Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta,
katedra matematiky a didaktiky matematiky
Jednota českých matematiků a fyziků
Školské zařízení pro DVPP Královéhradeckého kraje
Střední zdravotnická škola Hradec Králové
Střední odborné učiliště obchodní Hradec Králové

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 3. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2007

Organizátoři:
Matematická pedagogická sekce Jednoty českých matematiků a fyziků
Střední zdravotnická škola, Hradec Králové
SOU obchodní, Hradec Králové

Programový výbor:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha
RNDr. Vladimír Burjan, Exam testing, Bratislava, Slovensko
Dr. Robert Geretschleager, Gymnasium, Graz, Rakousko
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PF UHK, Hradec Králové
doc. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
Mgr. Lenka Takáčová, SOU obchodní, Hradec Králové
Mgr. Naďa Pourová, Střední zdravotnická škola, Hradec Králové

Editor:
RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha

Recenzent:
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., PF UJEP, Ústí nad Labem,
a PF UP, Olomouc

ISBN 978-80-7290-332-0

OBSAH

ÚVODEM

Již potřetí . . .

Již potřetí máte před sebou sborník konference Ani jeden matematický talent nazmar. Je to sice „jen“ potřetí, což ještě neznamená nijak zvlášť dlouhou historii, konference si ale pomalu začíná své místo mezi všemi možnými matematickými akcemi nacházet a upevňovat. O této skutečnosti svědčí i stále narůstající počet účastníků konference.

O zájmu o tuto konferenci svědčí i velký počet přihlášených kvalitních příspěvků ze strany učitelů. A o kvalitě pozvaných osobností jistě není pochyb. Mezi nimi jsou pokaždé i přednášející ze zahraničí. Velkému zájmu se těší také workshopy, kde mohou učitelé z praxe načerpat mnoho zkušeností pro práci se svými žáky.

V současnosti jsou největším hitem Školní vzdělávací programy. Podle mých zkušeností z rozhovorů s učiteli se v jejich školních vzdělávacích programech (až na několik téměř na prstech jedné ruky spočitatelných škol) neobjevuje ani zmínka o práci s talentovanými žáky. Podle jejich slov je to z obavy, že kdyby tam školy takový program měly, tak by se v případě objevení talentovaného žáka musely o něj přesně podle programu starat. Což přináší pro školu vždy další úsilí. Ony se o talentované dítě start budou, ale nechávají si volnost ve výběru péče o něj. A ani Rámcový vzdělávací program nijak konkrétně nespecifikuje, jak o takové děti pečovat, jen zcela obecně a neurčitě se o tom krátce zmiňuje.

Druhým pro mne znepokojujícím aspektem je to, že státní politika má v současnosti prioritu integrace talentovaných žáků do běžných třídních kolektivů oproti dřívější politice separace talentovaných žáků do zvláštních třídních kolektivů, a to aspoň co se matematiky týče.

Proto se domnívám (a vím, že nejen já, ale i řada dalších učitelů), že je třeba pracovat s talentovanými žáky nad rámec úsilí státních institucí, aby se v naší republice postupně úplně nevytratili. K tomu, jak víme, se používají hlavně nejrůznější soutěže, z nichž některé jsou sice formálně garantovány státem, stát na ně ale vynakládá stále méně prostředků a v podstatě celá jejich organizace je založena na finančně nepodpořené práci několika dobrovolníků.

A vkládám naději i do toho, že též konference Ani jeden matematický talent nazmar přispívá k tomu, aby získala pro práci s nimi další dobrovolníky.

Jaroslav Zhouf

PROGRAM KONFERENCE

Čtvrtek 3. 5.

14.00–14.15	Zahájení
14.15–14.30	Bohumil Vybíral: Ceny Præmium Bohemiæ nejlepším talentům
14.30–15.30	Lenka Hříbková: Přístupy ke studiu a vyhledávání nadaných v psychologii
16.00–16.20	Přestávka
16.20–17.20	Jaromír Šimša: Nad žákovskými protokoly jedné úlohy MO
17.20–17.50	Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf: Turnaj měst v České republice s rozborem úloh
17.50–18.15	Karel Tomek: Prezentace projektu ESF realizovaného VÚP METODIKA – metodický portál www.rvp.cz
18.15–19.00	Večeře

Pátek 4. 5.

7.00– 8.00	Snídaně
8.00–12.00	Otevřené hodiny na školách
12.00–13.00	Oběd
13.30–14.30	Milan Koman: Jak se pohybují těžiště proměnných trojúhelníků vepsaných do pevné kružnice
14.30–15.00	Dušan Šveda, Ingrid Semanišinová: Ako sa prejavuje matematické nadanie
15.00–15.30	Přestávka
15.30–16.30	Příspěvky a dílny účastníků
16.30–17.30	Příspěvky a dílny účastníků
17.30–18.00	Příspěvky a dílny účastníků
18.00–19.00	Večeře
20.00	Společenský večer

Sobota 5. 5.

7.30– 8.30	Snídaně
8.30– 9.30	Ivo Volf: Matematika jako fascinující pomocník fyziky
9.30– 9.45	Přestávka
9.45–10.45	Petr Vopěnka: Uvíznutí matematických úvah ve smyčce
10.45–11.00	Zakončení
11.00–12.00	Oběd

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Přístupy ke studiu a vyhledávání nadaných v psychologii

Lenka Hříbková, PedF UK Praha[1]

Abstrakt. *V článku jsou prezentovány a charakterizovány základní přístupy ke studiu nadání, se kterými se setkáváme v psychologii 20. století. Jsou to kognitivní přístup, osobnostně-vývojový přístup a přístup sociálně-kulturní. Tyto přístupy reprezentují různé úrovně poznávání tohoto fenoménu a jeho nositelů, odrážejí zaměření na studium odlišných oblastí v rámci tohoto tématu a postulují jiné výzkumné priority. Dále jsou v článku rovněž prezentovány přístupy k vyhledávání nadaných, které se rozpracovávaly v souvislosti se vznikem konkrétních modelů nadání, které sloužily k řešení praktických otázek vzdělávání této skupiny žáků.*

Úvod

Téma nadání se stalo v současné době u nás velmi aktuální, ale je mu prozatím věnována minimální teoretická a výzkumná pozornost. Zájem o ně je naopak často vyvoláván účelově a pozornost je věnována řešení především některých praktických otázek. Přitom o nadání dítěte se v obecné rovině neustále mluví, např. ve vztahu k selhávání žáků ve škole, při zavádění různých organizačních opatření ve školství, ve vztahu k pocitu životní spokojenosti ze seberealizace, ve vztahu k prosperitě a ekonomickému růstu společnosti a v mnoha dalších souvislostech.

V článku se zaměřujeme na intelektový druh nadání a základní přístupy ke studiu tohoto fenoménu v průběhu 20. století a k procesu vyhledávání jedinců s tímto druhem nadání.

Přístupy ke studiu fenoménu nadání

V minulém století je možné identifikovat nejméně tři základní přístupy ke studiu nadání, a to:

- kognitivní přístup

---

[1] e-mail: hribkova@atlas.cz

- osobnostně-vývojový přístup
- sociálně-kulturní přístup

Tyto přístupy současně reprezentují různé úrovně poznávání tohoto fenoménu a jeho nositelů, odrážejí zaměření na studium odlišných oblastí v rámci tohoto tématu a postulují jiné výzkumné priority. Všechny tři přístupy jsou v současné psychologii nadání stále aktuální a ani jeden z nich nebyl plně nahrazen druhým. Lze naopak konstatovat, že spolu koexistují od počátku minulého století, kdy došlo k prudkému nárůstu zájmu o nadané děti a o studium fenoménu nadání. Tento trend měl souvislost nejen s vývojem psychologie (např. vznik testů inteligence, vznik humanistické psychologie, výzkum a akcentování problematiky tvořivosti, výkonové motivace atd.), pedagogiky (důraz na význam dětství pro celý život člověka, vznik reformní pedagogiky atd.), ale i souvislost s vývojem dalších oborů a s některými historickými událostmi. Antropologická orientace sice ovlivnila řadu disciplín, současně ale vyvolala nové otázky. Ty se v případě nadané populace týkaly např. samotného vymezení pojmu nadání, procesu socializace nadaných, forem a obsahu jejich vzdělávání apod.

Je zřejmé, že obsah pojmu nadání je relativní, mění se a nemůže být tedy vymezen s konečnou platností. V článku vycházíme z pojetí nadání jako komplexního fenoménu, u jehož nositele jsou identifikovatelné tři znaky (akcelerovaný vývoj, mimořádný výkon, osobnostní potenciál).

Kognitivní přístup ke studiu nadání

Tento přístup ke studiu nadání má v psychologii nejdelší tradici. V centru výzkumného zájmu bylo studium kognitivních schopností a inteligence chápané jako dispozice k myšlení.

Nejprve bylo nadání vymezováno jako vysoký stupeň rozvoje obecné inteligence, která je dědičně determinována (Terman 1926), později se uvažovalo také o širším rejstříku schopností, které jsou nadprůměrně rozvinuté (model nadání U.S. Office of Education aj.), z nichž některé souvisejí s intelektovým nadáním. Teoretickou oporou těchto modelů byly zejména ty teorie inteligence, ve kterých jejich autoři zastávali odlišné pozice (inteligence jako obecná, dále nedělitelná schopnost versus inteligence jako více samostatných, případně nezávislých schopností).

Zejména postupný rozvoj kognitivní psychologie vedl k tomu, že se zájem soustředil na studium paměťových procesů, metakognice a na úlohu znalostí při řešení kognitivních úkolů (Borkowski, Peck 1986, Shore, Dover 1987). Analyzovaly se mimořádné výkony v těchto úkolech nebo se studovalo širší spektrum kognitivních výkonů osob, u kterých se předem zjišťovala výše IQ, a osoby byly podle tohoto údaje rozděleny do skupin. Ze závěrů výzkumů realizovaných u dětské populace vyplynulo, že kapacita paměti je rozlišujícím faktorem mezi nadanými a průměrnými dětmi stejně jako mezi staršími a mladšími dětmi, že nadaní používají strategie řešení, které jsou charakteristické pro starší průměrné děti, avšak nepoužívají kvalitativně rozdílné strategie. Významné je konstatování, že vynikající výkon je odlišný od běžného, ale není výsledkem odlišných mentálních procesů.

Vznik triarchické teorie inteligence a zejména vypracování modelu nadání jako vyvíjející se expertnosti R. J. Sternberga (2001) znamenal v tomto přístupu nový pohled na nadání, který stimuluje další výzkumy v této oblasti.

Původní zaujetí pro analýzu pouze mimořádných kognitivních výkonů neumožňovalo věnovat se řešení vývojových otázek. Proto se postupně staly předmětem analýzy a studia výkony průměrné nebo nedostatečné. Avšak tradiční a úzké vymezování nadání jako vysokého stupně rozvoje intelektových schopností, které jsou hlavním (nebo jediným) předpokladem k podávání mimořádných kognitivních výkonů, je v psychologii stále běžné.

Osobnostně-vývojový přístup ke studiu nadání

Neudržitelnost jednodimenzionálního konceptu nadání přibližně v polovině 20. stol. podporovaly také nově vzniklé teorie inteligence (J. P. Guilford), výzkum divergentního myšlení a tvořivosti (J. P. Guilford, E. P. Torrance) a obecně nástup humanistické psychologie. Do centra pozornosti se dostává „celá osobnostní výbava jedince“ a souhra osobnostních komponent jako předpoklad k podávání mimořádných výkonů včetně výkonů kognitivních. Opětovně se vynořila otázka rozvoje nadání prostřednictvím speciálních vzdělávacích programů pro populaci nadaných dětí. Vznikající multidimenzionální pojetí nadání je zakotveno v modelech a koncepcích nadání řady autorů.

K nejrozšířenějším a nejznámějším patří „tříkruhový“ model nadání J. S. Renzulliho (1978) – nadání je výsledkem interakce mezi třemi komponentami: schopnostmi, tvořivostí a motivací, případně model nadání holandského vývojového psychologa F. J. Mönkse 1987), který chápe nadání jako produkt interakce mezi šesti komponentami, z nichž tři náleží k „vnitřní výbavě“ dítěte (nadprůměrné schopnosti, kreativita, výkonová motivace) determinované třemi socializačními činiteli (rodina, škola a vrstevnická skupina). Jiní autoři (např. J. F. Feldhusen, K. A. Heller, D. H. Feldman) upozorňují na další významné komponenty a determinanty nadání: sebepojetí, význam kritických životních událostí, osoba vychovatele-vzdělavatele.

Pro praxi se stala velmi frekventovaná otázka vyhledávání nadaných (jejich identifikace nebo výběr), a to v okamžiku, kdy se rozšířilo vytváření speciálních vzdělávacích programů pro tuto populaci.

Ačkoliv se pozornost dále přesouvala na studium otázek vztahujících se k problematice adekvátního rozvíjení mimořádného nadání dětí, současně se realizovaly výzkumy, které byly zaměřeny na studium vztahu mezi vysokým, průměrným nebo nízkým IQ (t.j. tradičním ukazatelem nadání) a různými biologickými koreláty. Častými měřeními používanými v těchto výzkumech byly, kromě měření inteligence, např. evokované potenciály, měření rychlosti nervového vedení, měření kortikálního metabolismu glukózy, zjišťovaly se rozdíly a vztahy mezi hladinou testosteronu a výkony v prostorových úlohách inteligenčních testů u dětí s vysokým IQ a kontrolní skupiny (Eysenck, Barrett 1993, Reed, Jensen 1992, Haier, 1990). Tyto výzkumy přispívají k přesnější deskripci fenoménu nadání a lze v budoucnu očekávat intenzivnější tendenci k jejich integraci s psychologickými a pedagogickými výsledky výzkumů v této oblasti.

Osobnostně-vývojový přístup k problematice nadání se stal významný pro školskou praxi a myšlenky zastánců tohoto přístupu ovlivňují školskou politiku v oblasti výchovy a vzdělávání nadaných v mnoha zemích.

Sociálně-kulturní přístup ke studiu nadání

Multidimenzionální pojetí nadání plně reprezentují především modely sociálně-kulturní, orientované interakčně. Zastánci tohoto přístupu nahlížejí na problematiku nadání z kulturní perspektivy (Tannenbaum 1986, Csikszentmihalyi 1988, Gardner 1999). V rámci této perspektivy se předpokládá, že zkušenost s dominujícími oblastmi činností v dané kultuře, které jsou současně touto kulturou nejvíce ceněny, je základem vzniku dovedností a rozvoje schopností ve specifických oblastech. Sociálně-kulturní kontext vytváří škálu možností, od minimálních k optimálním, k rozvoji schopností a dovedností a dochází v něm k zprostředkovávání poznání. Kontext je v sociokulturním přístupu chápán nikoliv staticky, jako prostředí, které nás obklopuje, ale spíše vztahově, jako prostředí, ve kterém se vytvářejí mezi jeho prvky dynamické vztahy, ve kterých se individuum neustále nachází a kterými je spoluutvářeno. Nadání je považováno za výsledek vzájemného vztahu mezi kulturně definovanými možnostmi pro činnost nebo jednání a dovednostmi nebo schopnostmi jedince. Z toho plyne pojetí nadání jako nestabilního a relativně proměnlivého fenoménu.

Změna ve výzkumné orientaci, kdy se již neakcentuje zkoumání individuálních rozdílů v kognitivních výkonech, nýbrž vývoj těchto výkonů v určitém sociálně-kulturním kontextu, je v tomto přístupu zřejmá. Rovněž otázka optimálního vzdělávacího prostředí pro nadané byla předmětem zkoumání. Za optimální ze společenského i individuálního hlediska se považuje komplexní stimulace rozvoje ve škole, v mimoškolních institucích i v domácím prostředí. Pozornost se v této souvislosti věnovala také studiu působení institucí, zejména škol a vrstevnických vztahů na rozvoj nadání. H. Rost a T. Czesliková (1988, 1990) upozornili, že zejména analýza sociálních kontaktů je často zdrojem chybných závěrů v této oblasti, protože nejsou vůbec brány v úvahu sociokulturní charakteristiky interakcí v zemi, ve které se výzkum realizoval.

Tento přístup rovněž poukazuje na nutnost věnovat pozornost významným přechodovým momentům ve vzdělávací kariéře žáků. Těmi mohou být situace přechodu z jednoho stupně školy do vyššího nebo z jednoho typu do jiného, kdy dochází ke změně statusu. V těchto situacích je třeba analyzovat, jaké nové požadavky a nároky, jejichž zvládání je předpokladem úspěšné kariéry, jsou nově na žáka kladeny.

Uplatnění sociálně-kulturního přístupu ke studiu nadání se nám jeví jako perspektivní především v pedagogicko-psychologických souvislostech, zejména při řešení komplexu otázek v oblasti rozvíjení nadání a vzdělávání nadaných.

Vyhledávání nadaných – k terminologii

Vzhledem k tomu, že zejména v oblasti vyhledávání nadaných existuje značný terminologický chaos, definujeme zde nejprve pojmy, které jsou pro tuto oblast zvláště relevantní.

Vyhledáváním nadaných většinou rozumíme proces, kdy je zjišťováno, které žáky lze označit jako intelektově nadané, nebo způsob, jakým jsou vybíráni adepti pro účast ve speciální edukační nabídce určené pro tuto populaci. Definice nadání a modely nadání, z nichž vycházíme, ovlivňují tvorbu vyhledávací strategie i volbu použitých metod. Vyhledávání je zase „praxí“ ovlivněno především cíli a obsahem edukační nabídky, pro kterou je vyhledávání realizováno.

Podle našeho soudu jsou v procesu vyhledávání nadaných klíčové dva pojmy: identifikace a výběr. *Identifikací nadaných* rozumíme proces vyhledávání dětí, které svými předpoklady (potenciálem) a chováním vyhovují k zařazení do vzdělávací nabídky určené pro nadané děti. Při identifikaci se zaměřujeme především na tzv. latentní talenty, tedy na ty děti, které dosud z různých důvodů nepodávají v dané oblasti vysoké výkony. Jsou to často děti nižších věkových kategorií. Stručně můžeme říci, že hlavním účelem identifikace je vyhledávání dosud skrytých a silných stránek dětí. Identifikace je velmi aktuální tam, kde na škole paralelně existuje vedle hlavního vzdělávacího programu také možnost vzdělávat alternativně specifické skupiny žáků, v našem případě nadané. Je to proces realizovaný většinou v rámci jednoho stupně školy a úzce souvisí s „filozofií vedení“ školy a způsobem její práce.

Výběrem nadaných rozumíme takové vyhledávání nadaných, kdy hlavním kritériem pro posuzování nadání je již podávaný výkon v příslušné oblasti. Pouze děti s kvantitativně nebo kvalitativně nejvyššími (mimořádnými) výkony jsou zařazovány do speciálních edukačních nabídek pro nadané. Výběr se spíše týká dětí staršího školního věku, protože je zaměřen na vyhledání těch nejlepších dětí s již manifestovaným – demonstrovaným nadáním ze širší skupiny dětí (Hříbková 2005).

Základní přístupy k vyhledávání nadaných

S rozpracováváním modelů nadání v rámci jednotlivých přístupů ke studiu této problematiky se také uplatňovaly různé přístupy k vyhledávání intelektově nadaných. Blíže se zde zmíníme o těch, které je nejlépe odrážejí.

Vyhledávání nadaných, které je založené na přesvědčení, že nadání je fenomén, který jedinec vlastní, přesvědčení o existenci specifického osobnostního potenciálu takového jedince a přesvědčení o možnosti měření tohoto potenciálu, je charakteristické pro *první přístup*. Vychází se v něm z předpokladu různorodosti charakteristik jedinců – žáků. Tyto charakteristiky mají distribuci normálního rozložení a pouze extrémní hodnoty (např. inteligence, tvořivosti nebo motivace) jsou považovány za oblast nadání. V praxi se s tímto přístupem setkáváme tehdy, postupujeli se v tomto procesu podle modelů nadání uvažujících pouze o jedné, a často podle autorů nejpodstatnější, charakteristice osobnosti (např. inteligenci – L. Terman) nebo o více základních skupinách osobnostních charakteristik, jejichž vysoký stupeň rozvoje, případně souhra, vymezuje nadání (Renzulli 1978, 1986). V tomto případě se snažíme identifikovat nebo vybrat ty jedince, kteří vykazují vysoký potenciál ve sledovaných charakteristikách. To však současně znamená, že předpokládáme stabilní „uložení“ nadání v jedinci a úkolem vyhledávání je toto nadání „objevit“. Proto se při tomto vyhledávání nadaných setkáváme spíše s užitím psychologických metod. Důraz kladený při vyhledávání nadaných na osobnostní charakteristiky je současně uplatňován u dětí nižšího věku. Teoretickým pozadím takto orientovaného způsobu vyhledávání nadaných jsou koncepce a modely nadání příslušející k schopnostně-kognitivnímu a později osobnostně-vývojovému přístupu ke studiu tohoto fenoménu.

Podstatné je, že vyhledávací strategii do značné míry odtrhujeme od cíle a obsahu edukačního programu, pro který se tento proces realizuje, a celá strategie je na něm spíše nezávislá.

U *druhého způsobu* vyhledávání intelektově nadaných se naopak setkáváme s tím, že strategie je primárně založena na edukační nabídce, programu, pro který je vyhledávání realizováno. Obsah i metody vyhledávání jsou v tomto případě především určeny cíli a obsahem speciální nabídky, která byla vytvořena pro populaci nadaných. Např. žák je označen jako nadaný, jestliže jeho podané výkony, znalosti a dovednosti odpovídají cílům a nárokům konkrétního vzdělávacího programu. Předpokládá se, že úspěšnost žáka v použitých vyhledávacích metodách do značné míry zaručuje také jeho úspěch ve speciálním programu, do kterého vstupuje. Předpokládá se, že vybraný žák bude mít z programu velký užitek.

Tento vyhledávací přístup je užíván u různých druhů nadání včetně intelektového. Vymezení „nadání“ se tak může lišit podle jednotlivých rozvíjejících programů, a nemusí být proto „odhaleni jako nadaní“ stále stejní žáci. Je založen tedy méně na charakteristikách individua a více závisí na obsahu a cílech vzdělávacího programu. Proto je také akcent při vyhledávání kladen spíše na využívání pedagogických metod. Jak ale rozlišit mezi úspěšností v určité vzdělávací nabídce a úspěšností z dlouhodobějšího hlediska, např. v pozdějším životě? Otevírá se zde tolik diskutovaný problém kontinuity nadání od dětství do dospělosti (Tannenbaum 1983, Sternberg 2000, Winner 2000).

Poslední způsob vyhledávání nadaných je charakteristický tam, kde se ve třídách při výuce již běžně používá vnitřní diferenciace, případně skupinové vyučování po kratší dobu a kdy individuální přístup k žákům není nadstandard speciálních škol. V tomto případě je pozornost věnována zejména stupni zvládnutí znalostí o určité oblasti a nabytí příslušných dovedností žáka. Nadání není však primárně chápáno jako tempo učení, ale jako vysoká kvalita zvládnutí jeho obsahu.

Tento způsob vyhledávání nadaných vychází z myšlenky interakce mezi charakteristikami žáka na jedné straně a obsahem, metodou vyučování a cíli vzdělávacího programu na straně druhé. Je metodologicky i časově velmi náročný a využívá psychologických a pedagogických metod. Na rozdíl od předcházejících způsobů vyhledávání, které se více aplikují při identifikaci a výběru do speciálních, alternativních vzdělávacích programů pro nadané nebo při vstupu do speciální školy pro nadané, má tento způsob své místo v běžných školách a v integrované variantě vzdělávání nadaných.

Závěr

V teoretické rovině je zkoumání fenoménu nadání v současné době zaměřeno zejména na otázky geneze nadání a studium sociokulturních determinant umožňujících jeho vznik. Specifičnost tohoto tématu zavedla v minulosti výzkum často do izolace. Proto také integrační tendence v této oblasti lze zaznamenat nejen uvnitř psychologie, ale i mezi obory, které rovněž studují tento fenomén. V psychologii je pak zjevné úsilí o propojení studia nadání s hlavním proudem psychologického a pedagogického výzkumu a snaha o ukotvení tématu ve vývojové psychologii. Interdisciplinární přístup při jeho studiu je považován za nepostradatelný.

