skoro periodická“ a která se opakuje s měsíční pravidelností, je zachycena na prvním grafu, rozložení během týdne zachycuje druhý graf. Třetí graf popisuje počet návštěv během dne.



Graf 1. Počet návštěv a zhlédnutí za měsíc (horní křívka udává počet návštěv, příslušné hodnoty v tisících jsou uvedeny vlevo, dolní křívka udává počet zhlédnutí v tisících, hodnoty jsou vpravo)





Graf 2. Počet návštěv během týdne Graf 3. Počet návštěv během dne[2]

Většina čtenářů tohoto článku již Metodický portál navštívila a je dobře seznámena se strukturou, obsahem i různými typy příspěvků. Přesto si dovolím připomenout členění tematického vstupu Nadaní žáci, který naleznete ve všech oblastech vzdělávání: předškolním, základním i gymnaziálním. Pro lepší orientaci jsou jednotlivé články a metodické materiály rozděleny do pěti oddílů:

- Teorie a výzkum
- RVP, ŠVP a legislativa
- Identifikace, diagnostika a poradenská podpora
- Metodická podpora
- Inspirace a odkazy

Udělejme si nyní malou odbočku do historie. Při čtení knihy Neřešitelná rovnice, kterou napsal Mario Livio [1], jsem se důkladně seznámila s osudy dvou význačných matematiků Nielse Henrika Abela (1802–1829) a Évarrista Galoise (1811–1832).

Oba zemřeli velmi mladí a své největší matematické objevy uskutečnili ve věku našich středoškoláků. Přesto se nesmrtelně zapsali do dějin matematiky. Autor knihy v jedné z kapitol porovnává, co měli tito mladí muži společného. Mimo jiné uvádí: „Abelova a Galoisova genialita se dají přirovnat snad jen k supernově, vybuchující hvězdě, která svou září na chvíli zastíní všechny miliardy hvězd celé galaxie... Oba byli nejprve vyučováni svými rodiči... a *inspirováni talentovanými učiteli...*“

[2] Horní křivka udává počet návštěv v pracovní dny, dolní udává počet návštěv o víkendu, prostřední křivka je jejich průměrem.

Niels Henrik Abel

Évarriste Galois

A právě talentovaný učitel může na Metodickém portálu nejen nalézt inspiraci, ale může zde zveřejnit i své zajímavé nápady, ukázky hodin, projektů, témat na samostatnou práci žáků, zadání testů a písemných prací apod. Stačí se jen podívat na úvodní stránku metodického portálu `www.rvp.cz` a v horní liště kliknout na nabídku Pro autory. Každý zájemce o publikování na metodickém portálu se zde dozví, jak postupovat. Příspěvky jsou honorované, takže je tu možnost své zkušenosti zužitkovat i po stránce finanční.

Bez ochoty spolupodílet se na metodické podpoře učitelů, kteří mají chuť rozvíjet nadání svých žáků, bez iniciativy vás – kolegů nemůže plnit Metodický portál svou funkci. Ta by se dala shrnout ve shodě s koncepcí Výzkumného ústavu pedagogického v Praze takto (velké kvantifikátory jsou použity s mírnou nadsázkou):

Každé dítě má právo na kvalitní a dostupnou diagnostiku.

Každé dítě má přístup k podpoře vzdělávání ve škole i mimo školu.

Každý pedagog je podporován v profesním rozvoji.

Každý má snadný přístup k informacím o podpoře nadaných.

Literatura

[1] Livio, M.: *Neřešitelná rovnice Matematika a jazyk symetrií.* Argo a Dokořán, Praha, 2008.

INFORMACE

Nakladatelství HAV

Karel Hoza, nakladatelství HAV [1]

HAV („hraní a vzdělávání“) je nakladatelství, které se zaměřuje na vytvoření ucelené řady publikací typu *XXX úloh*, které pokrývají látku z matematiky v rozsahu učiva základních škol. Čerpá z autorského zázemí zkušených pedagogů především z opavského okresu v čele s Dr. Libuší Hozovou. Sbírky mají oproti běžným sbírkám nové vlastnosti: jsou pojaty netradičním způsobem, především umístěním řešení, která jsou k příslušným zadáním z lichých stran vždy na následující sudé straně (což usnadňuje práci při řešení); jsou rozděleny do celků, které obsahují vždy jedno učební téma od nejjednodušších po nejsložitější úlohy, takže si pedagog může vybrat pro příslušný ročník příslušné množství úloh dle osnov té které školy. Je vyzkoušeno praxí, že všechny úlohy všech sbírek, jsou-li prořešeny žákem ZŠ, také fungují jako záruka úspěšně provedených přijímacích zkoušek i na náročnější střední školy se zaměřením na matematiku. Sbírky mají příznivou cenu a jsou tudíž dostupné všem! Nakladatelství HAV připravuje v současné době nové tituly z matematiky (s přesahem i do učiva SŠ) a v budoucnu rozšíří svou působnost na oblast dalších předmětů, pokud možno netradiční formou.