Domníváme se, že jak k vyhledávání nadaných, tak k definování nadání je třeba přistupovat pluralitně. Nadání je totiž něco, co se konstruuje a utváří sociálně, a proto je i proměnlivé. Z těchto důvodů může být jeho konceptualizace různá a může se v průběhu času měnit. Tomu odpovídají i různé přístupy k procesu vyhledávání. Při psychologických i pedagogických výzkumech se většinou používá pouze jednoho vyhledávacího kritéria (IQ) a dominuje zaměření na osobnostní charakteristiky (Ziegler, Raul 2000). Ve vzdělávací praxi je však silně problematické a dnes již obtížně udržitelné používat jen jedno kritérium při vyhledávání nadaných. Proto se i téma vyhledávání intelektově nadaných stalo součástí pedagogiky nadaných, která se jako obor postupně konstituovala a konstituuje. Akcent, zpočátku kladený na odhalování jedinců s vysokou inteligencí byl v průběhu 20. stolení přesunut na vytváření možností pro adekvátní rozvíjení nadání. Neznamená to však, že vyhledávání nadaných ustoupilo koncem století ze spektra zájmu pedagogů a psychologů. Naopak se ukazuje, že je třeba se v praxi zaměřit na ověřování efektivity a ekonomičnosti používaných vyhledávacích strategií a výzkumně se tomuto tématu více věnovat.

Literatura

[1] Borkowski, J. G., Peck, V. A.: Causes and consequences of metamemory in gifted children. In: Sternberg, R. J., Davidson, J. E. (Eds.): *Conceptions of Giftedness*, University Press, Cambridge, 1986, s. 182–200.

[2] Czeschlik, T., Rost, D. H.: Hochbegabte und ihre Peers. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 1988, 2, Heft 1, s. 1–23.

[3] Csikszentmihalyi, M.: Society, culture, person: a systems view of creativity. In: Sternberg, R. J. (Ed.): *The Nature of Kreativity*, Cambridge University Press, New York, 1988, s. 325–339.

[4] Eysenck, H. J., Barrett, P. T.: Brain Research Related To Giftedness. In: Heller, K. A., Mönks, F. J., Passow, A. H. (Eds.): *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent*, Pergamon Press, Oxford, 1993, s. 115–131.

[5] Gardner, H.: *Dimenze myšlení.* Portál, Praha, 1999.

[6] Haier, R. J.: The end of intelligence research. *Intelligence* **14**, 4 (1990), s. 371–374.

[7] Hříbková, L.: *Nadání a nadaní. Pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výzkumy a jejich vztah ke školské praxi.* PedF UK, Praha, 2005.

[8] Mönks, F. J.: Beratung und Förderung besonders begabter Schüller. *Psychol. Erz. Unterr.* **34** (1987), s. 214–222.

[9] Reed, T. E., Jensen, A. R.: Conduction velocity in a brain nerve pathway of normal adults correlates with intelligence level. *Intelligence* **16** (1992), s. 259–272.

[10] Renzulli, J. S.: What makes giftedness? Re-examining a definition. *Phi Delta Kappan* **60** (1978), s. 180–184.

[11] Renzulli, J. S.: The three-ring conception of giftedness: a developmental model for creative productivity. In: Sternberg, R. J., Davidson, J. E. (Eds.): *Conceptions of Giftedness*, University Press, Cambridge, 1986, s. 53–92.

[12] Rost, D. H., Czeschlik, T.: Überdurchschnittlich intelligente Zehnjährige: Probleme mit der psycho-sozialen Anpassung? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie* **22**, 4 (1990), s. 284–295.

[13] Shore, B. M., Dover, A. C.: Metacognition, Intelligence and Giftedness. *Gifted Child Quarterly* **31**, 1 (1987), s. 37–39.

[14] Sternberg, R. J.: *Úspešná inteligenci.* SOFa, Bratislava, 2000.

[15] Sternberg, R. J.: Giftedness as Developing Expertise: a theory of the interface between high abilities and achieved excellence. *High Ability Studies* **12**, 2 (2001), s. 159–179.

[16] Tannenbaum, A. J.: *Gifted Children. Psychological and Educational Perspectives.* Macmillan Publishing, New York, 1983.

[17] Terman, L. M.: *Genetic Studies of Genius: Vol. 1 Mental and Physical Traits of Thousand Gifted Children.* Stanford University Press, Stanford, 1926.

[18] Tannenbaum, A. J.: Giftedness: a Psychosocial Approach. In: Sternberg, R. J., Davidson, J. E. (Eds.): *Conceptions of Giftedness*, University Press, Cambridge, 1986, s. 21–51.

[19] Winner, E.: The origins and end of giftedness. *American Psychologis* **55**, 1 (2000), s. 159–169.

[20] Ziegler, A., Raul, T.: Myth and reality: a review of empirical studies on giftedness. *High Ability Studies* **11**, 2 (2000), s. 113–136.

Jak se pohybují těžiště proměnných trojúhelníků vepsaných do pevné kružnice

Milan Koman, PedF UK Praha [1]
Rudolf Fritsch, LMU Mnichov, SRN [2]

ABSTRAKT. *V článku jsou pomocí Cabri geometrie studovány křivky, po kterých se pohybují těžiště tří typů proměnných trojúhelníků vepsaných do pevné kružnice. K odvození rovnic těchto křivek byl použit program MAPLE. V článku jsou uvedeny jen výsledné rovnice.*

Úvod

Článek navazuje na článek [1] prezentovaný na předcházející konferenci „Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let“ v roce 2005. Zabývá se novými typy proměnných trojúhelníků vepsaných do pevné kružnice a navíc přináší ověření výsledků získaných geometrickou cestou pomocí počítačové algebry, kterou nabízejí programy Maple a Mathematica. Článek také navazuje na výzkum prezentovaný na webových stránkách [2].

---

[1] e-mail: milan.koman@quick.cz

[2] e-mail: ritsch@math.lmu.de

Těžiště útvaru

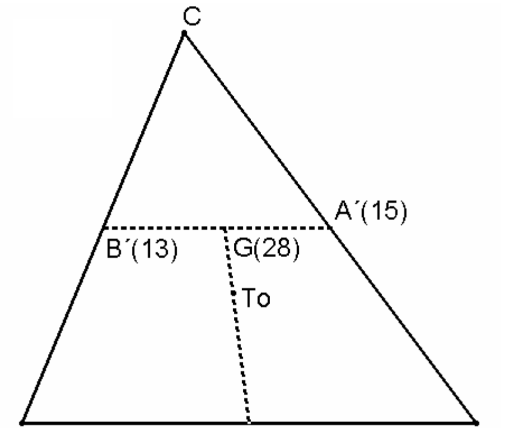
Ve všech vyšetřovaných případech studujeme těžiště trojúhelníků dvou typů.

Těžiště trojúhelníku, které sestrojujeme známým způsobem jako průsečík jeho těžnic. Je to těžiště dvojrozměrného útvaru, trojúhelníkové plochy, kterou vytvoříme např. pomocí papírového nebo plechového modelu.

Těžiště obvodu trojúhelníku, které chápeme jako geometrickou interpretaci hmotového těžiště (tj. působiště gravitačních sil) drátěného modelu trojúhelníku s rovnoměrným rozložením hmotností podél všech jeho stran. Přitom stranám trojúhelníku přidělujeme hmotnosti, které se rovnají jejich délce.

Stručně připomeneme dva způsoby, jak můžeme těžiště obvodu trojúhelníku sestrojit. Podrobnosti nalezne čtenář např. v [1] nebo [3].

Konstrukce 1 Mějme trojúhelník ABC o stranách a, b, c. Označíme středy jeho stran AB, BC, CA po řadě C', A', B' a přiřadíme jim hmotnosti rovné délkám stran c, b, a. (Na obr. 1 je dán trojúhelník ABC o stranách $a = 15$, $b = 13$ a $c = 14$. Hmotnosti středů C', A', B' jsou připsány v závorce.)



Obr. 1

Sestrojíme hmotové těžiště G dvojice bodů A', B' (pomocí zákona o dvojramenné páce) tak, aby $|GA'| : |GB'| = b : a = 13 : 15$ (pozor na pořadí).

Bodu G přiřadíme hmotnost $a + b = 28$. Pak sestrojíme hmotové těžiště T_0 dvojice bodů G a C' tak, aby $|T_0G| : |T_0C| = c : (a+b) = 28 : 14$ (opět pozor na pořadí). Bod T_0 je výsledné těžiště obvodu trojúhelníku ABC.

Tuto geometrickou konstrukci je možné algebraizovat, tj. vypočítat polohu těžiště pomocí souřadnic. Souřadnice T_0 vypočteme jako vážený průměr ze souřadnic bodů C', A', B', kde za váhy těchto bodů zvolíme jejich hmotnosti. Můžeme to ověřit pro náš trojúhelník ABC na obr. 2. Dostaneme

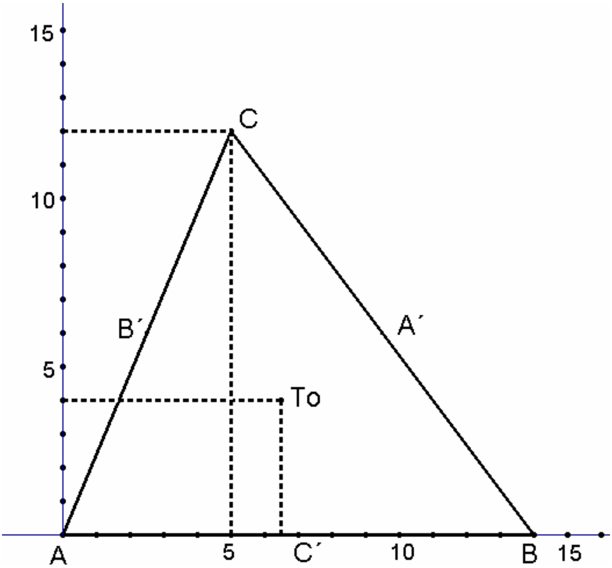
$$T_0 = \frac{aA' + bB' + cC'}{a + b + c}$$

a po dosazení vyjde

$$x(T_0) = \frac{15 \cdot 9{,}5 + 13 \cdot 2{,}5 + 14 \cdot 7}{15 + 13 + 14} = 6{,}5\,,$$

$$y(T_0) = \frac{6 \cdot 15 + 6 \cdot 13 + 14 \cdot 0}{15 + 13 + 14} = 4,$$

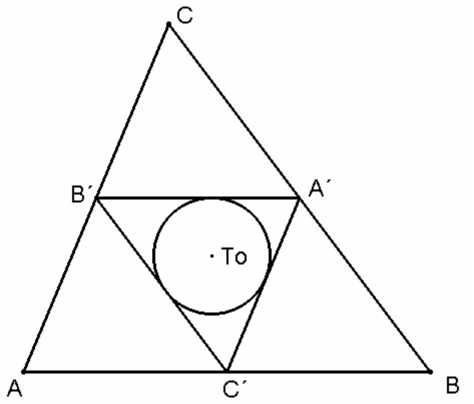
což souhlasí s obr. 2.



Obr. 2

Konstrukce 2 Těžiště obvodu trojúhelníku ABC sestrojíme jako střed kružnice vepsané *příčkovému trojúhelníku* $A'B'C'$ (tj. trojúhelníku, jehož strany jsou střední příčky trojúhelníku ABC, obr. 3).

Konstrukce 2 je vhodná zejména při práci s Cabri geometrií, protože tento program obsahuje makrokonstrukci „Inscribed Circle“. Střed kružnice vepsané trojúhelníku tak dostaneme pouhým kliknutím na tento trojúhelník, v případě konstrukce 2 klikneme na příčkový trojúhelník.



Obr. 3

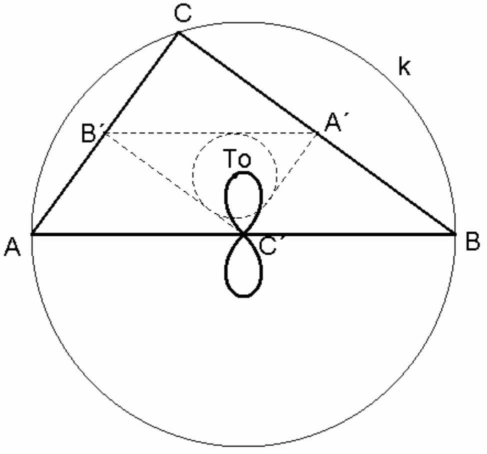
Tři úlohy

Přejdeme ke třem vybraným úlohám, které přinášejí zajímavé a překvapivě pěkné ukázky drah, po kterých se mohou pohybovat těžiště proměnných trojúhelníků vepsaných do pevné kružnice. Doporučujeme čtenářům, aby si sami výsledky ověřili pomocí Cabri geometrie. Nejzajímavější na těchto úlohách je právě skutečné sledování pohybu zkoumaných těžišť.

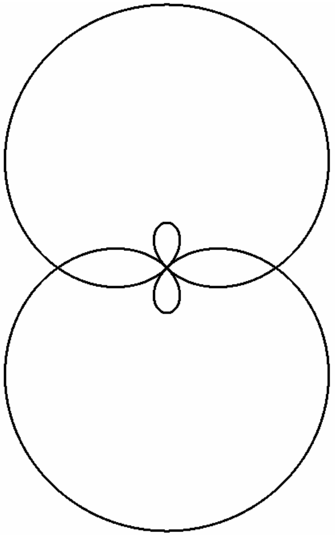
Úloha 1 Je dána pevná jednotková kružnice k s průměrem AB, po které obíhá bod C. Máme najít dráhu, po které se pohybuje těžiště obvodu proměnného trojúhelníku ABC.

První etapa řešení Těžiště T_0 obvodu libovolného trojúhelníku ABC najdeme jako střed kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku $A'B'C'$. Pak sestrojíme dráhu bodu T_0 odpovídající pohybu bodu C po kružnici k

(obr. 4a). Tato dráha má tvar „osmičky“ a připomíná Bernoulliovu lemniskatu[3]. V článku [1] však bylo ukázáno, že tato „osmička“ je užší než Bernoulliova lemniskáta.



Obr. 4a



Obr. 4b

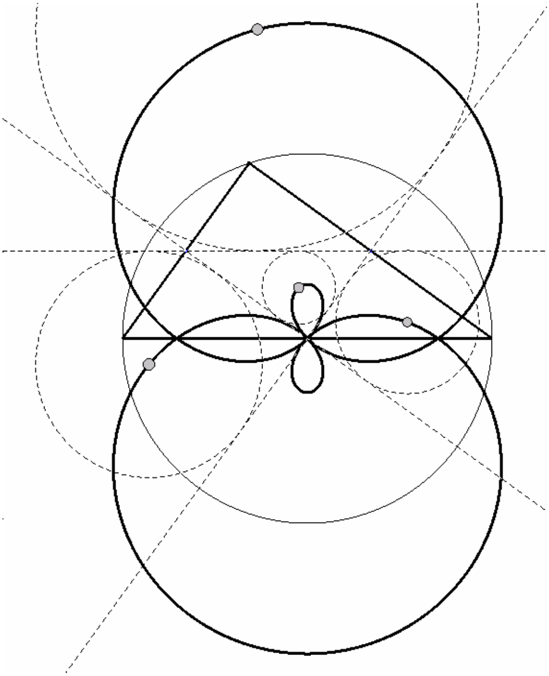
---

[3] Viz např. `http://mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html`

Druhá etapa řešení Při zkoumání této křivky pomocí programu Maple jsme po značném úsilí dospěli ke křivce složené ze dvou částí, které měly rovnice:

$$2(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$$
$$2(x^2 + y^2 - y)^2 = x^2 + y^2$$

Součástí této složené křivky je i „osmička“, kterou jsme dostali na obr. 4a. Vznikla otázka, jaká je geometrická interpretace zbývajících částí křivky z obr. 4b. To, že nám vyšla „větší“ křivka, je snadno vysvětlitelné. S podobným jevem se můžeme setkat často při vyšetřování množin bodů pomocí analytické geometrie. Nastává to v případě, když nepoužíváme ekvivalentní úpravy, např. když při úpravách rovnic používáme umocňování.

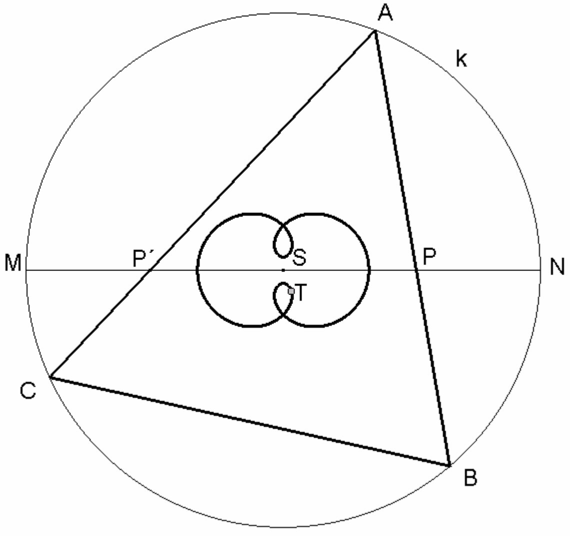


Obr. 5

Třetí etapa řešení Napadlo nás, že ke konstrukci jednotlivých bodů „osmičky“ z obr. 4a jsme použili střed kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku. Zkusili jsme proto hledat pomocí Cabri geometrie dráhy, po kterých se pohybují středy kružnic připsaných příčkovému trojúhelníku. A ejhle, klepli jsme hřebík na hlavičku. Křivka z obr. 4b se skládá z drah středů vepsané kružnice a připsaných kružnic příčkovému trojúhelníku (obr. 5).

Doporučujeme čtenářům, aby si první a třetí etapu řešení vyzkoušeli sami na svém počítači. Komu se to podaří, může ještě úlohu 1 obměnit tak, že v kružnici k nahradí průměr AB libovolnou tětivou kružnice k. Samozřejmě doporučujeme zkoumat ve všech uvedených situacích i dráhy „obyčejných“ těžišť trojúhelníků.

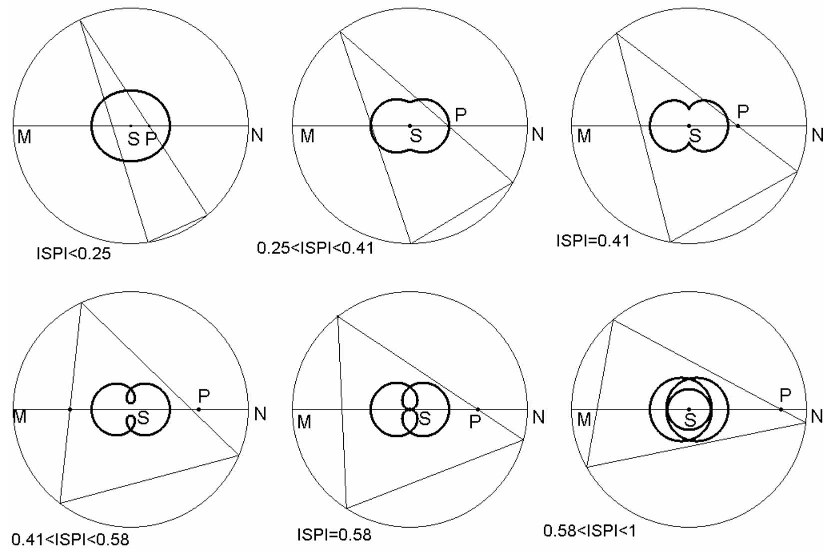
Úloha 2 Je dána pevná jednotková kružnice k s průměrem MN. Na průměru MN leží dva proměnné body P, P' souměrně sdružené podle středu S kružnice k. Po kružnici k se pohybuje bod C. Sestrojíme trojúhelník ABC vepsaný kružnici k tak, že strana AB prochází bodem P a strana AC prochází bodem P'. Máme vyšetřit dráhy těžišť T proměnných trojúhelníků ABC pro různé polohy bodů P a P'.



Obr. 6

První etapa řešení (pro pevnou dvojici bodů P a P'). Těžiště T sestrojíme obvyklým způsobem a pak najdeme jeho dráhu (jako množinu bodů nebo jako stopu pohybujícího se bodu). V situaci na obr. 6 dostáváme křivku se dvěma smyčkami.

Druhá etapa řešení (zkoumá změny tvaru dráhy těžiště při změnách polohy bodů P a P'). Změnu tvaru hledané křivky v závisloxti na délce úsečky SP naznačuje obr. 7.



Obr. 7

Jak se mění tvary výsledných křivek na obr. 7 udává tabulka:

Konvexní křivka	Nekonvexní křivka se čtyřmi inflexními body	Nekonvexní křivka se dvěma body úvratu
Nekonvexní křivka se dvěma disjunktními smyčkami	Nekonvexní křivka se dvěma dotýkajícími se smyčkami	Nekonvexní křivka se dvěma protínajícími se smyčkami

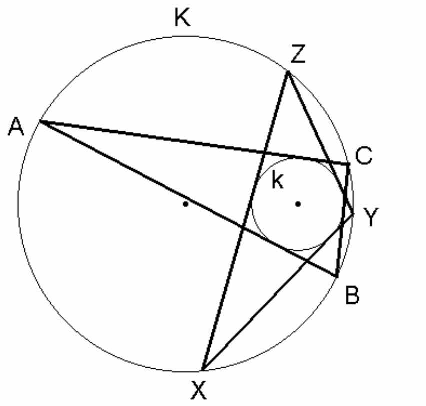
Jestliže se délka úsečky SP rovná 1, je hledanou dráhou kružnice s poloměrem 1/3.

Rovnice křivek, které jsme zíslali, jsou vesměs značně složité. Pro zajímavost uvádíme rovnici křivky s dotýkajícími se smyčkami (na obr. 7 dole uprostřed), která je 6. stupně:

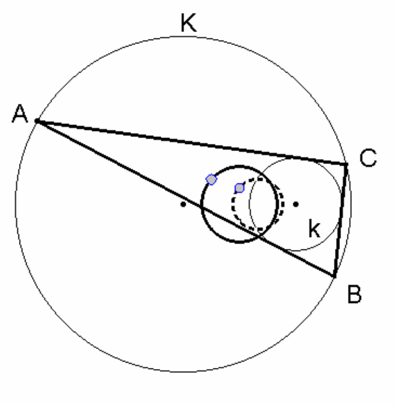
$$9(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)(3x^2+2y^2)+y^2=0$$

Doporučujeme čtenářům, aby si sami zkusili zobrazit obrázek s řešením úlohy 2 v Cabri geometrii.

Než přejdeme k úloze 3, řekneme si, co rozumíme množinou *dvojstředových trojúhelníků*[4]. Jsou to trojúhelníky, které mají společnou jak kružnici opsanou, tak kružnici vepsanou. Sestrojíme je např. tak, že k danému trjúhelníku ABC sestrojíme opsanou kružnici K i vepsanou kružnici k. Sestrojíme-li nyní libovolný trojúhelník XYZ vepsaný kružnici K, jehož dvě strany se dokýtají kružnice k, pak se i třetí strana dotýká kružnice k (obr. 8). Mají tedy oba trojúhelníky společnou kružnici opsanou i vepsanou.



Obr. 8



Obr. 9

Úloha 3 Máme vyšetřit dráhy těžišť všech dvojstředových trojúhelníků s pevnou opsanou kružnicí K a s pevnou vepsanou kružnicí k.

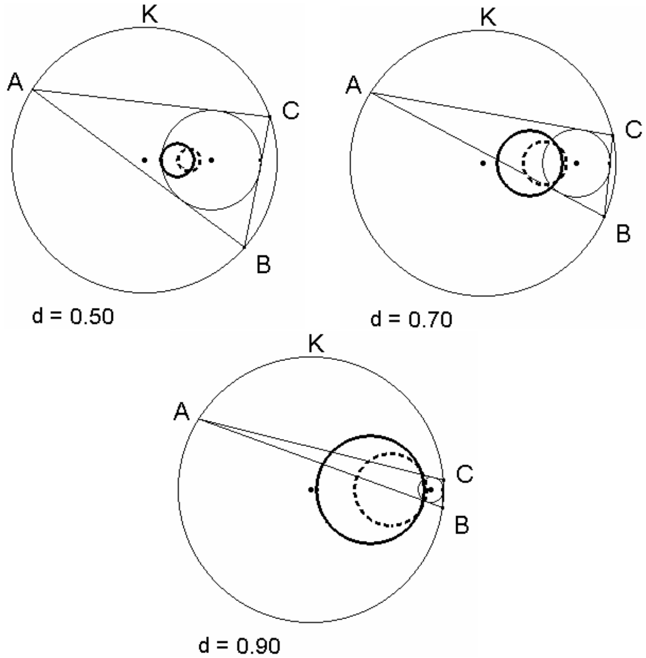
Řešení Oproti předešlým dvěma úlohám jsou výsledky jednoduché. Dráhy těžiště obvodu trojúhelníků i standardního těžiště jsou kružnice zobrazené na obr. 9. Avšak ověřit početně, že jde opravdu o kružnice není vůbec jednoduché. Těžiště obvodu trojúhelníků XYZ se pohybuje po větší kružnici vyznačené tučnou čarou, standardní těžiště se pohybují po čárkované kružnici. Velikost těchto kružnic závisí na vzdálenosti d středů opsané a vepsané kružnice. S rostoucí vzdáleností d se tyto kružnice zvětšují a naopak se zmenšující se vzdáleností d se tyto kružnice zmenšují (obr. 10).