Nakladatelaství HAV disponuje stránkami `http://www.hav.cz`. Lze zde kromě internetového obchodu a podrobnějších informací k produktům nalézt i bezplatné pomůcky použitelné při vyučování: samohodnotící testy z úpravy matematických výrazů, testy pro opakování učiva před přijímacími zkouškami na SŠ nebo zábavnou animovanou násobilku!

V roce 2009 přišlo nakladatelství HAV s elektronickou aplikací „PS HAV – 555“, která je „šitá na míru“ všem, kteří vlastní sbírku „Slovní úlohy řešené rovnicemi – 555 úloh“. Používat ji může samozřejmě i ten, kdo publikaci nemá, bude ale ochuzen o řešení úloh, která jsou pouze v tištěné verzi. Pomocí aplikace je možno sestavit (je-li napojení na interaktivní tabuli nebo projektor, současně i zobrazit) a případně vytisknout libovolné kombinace zadání z výše uvedené sbírky. Snadno a rychle je možno sestavit jakoukoli písemnou práci nebo domácí úkol. Zadání

[1] e-mail: hoza@hav.cz, tel.: 777 146 043

úloh lze naskládat za sebe, nebo oddělit libovolným počtem prázdných řádků, či dopsat „skupina A, B,...“ atd.

Aplikace PS HAV – 555 usnadňuje práci především učitelům a šetří jejich čas při tvorbě písemek. Aplikaci je možno získat dvěma způsoby. Jedním je stažení z webu `http://hav.cz`, druhým je pak objednání (na webu, e-mailem, poštou nebo telefonicky) CD ROMu. V obou případech je možno si aplikaci nainstalovat a zdarma vyzkoušet. V DEMO verzi jsou k dispozici tři témata a v každém z nich jedno zadání. Program se aktivuje pomocí uživatelského jména a klíče, který se dá zakoupit. Po jeho zadání se všechny úlohy (555) zpřístupní. Zakoupený klíč (licence) je platný vždy na jeden rok a po jeho vypršení se aplikace opět uzamkne. Stačí zakoupit nový klíč a vše je opět funkční. Další verze budou vylepšené podle připomínek klientů a pro stávající klienty se slevou proti klientům novým. Zároveň připravujeme stejný typ zpracování dalších našich sbírek touto formou, jako PS HAV – 444 a PS HAV – 888.

Stávající nabídka sbírek

Slovní úlohy řešené rovnicemi – 555 úloh (kolektiv autorů)	6.–9. ročník ZŠ
Konstrukční úlohy (díl A + B) – 444 úloh (kolektiv autorů)	6.–9. ročník ZŠ
Výpočty v geometrii – 888 úloh (Alois Poštulka)	6.–9. ročník ZŠ
Matematické pohádky – 111 pohádek (Libuše Hozová)	11–111 let
Stojedenáct všelijakých hádanek (Olga Hejná) (nejen matematika)	1.–3. ročník ZŠ

ZE SPOLEČENSKÉHO VEČERA

O práci s antitalenty a také o jedné úloze

Emil Calda, MFF UK Praha [1]

O práci s antitalenty

Jak bylo zvykem v uplynulých letech, zabývala se i letošní konference jen způsoby práce s talenty a otázku matematických antitalentů nechala opět bez povšimnutí. Chtěje vyplnit tuto ničím neodůvodnitelnou mezeru v programu konference, rozhodl jsem se aspoň krátce na toto téma pohovořit. Dovolím si však místo hlubokého a vyčerpávajícího pedagogického rozboru práce s antitalenty uvést jenom konkrétní příklad.