---

[4] Viz `http://mathworld.wolfram.com/BicentricPolygon.html`, kde se lze podrobněji seznámit o dvojstředových trojúhelnících, čtyřúhelnících, pětiúhelnících atd.

V případě jednotkové kružnice K mají tyto kružnice rovnice:

$$\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d^2}{2}\right)^2 \qquad \left(x - \frac{2d}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{d^2}{3}\right)^2$$



Obr. 10

Závěr

Čtenáři, kterého tento příspěvek zaujal, můžeme doporučit práci [2]. V ní jsou vyšetřovány dráhy těžišť a dalších význačných bodů nejen u trojúhelníků, ale i u čtyřúhelníků vepsaných do pevné kružnice.

Literatura

[1] Koman, M.: Kolik těžišť má mnohoúhelník? Sestrojujeme s CABRI těžiště pevných a proměnných mnohoúhelníků. In: Krátká, M. (ed.): *Jak učit matematice žáky ve věku 11–15 let*, Vydavatelský servis, Plzeň, 2006, 89–97.

[2] Fritsch, R., Koman, M.: *The loci of some Spieker Centres and other notable Points of Triangles and Quadrangles inscribed in a fixed Circle.* `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/f̃ritsch/Spieker%20centers4.pdf`

[3] Šimša, J.: Archimedova statika v geometrii. *Rozhledy mat.-fyz.*, 1997.

Nad žákovskými protokoly jedné úlohy MO

Jaromír Šimša, Ústav matematiky a statistiky, PřF MU, Brno [1]

Abstrakt. *Příspěvek je věnován teorii i praktickým zkušenostem z řešení jedné úlohy autora, která byla zařazena v roce 2006 do krajského kola Matematické olympiády v kategorii B, určené žákům 2. ročníků středních škol. V první části jsou vyloženy možné přístupy k řešení úlohy, ve druhé části jsou pak vyhodnoceny a obsahově i formulačně analyzovány protokoly této úlohy od celkového počtu 318 řešitelů z 11 krajů ČR.*

Úvod

Budeme se zabývat úlohou, kterou autor příspěvku připravil pro krajské kolo 55. ročníku Matematické olympiády v kategorii B, jež se konalo 21. března 2006 ve všech krajích ČR. Nejprve posoudíme zadání úlohy a přístupy, které řešitelé mohli na cestě k jejímu řešení uplatnit. Vyložíme je v podobě dvou „vzorových“ řešení. V další části pak zhodnotíme (podle jednotlivých krajů i celkově) úspěšnost řešitelů úlohy (kterou posuzují a vyjadřují 0–6 body krajské komise MO). Následně podrobíme obsahovému rozboru žákovské protokoly k dané úloze (které si autor příspěvku od krajských komisí MO vyžádal); nevyhneme se přitom ani analýze chybných úvah a logických zkratů při neúspěšných pokusech. Mnohé nepodložené závěry a občas i kuriózní vyjádření žáků ocitujeme a pokusíme se v závěru alespoň částečně dobrat příčin, proč zadaná úloha byla nad síly naprosté většiny řešitelů krajských kol MO v celé ČR.

Úloha a její řešení

Úloha byla při soutěži zadána v následující podobě: *Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ platí*

$$1 \le a+b+c+2(ab+ac+bc)+3(1-a)(1-b)(1-c) \le 9. \qquad (1)$$

---

[1] e-mail: simsa@ipm.cz

Předběžné úvahy

Nerovnosti (1), které máme dokázat, nejsou očividné již proto, že samotný zadaný algebraický výraz, který označíme

$$V = a + b + c + 2(ab + ac + bc) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c), \tag{2}$$

vypadá poměrně složitě. Zjednodušit jeho vyjádření lze jen částečně: po roznásobení závorek a sloučení členů téhož druhu dostaneme

$$V = 3 - 2(a + b + c) + 5(ab + ac + bc) - 3abc. \tag{3}$$

Ani po takové úpravě výrazu V nejsou nerovnosti (1) zřejmé. Vraťme se proto k zápisu (2) a vyčleňme v něm (zřejmě se nabízejícím způsobem) tři části:

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} V_1 &= a + b + c, \\ V_2 &= 2(ab + ac + bc), \\ V_3 &= 3(1 - a)(1 - b)(1 - c). \end{aligned} \tag{4}$$

Možné hodnoty těchto dílčích výrazů V_i je snadné určit: pro všechna čísla $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ jistě platí

$$0 \le V_1 \le 3, \quad 0 \le V_2 \le 6, \quad 0 \le V_3 \le 3. \tag{5}$$

Odtud plynou pro hodnotu celkového výrazu V odhady

$$0 + 0 + 0 \le V \le 3 + 6 + 3, \quad \text{neboli} \quad 0 \le V \le 12.$$

To je ovšem horší výsledek nežli ten, který máme podle zadání úlohy dokázat. Cítíme, že za tím účelem musíme provedené „hrubé“ sečtení globálních odhadů (5) zjemnit rafinovanějšími postupy, jež by odrážely celkem zřejmý závěr, který lze nepřesně vyslovit takto: *malé hodnoty* V_1, V_2 *znamenají velké hodnoty* V_3 *a naopak velké hodnoty* V_1, V_2 *znamenají malé hodnoty* V_3. Tuto intuitivně jasnou *ideu kompenzace*, v matematice tolik častou a v nejjednodušší podobě vyjádřenou pro veličiny z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ identitou

$$x + (1 - x) = 1,$$

je ovšem zapotřebí převtělit do exaktního postupu šitého na míru naší situace. Popíšeme ho v následujícím paragrafu jako první úplné řešení dané úlohy. Předtím ještě poznamenejme, že jednodušší vyjádření (3) výrazu V je pro bezprostřední kompenzační úvahy méně výhodnější nežli původní zápis (2). Pouhé sčítání globálních odhadů jednotlivých částí výrazu (3) totiž vede k ještě horším odhadům $-2 \le V \le 18$.

První řešení

Zabývejme se nejdříve důkazem nerovnosti

$$V = a + b + c + 2(ab + ac + bc) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 1.$$

Ukážeme, že malé hodnoty součtu $a + b + c$ lze dostatečně vykompenzovat hodnotami jednoho součinu $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$, který je ve výrazu V zastoupen vlastně třikrát. Pro pomocný součet

$$S = (a + b + c) + (1 - a)(1 - b)(1 - c)$$

totiž platí

$$\begin{aligned} S &= (a + b + c) + (1 - a)(1 - b)(1 - c) = \\ &= (a + b + c) + (1 - a - b - c + ab + ac + bc - abc) = \\ &= 1 + ab + ac + bc - abc = 1 + ab(1 - c) + ac + bc. \end{aligned}$$

Poslední výraz je součtem čísla 1 a tří dalších sčítanců, nezáporných pro libovolná $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$. Odtud již plyne nerovnost $S \geq 1$, protože navíc mezi výrazy V a S platí vztah

$$V = S + 2(ab + ac + bc) + 2(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq S,$$

je rovněž nerovnost $V \geq 1$ dokázána.

Nerovnost $V \leq 9$ dokážeme tak, že velké hodnoty součtu $a + b + c$ vykompenzujeme hodnotami trojnásobného součinu $3(1-a)(1-b)(1-c)$. Ukážeme totiž, že pro libovolná $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ platí

$$(a + b + c) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 3. \tag{6}$$

Nejdříve si však všimněme, že odhad (6) je pro naše účely postačující: sečteme-li ho se zřejmým odhadem

$$2(ab + ac + bc) \leq 6,$$

který jsme již dříve uvedli v (5), dostaneme kýženou nerovnost

$$V = (a + b + c) + 2(ab + ac + bc) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 9.$$

Zbývá tedy dokázat (6). K tomu nejprve zřejmé nerovnosti

$$(1 - a)(1 - b) \leq 1, \quad (1 - a)(1 - c) \leq 1, \quad (1 - b)(1 - c) \leq 1$$

vynásobíme po řadě (nezápornými) čísly $1-c$, $1-b$, $1-a$; po sečtení všech tří vynásobených nerovností pak obdržíme

$$3(1-a)(1-b)(1-c) \leq (1-a)+(1-b)+(1-c),$$

odkud již snadnou úpravou dostaneme slíbenou nerovnost (6).

Významný dodatek

V průběhu autorova vystoupení na samotné konferenci v Hradci Králové objevil jeden z přítomných posluchačů, *dr. Antonín Jančařík* z PedF UK v Praze, pěknou geometrickou interpretaci celé úlohy, jež vysvětluje kompenzační nerovnosti, které v předchozím podání tak trochu „spadly z nebe“. Představme si krychli $1 \times 1 \times 1$ a tři navzájem kolmé roviny (rovnoběžné se stěnami krychle), které rozdělují hrany vycházející z každého vrcholu krychle na dvojice úseček délek a a $1-a$, b a $1-b$, resp. c a $1-c$. Vidíme, že celá krychle je vyplněna soustavou čtyř kvádrů

$$a \times 1 \times 1,\ 1 \times b \times 1,\ 1 \times 1 \times c,\ (1-a) \times (1-b) \times (1-c),$$

(první tři z nich se dokonce překrývají), takže sečtením jejich objemů dostaneme geometrický důkaz nerovnosti $V \geq 1$. Ihned je rovněž jasné, proč platí i nerovnost (6), na které jsme založili dříve uvedený důkaz nerovnosti $V \leq 9$: v součtu

$$a \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot b \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot c + 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

je totiž každá část objemu celé krychle započítána nejvýše třikrát.

Přidáme-li k uvedeným čtyřem kvádrům ještě dva exempláře čtvrtého z nich a po dvou exemplářích každého ze tří kvádrů

$$a \times b \times 1,\ a \times 1 \times c,\ 1 \times b \times c,$$

zjistíme, že hodnota V je součtem objemů těchto 12 kvádrů, kterými je „několikanásobně“ vyplněna celá krychle tak, že každá z osmi částí krychle (rozdělené zmíněnými třemi rovinami) je součástí devíti, čtyř, tří nebo jednoho z 12 uložených kvádrů:

$$\begin{aligned} V = {} & 9abc + 3(1-a)(1-b)(1-c) + \\ & + 4ab(1-c) + 4ac(1-b) + 4bc(1-a) + \\ & + a(1-b)(1-c) + b(1-a)(1-c) + c(1-a)(1-b) \end{aligned}$$

Odtud znovu plynou obě nerovnosti

$$1 \leq V \leq 9.$$

Druhé řešení

Vraťme se znovu k zadání naší úlohy na důkaz dvou algebraických nerovností (1). Podívejme se na roli zastoupených proměnných a, b, c z intervalu $\langle 0,1\rangle$ trochu jinak: považujme je za nyní *neznámé* ve dvou daných *nerovnicích* (nikoliv nerovnostech), které si předsevzeme v daném oboru $\langle 0,1\rangle$ *řešit*, tj. určit jejich obory pravdivosti. Psychologicky vzato, je tato změna pohledu vlastní kritické duši každého matematika. Zapochybujeme, že zadané tvrzení o nerovnostech s parametry platí, a teprve procesem řešení příslušných nerovnic se přesvědčíme, že do jejich oboru pravdivosti patří všechny hodnoty parametrů, které jsou uvedeny v zadání.

Uvažujme tedy závislost

$$V(a,b,c) = a + b + c + 2(ab + ac + bc) + 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

a nejprve při *pevných hodnotách* parametrů $b, c \in \langle 0,1\rangle$ řešme následující soustavu nerovnic s neznámou x:

$$1 \le V(x,b,c) \le 9 \tag{7}$$

(Abychom zdůraznili přechod od proměnné k neznámé, zaměnili jsme písmeno a písmenem x.) O jaký druh nerovnic se jedná? Výraz $V(x,b,c)$ je zřejmě *lineární funkcí* proměnné x:

$$V(x,b,c) = Px + Q, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} P &= 5(b+c) - 3bc - 2 \\ Q &= 5bc - 2(b+c) + 3 \end{aligned}$$

(Jak se ovšem dále ukáže, konkrétní vzorce pro koeficienty P a Q vůbec potřebovat nebudeme, důležitá bude později pouze jejich lineární závislost na parametech b a c.) Řešit soustavu lineárních nerovnic (7), tedy soustavu

$$1 \le Px + Q \le 9,$$

je rutinní školská úloha (s mírně komplikovanou diskusí podle znaménka koeficientu P). Ani to zde dělat nebudeme, neboť naším úkolem je pouze ověřit, že do oboru pravdivosti patří jakékoliv číslo x z intervalu $\langle 0,1\rangle$. *To s ohledem na linearitu nastane, právě když bude soustava splněna pro krajní hodnoty $x = 0$ a $x = 1$* (grafem lineární funkce na intervalu je totiž úsečka). Stačí tedy dokázat dvojici nerovností

$$1 \le V(0,b,c) \le 9 \quad \text{a} \quad 1 \le V(1,b,c) \le 9,$$

které mají po dosazení $a = 0$, resp. $a = 1$ do výrazu $V(a, b, c)$ tvar

$$1 \le b + c + 2bc + 3(1 - b)(1 - c) \le 9,$$
$$1 \le 1 + b + c + 2(b + c + bc) \le 9.$$

Nyní můžeme náš „řešitelský“ přístup zopakovat. Při *pevné hodnotě* parametru $c \in \langle 0, 1\rangle$ a záměně b za y budeme řešit každou ze čtyř posledních (opět lineárních) nerovnic s neznámou y. Podobně jako dříve zjistíme, že první dvě nerovnosti

$$1 \le V(0, y, c) \le 9$$

platí pro každé $y \in \langle 0, 1\rangle$, právě když platí v krajních bodech

$$1 \le V(0, 0, c) \le 9 \quad \text{a} \quad 1 \le V(0, 1, c) \le 9;$$

analogický závěr platí i pro zbylé dvě nerovnosti

$$1 \le V(1, y, c) \le 9.$$

Shrnuto dohromady: Původní úlohu jsme zredukovali na úkol ověřit, že v uzavřeném intervalu mezi čísly 1 a 9 leží všechny čtyři hodnoty

$$V(0, 0, c), V(0, 1, c), V(1, 0, c), V(1, 1, c)$$

pro libovolné $c \in \langle 0, 1\rangle$.

Zopakujeme-li „řešitelský“ přístup k lineárním nerovnicím potřetí (tentokrát půjde již o nerovnice s jednou neznámou $z = c$ a bez žádného parametru), dojdeme k závěru, že celá úloha bude vyřešena, ukážeme-li, že všech osm hodnot

$$V(0, 0, 0), V(0, 0, 1), V(0, 1, 0), V(0, 1, 1),$$
$$V(1, 0, 0), V(1, 0, 1), V(1, 1, 0), V(1, 1, 1)$$

leží v intervalu uzavřeném čísly 1 a 9. To už je rutinní numerické počítání: s ohledem na symetrii výrazu V stačí vyčíslit pouze čtyři hodnoty $V(0, 0, 0) = 3$, $V(0, 0, 1) = 1$, $V(0, 1, 1) = 4$ a $V(1, 1, 1) = 9$.

Očekávání úlohové komise

Soutěžní úlohy pro Matematickou olympiádu (společné pro ČR a SR i po rozpadu naší federace) vybírá na svých seminářích česko-slovenská úlohová komise, složená z učitelů středních škol a těch fakult vysokých škol, které připravují budoucí středoškolské učitele matematiky. Jaké okolnosti vedly tuto komisi k zařazení posuzované úlohy do soutěže? Úloha byla shledána zajímavou, netradiční a byla ji přisouzena role nejobtížnější úlohy krajského kola, která by měla rozhodnout o vítězích této soutěže v jednotlivých krajích. Byli jsme si vědomi, že úloha je poměrně vzdálena běžné praxi školské matematiky, ve které se úlohy na *dokazování nerovností* objevují jen sporadicky, zato je kladen velký důraz na *řešení nerovnic* (lineárních, kvadratických i těch s absolutními hodnotami, viz učebnici [1]). Žáci, kteří se chtějí v dokazování nerovností zdokonalit, jsou tak odkázáni na samostudium literatury (pro dané téma jsou nejvhodnější brožura [6], kapitola 2 ze skript [3], kapitola 7 knihy [7] nebo kapitola 7 sbírky [4], méně rozsáhlé poučení lze nalézt též kupř. v paragrafu 3.2 knihy [2]), nebo na čtení ročenek [5] či novějších úloh MO dostupných na internetové stránce `www.math.muni.cz/mo`.

Obě výše popsaná řešení přispěly k rozhodnutí posuzovanou úlohu o nerovnostech soutěžícím předložit, přestože nebylo příliš jasné, jak se žáci k situaci ze zadání úlohy postaví. První výrazně nealgoritmické řešení otevírá velký prostor pro uplatnění nápadů a důmyslu talentovaných žáků, kteří jistě *ideu kompenzace* rychle a správně vytuší. Druhé řešení založené na *linearitě* zadaného výrazu v jednotlivých proměnných vyvolává zajímavou otázku, zda žáci dovedou skrytou linearitu odhalit a v nezvyklé situaci poznatky o lineárních nerovnicích (ve škole důkladně probrané) uplatnit.

Podívejme se proto, jaké výsledky tyto předpoklady přinesly optikou rozboru autentických protokolů, sepsaných soutěžícími v průběhu krajského kola MO dne 21. 3. 2006. Nejprve uvedeme statistiku úspěšnosti, kterou vypracovávají jednotlivé krajské komise.

Úspěšnost soutěžících

Pro čtenáře neznalého praxe vyhodnocování výsledků krajských kol MO ve středoškolských kategoriích A, B, C nejprve popíšeme stručně její zásady. Během takového kola řeší soutěžící po dobu čtyř hodin v jejím úvodu zadané (do této chvíle utajené) čtyři úlohy. Za bezchybné a úplné vyřešení jedné úlohy získává soutěžící 6 bodů, za neúplné řešení s případnými chybami 1 až 5 bodů. Za neodevzdaný protokol nebo protokol, v němž je dopuštěna zásadní chyba nebo není dosažen na cestě k cíli žádný pokrok, nezíská soutěžící žádný bod. Za *úspěšné řešitele* jsou krajskou komisí vyhlášeni ti účastníci, kteří za všechny čtyři úlohy získají dohromady alespoň 10 bodů (z celkem 24 možných). Podle těchto celkových součtů bodů jsou sestavována pořadí nejúspěšnějších řešitelů (v každém kraji samostatně).

Je velmi těžké (spíše nemožné) vydat z ústředí MO pokyny, podle kterého by neúplná řešení byla bodově hodnocena ve všech krajích „stejným metrem".[2] Proto jsem bodové zisky z krajů před jejich zanesením do společné výsledkové tabulky sjednocujícím způsobem poopravil, a to ve všech případech, kdy došlo ke změně, směrem dolů. Svoji větší přísnost bych rád v závěrečném odstavci tohoto paragrafu ospravedlnil.

Podívejme se tedy na tabulku (mnou poopravených) bodových zisků za posuzovanou úlohu v jednotlivých krajích.[3] Vedle sloupce zkratek krajů je pod značkou Σ uveden celkový počet protokolů daného kraje a pak v dalších sloupcích jejich částečné počty ohodnocené 0 až 6 body.

Kraj	Σ	0 b	1 b	2 b	3 b	4 b	5 b	6 b
Pha	40	20	6	7	2	1	0	4
Sč	27	21	4	1	1	0	0	0
Jč	29	20	6	3	0	0	0	0
Pl	21	17	2	1	0	0	0	1
Kv	11	10	0	0	0	1	0	0
Ús	19	13	3	2	1	0	0	0
Vy	25	16	6	1	1	0	0	0
Jm	69	57	9	1	2	0	0	0
Ol	18	10	1	6	0	0	0	1
Ms	36	28	1	7	0	0	0	0
Zl	23	15	3	4	1	0	0	0
Σ	318	227	41	33	8	3	0	6

Z tabulky je hned patrné, že, celkově vzato, řešitelé si s úlohou poradili velice špatně ve všech krajích. Pracovníci MO by jistě dosvědčili, že dosažená úspešnost na jedné úloze je v krajských kolech MO kategorie B patrně nejhorší za několik posledních let (jde spíše o neúspěšnost). Nelze to doložit čísly, neboť statistiku celostátní úspěšnosti podle jednotlivých úloh krajských kol MO ústřední komise vypracovává pouze pro kategorii A, v níž se protokoly ze všech krajů ústředně přeopravují. Důvodem

---

[2] U dané úlohy bylo stanoveno jediné doporučení: za důkaz nerovnosti $V \geq 1$ dejte 2 body, za důkaz nerovnosti $V \leq 9$ udělte 4 body.

[3] Ze tří chybějících krajů (Královéhradeckého, Libereckého a Pardubického) jsem protokoly k posouzení nedostal.

je požadavek, aby do ústředního kola MO (jež se v kategoriích B a C nekoná) byli pozváni skutečně nejlepší soutěžící bez ohledu na to, ze kterého kraje jsou.

Různou míru přejícnosti a tolerance opravovatelů lze jistě pochopit a akceptovat (je-li stejná ke všem soutěžícím z daného kraje). U posuzované úlohy v několika krajích hodnotící pracovníci udělovali například tolerantně 1 bod za pouhé správné roznásobení a úpravu daného výrazu (přestože provedená úprava nebyla dále nijak využita, takže nebylo jasné, jaký měla význam). V některých krajích opravovatelé považovali různá nepřesná kompenzační vyjádření za dostatečně exaktní. Často bylo jen mírně penalizováno (ztrátou 1–2 bodů) „opomenutí“ řešitelů, kteří za parametry a, b, c dosazovali pouze krajní hodnoty 0 a 1 daného intervalu a nijak přitom nevysvětlili, proč to stačí (tedy nezmínili linearitu).[4] Protože jsem sám byl opravovatelem protokolů v Jihomoravském kraji, strhával jsem za tento nedostatek nyní (stejně jako tehdy) 4 body. Přijde vám to příliš kruté? Domnívám se, že v soutěži Matematická olympiáda nikdy nešlo pouze o výsledky úloh, ale spíše o myšlenkovou úplnost úvah, které řešitele k výsledkům dovedou a které je soutěžící povinen do protokolů formou slovního výkladu zaznamenat.

Nejhodnotnější protokoly

Dvě třetiny (vyjádřeno absolutně: čtyři ze šesti) řešitelů, kteří za posuzovanou úlohu získali plný počet 6 bodů, soutěžili v Praze. Pro autora příspěvku bylo velmi nečekané, že dva z těchto pražských soutěžících [Pha 7] a [Pha 18][5] (studenti 2. ročníků gymnázií v Litoměřické a Ohradní ulici) vyřešili úlohu metodou hledání extrémů funkce tří reálných proměnných cestou výpočtů jejich parciálních derivací (a nezapomněli přitom ani na nutné doplňující úvahy o hraničních bodech dané prostorové oblasti – krychle). Není mi známo, zda oba studenti tuto vysokoškolskou látku nastudovali sami, nebo je s ní seznámili na střední škole (již v 2. ročníku!), například z důvodů přípravy na infinitezimální úvahy v hodinách fyziky. Takovou možnost autonomní školní vzdělávací programy připouštějí. I když je použití diferenciálního počtu v dané úloze zcela legitimní, nabízí se srovnání (s ohledem na to, že se hledají extrémy

---

[4] Slovo „opomenutí“ uvádím v uvozovkách, protože jsem přesvědčen, že řešitelé většinou na nějakou vlastnost výrazu V, jako jeho linearitu, vůbec nepomysleli.

[5] Místo konkrétních jmen soutěžících budeme psát zkratku kraje a pořadové číslo jeho protokolu v tomto kraji.

lineární funkce), jak se říká, s „palbou z kanónu na vrabce".

Další dva „šestibodoví" řešitelé z Prahy ([Pha 16] a [Pha 21]) zaplnili své protokoly sice správnými, ale nadmíru složitými až nepřehlednými (v podstatě kompenzačními) úvahami, které zde nemá smysl reprodukovat.

Jeden ze dvou mimopražských „šestibodových", řešitel [Pl 1] (z gymnázia v Plzni na Mikulášském náměstí) založil své řešení na objevu linearity. Vypočetl nejprve hodnoty $V(a, b, c)$ pro všechny kombinace $0, 1$ a pak napsal:[6] *Protože je celý výraz lineární (tzn. dosadíme-li za dvě proměnné a třetí bude měnící se proměnná, bude grafem přímka) a pro krajní hodnoty byly nerovnosti ověřeny, může se tvrdit, že dané nerovnosti jsou dokázány.* Pro zajímavost dodejme, že [Pl 1] byl jediný ze šestice úspěšných řešitelů úlohy, který v dalším ročníku MO postoupil do jejího ústředního kola kategorie A.