Dejme tomu, že známý antitalent Pepa nám tvrdí, že π je číslo racionální, protože se dá vyjádřit jako zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli je přirozené číslo: $\pi = 314/100$. Říci mu, že se mýlí, je pedagogické pochybení závažného rázu, jehož důsledky by se mohly na Pepově psychice neblaze projevit. Uvědomme si, že to je Pepův vlastní, byť poněkud osobitý názor, který má plné právo zastávat. Kdybychom ho přesvědčovali, že to není pravda, mohli bychom zranit jeho osobnost a narušit jeho sebevědomí, což by se mohlo negativně odrazit v jeho budoucích podnikatelských aktivitách a ve svých důsledcích by to mohlo vést k celoživotní frustraci. Místo strohého konstatování, že Pepův výrok je nepravdivý nebo dokonce hloupost(!), měli bychom vytvořit vstřícnou atmosféru a pro jeho tvrzení najít vhodnou a nenásilnou interpretaci. Řekneme mu proto nahlas: *Výborně, Pepo, souhlasím s tebou – π je číslo, a není to tudíž plž, mlž ani hlavonožec. Ve svém tvrzení vycházíš z toho, že slovo „racionální“ znamená „rozumný“; z tohoto předpokladu vskutku vyplývá, že π je číslo racionální, protože kdyby racionální, tj. rozumné, nebylo, nemohli bychom při výpočtu obsahu nebo obvodu kruhu dojít k rozumným výsledkům. Takže máš v podstatě pravdu, ale popřemýšlej nad tím, zda slovo „racionální“ nemá i jiný význam. Myslím, že bys o čísle π mohl napsat hezký esej; v časopisu „Žena a móda“ ti ho zcela jistě otisknou!*

[1] e-mail: ecalda@volny.cz

Po tomto vysvětlení bude Pepa určitě spokojen a my si můžeme v duchu ulevit: *Ale jinak, kluku pitomá, už bys mohl dávno vědět, že π je číslo iracionální!*

O jedné úloze

Sledujete-li úlohy v různých učebnicích a v různých časových obdobích, brzy přijdete na to, že jejich obsah se příliš nemění. Převážná většina příkladů, které se v nich vyskytují, jsou úlohy zlidovělé – byly vytvořeny v šerém dávnověku, předávány ústním a později písemným podáním a postupně se staly všelidovým vlastnictvím. Má to své výhody: Budoucí rodič, sedící nyní v lavici coby žák, si může být jist, že i jeho děti budou řešit tytéž úlohy, takže by měl dávat pozor, aby je úspěšně zvládnul, až mu je jeho potomek přinese jako domácí úkol. Nemění-li se však jejich obsah, určitě se – při zachování matematického jádra – mění jejich forma a samozřejmě i jejich výchovný cíl. Podívejme se, jak se měnila jedna slovní úloha o rovnoměrném přímočarém pohybu.

Ve sbírce úloh z matematiky pánů Bydžovského a Vojtěcha z roku 1924 je tento příklad: *Studující má a hodin času na procházku. Venkovský spolužák jedoucí v kočáře, jenž ujede b kilometrů za hodinu, nabídne mu, že ho sveze. Jak daleko se studující může vézt, aby se vrátil včas domů, ujde-li za hodinu c kilometrů?*

Vidíte tu idylu? Jakou radostí bylo pro studenty (včetně netalentů) řešit takovéto úlohy! Ani slovo o globálním oteplování, o světové krizi, Blízkém Východě a o školních vzdělávacích programech! Studenti se tenkrát procházeli, nenavštěvovali pochybné podniky, neexperimentovali s drogami a nestarali se o kompetence, někteří se vozili v kočárech a všichni se radovali z klapajících kopyt a koňské hřívy rozevláté stříbrným větrem! A když se náhodou stalo, že procházka studentova trvala více než a hodin, tak se také moc nestalo, protože tenkrát se tolik nespíchalo a na nějaké té hodině nikomu nezáleželo. Na druhé straně si však všimněme, že tato idyla nesvědčí o tom, že by se škola tenkrát příliš spojovala se životem! Myslím si, že ani tehdy se nestávalo často, že by řidič jedoucí v kočáře pěšímu účastníku silničního provozu zastavil a nabídl svezení, pokud dotyčný nebyl atraktivní studentkou. Také výchovný cíl úlohy je zanedbatelný, neboť skrytý apel na majitele kočárů, aby občas někoho svezli, se u většiny z nich míjí účinkem dodnes.