Také druhý mimopražský „šestibodový" řešitel [Ol 6] (z gymnázia v Zábřehu) využil linearitu, i když tento běžný pojem uvedl pouze popisným způsobem: *V okrajových hodnotách* $a, b, c \in \{0, 1\}$ *je výraz* V *v intervalu* $\langle 1, 9 \rangle$, *proto je tomu tak ve všech hodnotách (protože proměnné jsou pouze v prvních mocninách).*

Do tohoto paragrafu s výčtem nejúspěšnějších prací zařaďme ještě protokol „čtyřbodového" soutěžícího [Kv 11], který zcela úplně a exaktně realizoval ideu kompenzace pro nerovnost $V \le 9$, když po její úpravě do tvaru

$$5(ab + bc + ac) \le 6 + 2(a + b + c) + 3abc$$

napsal: *To je součet dvou nerovností*

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ac) &\le 2(a + b + c), \\ 3(ab + bc + ac) &\le 6 + 3abc. \end{aligned}$$

První je splněna triviálně ($ab \le a$ *atd.*), *druhou upravíme na*

$$ab(1 - c) + (a + b)c \le 2.$$

Protože $ab \le 1$ *a* $a + b \le 2$, *stačí, aby platilo*

$$(1 - c) + 2c \le 2, \quad tj. \quad c \le 1.$$

---

[6] Citáty z protokolů budou uváděny ne v uvozovkách, ale odlišným typem písma.

Tím je skutečně úplný důkaz nerovnosti $V \leq 9$ hotov. Poznamenejme, že pokus o podobný důkaz nerovnosti $V \geq 1$ se řešiteli [Kv 11] bohužel nepovedl.

Originální řešení celé úlohy ideově navrhl řešitel [Pha 35], který zjistil, že dokazované nerovnosti $1 \leq V \leq 9$ dostaneme sečtením jednodušších nerovností

$$\begin{aligned} &1 \leq 3 - 2(a + b + c - ab - ac - bc) \leq 3, \\ &0 \leq 3(ab + ac + bc - abc) \leq 6. \end{aligned}$$

Je opravdu možné (a schůdné) dokázat, že pro libovolná čísla $a, b, c \in$ $\in \langle 0, 1\rangle$ všechny čtyři vypsané nerovnosti platí, ovšem řešiteli [Pha 35] se to podařilo pouze pro dvě z nich (ty levé), takže fakticky dokázal pouze nerovnost $V \geq 1$ (a byl celkově ohodnocen dvěma body).[7]

Jak vystihnout kompenzaci

Většina z 318 posuzovaných protokolů obsahovala pokusy řešitelů zdůvodnit intuitivně jasnou ideu, dříve podrobně popsanou v paragrafu *Předběžné úvahy.* Téměř nikdo však ani částečné zdůvodnění nepodal, v protokolech najdeme jen v různém stupni nepřesná vyjádření *toho, jak ona kompenzace patrně funguje* místo *argumentů, proč tomu tak je.* Následující citáty to výstižně potvrzují a podávají jasné signály o slabinách v matematickém vyjadřování soutěžících. Za pozornost stojí, že termíny *kompenzace* nebo *(vy)kompenzovat* najdeme v několika protokolech přímo uvedené.

K lepšímu porozumění jsme do úryvků z protokolů implantovali námi zavedené označení (4) dílčích výrazů V_1, V_2, V_3, ze kterých je celý zkoumaný výraz V složen.

[Jm 58]: *Výrazy V_1 a V_2 obsahují pouze násobení a sčítání, proto když zvyšujeme a, b, c, hodnoty V_1 a V_2 také rostou. Ve výrazu V_3 se hodnoty a, b, c odčítají od 1, proto když zvyšujeme a, b, c, hodnota V_3 se snižuje. Výrazy V_1, V_2 a V_3 se tedy navzájem kompenzují.*

[Ol 2]: *Když výrazy V_1 a V_2 nabývají (ztrácejí) na hodnotě, hodnota výrazu V_3 se chová opačně.*

---

[7] V tomto jediném případě bych hodnocení protokolu z kraje poopravil směrem nahoru, asi o 1 bod. Řešitelův návrh jak dokázat nerovnost $V \leq 9$ byl opravdu schůdný.

[Pl 2]: *Jakmile je* V_1 *nebo* V_2 *vysoké, je* V_3 *nízké, takže součet nikdy nemůže převýšit* 9.

[Jm 43]: *Dosadíme-li za kteroukoliv proměnnou* a, b, c *číslo od* 0 *do* 1, *bude to mít dvojí dopad: čím nižší to bude hodnota, tím menší bude* $V_1 + V_2$*, ovšem tím větší bude* V_3.

[Jm 46]: *Hodnota* V *bude největší, pokud bude* $a = b = c = 1$*, protože výrazy* V_1 *a* V_2 *budou bezesporu největší. Výraz* V_3 *pak bude roven nule, kdyby se měl zvětšit,* V_1 *a* V_2 *se zmenší tíme více a hodnota* V *bude menší.*

[Jč 11]: *Po dosazení* $a = b = c = 1$ *mi vychází* $V = 9$*, pro ostatní hodnoty je* V *menší, protože* V_1+V_2 *se pro menší čísla zmenšuje výrazněji (až o* 9*) než* V_3*, které narůstá jen od* 0 *do* 3.

[Vy 16]: *Čím menší zvolená čísla z uvedeného intervalu budou, tím menší bude hodnota* $V_1 + V_2$*, ale zároveň tím větší bude hodnota* V_3*, protože zde máme v závorce vždy* $1 - x$. *To znamená, že tyto odlišnosti se jaksi vykompenzují, takže nemůžeme dostat příliš nízký nebo vysoký výsledek.*

[Zl 10] po dosazení $a = b = c = 0$ a $a = b = c = 1$ napsal: *čím více zvětšíme jakékoliv z čísel* a, b, c*, tím je výraz* $V_1 + V_2$ *větší a výraz* V_3 *menší (nepřímá úměra).*[8]

[Ms 29]: *První dvě části výrazu mohou dát dohromady maximálně číslo 9. Poslední část je pak zvláštní tím, že je nepřímo úměrná dvěma předchozím, tudíž pokud by první dvě daly výsledek* 9*, pak poslední by dala* 0*, tedy dohromady* 9*. Větší výsledek než* 9 *nejsme schopni získat.*

[Jč 10]: *Maximální hodnoty* V_1, V_2, V_3 *nemůžeme dosáhnout najednou, nejvýše dvou z nich a pak je třetí výraz roven nule.*

[Vy 6] upravil výraz V do tvaru $V = U_1 + U_2$, kde $U_1 = -3(abc - 1)$ a $U_2 = a(5b - 2) + b(5c - 2) + c(5a - 2)$, a po zjištění, že $V = 9$ pro $a = b = c = 1$, napsal: *Jestliže budeme dosazovat čísla menší než* 1*, nikdy nedosáhneme výsledku vyššího než* 9*, protože kdybychom za jedno z čísel* a, b, c *dosadili číslo menší než* 1*, dostali bychom pro* U_1 *výsledek, ktery by nám vykompenzoval ztrátu v jedné ze závorek v* U_2*, ale v další závorce, kde je dané číslo násobené pětkou, by nám vynikla další ztráta a čísla* 9 *bychom nedosáhli.*

---

[8] Za povšimnutí stojí nepřesné užití termínu *nepřímá úměra*, jak je známe z obecné mluvy, například při různých argumentacích politiků. Viz rovněž následný citát [Ms 29].

[Vy 8] ke třem výrazům z vyjádření

$$V = -2(a+b+c) + 5(ab+ac+bc) + 3(1-abc)$$

a k důkazu $V \leq 9$ napsal: *První dva výrazy nikdy nemohou překonat hodnotu* 9 *a s jejich ubývající hodnotou vzrůstá hodnota třetího výrazu pomaleji, než klesá u prvních dvou.*

[Pha 33]: *Výsledek*

$$V = -2(a+b+c) + 5(ab+ac+bc) + 3(1-abc)$$

bude nejvíce záležet na části $5(ab+ac+bc)$*, protože se tam násobí největším koeficientem* 5*. Proto* V *bude maximální, resp. minimální, když bude* $ab+ac+bc$ *maximální* ($a = b = c = 1$)*, resp. minimální (stačí, aby se dvě z čísel* a, b, c *rovnala nule).*

[Pl 10]: $V_1 + V_2$ *nabývá hodnot od* 0 *do* 9*, přičemž nižší je pro menší hodnoty proměnných. Výraz* V_3 *nabývá hodnot od* 0 *do* 3*, přičemž nižší je pro větší hodnoty proměnných. Při násobení ve výrazu* V_3 *jsou rozdíly menší než při sčítání ve výrazu* $V_1 + V_2$*, z toho usuzuji, že když hodnota* $V_1 + V_2$ *klesne, tak hodnota* V_3 *vzroste míň, než klesla hodnota* $V_1 + V_2$*, čili hodnota celkového součtu se bude vždy udržovat do čísla* 9*.*

[Ms 32]: *Pokud v třetím výrazu bude jeho možné maximum, tak v obou předchozích jsou minima a naopak, takže když tyto výrazy sečteme, dostaneme jako maximum číslo* 9 *a jako minimum číslo* 3*.*

[Vy 18]: *Pokud dosahují maxim* V_1 *a* V_2*, dosahuje* V_3 *minima. Pokud dosáhne* V_3 *maxima, jsou* V_1 *a* V_2 *minimální. Protože* V_3 *je součin tří činitelů menších než* 1 *s trojkou, roste jeho hodnota pomaleji, než klesají hodnoty* V_1 *a* V_2*.*

Pozoruhodná je argumentace řešitelky [Ús 5], která upravila výraz V do tvaru $V = -2(a+b+c) + 5(ab+ac+bc) + 3(1-abc)$ a pak napsala: *Vyšly nám tři výrazy s intervaly hodnot* $\langle -6, 0\rangle$, $\langle 0, 15\rangle$ *a* $\langle 0, 3\rangle$*. Odtud vyplývá pouze, že* $V \in \langle -6, 18\rangle$*, takže to ještě upřesním. Čím vyšší je* $a+b+c$*, tím nižší je* $-2(a+b+c)$*, tedy interval zapíšu v závislosti na vzrůstajících* a, b, c *takto:*

$$-2(a+b+c) \in \langle 0, -6\rangle.$$

U druhého a třetího tu závislost zapíšu takto:

$$\begin{aligned} 5(ab+ac+bc) &\in \langle 0, 15\rangle, \\ 3(1-abc) &\in \langle 3, 0\rangle. \end{aligned}$$

Tak mi vychází, že platí $V \in \langle 3, 9\rangle$, *neboť*

$$0 + 0 + 3 = 3 \quad \text{a} \quad -6 + 15 + 0 = 9.$$

Řešitelka však již předtím zjistila, že může být $V = 1$. Proto dále pokračuje: *Mohla bych čísla z intervalů* $\langle -6, 0\rangle$ $\langle 0, 15\rangle$, $\langle 0, 3\rangle$ *nakombinovat i jinak (až do* -6*), ale už by se tím porušilo znění celého výrazu. Pokud vezmu* -6 *v prvním intervalu, ihned se vykompenzuje nějakým vyšším číslem z druhého intervalu.*

Na cestě k linearitě

Velmi nadějně vypadá začátek protokolu řešitele [Zl 9], který napsal: *Vypočítám hodnoty V pro extrémní hodnoty proměnných. Všude jsou lineární závislosti, proto extrémy výrazu nastanou právě při extrémech proměnných.* Poté se ovšem [Zl 9] dopustil fatální chyby, když dosadil pouze dvě extrémní trojice $a = b = c = 0$ a $a = b = c = 1$ (zapomněl tedy na jiné kombinace nul a jedniček). Stejnou chybu udělal i řešitel [Jm 2], který u (poněkud upravených) nerovností poznamenal: *Jelikož obě strany nerovností jsou funkce lineární, stačí, aby platila nerovnost pro* 0 *a* 1 *(krajní hodnoty) a bude platit pro celý interval.* Trojice hodnot (a, b, c) však nezaplní interval na přímce, nýbrž krychli v prostoru!

K nejzajímavějším patří protokol řešitele [Jm 18], který nad posuzovanou soutěžní úlohou pro sebe možná objevil základy diferenčního počtu. Nejprve otestoval všechny kombinace krajních hodnot $a, b, c \in \{0, 1\}$ a pak napsal: *Pokusme se zjistit, jak se bude chovat hodnota výrazu, bude-li se jedna z hodnot* a, b, c *zmenšovat nebo zvětšovat. Snižme například* $a = 1$ *o elementární úbytek* da.[9] *Dostaneme*

$$V(a - da, b, c) - V(a, b, c) = da \cdot (2 - 5b - 5c + 3bc) =$$
$$= \begin{cases} -5da, & \textit{je-li}\ \ b = c = 1, \\ -3da, & \textit{je-li}\ \ \{b, c\} = \{0, 1\}, \\ \ \ 2da, & \textit{je-li}\ \ b = c = 0. \end{cases}$$

(Místo uvedeného rozvětveného vzorce jsou v protokolu odvozeny samostatné vzorce pro každý ze tří případů.) Ze znamének uvedených přírůstků pak řešitel ve svém protokolu správně usoudil, že největší a

---

[9] Z takového standardního označení přírůstku proměnné se dá usoudit, že tento pojem řešitel už někde slyšel nebo četl. Možná v hodinách fyziky?

nejmenší hodnoty výrazu V se nutně nabývají v některých trojicích sestavených z nul a jedniček.

V čem je právě uvedené řešení úlohy neúplné? Vycházeje výlučně z vrcholů krychle $\langle 0,1\rangle^3$, uvedenými změnami pouze *jedné* z proměnných našel řešitel [Jm 18] extrémní hodnoty výrazu V na *povrchu* (a nikoliv též *uvnitř*) uvažované krychle.

Řešitel [Pha 19] upravil daný výraz do podoby lineární funkce

$$V = (5b + 5c - 3bc - 2)a + 3 - 2b - 2c + 5bc$$

a pak napsal, že taková lineární funkce proměnné a nabývá na intervalu $\langle 0,1\rangle$ největší hodnoty pro $a = 1$. Zapomněl však, že může jít i o funkci klesající, a to ho přivedlo k chybným výsledkům.

Na závěr tohoto paragrafu uvedeme dva citáty, jejichž autoři potřebnou linearitu možná skrytě vycítili, avšak vhodně nevyjádřili. Zvláště mrzuté to je u prvního citátu, kde tušíme, že řešitel byl na správné stopě.

[Vy 12] daný výraz V roznásobil a pak napsal: *budu za* a, b, c *volit krajní body intervalu, neboť čísla uvnitř budou vždy výsledkem někde mezi.*

[Zl 4]: *Když chci dosáhnout co největší nebo co nejmenší hodnoty výrazu* V, *pak logicky musím dosazovat za jednotlivá čísla* a, b, c *pouze hodnoty* 0 *nebo* 1. Co myslel řešitel tím „logicky“?

Chyby a kuriozity

Soutěžící [Pha 8] znalý diferenciálního počtu se dopustil chyby, které se občas při zkoumání symetrických rovnic a funkcí dopouštíme. Dejme nejdříve místo pasáži jeho protokolu, ve které je dotyčná chybná úvaha „zdůvodněna“ seriózně se tvářícím, avšak naprosto falešným způsobem: *Jelikož se snažíme objevit nějakou trojici čísel* a, b, c *z daného intervalu, pro kterou by neplatilo* $1 \leq V \leq 9$, *zvolíme obecně* $a = b = c = x$ *(proměnné* a, b, c *ovlivňují hodnotu* V *stejnou měrou, proto tedy musíme klást* $a = b = c$, *když chceme získat nejvyšší, resp. nejnižší, možný výsledek).* Řešitel pak metodou diferenciálního počtu vyšetřuje průběh kubické funkce $V(x, x, x)$. Námitky k právě citované úvaze teď vyslovíme v samostatném odstavci.

Není obecně pravda, že symetrická funkce několika proměnných může nabývat extrémních hodnot pouze v bodech, jejichž všechny souřadnice mají stejnou hodnotu. Tento závěr však můžeme učinit, máme-li předem zaručeno, že bod minima, resp. maxima, dané funkce je jediný. Takovou zárukou bývá nejčastěji skutečnost, že daná funkce je ryze konvexní, resp. ryze konkávní, v celé konvexní oblasti, v níž extrémní hodnoty hledáme.

Závěrečné ukázky z několika protokolů uvedeme bez komentáře.

[Kv 4]:

(1) *zkouška* $a = b = c = 0{,}5$ *– průměrná hodnota*

(2) *zkouška* $a = b = c = 1$ *– maximální hodnota*

(3) *zkouška* $a = b = c = 0$ *– minimální hodnota*

Všechny tři zkoušky vyšly, proto je pravda, že pro libovolná čísla $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ *obě nerovnice platí.*

[Jm 4] a [Jm 9] (z různých škol) roznásobují závorky takto:

$$3(1-a)(1-b)(1-c) = 3 - 3a + 3 - 3b + 3 - 3c.$$

[Ms 31]: *Desetinná čísla nic nezmění, pro extrémy funkce jsou krajní body intervalu jedinými místy, kde se může něco zvrtnout.*

[Zl 8]: *Moje řešení tohoto příkladu je pouze jednoduchá úvaha, přesto myslím, že dostačující. Pokud má platit dané tvrzení, dosadila jsem nejmenší a největší čísla, to je* 0 *a* 1*, abych zjistila, zda nerovnosti platí:*

$$\begin{aligned} a = b = c = 0: &\quad V = 1 \quad (\text{špatně: } V = 3, \text{ pozn. J.Š.}),\\ a = b = c = 1: &\quad V = 9. \end{aligned}$$

Také kombinace čísel z intervalu vyhovuje:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = \frac{1}{2}: \quad V = 4 \quad (\text{špatně: } V = 2{,}5, \text{ pozn. J.Š.}).$$

Z toho plyne, že všechna čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *mohou být dosazena do rovnice.*

Závěr

Domnívám se, že uvedené citáty z protokolů jsou samy o sobě výmluvné a dostatečně vypovídají o tom, v čem by se práce s nadanými žáky mohla či měla zlepšit. Nemám teď na mysli její tématické zaměření, ale spíše stránku nácviku matematického myšlení a vyjadřování. Talentovaní žáci, kteří obsah základní „zápletky“ posuzované úlohy správně vytušili, totiž nedokázali své myšlenky vyjádřit matematicky přesnými argumenty. Patrně k tomu přispívá způsob výuky v hodinách matematiky, zaměřený na pouhé sdělování faktů, pouček a postupů řešení standardních úloh. Na jiné formy práce, zejména tvořivé objevování nových poznatků samotnými žáky a následné ověřování hypotéz cestou přesné argumentace, které říkáme deduktivní dokazování, asi nejsou v běžných třídách gymnázií podmínky ani potřebný čas. Celostátní síť gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku (alespoň na jedné škole v každém kraji) se brzy po roce 1989 fakticky rozpadla. Z různých aktuálních vyjádření pracovníků ministerstva školství je zřejmé, že tato řídící instituce v současné době usiluje o integraci talentovaných dětí do všeobecných tříd, určených široké populaci žáků vedených k maturitě. Doufejme, že obětaví učitelé matematiky neztratí chuť k individuální práci s talentovanými žáky (mimo řádnou výuku) formou konzultací nebo vedením různých nepovinných seminářů či matematických kroužků. Úspěch jejich svěřenců v soutěži, jako je Matematická olympiáda, jim jistě přinese radost a zadostiučinění jako účinek toho, co shrnujeme pod pojem *morální odměna*.

Literatura

[1] Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice.* Prometheus, Praha, 1999.

[2] Hecht, T., Sklenáriková, Z.: *Metódy rešenia matematických úloh.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1992.

[3] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno, 1989 a 1996; anglický překlad: *Equations and Inequalities.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[4] Engel, A.: *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] Kolektiv autorů: *N-tý ročník Matematické olympiády.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, $1952 + N$ pro $N \in \{1, 2, \ldots, 40\}$ a JČMF pro $N \in \{41, 42, 45, 49, 50, 51, 52, 53, 54\}$.

[6] Kufner, A.: *Nerovnosti a odhady.* Mladá fronta, Praha, 1989.

[7] Larsen, L.: *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, New York – Berlin, 1983; slovenský překlad: *Metody rešenia matematických problémov.* Alfa, Bratislava, 1990.

Ako sa prejavuje matematické nadanie

Dušan Šveda, PF Prešovské Univerzity, Prešov[1]
Ingrid Semanišinová, PF Prešovské Univerzity, Prešov[2]

ABSTRAKT. *V článku opisujeme rôzne formy starostlivosti o matematické talenty na Slovensku. Ďalej sa zamýšľame nad možnosťami využitia úloh z diskrétnej matematiky pri identifikácii nadaných detí. Uvádzame príklady úloh a prístupy nadaných detí k ich riešeniu. Posledná časť článku je venovaná matematickej aktivite Triomino vhodnej pre nadané deti.*

Úvod

Učivo matematiky sa na vyučovaní podáva zvyčajne takým spôsobom, aby bolo zrozumiteľné pre priemerného žiaka. Dôsledkom toho nadané deti niekedy nenachádzajú v škole dostatočnú výzvu pre vlastné schopnosti. Navyše sa stáva, že menej nadaní spolužiaci pohŕdajú nadanými žiakmi a čo je smutnejšie aj učitelia bývajú niekedy voči týmto žiakom zaujatí. To sú len niektoré dôvody, prečo má zmysel venovať týmto žiakom zvýšenú pozornosť.

V príspevku budeme pojmy nadanie a talent rozlišovať. Talentom budeme rozumieť realizáciu nadania, prejavenie sa a uplatnenie pôvodne skrytých možností ([3, s. 10]).

1. Starostlivosť o talentovaných žiakov na Slovensku

V súčasnosti existujú na Slovensku rôzne formy starostlivosti o matematické talenty. Uvedieme niektoré z nich:

- *Triedy so zameraním na matematiku.* Takéto triedy sú vytvárané na veľkom počte základných škôl, pričom sú do nich vyberané deti na základe prospechu na prvom stupni, prípadne na základe testov, ktoré sú často zamerané skôr na aktuálny stav vedomostí žiakov ako na to, aby sme zistili, či tieto deti majú matematické nadanie.
- *Školy so zameraním na matematiku.* Na tieto školy sú prijímaní žiaci, ktorí úspešne absolvovali prijímacie pohovory. Cieľom prijímacích pohovorov je identifikovať nadaných žiakov.

---

[1] e-mail: dusan.sveda@upjs.sk
[2] e-mail: ingrid.semanisinova@upjs.sk

- *Matematické záujmové krúžky.* Takéto krúžky sú pomerne zriedkavé. Aj keď na viacerých školách prebiehajú matematické krúžky, podľa našich informácií sú zamerané skôr na doučovanie žiakov.
- *Matematické súťaže.* Najrozšírenejšie súťaže na Slovensku sú Matematická olympiáda, Pytagoriáda, Matematický klokan. Prebiehajú tiež rôzne korešpondenčné semináre pre žiakov ZŠ a SŠ, napr. MAKS, PIKOMAT, SEZAMKO, SEZAM, RIEŠKY, MALYNÁR, MATIK (semináre pre žiakov ZŠ), BKMS – Bratislavský korešpondenčný matematický seminár, STROM, SKMS – Stredoslovenský korešpondenčný matematický seminár (semináre pre žiakov SŠ) a ďalšie súťaže, napr. MAMUT, LOMIHLAV, PALMA junior, PALMA.[3]
- *Matematické tábory.* Združenie STROM organizuje pre žiakov základných škôl matematické tábory pravidelne od. r. 2000.
- *Klub mladých matematikov.* Je organizovaný pracovníkmi PF UPJŠ. Ide o stretnutia žiakov stredných škôl so záujmom o matematiku. Prvá časť stretnutia je venovaná prednáške na vopred avizovanú tému. Druhá časť má volnejší program, môže to byť diskusia o prednáške, hranie nejakej hry, prípadne výmena matematických skúsenosti.

Na Prírodovedeckej fakulte sa venujeme aj príprave učiteľov a budúcich učiteľov matematiky pre prácu s nadanými deťmi. Organizujeme:

- *Klub učiteľov matematiky.* Cieľom je, okrem iného, poskytnúť informácie o rôznych formách práce s nadanými žiakmi.
- *Sústredenia pre vedúcich matematických krúžkov.* Chceme ukázať rôzne formy práce so žiakmi, poskytnúť nástroje a podnety na popularizáciu matematiky medzi žiakmi.
- *Krvopot.* Ide o korešpondenčný seminár pre budúcich učiteľov matematiky, ktorého cieľom je oboznámiť ich so zaujímavými úlohami a s korešpondenčnou formou súťaže, ktorú väčšina študentov nezažila.

Formy starostlivosti, ktoré sme uviedli, sa väčšinou týkajú talentovaných žiakov, t.j. žiakov, ktorí prejavili, realizovali svoje matematické nadanie. Tejto starostlivosti predchádza proces identifikácie nadania.