Vytýkat následující úloze z padesátých let, že tehdejší život neodráží, už možné není, protože ho odráží až příliš: *Družstevník Vávra má a hodin* *času, aby došel do vzdáleného družstevního kravína nakrmit družstevní krávy. Kulak jedoucí v kočáře, jenž ujede b kilometrů za hodinu, nabídne mu, že ho sveze. Jak daleko se družstevník, který prokoukl a chce zhatit úmysl lstivého kulaka nechat družstevní stádo pojít hlady, může nechat vézt, ujde-li za hodinu c kilometrů a kráva vydrží bez žrádla d dní?*

Proti této úloze bylo možno namítnout jedině to, že je tématicky zaměřena pouze na družstevní rolníky a že v boji za světlé zítřky zcela opomíjí úlohu dělnické třídy a okresních tajemníků. Z tohoto důvodu bývaly do sbírek úloh zařazovány i příklady následujícího typu; v nich však už místo koňů vystupují traktory a každý uvědomělý občan je plně vytížen budováním a na prkotiny, jako jsou procházky, nemá čas: *Soudruh Novák, úderník a zlepšovatel vzorné dílny závodu V. I. Lenina na výrobu traktorů, se k desátému výročí Vítězného února zavázal, že v pracovní době kromě a soustruhů obslouží denně i b soudružek, $b > a$. O kolik hodin se díky jeho závazku zkrátí doba potřebná k tomu, aby socialistický tábor ve výrobě traktorů předehnal Spojené státy?*

O padesát let později vypukla etapa modernizace školské matematiky, do učebnic pronikl jazyk množinově-logický a studenti přestali matematickým úlohám rozumět úplně. Už se neřešily slovní úlohy, ale začaly se matematizovat reálné situace, u nichž nikomu nevadilo, že reálně někdy nemohou vůbec nastat: *Budiž S množina všech studentů gymnázia v N a K množina jejich kočárů a nechť existuje aspoň jeden prvek $x \in S$, který má na vycházku a hodin času, a prvek $y \in K$, který jede rychlostí b kilometrů za hodinu a je řízen prvkem $z \in S$, který je různý od x. Určete, do jaké maximální vzdálenosti d může být prvek x dopraven prvkem y, nemá-li x překročit dobu k vycházce určenou a navrací-li se zpět konstantní rychlostí c kilometrů za hodinu.*

Jak nám ten svět posmutněl! Z příkladů sice vymizely třídní vášně i budovatelské nadšení, ale ze studentů se staly odosobněné elementy nějaké množiny, zmizela přátelská nabídka svezení a vytratil se veselý klapot koňských kopyt, neboť koně se k prvkům nějaké množiny dají zapřáhnout jen těžko.

Dnes už se modernizace vybouřila, ideologické imperativy už také zmizely, takže bychom se mohli navrátit k úlohám podobně optimistického zaměření, jako byla výše citovaná úloha ze sbírky pánů Bydžovského a Vojtěcha. Navrhuji proto, aby do závěrů této konference byl zařazen bod vyzývající autory příkladů ke tvorbě úloh, po nichž sáhnou s radostí talenti i antitalenti a po jejichž vyřešení pocítí talenti chuť řešit další a antitalenti po jejich nevyřešení nepropadnou zoufalství.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Baráková Miluše* e-mail: barakovam@gymkren.cz
   Pracoviště: G, Křenová 36, Brno
2. *Brumová Jaroslava*
   Pracoviště: ZŠ, Školní 1000, Nové Město nad Metují
3. *Bulušek Jaroslav* e-mail: bulusek2@seznam.cz
   Pracoviště: ZŠ, Náměstí 172, Rokytnice nad Jizerou
4. *Calda Emil* e-mail: ecalda@volny.cz
   Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
5. *Čechová Eva* e-mail: cechova@gymck.cz
   Pracoviště: G, Chvalšinská 112, Český Krumlov
6. *Divoká Jaroslava* e-mail: j.divoka@o2active.cz
   Pracoviště: SPŠS Betlémská 287/4, Praha 1
7. *Dočekal Michal* e-mail: docekal@gjkt.cz
   Pracoviště: Benešova 14206, Hradec Králové
8. *Flejberk Jaroslav* e-mail: jflejberk@hryahlavolamy.cz
   Pracoviště: Hryahlavolamy.cz, Pirnerova 1395, Praha 5
9. *Fořtová Ilona* e-mail: fortova@prometheus-nakl.cz
   Pracoviště: Prometheus, s.r.o., Čestmírova 10, Praha 4
10. *Fuchs Eduard* e-mail: fuchs@math.muni.cfz
    Pracoviště: PřF MU, Kotlářská 2, Brno
11. *Hájková Pavla*
    Pracoviště: G, Nad Alejí 1952, Praha 6
12. *Hátle Jiří* e-mail: jiri.hatle@upol.cz
    Pracoviště: PřF UP, tř. Svobody 26, Olomouc
13. *Houser Jiří* e-mail: jiri.houser@seznam.cz
    Pracoviště: SPŠ, ČSA 376, Nové Město nad Metují
14. *Hoza Karel* e-mail: hoza@hav.cz
    Pracoviště: VAV, U Studánky 22, Praha 7
15. *Hruška Michal* e-mail: michal.hruska@wo.cz
    Pracoviště: G, Brandlova 875, Hradec Králové
16. *Jančařík Antonín* e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz
    Pracoviště: PedF UK, M.D.Rettigové 4, Praha 1