---

[3] Prírodovedecká fakulta UPJŠ spolupracuje so združením STROM pri organizácií korešpondenčných seminárov MALYNÁR, MATIK a STROM a súťaží MAMUT, LOMIHLAV, PALMA junior a PALMA.

2. Úlohy z diskrétnej matematiky ako prostriedok na identifikáciu matematického nadania

Pri identifikácii nadaných detí je dôležité, aby sme odhalili schopnosti, ktoré sú typické pre žiakov nadaných na matematiku. K takýmto schopnostiam (podĺa [1]) patria schopnosť analýzy problému, systematickosť myslenia, kritické myslenie, schopnosť rozboru možných prípadov a vyčerpania možností, schopnosť dedukcie, schopnosť myšlienkového experimentu, schopnosť aj potreba vecnej argumentácie, schopnosť nájsť vhodnú reprezentáciu pre úlohu a pod. Pokúsime sa sformulovať niekoľko dôvodov, prečo si myslíme, že práve úlohy z diskrétnej matematiky[4] nám môžu pomôcť pri identifikácii nadaných žiakov.

- Diskrétna matematika obsahuje veľa úloh, ktorých riešenie nevyžaduje žiadne špecifické vstupné vedomosti a zručnosti (často vystačíme so základnými poznatkami z aritmetiky). Takéto úlohy umožňujú, aby svoje matematické nadanie prejavili aj žiaci, ktorých aktuálna vedomostná výbava nie je na požadovanej úrovni (zvyčajne z dôvodu nedostatočnej motivácie).
- Diskrétna matematika obsahuje mnoho otvorených úloh, ktoré majú viacero riešení, resp. ponúkajú viacero prístupov k riešeniu. Takéto úlohy umožnia zistiť učiteľovi, na akej úrovni je rozvinuté tvorivé, hodnotiace myslenie žiakov a schopnosť abstrakcie. Zároveň tieto úlohy umožnia uvedené schopnosti rozvíjať.
- Mnoho úloh z diskrétnej matematiky umožňuje zdôrazniť aplikovateľnosť poznatkov z matematiky a predstaviť nové, zaujímavé, stále sa rozvíjajúce oblasti matematiky. Diskrétna matematika nám prostredníctvom takýchto úloh poskytuje možnosť vytvoriť u žiakov lepší vzťah k matematike.
- Úlohy z diskrétnej matematiky poskytujú možnosť pre opakovanie algebraických, resp. geometrických zručností v novom kontexte.

---

[4] Diskrétna matematika pozostáva z pojmov a metód na modelovanie a riešenie problémov zahŕňajúcich konečné procesy a diskrétne javy. Presnejšie, diskrétna matematika sa zaoberá problémami, ktoré zahŕňajú vymenovanie a výpočet všetkých možností, rozhodovanie v konečných množinách, relácie medzi konečným počtom prvkov a postupné zmeny. Ústredné témy diskrétnej matematiky v CPMP sú existencia (existuje riešenie?), algoritmizácia riešenia úlohy (môžeme nájsť efektívne riešenie úlohy?) a optimalizácia (ktoré riešenie je najlepšie?).

- Pri riešení úloh často nie je potrebné používať ustálené odborné výrazy a symboliku. Žiakom môžeme dovoliť, aby hľadali vlastné formy zápisu (napr. grafické formy reprezentácie), prípadne aby riešenie úlohy zapísali slovne.
- Neoddeliteľnou súčasťou diskrétnej matematiky je objavovanie a overovanie algoritmov. Ich zápis umožňuje učiteľovi upozorniť žiaka na potrebu presného matematického vyjadrovania.

Príklady úloh z diskrétnej matematiky

Úloha 4 Koľko je všetkých magických štvorcov rádu 3?

Komentár: Nadaní žiaci si pri riešení úlohy uvedomujú, že nevystačia s metódou pokusov a omylov, ale musia hľadať logické argumenty pre svoje tvrdenie: „Ja už mám všetky!“. Títo žiaci si zvyčajne rýchlejšie všimnú, že získané riešenia sú rovnaké („ak tú tabuľku otočíme, resp. preklopíme, dostaneme takú istú tabuľku, ako už na tabuli máme“ – myšlienka symetrie štvorca). Objavia tiež vzťah pre magické číslo magického štvorca rádu 3.

Úloha 5 Je možné uložiť na stôl 9 tanierikov (3 modré, 3 žlté a 3 červené) a na tanieriky 9 šálok (3 modré, 3 žlté a 3 červené) do troch radov a troch stĺpcov tak, aby

1. v každom rade a v každom stĺpci boli tanieriky rôznych farieb,
2. v každom rade a v každom stĺpci boli šálky rôznych farieb,
3. rovnaká farebná kombinácia tanierik, šálka sa nezopakovala (t.j. ak je raz modrá šálka na červenom tanieriku, tak už na stole nemôže byť modrá šálka na červenom tanieriku, ale môžeme naň položiť červenú alebo žltú šálku)?

Komentár: U žiakov sa počas realizácie objavili rôzne spôsoby zápisu riešenia úlohy. Žiaci, nadaní na matematiku, používali abstraktnejší zápis ako ostatní žiaci (obr. 1abc).

mš mt	žš čt	čš žt
žš žt	čš mt	mš čt
čš čt	mš žt	žš mt

mš – modrá šálka
žš – žltá šálka
čš – červená šálka
mt – modrý tanierik
žt – žltý tanierik
čt červený tanierik

a)

ž č	m m	č ž
č m	ž ž	m č
m ž	č č	ž m

v políčku sú hore šálky a dole tanieriky

b)

čč	žž	mm
mž	čm	žč
žm	mč	čž

nezáleží na tom, ktorý symbol označuje šálku a ktorý tanierik

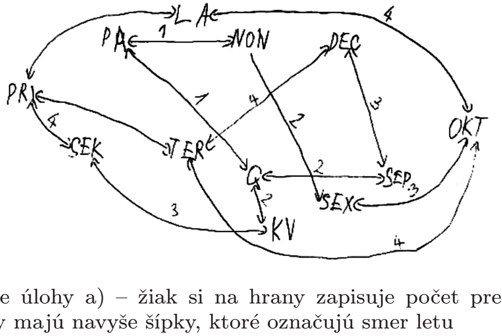
c)

Obr. 1

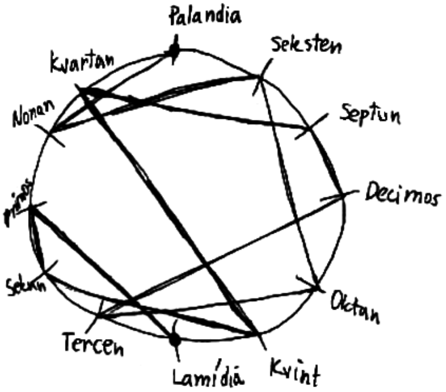
Úloha 6 Ovečka sa potrebuje dostať z planéty PALANDIA na planétu LAMÍDIU. Priamo však neletí žiadna vesmírna loď. Lode lietali dvojsmerne medzi planétami PALANDIA – KVARTAN, PALANDIA – NONAN, PRIMOS – SEKUN, PRIMOS – TERCEN, PRIMOS – LAMÍDIA, SEKUN – KVINT, TERCEN – OKTAN, TERCEN – DECIMOS, KVARTAN – KVINT, KVARTAN – SEPTUN, SEKSTEN – OKTAN, SEKSTEN – NONAN, SEPTUN – DECIMOS, OKTAN – LAMÍDIA. Ako má ovečka cestovať, keď chce:

a) prestupovať čo najmenej
b) prestupovať čo najviac (aj viackrát na jednej planéte, no každú cestu medzi dvoma planétami môže akýmkoľvek smerom prejsť len raz)
c) prestupovať na každej planéte práve raz

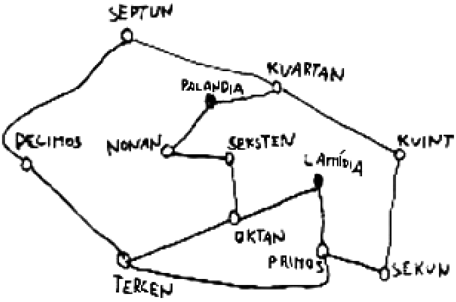
Komentár: Žiaci, ktorí boli schopní vhodne reprezentovať zadanie úlohy obrázkom (obr. 2abc), boli pri jej riešení úspešnejší ako ostatní žiaci.



Obr. 2a: Riešenie úlohy a) – žiak si na hrany zapisuje počet prestupov pri ceste z Palandie, hrany majú navyše šípky, ktoré označujú smer letu



Obr. 2b: Riešenie úlohy b) – žiak si planéty rozložil na kružnicu, časti kružnice však nereprezentujú hrany grafu



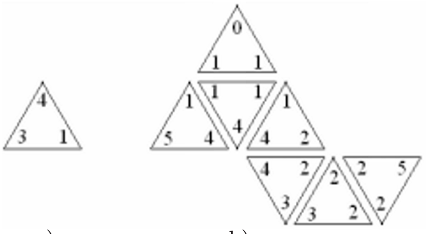
Obr. 2c: Riešenie úlohy c) – žiak si nakreslil planárny graf

Prvé dve z vyššie uvedených úloh boli zaradené do vyučovania matematiky v bežných triedach (6. až 8. ročník ZŠ). Posledná úloha je úloha z korešpondenčného seminára Malynár, ktorý je určený pre žiakov 4.–6. ročníka ZŠ.

3. Triomino

V tejto časti príspevku popíšeme prostredie, ktoré považujeme za vhodné na to, aby učiteľ odhalil deti nadané na matematiku, predovšetkým medzi žiakmi, ktorým chýba motivácia a ktorých aktuálna vedomostná výbava nie je na najlepšej úrovni.

Aktivita Triomino vychádza z hry Triomino. Ide o stolovú hru, ktorá sa čiastočne podobá na hru Domino. Hracie kamene vyzerajú pri pohľade zhora ako rovnostranné trojuholníky s číslami zapísanými pri jeho vrcholoch (obr. 3a). Používajú sa čísla od 0 do 5, ktoré sa môžu opakovať. V priebehu hry sa jednotlivé triomina prikladajú stranou k sebe tak, aby čísla v zodpovedajúcich si vrcholoch hracieho kameňa boli zhodné (obr. 3b). Hra má samozrejme aj ďalšie pravidlá, ktoré nebudeme presne popisovať. Záujemcovia ich nájdu na stránke `http://pressmantoy.com/instructions/instruct_trio-ominos.html`.



a) b)

Obr. 3

Realizáciu aktivity sme rozdelili na štyri časti. Počas realizácie projektu žiaci pracujú v trojčlenných, resp. štvorčlenných heterogénnych skupinách. Učiteľ vystupuje v úlohe organizátora a konzultanta. Po realizácii každej časti umožní diskusiu o riešeniach v rámci celej triedy.

1. časť – Výroba hracích kameňov: Žiaci vytvárajú hracie kamene pre stolnú hru Triomino. Pri ich vytváraní riešia kombinatorickú úlohu, pričom môžeme pozorovať, nakoľko je u žiakov rozvinutá schopnosť riešiť zložitejšie kombinatorické úlohy rozložením na jednoduchšie podúlohy a tie riešiť systematickým vypísaním všetkých možností s využitím vhodného organizačného princípu.

2. časť – Úlohy o hracích kameňoch: V tejto časti žiaci odpovedajú na otázky zadané učiteľom. Otázky sú zamerané na získanie hlbšieho vhľadu do systému všetkých možností.

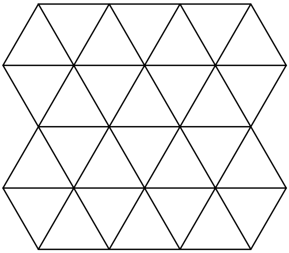
3. časť – Stratégia hry: Žiaci naštudujú pravidlá hry a riešia úlohy, ktoré súvisia s pravidlami a s priebehom hry. Úlohami chceme dosiahnuť, aby sa žiaci zamysleli nad pravidlami hry, nad stratégiou, ktorú používajú počas hry a naučili sa túto stratégiu prispôsobovať okolnostiam v hre.

4. časť – Triomino a kombinatorické úlohy: Žiaci riešia kombinatorické úlohy, ktoré súvisia s triominami.

V príspevku popíšeme skúsenosti z realizácie 1. časti aktivity Triomino – Výroba hracích kameňov, v ktorej sa objavili rôzne stratégie riešenia. K ostatným častiam uvedieme návrhy na realizáciu. Aktivita bola realizovaná v 7. ročníku ZŠ v bežnej triede.

Výroba hracích kameňov

V tejto časti práce žiaci vyrábajú hracie kamene do hry. Majú k dispozícii čisté papiere, šablóny na hracie kamene (časť šablóny je na obr. 4) a nožnice.



Obr. 4

Stratégie, ktoré žiaci používali pri hľadaní hracích kameňov:

Skupina A: Žiaci vypísali $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ možností. Z týchto možností vyškrtali všetky rovnaké. Rovnaké možnosti objavovali zo začiatku tak, že si čísla zapísali do šablóny, vystrihli si triomino a otáčaním zisťovali, či sú dve triomina rovnaké alebo nie. Po niekoľkých manipuláciách s konkrétnymi objektami dokázali svoje úvahy zovšeobecniť: „Triomina sú rovnaké, ak sa čísla posúvajú dookola; napríklad 012, 201, 120 sú rovnaké, ale 021 nie, lebo ho nedostanem, keď to takto posúvam.“ Pri vyškrtávaní možností sa však niekoľkokrát pomýlili a nakoniec nedostali správny výsledok.

Skupina B: Žiaci najprv vypísali tie kamene, na ktorých je aspoň jedna 0, dostali 21 možností. Nasledovali možnosti, na ktorých je aspoň jedna 1 a žiadna 0, t.j. 15 možností, atď. Takto dostali výsledok $21+15+10+6+3+1 = 56$ možností. Keďže táto skupina mala možnosti vypísané ako prvá, kým sme prešli k druhej časti, triomina si vystrihli a skúsili prikladať k sebe. Počas prikladania zistili, že im chýbajú nejaké hracie kamene, na ktorých sú všetky tri čísla rôzne. Ďalšie experimentovanie a manipulácie s vystrihnutými triominami im pomohli odhaliť, že triomina ABC a ACB nie sú rovnaké.

Skupiny C, D: Žiaci vypísali hracie kamene, na ktorých sú aspoň dve čísla rovnaké 000, 001, 002, 003, 004, 005, 110, 111, 112, … Správne určili počet týchto hracích kameňov. Potom vypisovali hracie kamene, na ktorých sú čísla navzájom rôzne, pritom obidve skupiny mali problém nájsť si systém pri ich vypisovaní. Možnosti ABC a ACB, kde A, B, C sú rôzne čísla od 0 do 5, považovali za rovnaké.

Skupina E: Skupina vypísala hracie kamene, na ktorých sú práve 3 rovnaké čísla, potom hracie kamene, na ktorých sú práve 2 rovnaké čísla a nakoniec hracie kamene, na ktorých sú rôzne čísla. Počas vypisovania možností používali šablónu. Nepoužívali reprezentáciu triomína pomocou trojice čísel. Nepodarilo sa im nájsť systém výpisu pri triominách s navzájom rôznymi číslami.

Úlohy o hracích kameňoch

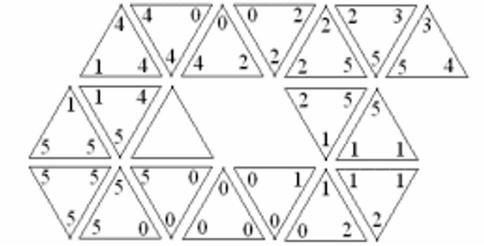
Táto časť je zameraná na to, aby žiaci prezentovali a porovnávali rôzne stratégie pri rozdelení danej úlohy na podúlohy a hľadaní všetkých možností. Žiaci pritom odpovedajú na nasledujúce otázky.

1. Koľko je hracích kameňov, ktoré majú všetky čísla rovnaké?
2. Koľko je hracích kameňov, ktoré majú práve dve čísla rovnaké?
3. Koľko je hracích kameňov s navzájom rôznymi číslami?
4. Koľko je hracích kameňov, na ktorých sa vyskytuje aspoň jedna 0 (3, 5)?
5. Koľko je všetkých hracích kameňov?
6. Koľko hracích kameňov by mala hra, ak by sme mali rovnaké čísla napísané aj na rubovej strane hracieho kameňa a pri prikladaní by sme ho mohli prevrátiť?
7. Koľko hracích kameňov by mala hra, ak by sme počas prikladania hrací kameň nemohli otáčať?

Stratégia hry

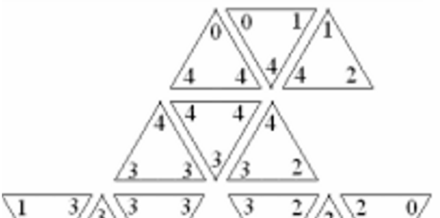
Cieľom nasledujúcich úloh je získanie hlbšieho vhľadu do pravidiel hry. Chceme žiakov primäť k tomu, aby počas hry rozmýšľali nad vhodnou stratégiou, kombinovali rôzne možnosti, aby neboli pasívnymi hráčmi. Uvedené úlohy riešime so žiakmi až potom, ako boli oboznámení s pravidlami hry a mali možnosť niekoľkokrát si hru zahrať.

1. Koľko najviac, resp. najmenej bodov môže získať hráč, ktorý začína hru? Zamyslite sa nad tým, prečo sú za použitie triomina 000 bonusové body navyše.
2. Môže sa stať, že v prípade, že hrá 3, 4 alebo 5 hráčov, žiaden z nich nemá hrací kameň s aspoň dvoma rovnakými číslicami?
3. Dá sa očakávať, že pre druhého hráča v poradí je výhodnejšie, ak bola hra začatá triominom s troma rovnakými číslami alebo ak bola začatá kameňom s najvyšším súčtom? Vysvetlite prečo.
4. Nájdite všetky hracie kamene, ktoré môžeme priložiť na miesto naznačené na obr. 5.



Obr. 5

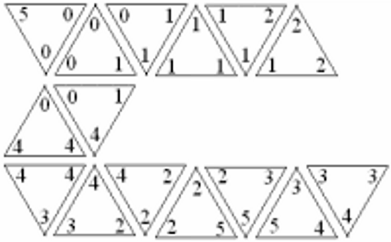
5. Situácia v hre je ako na obr. 6.



Obr. 6

   a) Hráč má na ruke hracie kamene 025, 134, 113, 045, 125. Môže niektorý z nich priložiť?
   b) Vypíšte všetky hracie kamene, ktoré môže hráč priložiť.

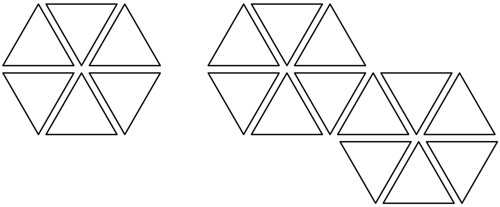
6. Situácia v hre je ako na obr. 7. Môže nasledujúci hráč vytvoriť šesťuholník alebo most? Koľko má možností?



Obr. 7

Triomino a kombinatorické úlohy

1. Doplňte čísla do vrcholov trojuholníkov na obr. 8 podľa pravidiel hry Triomino.



Obr. 8

2. Doplňte čísla do vrcholov trojuholníkov na obr. 8 podľa pravidiel hry Triomino tak, aby súčet čísel na všetkých hracích kameňoch bol

   a) čo najmenší, b) čo najväčší.

   Nájdite všetky možnosti.
3. Vedeli by ste určiť, koľko hracích kameňov by mala hra, v ktorej by na hracích kameňoch boli číslice
   a) od 0 do 6, b) od 0 do 9?

Ako sa prejavovali nadaní žiaci

- Dokázali sa rýchlo zorientovať v systéme všetkých možností, dokázali vhodne identifikovať podúlohy.
- Pri hľadaní triomin nepoužívali šablónu ale triomino reprezentovali trojicou čísel. Túto reprezentáciu si postupne upresňovali počas dis-

kusie v 2. časti. Dokázali bez manipulácie rozlíšiť, ktorá reprezentácia predstavuje dve rovnaké triomina a ktorá nie. Popísali, ktoré trojice reprezentujú rovnaké triomina a navrhli zapisovať to tak, že začnem najmenším číslom a ďalšie čísla zapisujem v smere hodinových ručičiek.

- Rýchlo porozumeli stratégii, ktorú pri vypisovaní možností použila iná skupina.
- Počas hrania hry dokázali urobiť vopred myšlienkový experiment, či sa triomino na ruke dá priložiť na vybrané miesto.
- Dokázali strategicky rozmýšľať počas hrania hry.
- Objavili pravidelnosť pri vytváraní triomin a využili ju na to, aby našli počet hracích kameňov, ak do triomina vpisujeme čísla od 0 do 6 (7, 8, 9).

Záver

Myslíme si, že zaradenie úloh z diskrétnej matematiky do vyučovania môže čiastočne pomôcť pri identifikácii a výchove nadaných žiakov v bežných triedach. Úlohy, ktoré sú prístupné a primerané skúsenostiam, umožňujú väčšine žiakov ľahšie porozumieť predloženému problému. Otvára sa tak cesta k experimentovaniu pri ich riešení. Pritom sa dá očakávať, že nadaní žiaci preniknú hlbšie do problematiky, ktorá je prostredníctvom úlohy sprístupňovaná. Aj keď sa to priemerným a podpriemerným žiakom nepodarí, atraktívnosť a aplikovateľnosť takýchto úloh môže pomôcť vytvoriť lepší vzťah k matematike aj u týchto žiakov.

Literatura

[1] Burjan, V.: Zamyslenie sa nad niektorými didaktickými a psychologickými aspektmi práce s matematickými talentami. In: Zhouf, J. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF, Hradec Králové, 2005.

[2] Kotorová, R., Semanišinová, I.: Teória grafov a cestovanie. *MFI*, 6 (2005/2006).

[3] Mareš, J.: Žáci nadaní a talentovaní na matematiku. In: Zhouf, J. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF, Hradec Králové, 2003.

[4] Prídavková, A., Šveda, D.: Výber žiakov 4. ročníka ZŠ do tried s rozšíreným vyučovaním matematiky. *MFI*, 9 (1999/2000).

[5] Semanišinová I., Trenkler M.: Magické štvorce ako predmet matematického skúmania. *MFI* **26** (2005).

Turnaj měst v České republice s rozborem úloh[*]

Jaroslav Švrček, PřF UP Olomouc[1]
Jaroslav Zhouf, PedF UK Praha[2]

Abstrakt. *Článek seznamuje čtenáře s matematickou soutěží, která probíhá ve světě již mnoho let. Autoři článku se ji snaží zavést i do České republiky. Článek proto informuje o podstatě a pravidlech soutěže a ukazuje úlohy, které se v jejím rámci řeší. Ve druhé části článku je pak rozebrána jedna úloha z této soutěže a je poukázáno na úskalí při jejím řešení, jsou ukázána správná, ale i chybná řešení.*

Historie

Ve školním roce 2006/2007 proběhl již 28. ročník mezinárodní matematické soutěže středoškoláků *Turnaj měst* (*Tournament of Towns*, *Turnir gorodov*). Cílem tohoto článku je seznámit širší matematickou veřejnost s historií, vývojem a strukturou této významné matematické soutěže. První ročník Turnaje měst se uskutečnil na jaře roku 1980 jako matematická soutěž mezi středoškoláky tří velkých měst tehdejšího SSSR (Moskvy, Kijeva a Rigy). U zrodu soutěže stáli přední matematikové uvedených tří měst; odbornými garanty za jednotlivá města byli po řadě (*Nikolaj Nikolajevič Konstantinov*, *Alexej Tolpygo* a *Agnis Adžāns*). První tři ročníky Turnaje měst se konaly vždy jednou ve školním roce, avšak od jeho čtvrtého ročníku probíhá soutěž ve dvou etapách – na podzim a na jaře. Každá etapa má přitom dvě části – přípravnou část a hlavní část.

Tato nová matematická soutěž postupně získávala stále větší popularitu a každoročně se do ní zapojovala další města. Např. ve školním roce 1990/1991 se 12. ročníku Turnaje měst zúčastnilo také 65 měst z Austrálie, Bulharska, Německa, Řecka, Izraele, Kanady, Kolumbie a dalších

---

[*] Příspěvek byl podpořen Výzkumným záměrem MSM 0021 620 862 – Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání.

[*] Zpracováno v rámci řešení projektu „STM Morava aneb Věda v přímém přenosu“, který je pod číslem 2E06029 podporován MŠMT ČR v rámci Národního programu výzkumu II.