17. *Jančaříková Anna* e-mail: anca_janca@centrum.cz
    Pracoviště: SPŠ a VOŠ, J. Palacha 1840, Kladno
18. *Jedličková Milada* e-mail: jedlickova@stavskola.cz
    Pracoviště: SPŠ stavební, Jihlavská 628, Havlíčkův Brod
19. *Ježek Viktor* e-mail: jezek@jaroska.cz
    Pracoviště: G, Kpt. Jaroše 14, Brno
20. *Jónová Marie* e-mail: bulusek2@seznam.cz
    Pracoviště: ZŠ, Náměstí 172, Rokytnice nad Jizerou
21. *Juráňová Růžena* e-mail: r.juranova@seznam.cz
    Pracoviště: ZŠ a MŠ, Prušánky 289
22. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
    Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
23. *Kluiber Zdeněk* e-mail: zdenek.kluiber@email.cz
    Pracoviště: PeF UHK, Hradec králové
24. *Kopal David* e-mail: kopal.david@centrum.cz
    Pracoviště: G, Seifertova 13, Blansko
25. *Krása Michal* e-mail: michalkrasa@seznam.cz
    Pracoviště: Elkan, V Tůních 12, Praha 2
26. *Kuřina František* e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz
    Pracoviště: UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové
27. *Ledvinová Zuzana* e-mail: zuzana.ledvinova@email.cz
    Pracoviště: SZŠ a VOŠ zdravotnická, Poděbradská 2, Karlovy Vary
28. *Leischner Pavel* e-mail: leischne@pf.jcu.cz
    Pracoviště: PdF JU, Jeronýmova 10, České Budějovice
29. *Lesáková Eva* e-mail: lesakova@cermat.cz
    Pracoviště: ÚIV-CERMAT, Jeruzalémská 12, Praha 1
30. *Lišková Hana* e-mail: liskova@vospspgs.cz
    Pracoviště: VOŠP a SPgŠ, Komenského nám. 22, Litomyšl
31. *Mádlová Ivana* e-mail: madlova@vos-sps-jicin.cz
    Pracoviště: VOŠ a SPŠ, Pod Koželuhy 100, Jičín
32. *Machačíková Ivana* e-mail: machacikova@gymzl.cz
    Pracoviště: G, Lesní čtvrť 1364, Zlín
33. *Machková Lenka* e-mail: machkova@gjkt.cz
    Pracoviště: G JKT, Tylovo nábřeží 682, Hradec Králové
34. *Malec Miloslav* e-mail: malec@gymkyjov.cz
    Pracoviště: G, Komenského 549, Kyjov