[1] e-mail: svrcek@inf.upol.cz

[2] e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

zemí celého světa. V současnosti má soutěž dvě velká koordinační centra, kterými jsou *Moskva* a *Canberra*. Zejména Australský matematický trust (AMT) věnuje popularizaci této soutěže v současné době velkou pozornost (viz seznam použité literatury). Především díky této skutečnosti má Turnaj měst dnes již celosvětový charakter. Uvedená soutěž má nejen letitou tradici, ale také vysokou kvalitu v podobě původních netradičních úloh. Na jejich tvorbě se podílejí přední světoví odborníci na práci s matematickými talenty.

Struktura soutěže

Turnaj měst je soutěží středoškoláků ve dvou věkových kategoriích – kategorie SENIOR (je určena pro žáky našich 3. a 4. ročníků čtyřletých gymnázií, SOŠ a jim odpovídajím ročníkům víceletých gymnázií) a kategorie JUNIOR (je určena pro naše mladší středoškoláky, příp. pro žáky 9. ročníků ZŠ). Soutěžící řeší úlohy v rámci každého města vždy na jednom místě, všichni ve stejný čas (přípravné úlohy a s odstupem zhruba 14 dní i soutěžní úlohy). V rámci přípravné části mají soutěžící v obou kategoriích možnost při řešení pěti zadaných úloh načerpat nové podněty, které lze dále uplatnit při řešení sedmi soutěžních úloh. Žáci přitom uvádějí vždy úplná řešení daných úloh. Do výsledku se jim započítávají 3 nejlépe ohodnocené úlohy (z pěti v přípravné části, resp. ze sedmi v hlavní soutěži). V každé etapě (podzim, jaro) se u každého soutěžícího bere jako jeho výsledek maximum z dosaženého bodového zisku v přípravné a hlavní části soutěže. Výsledky žáků z nižších ročníků v obou věkových kategoriích jsou na závěr korelovány následujícími koeficienty: v kategorii SENIOR je výsledek každého žáka 3. ročníku SŠ vynásoben koeficientem $\frac{5}{4}$, v kategorii JUNIOR jsou žáci 1. ročníku SŠ zvýhodněni koeficientem $\frac{4}{3}$ a žáci 9. ročníku (a jim odpovídajích ročníků víceletých gymnázií) koeficientem $\frac{3}{2}$ (např. [2]). V České republice se pak jako výsledek měst do 100 000 obyvatel započítávají výsledky nejlepších 5 soutěžících v každé kategorii, u měst nad 100 000 obyvatel se započítává 10 nejlepších výsledků, u měst nad 300 000 obyvatel 15 nejlepších výsledků a v Praze 20 nejlepších soutěžících. Z počtů nejlepších řešitelů (jejich bodových zisků) v jednotlivých městech (5, 10, 15, 20) se poté stanoví průměrný bodový zisk v každé věkové kategorii. Výsledek každého města (v každé etapě soutěže – podzim, jaro) je pak stanoven jako maximum průměrného bodového zisku nejlepších soutěžících z obou věkových kategoriích (SENIOR a JUNIOR).

Ve školním roce 2006/2007 se díky grantové podpoře MŠMT ČR Turnaj měst konal poprvé (experimentálně) také v České republice. Soutěže se zúčastnila následující česká města: Praha, Bílovec, Olomouc, Přerov, Benešov. Snahou organizátorů z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci je zapojit od 29. ročníku Turnaje měst do soutěže větší počet českých měst než v uplynulém roce. Své případné dotazy směřujte na emailovou adresu prvního z autorů tohoto příspěvku: `svrcek@inf.upol.cz`

Přínos soutěže

Za nesporný přínos zavedení Turnaje měst v České republice považují organizátoři možnost zapojení většího počtu našich matematicky talentovaných žáků do mezinárodní matematické soutěže. Zde přitom reprezentují města, v nichž studují. Dalším pozitivním rysem této soutěže je možnost volby těch úloh, které každému soutěžícímu nejlépe vyhovují. Tím mohou žáci lépe prokázat to, co se naučili, a nikoliv to, co sami nezvládnou. Mezi pozitiva soutěže lze bezesporu považovat také skutečnost, že matematicky nadaní žáci odevzávají protokoly s úplnými řešeními úloh, což výrazně napomáhá tříbení jejich stylizace řešení matematických úloh a precizování jejich matematického vyjadřování.

Úlohy

Na ukázku uvádíme dále texty všech přípravných úloh Turnaje měst kola 28. ročníku soutěže včetně navrženého bodového maxima u jednotlivých úloh v obou věkových kategoriích tak, jak byly předloženy soutěžícím v Praze a Bílovci na podzim 2006.

JUNIOR

1. Na tabuli byla napsána po řadě dvě přirozená čísla x a y ($x \leq y$). Jirka si na list papíru napsal hodnotu x^2 (druhou mocninu prvního čísla) a pak zaměnil čísla na tabuli dvojicí čísel x a $y-x$ (napřed bylo napsáno menší z obou čísel). S novými čísly na tabuli pak provedl stejnou operaci atd., až jedno z čísel na tabuli bylo rovno 0. Určete, jaký byl (v tomto okamžiku) součet všech čísel, která si Jirka napsal na list papíru. (4 body)

2. Je známo, že lháři vždy lžou, pravdomluvní lidé vždy mluví pravdu a vychytralí někdy mluví pravdu a někdy lžou. Můžete jim dávat otázky, na něž je odpověd buď *ano*, nebo *ne* (např.: „Je pravda, že tento člověk je vychytralý?“).

a) Před vámi stojí tři osoby – lhář, pravdomluvný a vychytralý, kteří navzájem znají svou identitu. Popište, jak je rozeznáte pomocí takových otázek. (1 bod)

b) Před vámi stojí čtyři osoby – lhář, pravdomluvný a dva vychytralí, kteří navzájem znají svou identitu. Dokažte, že oba vychytralí se mohou dohodnout na svých odpovědích tak, že nejste schopni na základě možných otázek zjistit identitu žádné ze čtyř osob. (3 body)

3. a) Na tabuli je napsáno 2007 přirozených čísel větších než 1. Dokažte, že je možno označit jedno z nich tak, že součin ostatních čísel lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel. (2 body)

b) Na tabuli je napsáno 2007 přirozených čísel větších než 1, z nichž jedno je rovno 2006. Je známo, že existuje právě jedno z nich takové, že součin ostatních čísel lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel. Dokažte, že je to číslo 2006. (2 body)

4. Na prodloužení strany BC trojúhelníku ABC za bodem B leží bod B_1 takový, že $|BB_1| = |AB|$. Nechť osy vnějších úhlů při vrcholech B a C se protínají v bodě M. Dokažte, že body A, B_1, M a C leží na téže kružnici. (4 body)

5. Určete, na jaký největší počet shodných nekonvexních mnohoúhelníků lze rozřezat čtverec tak, aby všechny strany těchto mnohoúhelníků byly rovnoběžné se stranami čtverce a přitom ani jeden z těchto mnohoúhelníků nevznikne posunutím (translací) jiného z uvažovaných mnohoúhelníků. (4 body)

SENIOR

1. Na tabuli byla napsána tři přirozená čísla x, y, z. Petr si na list papíru napsal hodnotu součinu některých dvou z těchto tří čísel a na tabuli místo třetího čísla napsal číslo o 1 menší. S novými třemi čísly na tabuli pak provedl stejnou operaci atd., až jedno z čísel na tabuli bylo rovno nule. Určete, jaký byl (v tomto okamžiku) součet všech čísel, která si Petr napsal na list papíru. (4 body)

2. V rovině je dán tečnový čtyřúhelník. Každé dva dotykové body kružnice jemu vepsané, které leží na sousedních stranách daného čtyřúhelníku, jsou spojeny úsečkami. Takto sestrojeným trojúhelníkům jsou vepsány kružnice. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou totožné se středy kružnic vepsaných těmto čtyřem trojúhelníkům, jsou navzájem kolmé. (4 body)

3. Do tabulky 2006×2006 jsou napsána čísla $1, 2, 3, \ldots, 2006^2$. Dokažte, že v tabulce existují dvě čísla, která jsou vepsána do polí, které mají společnou celou stranu nebo jeden vrchol, taková, že jejich součet je dělitelný číslem 4. (4 body)

4. Jsou dány dvě nekonečné posloupnosti: aritmetická $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a geometrická $b_1, b_2, b_3, \ldots$ takové, že každý člen geometrické posloupnosti je také členem uvažované aritmetické posloupnosti. Dokažte, že kvocient geometrické posloupnosti je celé číslo. (4 body)

5. Rozhodněte, zda je možno vepsat do krychle pravidelný osmistěn tak, aby vrcholy osmistěnu ležely na hranách krychle. (Pravidelný osmistěn má právě 6 vrcholů, z každého přitom vychází 4 hrany a jeho stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky.) (5 bodů)

Řešení jedné úlohy

Při opravování úloh Turnaje měst, jako při opravování úloh každé takto komplexní soutěže, se projevila obecná výpovědní hodnota žákovských prací. Značně různorodý okruh řešitelů, který je dán samotným systémem soutěže, zároveň umožňuje porovnat přístupy žáků na různých úrovních. Některá řešení tak mohou představovat zdroj zajímavých postřehů i hlubokých myšlenek, jiná třeba poslouží učitelům jako účinný diagnostický nástroj. Z rozboru řešení úloh je také zřejmé, že i řešení, které žáci nedovedou do úspěšného konce, má velký význam.

Na ukázku uvádíme řešení jedné geometrické výše uvedené úlohy z kategorie Junior. Každé následující řešení reprezentuje celou skupinu řešení obdobného typu a je ilustrováno autentickým obrázkem. Texty řešení byly většinou natolik nečitelné, že je bylo nutné přepsat, jsou však přepsány doslova, tj. včetně chyb všeho druhu.

Zopakujme ještě jednou zadání sledované úlohy: *Určete, na jaký největší počet shodných nekonvexních mnohoúhelníků lze rozřezat čtverec tak, aby všechny strany těchto mnohoúhelníků byly rovnoběžné se stranami čtverce a přitom ani jeden z těchto mnohoúhelníků nevznikl posunutím jiného z uvažovaných mnohoúhelníků.*

Při rozboru řešení úlohy vycházíme ze vzorku 69 žáků v Praze, pro něž to byla druhá nejoblíbenější úloha z celé série. Pouze 10 řešení bylo úplně správných.

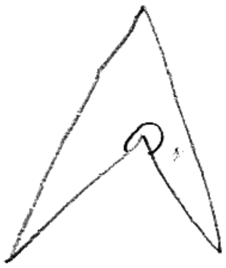
V odpovědích žáků se objevily odpovědi: 0 mnohoúhelníků, nekonečně mnoho mnohoúhelníků, 4 mnohoúhelníky, 8 mnohoúhelníků, počet mnohoúhelníků závisí na velikosti čtverce.

Jako největší problém, který vedl k nevyřešení úlohy, se objevila neznalost těchto pojmů (čtenář jistě na následujících obrázcích pozná o jakou neznalost se jedná):

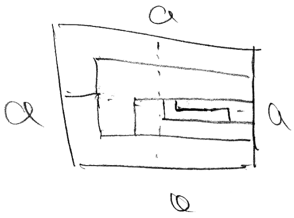
- čtverec jako univerzální model – čtverec je většinou chápán jen se svými rozměry
- konvexní a nekonvexní mnohoúhelník – některá řešení se opírala o nesprávné vymezení pojmu nekonvexní mnohoúhelník
- shodná zobrazení – někteří řešitelé nemají význam shodnosti pevně zafixován
- základy matematické argumentace – např. žák najde nějaké řešení, které vyhovuje zadání, a protože rozdělení na víc částí ho nenapadne, prohlásí toto řešení za výsledek, aniž by pro své tvrzení hledal potřebné zdůvodnění, nebo např. žák často ze skutečnosti, že něco platí pro jeho konkrétně zvolený případ, usuzuje na obecnou platnost

Ukázky žákovských řešení

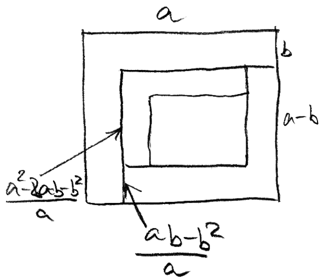
Řešení 1 *Ani jeden, protože nekonvexní mnohoúhelník vypadá asi jako na obrázku. A nejde aby všechny jeho strany byly rovnoběžné se stranami čtverce.*

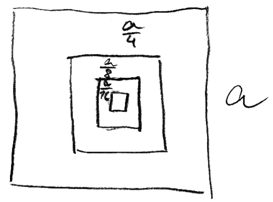


Řešení 2 *Čtverec můžeme rozřezat na nekonečně mnoho nekonvexních mnohoúhelníků.*

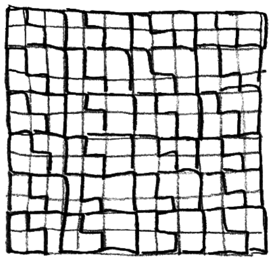


Řešení 3 *Podle mě jde čtverec rozřezat na nekonečně mnoho takových nekonvexních mnohoúhelníků. Jedinou jejich vlastností je totiž, že nemají mít shodnou velikost ale tvar ano. Uvádím tedy několik možných způsobů rozřezání.*



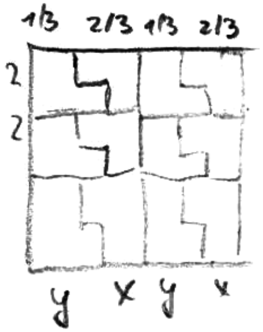


Řešení 4 *a ... délka strany pro kterou platí $a \in \mathbb{Z}$; $3|a \wedge 2|a$, počet mnohoúhelníků x je roven $\frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{3} = x$*

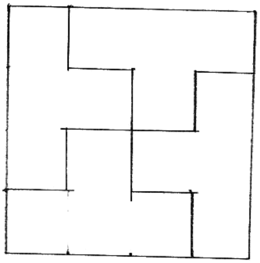


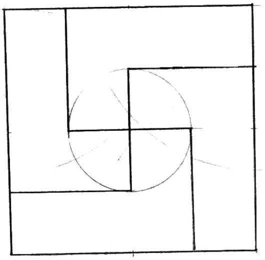
Řešení 5 *Abychom rozřezali čtverec beze zbytku musíme mít jakoby 3 řady mnohoúhelníků ⇒ 12. Pokud zvětšíme stranu čtverce 2krát ⇒ 4krát více mnohoúhelníků. Pokud zvětšíme stranu čtverce a stranu x, počet*

zůstane stejný. Pokud se zvětší strana čtverce o y, přibude y mnohoúhelníků. Počet je tedy 6krát větší než strana čtverce.

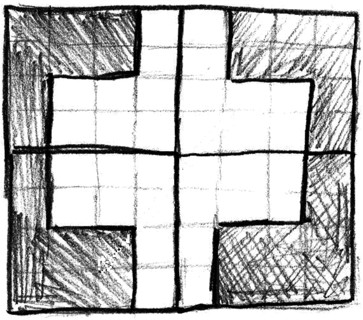


Řešení 6 *Zadání odpovídají 4 mnohoúhelníky, protože mohou být otočeny jen o* 90°*. V jiném případě by mnohoúhelníky byly shodné a nebo nebyly rovnoběžné se stranami čtverce.*



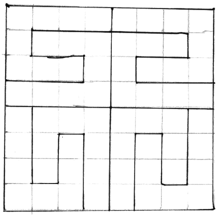


Řešení 7 *(bez komentáře)*



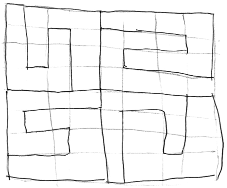
8 mnohoúhelníků

Řešení 8 *(bez komentáře, chybí zdůvodnění maximality)*

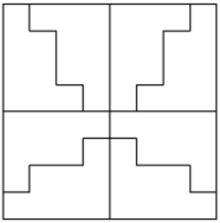


8

Řešení 9 (úplné správné řešení) *Mnohoúhelníky vzniklé rozstřiháním čtverce můžou mít vnitřní úhly* 90° *nebo* 270°*, aby byly strany rovnoběžné. Mnohoúhelník bude vypadat jako složený ze čtverečků. Pro jednoduchost rozdělíme i střihaný čtverec na čtverečky, konkrétně* 8×8*. Maximální počet mutací jednoho mnohoúhelníku je 8, tedy 4 otočené o* 90° *a další 4 zrcadlově k prvním 4. Při jiném rozložení by stěny přestaly být rovnoběžné. Z toho vyplývá, že víc jak na 8 mnohoúhelníků se čtverec nerozstříhá.*



Vzorové řešení *8, protože existuje 8 možných orientací takového mnohoúhelníku. Každou z orientací můžeme použít právě jednou, jinak bychom získali dva navzájem posunuté obrazce. Největší počet je tedy 8, jak ukazuje mnohoúhelník na obrázku.*



Literatura

[1] Švrček, J.: Turnaj měst v České republice. *MFI* **16**, 7 (2006/7), 402–406.

[2] Tolpygo, A.: Turnaj měst – mezinárodní matematická soutěž. *MFI* **4**, 8 (1994/95), 349–352.

[3] Taylor, P. J. (ed.): *Tournament of the Towns 1980–1984.* Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1993.

[4] Taylor, P. J. (ed.): *Tournament of the Towns 1984–1989.* Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1992.

[5] Taylor, P. J. (ed.): *Tournament of the Towns 1989–1993.* Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1994.

[6] Taylor, P. J., Storozhev, A. M.: *Tournament of Towns 1993–1997 (Book 4).* Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1998.

[7] Storozhev, A. M.: *Tournament of Towns 1997–2002 (Book 5).* Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 2006.

[8] `http://www.math.toronto.edu/oz/turgor/`

[9] `http://www.turgor.ru/`

◆

Matematika jako fascinující pomocník fyziky

Ivo Volf, Univerzita Hradec Králové [1]

ABSTRAKT. *Na základní škole ještě nepatří vyučovací předmět fyzika mezi neoblíbené a učivo týkající se přírodních věd i technických aplikací je přijímáno žáky poměrně se zájmem. Později, na střední škole přibývá ke kvalitativnímu fyzikálnímu poznání ještě matematické zpracování. To někdy komplikuje žákům pochopení problematiky, žáci se začnou obávat, že fyzikální poznatky nezvládnou, a ztrácejí o ně zájem. Přitom bez matematiky jsme ve fyzice jako bez rukou – matematika umožňuje vytváření modelů reality, které jsou pro dokonalé pochopení nezbytné. V článku se ukazuje, jaký význam má matematika pro výuku fyziky, a na konkrétních příkladech vhodné použití ve vyšších ročnících základní školy a na škole střední.*

---

[1] e-mail: ivo.volf@uhk.cz

1 Vztah matematiky a fyziky

Fyzika a matematika jsou spolu svázány velmi těsně a jejich vzájemné ovlivňování probíhá již dlouhou dobu. Jak se fyzikální poznání stává komplikovanější, slovně-popisná stránka ustupuje ve fyzice do pozadí (i když je stále k pochopení velmi důležitá) a fyzikální věda stále více používá matematické symboliky a matematických cest ke zpracování pozorovaných vlastností předmětů, dějů a jevů, abychom se dostali k jádru problematiky. Je známo, že čím je určitý jev historicky novější, tím více matematiky při jeho popisu a k vyjádření souvislostí potřebujeme. Přitom matematika svou symbolikou poskytuje fyzice úsporné vyjadřování fyzikálních vztahů, jedná se jakoby o „těsnopis“ fyzikálního jazyka. A stejně tak jako v Anglii nemůžeme nic pochopit bez anglického jazyka, musíme v zemi zvané Fyzika zvládnout fyzikální pojmy, tvrzení, zákony i fyzikální uvažování, prostě „fyzikálštinu“. Má formu mluvenou i psanou: v psané řeči hodně používáme matematických vzorců.

Podívejme se, jaký význam má matematika pro fyziku:

a) Matematika především umožňuje přesné vyjádření fyzikálních zákonů – najděte si v učebnici fyziky vyjádření Newtonova gravitačního zákona, Coulombova zákona, zopakujte si Keplerovy zákony a snažte se je matematicky vyjádřit.

b) Matematika nám nejenom vyjadřuje, ale také umožňuje zjednodušit vyjádření fyzikálních zákonů (dlouhá věta vyjadřující Archimédův zákon se dá nahradit tvrzením $F_{\mathrm{vztl}} = V_{\mathrm{t}}\varrho_{\mathrm{k}}g$, Wienův posunovací zákon vyjádříme $\lambda T = \text{konst.}$, což přesně vyjadřuje souvislost vlnové délky světla a teploty zdroje).

c) Bez matematiky nelze často získat správnou představu o veličinách, které nelze přímo změřit, jako např. o hustotě pevných těles, rychlosti světla nebo zvuku, hmotnosti Země, Slunce či vzdálenosti planet od Slunce.

d) Matematiky používáme velmi často k řešení fyzikálních problémů, a to jak na úrovni tzv. obecného řešení, kdy pracujeme s písmeny označujícími fyzikální veličiny, a vytváříme tak algebraické řešení, poskytující obecný pohled na problematiku, nebo na úrovni numerického řešení, kdy do získaných vzorců dosazujeme dané nebo změřené hodnoty fyzikálních veličin, popř. používáme grafických metod pro získání hledaného řešení. Tak se umožňuje řešit určité množiny podobných úloh.

e) Matematika a její metody nám umožňují zpracovávat a statisticky vyhodnocovat výsledky souborů hodnot získaných měřením – při tzv. přímých měřeních určovat aritmetický průměr i příslušné absolutní, relativní či kvadratické odchylky, a zvyšovat tak pravděpodobnost získaného výsledku, u nepřímých měření, měřit „něco jiného“ a hledanou veličinu zjišťovat výpočtem.

f) Matematika nám poskytuje prostředky, které se využívají až na vysoké škole k přesnějšímu vyjadřování a řešení problémů – derivování, integrování a řešení diferenciálních rovnic, ale známe také geometrické způsoby, jak se tomuto, leckdy obtížnému postupu, vyhnout (např. rozbor grafu $v = v(t)$, výpočet obsahu obrazce místo integrace, určení směrnice tečny místo derivování).

g) Na rozdíl od matematiky pracuje fyzika vždycky s fyzikálními veličinami. Fyzikální veličina je určena nejen hodnotou (u vektorů je to velikost, u skalárů hodnota), ale musí mít také příslušnou jednotku (nebo její násobek či díl), u veličin vektorových ještě směr. Ve fyzice pracujeme s jednotkami sestavenými do Mezinárodní soustavy jednotek SI, která tvoří systém na sebe navazujících veličin a jednotek.

h) Důležité místo zaujímá matematika při užití přibližných výpočtů, a to nejenom s použitím prostředků výpočetní techniky a grafických metod, ale také běžných numerických metod.

2 Matematika a fyzikální modely

Fyzika se vyrovnává s úkolem popsat reálnou situaci co nejjednodušším, ale také co nejpřesnějším způsobem. Tak se každý problém formulovaný jako fyzikální úloha řeší tak, že nejprve odstraňujeme z popisu ty součásti, které nejsou pro popis podstatné, zjednodušujeme vyjádření tohoto problému s ohledem na úroveň matematického a fyzikálního poznání, na niž se žáci (nebo i jiní řešitelé) zatím dostali. Tím získáváme tzv. model.

Tento postup se projevuje při formulaci problémů fyzikálních, kde často nahrazujeme složitější realitu jednoduššími představami (někdy i ryze mechanickými, protože mechanické jevy a děje si jsme schopni představit nejvěrněji). Často řešíme na modelové úrovni problémy z oblasti mezipředmětových jevů, např. úlohy z biofyziky, biomechaniky, geofyziky, astrofyziky. Důležité jsou i problémy plynoucí z běžného, každodenního života, které pro úspěšné řešení musíme zbavit nepodstatných podrobností. Zajímavé jsou úlohy z historie fyziky a techniky, u nichž pro řešení musíme najít jejich fyzikální základ. Velmi vděčné jsou problémy plynoucí z experimentování, a to jednak pro případ, že experiment je východiskem problémové situace, i pro případ, kdy experimentem ověřujeme platnost navržených hypotéz. Při zpracování údajů z experimentu často hledáme nové, řešiteli zatím neznámé fyzikální funkční závislosti, a zde hraje matematika prvořadou úlohu.

Myšlenkově postupujeme při vytváření fyzikálního modelu takto:

realita a její popis → fyzikální model pojmový → fyzikální model veličinový → matematický model reality → grafická reprezentace matematického modelu → fyzikalizované řešení matematického modelu → konfrontace s realitou

Proces řešení fyzikálního problému tedy začíná modelováním a končí konfrontací získaného řešení s realitou, z níž problém vychází. Součástí matematizace je postupné nacházení vhodné funkce nebo funkcí, jež můžeme při popisu předmětů, jevů a dějů i v procesu řešení problémů použít.

Plyne však z toho závěr, že jakékoliv pokusy vykládat školskou fyziku bez použití matematických prostředků a metod jsou již předem odsouzeny k neúspěchu. Proto jednou z prvních cest, kterou se vydávají učitelé fyziky zejména na střední škole, je postupné prohlubování matematických znalostí i dovedností. Zde si dovolím připomenout poslední práce, které vyšly v Knihovničce Fyzikální olympiády: Jarešová, M., Volf, I., Vybíral, B.: Kapitoly z matematiky pro řešitele fyzikální olympiády, Hradec Králové, MAFY 2006. Text byl vyvěšen i na internetových stránkách `http://fo.cuni.cz` a `www.uhk.cz/fo`.

V dalším chceme na několika příkladech ukázat, jaké prostředky matematika fyzice poskytuje, a tak ji umožňuje řešit problémy, které by bez matematiky vyřešit nemohla. Vybrali jsme úlohy z různých oblastí. Při jejich řešení se snažíme nepoužívat složité vztahy, nýbrž především logické úvahy a matematické cesty při stanovení hledané odpovědi na otázky spojené s řešenými problémy.

3 Matematika a řešení problémů kolem nás

Jak jsme již uvedli, při řešení reálných problémů musíme vytvářet zjednodušené modely, protože není možné zařadit do popisu všechny zjistitelné veličiny a sledované situace popisovat ze všech oborů fyziky. Tak se vytvářejí fyzikální úlohy, které jsou řešitelné na určité úrovni fyzikálního poznání, která odpovídá úrovni fyzikální přípravy žáků, jimž jsou úlohy předkládány. Uvedeme několik jednoduchých úloh:

Úloha 3.1 *Hmotnost atmosféry.* Odhadněte, jakou hmotnost má zemská atmosféra. Plošný obsah zemského povrchu je asi 510 miliónů km^2. Kdyby se plyny tvořící atmosféru stlačily na hustotu vzduchu při hladině moře, potom by vytvořila atmosféra homogenní vrstvu o tloušťce asi 10 km. Toto však možné není, ale víme, že tlak atmosférického vzduchu při hladině moře má hodnotu 0,10 MPa. Stačí tyto údaje ke stanovení hmotnosti zemské atmosféry?

Řešení. První model nám umožní určit objem homogenní vrstvy $V = 5{,}1 \cdot 10^9$ km^3, odtud určíme její hmotnost $6{,}5 \cdot 10^{18}$ kg. Druhý model vysvětluje, že tlak vzduchu $p = mg/S$, takže potom $m = pS/g = 5{,}1 \cdot 10^{18}$ kg. Oba výsledky se řádově shodují.

Úloha 3.2 *Kdyby asteroid dopadl do Antarktidy.* Antarktida je světadíl, který se neustále potýká s nízkými teplotami. V jejich důsledku je na jejím povrchu ledovec o plošném obsahu 13,8 miliónů km^2 a střední tloušťce 2,2 km. Kdyby do Antarktidy dopadl asteroid nebo kdyby se zvýšila globální teplota na povrchu Země, mohl by pevninský led roztát. Odhadněte, jak by se tání tohoto ledovce projevilo na zvýšení hladiny oceánů.

Řešení. Stanovíme nejprve objem ledu $V = 3{,}0 \cdot 10^{16}$ m^3, tedy voda v ledovci vzniklá by měla hmotnost asi $2{,}7 \cdot 10^{16}$ tun, a tedy objem $2{,}7 \cdot 10^{16}$ m^3. Je-li S plošný obsah povrchu Země, potom pro případ, že by se vzniklá voda rovnoměrně rozprostřela v mořích a oceánech, je $h = V/0{,}71S$, tedy asi 72 m. Zvýšení hladiny světových oceánů by však vedlo k rozšíření plochy moří, takže by zvýšení hladiny bylo jenom 65 m, ale ty důsledky! Prohlédněte si mapu Evropy a odhadněte, která území by byla zaplavena.

Úloha 3.3 *Model sluneční soustavy, kdyby Zemi představoval malý globus.* Malý globus zakoupený v obchodě má průměr 25 cm. Jak by vypadal model sluneční soustavy – jaké rozměry by měly jednotlivé planety a Slunce, jaké by byly vzdálenosti mezi planetami a Sluncem? Proč neposkytuje tellurium vždycky vhodnou představu o planetární soustavě?

Řešení. Nejprve stanovíme měřítko: průměr globu je 25 cm, průměr Země 12 740 km. Odtud 1 cm na globu představuje asi 500 km, vzdálenost 1,0 m představuje 50 000 km a vzdálenost 1,0 km představuje v tomto modelu 50 miliónů km. Měsíc se bude jevit jako tenisový míček o průměru

6,8 cm, pohybující se ve vzdálenosti 7,7 m od středu globu (Země). Slunce bude mít v průměru 27,5 m (asi jako desetipatrový dům) ve vzdálenosti 3,0 km. Merkur bude mít průměr 7,0 cm a bude umístěn necelý kilometr od Slunce. Venuše bude mít v průměru asi 23 cm, bude se pohybovat asi 2,2 km od středu Slunce. Mars bude mít v průměru asi 14 cm a bude se pohybovat po elipse ve vzdálenosti 4,5 km. Trpasličí planeta Pluto bude mít asi 7 cm v průměru a bude se pohybovat ve vzdálenosti asi 120 km. Tento model však ještě nezachycuje pohyb planet, jejich rotaci kolem osy. Přesto však z modelu máme dojem, jak je model prázdný, což vyjadřuje realitu kolem nás: prázdno, prázdno. Kdybychom všechny rozměry zmenšily desetkrát, přesto by zůstal tento mechanický model planetární soustavy dosti názorný.

4 Matematika a řešení problémů kolem nás

Představy člověka o jevech mikrosvěta jsou velmi složité – vzpomeňme např. na planetární model atomu, kdy E. Rutherford dospěl k určité analogii mezi stavbou atomu a planetární soustavy. Mechanické představy jsou vědomí člověka nejbližší. Navíc malé rozměry a obrovské počty částic vyžadují, abychom nacházeli vhodné podobnosti, které umožňují lepší pochopení.

Úloha 4.1 *Představa Avogadrovy konstanty* $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$. Kdosi vymyslel přirovnání: v jednom molu je tolik částic jako zrnek písku na Sahaře. Je to pravda? Lineární rozměr zrnka písku berte 0,5 mm, plošný obsah Sahary je 8,0 miliónů km^2.

Řešení. Objem zrnka písku je 0,125 mm^3, objem všech zrnek na Sahaře (pochopitelně v našem modelu, kdy na Sahaře je určený počet zrnek písku) je $7{,}5 \cdot 10^4$ km^3. Vytvoříme si model, kdy písková vrstva na Sahaře je všude stejná a použijeme-li vztahu $h = V/S$, pak $h = 9{,}3$ m, což zase není tak nereálné.

Úloha 4.2 *Lineární rozměry a hmotnost molekuly vody* H_2O. Odhadněte lineární rozměry a hmotnost molekuly vody $\mathrm{H_2O}$.

Řešení. Přímé měření ani jedné z hledaných veličin není možné. Užitím matematických výpočtů však odpověď dáme. Využijeme znalosti Avogadrovy konstanty a skutečnosti, že známe molární hmotnost vody

0,018 kg/mol. Odtud vychází hmotnost molekuly $3{,}28 \cdot 10^{-25}$ kg. Jeden mol vody má objem $0{,}018 \cdot 10^{-3}$ m^3, takže pro jednu molekulu připadá objem $30 \cdot 10^{-30}$ m^3. Hrana krychličky o tomto objemu má délku 0,31 nm; lineární rozměry budou mít hodnotu desetin nanometru.

Úloha 4.3 *Molekuly kuchyňské soli v Černém moři.* Podle zeměpisné encyklopedie má Černé moře plošný obsah 413 488 km^2 a střední hloubku 1 271 m. Do moře vhodíme z lodi půlkilogramový pytlík kuchyňské soli a necháme sůl dobře rozpustit. Je pochopitelné, že zvýšení salinity mořské vody nemůžeme pozorovat. Odhadněte, kolik molekul soli z tohoto pytlíku bychom mohli najít v jednom desetilitrovém kbelíku mořské vody pocházející z Černého moře.

Řešení. Objem vody v Černém moři je $V = Sh = 525\,543$ km^3. Kuchyňská sůl má molární hmotnost 0,0585 kg/mol, Avogadrovu konstantu známe. V půlkilogramovém pytlíku máme asi $5 \cdot 10^{24}$ částic. Přepočteme-li objem vody v Černém moři na počet kbelíků, dostaneme hodnotu $525\,543 \cdot 10^{11}$, takže v jednom kbelíku najdeme $\frac{5 \cdot 10^{24}}{5{,}25 \cdot 10^{16}} \approx 10^8$ částic.

Úloha 4.4 *Problém z dětské encyklopedie.* V jedné dětské encyklopedii se uvádí, že zlato je velmi zajímavý kov, který se dá dobře zpracovávat. Z jedné unce zlata lze vytáhnout drátek o délce až 80 km a vytepat plátek o ploše až 10 m^2. Porovnejte tloušťku zlatého drátku i zlaté fólie s lineárními rozměry atomu zlata.

Řešení. Hmotnost 1 unce = 31,1 g zlata. Zlato má hustotu 19 200 kg/m^3, takže 1 unce zlata má objem 1,62 cm^3. Plátek zlata má potom tloušťku asi 160 nm, drátek má tloušťku 5,1 μm. Lineární rozměry atomu zlata jsou řádově desetiny nanometru.

Úloha 4.5 *Délka řetězce.* Jak dlouhý by byl řetězec, v němž bychom umístili všechny molekuly vody, které jsou obsaženy v jednom molu vody?

Řešení. Zjistili jsme v úloze 4.2, že lineární rozměr molekuly vody je asi 0,31 nm. Počet částic v jednom molu je $6 \cdot 10^{23}$, tedy délka řetězce $x = 0{,}31 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{23}$ m $= 186 \cdot 10^{12}$ m = 186 miliard km, tedy řetězec by sahal od středu Slunce až do tisícinásobku poloviční vzdálenosti mezi Zemí a Marsem.

5 Matematika a problémy astronomické

Na rozdíl od mikrosvěta jsou astronomické problémy spojeny s velkými, často málo představitelnými vzdálenostmi, hmotnostmi, pochopením vesmírné prázdnoty, velkých rychlostí. Opět se snažíme žákům přiblížit, tentokrát megasvět, do rámce, který je pro ně pochopitelnější a vytváříme vhodné analogie.

Úloha 5.1 *Poměr hmotností Slunce a Země.* Na základě údajů, které může zjistit pozorovatel na povrchu Země, určete hmotnost Země a hmotnost Slunce nebo alespoň jejich poměr. Nebude to zřejmě obtížné, protože již Jan Neruda uvádí ve Zpěvech kosmických, že „ze Slunce by nastrouhal třistatřicet tisíc Zemí".

Řešení. Ke stanovení hmotností užijeme Newtonův gravitační zákon, který vyjadřuje sílu, působící mezi Sluncem a Zemí a mezi Zemí a Měsícem. Tato síla je silou dostředivou, takže po vzájemném porovnání zjišťujeme, že musíme znát nejen dobu oběhu Země kolem Slunce a dobu oběhu Měsíce kolem Země (siderické doby stanovíme na základě pozorovaných dob synodických), ale musíme znát i vzdálenost těchto těles. Pro výpočet je nutno znát také hodnotu gravitační konstanty. Při porovnání obou hmotností vystačíme jenom se vzájemnými vzdálenostmi a siderickými dobami oběhu. Poměr hmotností je 330 000.

Úloha 5.2 *Střední hustota Slunce.* Víte, že sluneční kotouč se jeví pro pozorovatele na povrchu Země pod úhlem $32'$ a doba oběhu Země kolem Slunce je rovna 365,24 dne (podle R. P. Feynmana $\pi \cdot 10^7$ sekund). Na základě těchto údajů určete střední hustotu Slunce.

Řešení. Označíme-li R poloměr Slunce a r vzájemnou vzdálenost středů Slunce a Země, potom $2R/r = 32'$, a $R/r = 0{,}004\,65$ rad. Odtud nám vychází střední hustota Slunce asi 1 400 kg/m^3.

Úloha 5.3 *Mars – Země – Slunce.* Z pozemských pozorování víme, že synodická doba oběhu Marsu kolem Slunce (doba, za kterou se opakuje situace, kdy Slunce, Země a Mars jsou přibližně na jedné polopřímce) je 2,135 roku. Jak je velká poloosa oběžné trajektorie Marsu od Slunce a jakou střední rychlostí se Mars kolem Slunce pohybuje?

Řešení. Porovnáním úhlových rychlostí průvodičů Marsu a Země stanovíme, že siderická doba oběhu Marsu kolem Slunce je 1,88 roku. Ze 3. Keplerova zákona pak plyne, vezmeme-li jako porovnávací planetu Zemi, že velká poloosa oběžné trajektorie Marsu je 1,523 AU, střední rychlost pohybu Marsu kolem Slunce je 24,3 km/s.

Úloha 5.4 *Halleyova kometa.* Halleyova kometa se přiblíží jednou za 76 let do „těsné“ blízkosti Slunce, a to na vzdálenost 0,59 AU. Určete její vzdálenost od Slunce v aféliu.

Řešení. Ze 3. Keplerova zákona určíme velkou poloosu oběžné trajektorie komety na hodnotu 17,94 AU. Vzdálenost komety od Slunce v aféliu je $2 \cdot 17{,}94\ \text{AU} - 0{,}59\ \text{AU} = 35{,}3\ \text{AU}$.

Úloha 5.5 *Vzdálená trpasličí planeta Quaoar.* Dne 4. června 2002 bylo objeveno první transplutonické těleso, jehož doba oběhu se odhaduje na 288 let. Určete vzdálenost tohoto tělesa od Slunce.

Řešení. Ze 3. Keplerova zákona plyne pro velkou poloosu Quaoaru vzdálenost 43,6 AU, tedy asi 6,5 miliardy km od Slunce.

6 Matematika a několik modelových situací

V této části chceme ukázat, jak volba modelu ovlivňuje pochopení problémové situace a z ní vyplývající výsledky řešení. Úroveň modelu ovlivňuje jednak vůbec možnost vyřešení, jednak přesnost i správnost získaného výsledku. Proto by se volba a popis modelu měly stát součástí odpovědi na otázku zadanou v úloze.

Úloha 6.1 *Lyžař sjíždí po dlouhém svahu I.* Po dlouhém svahu o délce 2,5 km s rozdílem nadmořských výšek mezi startem a cílem 1 250 m jede lyžař o hmotnosti 80 kg. Jaké největší rychlosti dosáhne, jestliže smykové tření a odporovou sílu nebudeme uvažovat?

Řešení. Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie – na počátku je potenciální energie $E_{p1} = mgh_1$, kinetická energie $E_{k1} = 0$, při průjezdu cílem je $E_{p2} = mgh_2$, $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$. Odtud dostaneme velikost rychlosti 158 m/s = 570 km/h, což je reálně neuskutečnitelné, tedy zvolený model nefunguje. Hmotnost lyžaře při výpočtu není potřeba.

Úloha 6.2 *Lyžař sjíždí po dlouhém svahu II.* Po dlouhém svahu z minulé úlohy sjíždí lyžař, avšak odpor prostředí zanedbat nemůžeme. Jaké dosáhne nejvyšší rychlosti? Hmotnost lyžaře je rovna 80 kg, odporovou sílu určíme z Newtonova vztahu $F = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$. Při pohybu po kopci působí na lyžaře síla o velikosti mgp/l, kde p/l je sklon kopce. Jaké největší rychlosti lyžař dosáhne? Jak se tento výsledek změní, uvážíme-li smykové tření lyží o podložku?

Řešení. Sklon kopce je $0{,}50 = \sin\alpha$, odkud $\alpha = 30°$. Odporová síla se zvyšuje úměrně s rychlostí lyžaře, až lyžař dosáhne silové rovnováhy, přičemž vychází pro velikost rychlosti 37 m/s = 133 km/h; tato hodnota je trochu nadnesená. Uvážíme-li smykové tření, vyjde rychlost lyžaře o něco menší.

Úloha 6.3 *Cyklista jede z kopce bez šlapání.* Při jízdě z kopce absolvoval cyklista trasu o délce 2,5 km se spádem 0,15. Hmotnost cyklisty i s kolem je 80 kg. Jaké rychlosti dosáhne cyklista, když odpor vzduchu nebudeme uvažovat? Proč tento model nezobrazuje svět reálně? Jaké rychlosti dosáhne cyklista, platí-li pro velikost odporové síly Newtonův vztah? Jak ovlivní výsledek valivý odpor?

Řešení. Sklon kopce je $0{,}15 = \sin\alpha$, odkud $\alpha \approx 8°38'$. Úlohu řešíme obdobně jako úlohu 6.2. Mezní rychlost vychází 20 m/s = 72 km/h. Zvážíme-li odpor prostředí, získáme pro rychlost cyklisty hodnotu 14,3 m/s = 51,5 km/h. Započítáním valivého odporu se velikost výsledné rychlosti ještě poněkud zmenší.

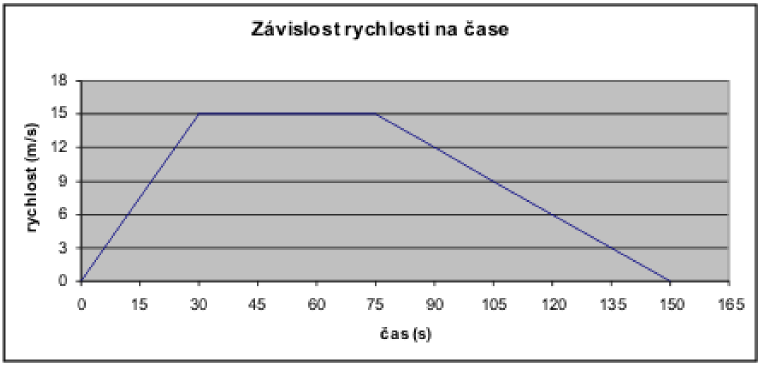
Úloha 6.4 *Cyklista po rovině šlape ze všech sil.* Po vodorovné silnici jede cyklista, který šlape do pedálů ze všech sil. Platí pro něj podmínky z úlohy 6.3 (vyjma sklonu kopce). Zjistěte, jaké největší rychlosti může cyklista dosáhnout, když svalovou silou překonává sílu odporu vzduchu a jeho výkon nepřesáhne po dobu jízdy hodnotu 1 250 W.

Řešení. Síla, kterou vyvíjí cyklista, je rovna odporové síle, jíž na cyklistu působí vzduch při jeho jízdě. Výkon určíme jako hodnotu $P = \frac{W}{t} = \frac{1}{2}CS\varrho v^2 \cdot v = \frac{1}{2}CS\varrho v^3$. Odtud dokážeme stanovit velikost mezní rychlosti $v = 16{,}2$ m/s = 58 km/h. Uvážíme-li ještě valivý odpor, dostaneme menší, avšak reálnější hodnotu.

7 Matematika a problémy astronomické

Jednou z reprezentací matematického modelu, která se velmi často používá i ve školním prostředí, je vhodné grafické znázornění závislosti dvou veličin. Zejména pro talentované žáky, právě získávající základní vzdělání, je obrázek či graf vítaným prostředkem nejen pro získání vhodné představy dané problémové situace, ale často i vhodnou cestou pro řešení zadaného úkolu. Ukážeme si na několika úlohách, které lze použít s úspěchem při výuce fyziky i matematiky a jež jsou zpravidla obtížné i pro žáky vyššího stupně střední školy, že grafická reprezentace dává učiteli možnosti, jak jednoduše řešit i složité problémy.

Úloha 7.1 *Automobil se rozjíždí a zastavuje.* Automobil se po dobu 30 s rozjíždí a poté, co získal rychlost 54 km/h, udržuje tuto rychlost po dobu 45 s. V dálce před sebou vidí řidič stát několik aut, a tak zařadí neutrální stupeň. Jeho automobil se po 75 s zastaví. Určete dráhu, kterou automobil urazil, i jeho průměrnou rychlost.

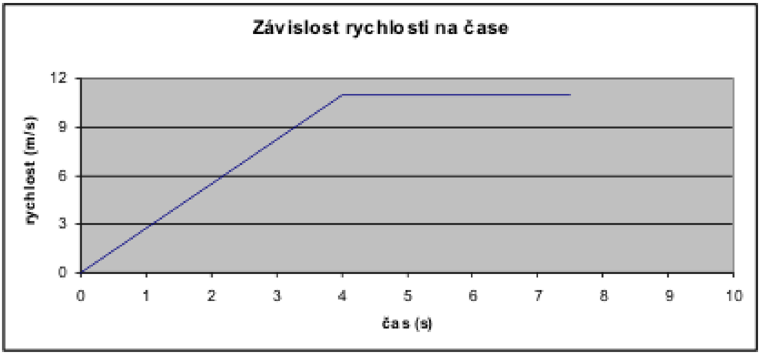


Graf 1

Řešení. Úloha je postavena na třech druzích pohybu, s nimiž se sice žák v reálném životě setkává, ale školní výuka fyziky mu nedává možnosti, aby je dokázal vyřešit. Proto pro řešení daného problému sestrojíme graf $v = v(t)$, který ukazuje, jak se během tohoto pohybu mění rychlost automobilu. Předpokládáme (vzhledem k matematickým možnostem žáků), že tyto pohyby jsou jednoduché – auto se nejprve rovnoměrně rozjíždí, takže rychlost se mění úměrně s časem, potom jede po určitou dobu rovnoměrně stálou rychlostí a konečně v poslední fázi se rychlost automobilu lineárně zmenšuje s časem, až automobil zastaví. To je dobré znázornit graficky. Z grafu 1 vidíme, že při rovnoměrném pohybu je $s_2 = v_{\max} t_2$, tedy dráha rovnoměrného pohybu je rovna obsahu obdélníka o stranách délek $v_{\max}$, t_2. Analogicky při rovnoměrně zrychleném pohybu je dráha rovna $s_1 = v_{\max} t_1$, při pohybu rovnoměrně zpomaleném až do zastavení je $s_3 = v_{\max} t_3$. Pro dané hodnoty je $s_1 = 225$ m, $s_2 = 675$ m, $s_3 = 563$ m, což je celkem 1 463 m, proto průměrná rychlost automobilu byla 9,75 m/s = 35 km/h.

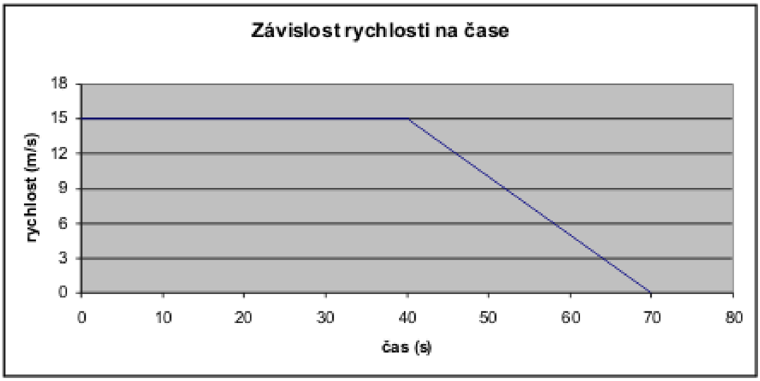
Úloha 7.2 *Jak dlouho běží sportovec.* Malý sprinter běží po trase 60 m tak, že prvních 22 m po startu se rozebíhá po dobu 4,0 s a zbytek trasy běží touto rychlostí až do cíle. Za jak dlouho doběhne do cíle?

Řešení. Pro řešení úlohy máme zdánlivě málo údajů. Svůj názor změníme poté, co nakreslíme graf 2 změn rychlosti v závislosti na čase, tedy $v = v(t)$. Na ose času vyznačíme dobu $t_1 = 4{,}0$ s a dále zatím neznámý údaj o době pohybu se stálou rychlostí označíme t_2. Velikost maximální rychlosti sprintera také neznáme, proto zvolíme nějakou hodnotu $v_{\max}$. Vzniklý útvar v grafu $v = v(t)$ představuje pravoúhlý lichoběžník, z něhož oddělíme trojúhelník o obsahu $s_1 = \frac{1}{2} v_{\max} t_1$. Jednoduchým výpočtem dostaneme $v_{\max} = 11$ m/s, $s_2 = 38$ m, $t_2 = s_2/v_{\max} = 3{,}5$ s, což je celkem $t = t_1 + t_2 = 7{,}5$ s.