35. *Maňásek Luděk* e-mail: ludekm@centrum.cz
Pracoviště: G, Palackého 524, Holešov
36. *Molnár Josef* e-mail: molnar@inf.upol.cz
Pracoviště: PřF UP, Tř. Svobody 26, Olomouc
37. *Müller Evžen* e-mail: sosstezery@tiscali.cz
Pracoviště: ZŠ, V. Kl. Klicpery 561, Nový Bydžov
38. *Novák Miroslav* e-mail: novak@gjkt.cz
Pracoviště: G J.K.Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové
39. *Nováková Marie* e-mail: novakova@prometheus-nakl.cz
Pracoviště: Prometheus, Čestmírova, 10, Praha 4
40. *Ondráčková Ivana* e-mail: ondrackova@gjkt.cz
Pracoviště: G, J. K. Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové
41. *Ouporová Jana* e-mail: jana.ouporova@elkan.cz
Pracoviště: Elkan, V Tůních 12, Praha 2
42. *Pazourek Karel* e-mail: kajakajakaja@seznam.cz
Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
43. *Perný Jaroslav* e-mail: jaroslav.perny@tul.cz
Pracoviště: FP TU, Liberec
44. *Petelíková Marie*
Pracoviště: ZŠ, Palackého nám. 45, Kostelec nad Orlicí
45. *Plíšková Jana* e-mail: pliskova.jana@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Josefa Ressla 2258, Pardubice
46. *Pokorná Jana* e-mail: ivanbubak@volny.cz
Pracoviště: ZŠ, Štefánikova 448, Pardubice
47. *Pourová Naďa* e-mail: pour@zshk.cz
Pracoviště: SZŠ a VŠZ, Komenského 234, Hradec Králové
48. *Průšová Anna* e-mail: a.prusova@gjwprostejov.cz
Pracoviště: G, Kolárova 3, Prostějov
49. *Růžičková Lucie* e-mail: lucie_ruzickova@seznam.cz
Pracoviště: G, Zborovská 45, Praha 5
50. *Řezáčová Růžena* e-mail: ruzena.rezacova@seznam.cz
Pracoviště: VOŠ a SPŠ, Dušní 17, Praha 1
51. *Siváková Květoslava* e-mail: studijni@sos-sou.cz
Pracoviště: SŠ, Vratimovská 681, Ostrava-Kunčice
52. *Smejkalová Jana* e-mail: smejkalova.jana@centrum.cz
Pracoviště: ZŠ, Benešova 585, Třebíč

53. *Smíšková Jaroslava* e-mail: sezam788@vol.cz
Pracoviště: OA, Dušní 7, Praha 1

54. *Sobotová Dana* e-mail: sobotova@atlas.cz
Pracoviště: VOŠ a SPŠE, Na Příkopě 16, Praha 1

55. *Suriaková Blanka* e-mail: blanka.sur@email.cz
Pracoviště: G, Budějovická 680, Praha 4

56. *Šišková Jana* e-mail: jana.siskova@seznam.cz
Pracoviště: G, Kollárova 3, Prostějov

57. *Špryňarová Iveta* e-mail: sprynarova.iveta@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, 9.května 148, Chvaletice

58. *Šrubař Kamil* e-mail: kamilsrubar@seznam.cz
Pracoviště: SZŠ a VOŠZ, Zlín–Příluky 372

59. *Švrček Jaroslav* e-mail: svrcek@inf.upol.cz
Pracoviště: PřF UP, Tř. 17. listopadu 12, Olomouc

60. *Takáčová Lenka* e-mail: lenka.takacova@centrum.cz
Pracoviště: VZŠ a SZŠ, Komenského 234, Hradec Králové

61. *Tichý Miroslav* e-mail: tichy@ssakhk.cz
Pracoviště: SŠAK, Hradecká 1151, Hradec Králové

62. *Vaněk Vladimír* e-mail: vladimir.vanek@upol.cz
Pracoviště: PřF UP, Tř. Svobody 26, Olomouc

63. *Vaníček Jiří* e-mail: vanicek@pf.jcu.cz
Pracoviště: PdF JU, Jeronýmova 10, České Budějovice

64. *Vaňková Jana* e-mail: jana.vankova@gfxs.cz
Pracoviště: G, Partyzánská 530, Liberec

65. *Veselý Jan* e-mail: vesely@astrohk.cz
Pracoviště: Hvězdárna a planetárium, Zámeček 456, Hradec Králové

66. *Volfová Marta* e-mail: marta.volfova@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

67. *Vybíral Bohumil* e-mail: bohumil.vybiral@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

68. *Wasyliv Vladimír* e-mail: wasyliw@seznam.cz
Pracoviště: G, Pařížská 2249, Kladno

69. *Zelendová Eva* e-mail: zelendova@vuppraha.cz
Pracoviště: VÚP, Novodvorská 1010/14, Praha 4

70. *Zhouf Jaroslav* e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1

71. *Zlatovský David* e-mail: david.zlatovsky@seznam.cz
Pracoviště: VZŠ a SZŠ, Komenského 234, Hradec Králové

72. *Žabka Ján* e-mail: zabco@centrum.sk
Pracoviště: G, Bajkalská 20, Bratislava

73. *Žižková Věra*
Pracoviště: ZŠ, Kostelec nad Orlicí

Název: Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba systémem LaTeX: Miloslav Závodný
Vydavatel: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Náklad: 120 kusů
Rok vydání: 2009

Text neprošel jazykovou úpravou.

Vydání sborníku bylo podpořeno grantem
GAUK 4309/2009/A-PP/PedF.

ISBN 978-80-7290-417-4

ISBN 80-7290-417-4
9 788072 904174