Graf 2

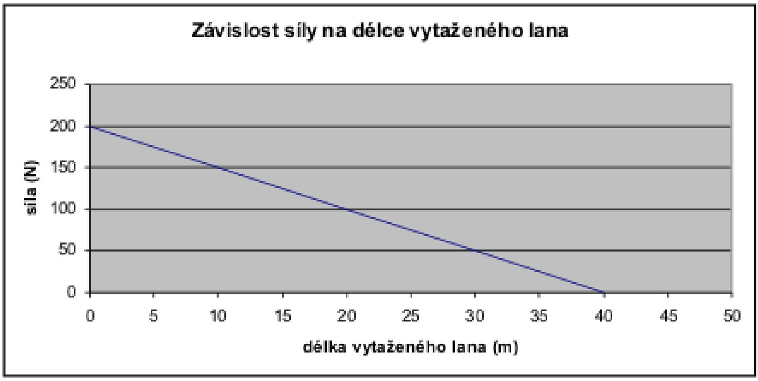
Úloha 7.3 *Za jak dlouho projel cyklista tratí.* Cyklisté na krátké trati 600 m se rozjíždějí na kole ještě předtím, než se dostanou na začátek sledovaného úseku; to je tzv. letmý start. Předpokládejme, že vydrží jet po celou dobu závodu na plný výkon a stálou rychlostí a poté, co projedou cílem, se rovnoměrně zastavují na trase 225 m za dobu 30 s. Za jak dlouho cyklista projede danou trať?



Graf 3

Řešení. Pro zjištění doby pohybu po dané trati závodu máme jen jeden údaj, což je nepostačující. Zkusme znázornit graf 3 obdobně jako v minulé úloze – neznáme sice rychlost pohybu, ale vzniklý útvar představuje pravoúhlý lichoběžník. Dráha zpomaleného pohybu je $s_2 = 225$ m, odkud je $v_{\max} = s_2/t_2 = 15$ m/s a odtud je doba závodu $t_1 = s_1/v_{\max} = 40$ s.

Úloha 7.4 *Práce při vytahování volně visícího lana.* Volně visící lano má délku 40 m a hmotnost 1 m délky lana je 0,5 kg. Jak velkou práci je nutno vykonat pro vyzvednutí lana do dané výšky?

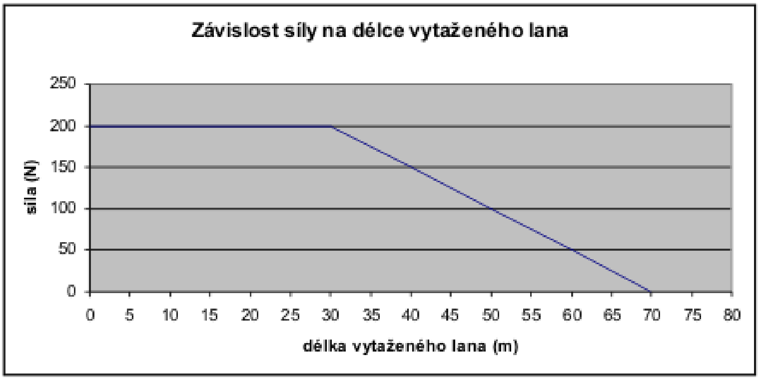


Graf 4

Řešení. Délka lana je $l = 40$ m, hmotnost lana je $m = 20$ kg. Na počátku působíme při zvedání lana silou 200 N, na konci 0 N. Nakreslíme graf 4 změn síly $F = F(x)$, kde x je délka části lana, kterou jsme již vytáhli. Podle grafu je $W = \frac{1}{2}Fl = 4\,000$ J.

Úloha 7.5 *Práce při vytahování volně visícího lana, jehož délka je větší než výška zvedajícího.* Volně visící lano zvedá člověk, který je ve výšce 40 m, ale délka lana je 70 m, hmotnost 1 m délky lana je 0,5 kg. Jak velkou práci je nutno vykonat pro vyzvednutí lana do dané výšky?

Řešení. Tentokrát musí zvedající člověk nejprve vytáhnout 30 m lana stálou silou 200 N, než se působící síla bude zmenšovat stejně jako v minulé úloze. Sestrojíme graf 5 síly $F = F(x)$, kde x je délka části lana již vytaženého. Odtud v první části je $W_1 = 200\ \mathrm{N} \cdot 30\ \mathrm{m} = 6\,000$ J, potom určíme $W_2 = 4\,000$ J. Celková práce je $W_C = 10\,000$ J. V grafu vidíme, že opět hledáme obsah pravoúhlého lichoběžníka.



Graf 5

Literatura

[1] Volf, I.: *Metodika řešení fyzikálních úloh, zejména na základní škole.* MAFY, Hradec Králové, 1997.

[2] Volf, I.: *Metodika řešení úloh ve středoškolské fyzice.* MAFY, Hradec Králové, 1997.

[3] Volf, I.: *Letáky fyzikální olympiády pro kategorie EFG.* MAFY, Hradec Králové, 1993–2007.

[4] Jarešová, M., Volf, I., Vybíral, B.: *Kapitoly z matematiky pro řešitele fyzikální olympiády.* MAFY, Hradec Králové, 2006.

Uvíznutí matematických úvah ve smyčce

Petr Vopěnka, PřF UJEP Ústí nad Labem

ABSTRAKT. *Poněkud obrazně řečeno, Cantorova teorie množin vznikla v dopisech, které G. Cantor zasílal R. Dedekindovi. V článku jsou podrobně zachyceny psychologické překážky – autorem nazvané „uvíznutí úvah ve smyčce“ – které musel Cantor překonávat.*

Protože nemám dostatek zkušeností s výukou mimořádně nadaných studentů gymnázií, rozhodl jsem se v tomto článku upozornit na jistý jev, jenž s tématem talentovaných studentů do jisté míry souvisí, neboť se s ním setkává patrně každý, kdo se pokouší usilovně vědecky tvořit. Nazval jsem ho „uvíznutím matematických úvah ve smyčce“ a popsal jsem ho v knize [2] na příkladu úvah, které prováděl George Cantor při vytváření teorie množin. Jde o následující dva odstavce z této knihy.

Prosinec 1873

V dopise ze dne 29. listopadu 1873 se Cantor otázal Dedekinda, zda by uměl očíslovat přirozenými čísly všechna čísla reálná (neboli nalézt úplnou korespondenci mezi uvedenými obory čísel). Připomněl, že přirozenými čísly umí očíslovat nejen všechna čísla racionální, ale též všechny konečné posloupnosti celých čísel.

Cantor očíslovával konečné posloupnosti celých čísel následujícím způsobem: Zavedl výšku konečné posloupnosti $a_0, a_1, \dots, a_n$ celých čísel jakožto přirozené číslo

$$N = n + |a_0| + \dots + |a_n|.$$

Je-li N přirozené číslo, pak zřejmě jen konečně mnoho konečných posloupností celých čísel má výšku N; nechť $\psi(N)$ je jejich počet. Nalezení vzorce, podle něhož lze číslo $\psi(N)$ snadno vypočítat, podobně jako popsat nějaké jednoduché očíslování těch posloupností, které mají výšku N, čísly $1, 2, \dots, \psi(N)$, je vhodnou úlohou pro studenty vyšších tříd gymnázií. Všechny konečné posloupnosti celých čísel pak sestavíme do posloupnosti tak, že nejprve seřadíme ty, které mají výšku 0, pak ty, které mají výšku 1, za ně ty, které mají výšku 2, atd. Tím je zároveň vytvořena korespondence mezi uvedenými obory.

Pokud jde o obor racionálních čísel, pak nejprve každému racionálnímu číslu r přiřadíme dvoučlennou posloupnost a, b celých čísel takovou, že čísla a, b jsou nesoudělná, b kladné, $r = \frac{a}{b}$. Potom stejným způsobem jako prve, pouze s tím rozdílem, že se omezíme na uvedené dvoučlenné posloupnosti, seřadíme tyto posloupnosti, a tím i všechna racionální čísla, do posloupnosti jediné.

Dedekind odepsal Cantorovi obratem. Napsal, že očíslovat všechna reálná čísla čísly přirozenými nedovede a také neví, proč by si tato otázka zasluhovala pozornost. Vypracoval však přesný důkaz toho, že všechna reálná algebraická čísla lze přirozenými čísly očíslovat. Opíral se přitom o Cantorovy myšlenky obsažené v dosud neuveřejněné Cantorově práci, jejíž rukopis znal, zvláště pak o pojem výšky mnohočlenu, který byl v ní zaveden.

Připomeňme, že algebraickým číslem rozumíme každé číslo, které je kořenem algebraické rovnice

$$a_n x^n + \cdots + a_0 = 0,$$

kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou celá čísla. (Zřejmě každé racionální číslo je algebraické a také $\sqrt{2}$ je algebraické číslo, neboť je kořenem rovnice $x^2 - 2 = 0$.)

Protože každá algebraická rovnice n-tého stupně má nejvýše n různých reálných kořenů (což v těchto rozpravách nebudeme dokazovat), lze očíslování všech algebraických čísel přirozenými čísly provést, velmi stručně řečeno, následujícím způsobem. V prve popsané posloupnosti $\mathcal{S}$ všech konečných posloupností celých čísel nahradíme každou posloupnost $a_0, \ldots, a_n$ reálnými kořeny rovnice $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$ seřazenými podle velikosti, pokud ovšem některý z nich nebyl použit už dříve. Nemá-li tato rovnice žádný dosud nepoužitý kořen, popřípadě nemá-li žádný reálný kořen, pak posloupnost $a_0, \ldots, a_n$ vyškrtneme z posloupnosti $\mathcal{S}$. K tomu dodejme, že i Zeus by se při této práci dost nadřel; Bohočlověk by ji ovšem zvládl snadno.

V dopise ze dne 2. prosince 1873 napsal Cantor Dedekindovi, že se už několik let čas od času marně pokoušel očíslovat reálná čísla všemi přirozenými čísly. Nebyl si však jist, zda mu z jeho čistě osobní zahleděnosti určitým směrem neuniká nějaké jednoduché řešení. Proto také tuto otázku položil Dedekindovi, a když nyní vidí, že ani on nezná odpověď, nabyl přesvědčení, že důvody neúspěchu mají hlubší příčinu. Ani Cantor až dosud neviděl žádný vážný důvod, proč by si tato otázka zasluhovala pozornost, a kladl si jí jen proto, že ho prostě zajímala. Po dopise od Dedekinda, který právě obdržel, zvláště pak po upozornění, že algebraická reálná čísla lze očíslovat přirozenými čísly, však změnil zásadně názor na důležitost této otázky. Nikoliv kladná, ale záporná odpověď na ni by totiž byla poznatkem navýsost zajímavým. Kdyby pro nic jiného, tak už jen proto, že by tím byl podán nový a naprosto neobvyklý důkaz existence (to znamená uskutečnitelnosti) reálného čísla, které není algebraické. (Poprvé existenci nealgebraického čísla dokázal Liouville v roce 1840. Jeho důkaz se opírá o zkoumání kořenů algebraických rovnic a jejich rozložení na číselné ose.)

Po obdržení tohoto dopisu změnil i Dedekind názor na význam položené otázky.

V dopise ze dne 7. prosince 1873 píše Cantor Dedekindovi:

> *V posledních dnech jsem měl čas pečlivěji zkoumat tvrzení, o němž jsem Vám psal. Teprve dnes, jak se mi zdá, jsem ukončil tuto záležitost. Abych se nedočkal rozčarování, uvážil jsem, že není shovívavějšího soudce nad Vás. Proto si dovoluji předložit Vám k posouzení to, co jsem se všemi nedokonalostmi provázejícími pracovní verzi načrtl na papír.*

Dále pak následuje první důkaz tvrzení, podle něhož přirozenými čísly nelze očíslovat všechna reálná čísla. Po několika zjednodušeních má důkaz tohoto tvrzení následující podobu:

Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost reálných čísel. Dokážeme, že v kterémkoliv intervalu $[x_0, y_0]$, kde $x_0 < y_0$, reálných čísel existuje (to znamená lze uskutečnit) reálné číslo, které se v této posloupnosti nenachází. Nejprve vytvoříme posloupnosti $x_0, x_1, x_2, \ldots$, $y_0, y_1, y_2, \ldots$ reálných čísel, a to tak, že budou-li již uskutečněna čísla $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, pak zvolíme x_n, y_n tak, aby platilo

$$x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}, \quad y_n - x_n < \frac{1}{n}$$

a neplatilo $x_n \leq a_n \leq y_n$. Jistě není třeba předvádět, jak čísla x_n, y_n lze stanovit z čísel x_{n-1}, y_{n-1}, a_n. Snadno nyní ověříme, že posloupnosti $x_0, x_1, \ldots$, $y_0, y_1, \ldots$ jsou bolzanovské a mají tutéž limitu. Označme ji z. Zřejmě pro každé n je $x_n \leq z \leq y_n$ a tedy $z \neq a_n$.

Dedekind obratem potvrdil správnost Cantorova důkazu. V dopise z 10. prosince 1873 mu pak Cantor napsal, že mu nikdo nemůže udělat větší radost než právě Dedekind svým zájmem o jeho úvahy; prosí ho proto, aby mu i nadále pomáhal podnětnými poznámkami. Vždyť právě

Dedekindova poznámka o tom, že algebraická reálná čísla lze očíslovat přirozenými čísly, podnítila Cantora k dosažení posledního výsledku.

Příběh, který vypravujeme, jsme mohli podstatně zkrátit. Vždyť podobně jako v jiných knihách zabývajících se teorií množin jsme mohli (nebo dokonce snad měli) pouze vznést otázku, kterou si Cantor položil, a předvést, jak na ni odpověděl. Všechno ostatní bylo vlastně nadbytečné a mohli jsme si to odpustit; v těchto rozpravách přece nejde o dějepis matematiky, ale o vývoj jejích idejí. Jenže kdybychom to učinili, pak bychom si zase nemohli položit otázku, jak je možné, že Cantor shora uvedený důkaz nepodal hned, jakmile si příslušnou otázku položil. Vždyť tento důkaz je až průzračně jednoduchý, a je tedy nepochopitelné, že na něj Cantor přišel až po několika letech, v nichž prováděl neplodné úvahy.

Tento příběh jsme vyprávěli proto, abychom na něm předvedli podivuhodný psychický jev, který by bylo možno nazvat uvíznutím matematického uvažování ve smyčce. Cantor totiž původně nechtěl dokázat, že očíslování všech reálných čísel přirozenými čísly není možné, ale naopak chtěl takové očíslování nalézt. Jeho podvědomí si to totiž z důvodů obtížně vysvětlitelných přálo. Chytilo ho tak do smyčky, která mu nedovolovala odvrátit zrak od úvah, které prováděl, i když k cíli nevedly. Tato smyčka ho škrtila několik roků, než ho z ní nevinná Dedekindova poznámka vysvobodila.

Takovéto uvíznutí matematických úvah ve smyčce není vůbec jevem ojedinělým, ale naopak neustále ohrožujícím každou tvůrčí matematickou činnost. Matematik v ní může někdy být tak uvězněn, že nedělá nic jiného, než že každý den znovu a znovu opakuje tytéž úvahy, o nichž ví, že k cíli nevedou. Není pochyb, že každý tvůrčí matematik o této smyčce ví a také ví, jak obtížné je vymanit se z ní, když se do ní chytí.

Náš prosincový příběh z roku 1873 však ještě ani zdaleka nekončí. Aby Cantorův výsledek mohl dojít všeobecného uznání, musel ho ještě schválit führer německé matematiky. Cantor se tedy vydal na cestu do Berlína a žádal o přijetí u Weierstrasse. Ten ho přijal 23. prosince a z Cantorových výsledků vzal na vědomí pouze to, že jde o algebraická reálná čísla. Doporučil Cantorovi, aby pod názvem *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes alles reellen algebraischen Zahlen* uveřejnil výsledek týkající se existence nealgebraického reálného čísla v časopise J. für die reine und angew. Mathematik. Ještě během Štědrého dne Cantor tento článek napsal a odeslal ho do uvedeného časopisu, kde vyšel v roce 1874. To vše pak napsal Dedekindovi v dopise ze dne 25. prosince.

Vánoční svátky strávil Cantor v Berlíně rozvažováním o tom, zda dobře učinil, když dal na Weierstrassovo doporučení. O svých pochybnostech napsal Dedekindovi v dopise ze dne 27. prosince, z něhož vyjímáme:

> *To, že jsem přistoupil na ohraničený charakter tohoto článku, je dáno částečně zde panujícími poměry, o nichž vám budu někdy vyprávět. Na druhé straně se domnívám, že bylo účelné použít můj výsledek nejprve na zvláštní případ [algebraická reálná čísla]. Možná zobecnění — a nalezl jsem jich několik — už žádnou práci nedají a není podstatné udělám-li je já, nebo někdo jiný.*

Cantor se domníval, že napsal článek šalamounsky. Rozdělil ho na dvě části, v první předvedl očíslování algebraických čísel přirozenými čísly a ve druhé nemožnost očíslovat všechna reálná čísla přirozenými čísly. Moc si tím však nepomohl. Článek celkově vyznívá tak, že jde o čísla algebraická, jak si to ostatně přál Weierstrass.

K dovršení smůly hned v lednu 1874 Cantor objevil v Compt. rend. Acad. sci. Paris 1873 článek, v němž Hermite užitím idejí Liouvillových dokázal, že Eulerovo číslo e není algebraické. Vedle tohoto výsledku ovšem sláva Cantorova pouze existenčního důkazu vybledla. Navíc v roce 1882 Hermitův žák F. Lindemann (1852–1939) dokázal rovněž užitím Liouvillových idejí, že ani číslo π (udávající poměr délky kružnice ku délce jejího průměru) není algebraické. Poznamenejme, že teprve tím byla dokázána neřešitelnost kvadratury kruhu.

Červen 1877

Uchvácen problematikou, kterou otevřel, klade si Cantor hned po návratu z vánočních trampot v Berlíně otázku, zda je možná úplná korespondence mezi oborem bodů ležících na nějaké ploše (například na čtverci) a oborem bodů ležících na úsečce (neboli reálných čísel x, pro něž $0 \leq x \leq 1$). V dopise z 5. ledna 1877 pak tuto otázku klade též Dedekindovi. Dodává, že odpověď nebude jednoduchá, i když jsme nakloněni považovat zápornou odpověď za natolik evidentní, že ani žádný důkaz nepotřebuje.

Záporná odpověď na tuto otázku se nejen neodbytně vnucuje, ale byla by i žádoucí. Prostřednictvím úplných korespondencí mezi obory bodů ležících na různých geometrických objektech by totiž bylo možno postihnout jejich dimensi. Měly by ji stejnou (popřípadě různou), jestliže taková úplná korespondence mezi příslušnými obory bodů je (popřípadě není) možná. Nasnadě jsoucím způsobem by pak také bylo možno postihnout, kdy jeden geometrický objekt má menší dimensi než druhý. Ostatně právě funkce jedné reálné proměnné zprostředkovávají (popřípadě po více či méně náročné úpravě) korespondenci mezi oborem reálných čísel a oborem bodů ležících na nějaké křivce. Podobně funkce dvou (popřípadě tří, . . .) proměnných zprostředkovávají korespondenci mezi oborem bodů ležících v rovině (popřípadě v trojrozměrném prostoru, . . .) a oborem bodů ležících na nějaké ploše (popřípadě tělese, . . .).

Jádro problému tedy spočívá v tom, zda je možná úplná korespondence mezi oborem bodů ležících na úsečce a oborem bodů ležících na čtverci.

Na Cantorovy matematické úvahy byla opět nastražena smyčka. Záporná odpověď byla žádoucí a Cantor musel nabýt přesvědčení, že právě on je povolán k tomu, aby ji nalezl. Způsobilost ke zdolávání takovéhoto úkolu osvědčil nalezením záporné odpovědi na podobnou otázku. Není myslitelné, aby Cantor v této smyčce neuvízl; škrtila ho téměř tři a půl roku.

Na oslavách stého výročí narození C. F. Gausse (narodil se 30. dubna 1777), které se konaly v Göttingenu, se sešla řada významných matematiků. Cantor využil této příležitosti a mnohým z nich tuto otázku položil. O tom pak později (25. června 1877) napsal Dedekindovi:

> *Většina z těch, jimž jsem dal tuto otázku, se podivovala, že ji mohu vůbec klást, když odpověď je evidentní. K určení bodu v n-rozměrném útvaru je přece zapotřebí n nezávislých souřadnic. Ti však, kteří hlouběji pronikli do smyslu této otázky, byli nuceni přiznat, že přinejmenším je třeba dokázat, proč záporná odpověď je evidentní.*

Nelze vyloučit, že právě pohrdavý postoj matematiků přítomných na Gaussových oslavách vyvolal u Cantora vzdor, jenž ho vytrhl ze smyčky, v níž až dosud vězel. Vždyť i kdyby nakrásně nalezl zápornou odpověď, nestál by jeho výsledek nikomu ani za povšimnutí. Každý přece věděl, že to tak musí být. Úplně jinak by tomu ale bylo, kdyby odpověď byla kladná. Směr Cantorových úvah se tak obrátil. Nezajímala ho již záporná, ale kladná odpověď na tuto otázku. Dopis Dedekindovi, z něhož jsme prve citovali, má následující pokračování:

> *Jak jsem již řekl, i já jsem stál na straně těch, kteří zápornou odpověď považovali za pravděpodobnou, a to ještě do nedávné*

doby, než jsem díky dosti složitým pochodům mysli nabyl přesvědčení, že odpověď je kladná, a to bez jakýchkoliv omezení. Krátce poté jsem nalezl důkaz.

Vskutku, v dopise Dedekindovi již ze dne 20. června 1877 popsal Cantor následující jednoduchou korespondenci mezi oborem reálných čísel x, pro něž $0 \leq x \leq 1$ (neboli oborem bodů ležících na úsečce), a oborem všech uspořádaných dvojic $\langle x, y\rangle$ (popřípadě trojic, $\ldots$) reálných čísel, pro něž $0 \leq x, y \leq 1$, neboli oborem všech bodů ležících na čtverci (popřípadě v krychli i vícerozměrné).

Každému reálnému číslu x, pro něž $0 \leq x \leq 1$, odpovídá totiž jeho desetinný rozvoj tvaru $0, a_1a_2a_3\ldots$, kde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jsou číslice $0, 1, \ldots, 9$. Pouze ta čísla, jejichž desítkový rozvoj obsahuje od jistého místa samé nuly, mají ještě druhý rozvoj; ten naopak od předcházejícího místa obsahuje samé devítky (například 0,35800… a 0,357999… jsou rozvoje téhož čísla). V takovém případě se rozhodneme pro ten rozvoj čísla x, který od jistého místa obsahuje samé devítky. Jsou-li nyní x, y reálná čísla, pro něž $0 \leq x, y \leq 1$, $x = 0, a_1a_2\ldots$, $y = 0, b_1b_2\ldots$, pak uspořádané dvojici $\langle x, y\rangle$ přidáme to číslo, jehož desítkovým rozvojem je $0, a_1b_1a_2b_2\ldots$ Případ uspořádaných trojic, čtveřic, $\ldots$ je obdobný.

Dedekind okamžitě odpověděl a upozornil Cantora, že jím popsaná korespondence není úplná. Každé dvojici $\langle x, y\rangle$ reálných čísel, pro něž $0 \leq x, y \leq 1$, sice odpovídá jediné reálné číslo z intervalu $[0, 1]$, avšak ne každé reálné číslo z tohoto intervalu je přiřazeno některé uspořádané dvojici takovýchto reálných čísel. Jako příklad Dedekind uvedl číslo, jehož desetinný rozvoj je $0, 478310507090a_70a_80\ldots$

V dopise ze dne 23. června 1877 dává Cantor Dedekindovi za pravdu a vyslovuje přesvědčení, že jde o závadu technické povahy. Ukázalo se však, že tato technická závada není odstranitelná nějakým nasnadě jsoucím způsobem. Nicméně Cantor ji odstranil a v dopise Dedekindovi ze dne 25. června 1877 již popsal úplnou korespondenci mezi dotčenými obory. (My ji popisovat nebudeme, neboť onu technickou závadu, kterou Cantor pracně odstraňoval, lze užitím pozdějších výsledků odstranit vskutku jednoduchým způsobem.)

Na konci tohoto dopisu ještě Cantor píše, že pokud se nedopustil chyby, jsou tímto výsledkem zpochybněny všechny výsledky geometrie, které byly založeny na tom, že k určení bodů ležících na n-rozměrném útvaru je zapotřebí n nezávislých souřadnic. Rozdíl v dimensích různých útvarů je třeba hledat jinde než v počtu souřadnic.

Nemoha se dočkat odpovědi, píše Cantor 29. června 1877 Dedekindovi další dopis, v němž kromě jiného stojí:

> *To, co jsem Vám nedávno sdělil, bylo pro mne samotného tak neočekávané a tak nové, že nejsem schopen uklidnit svou mysl, dokud o tom neobdržím, můj ctěný příteli, Vaše mínění. Dokud to neodsouhlasíte, mohu pouze říci: Je le vois, mais je ne le crois pas [vidím to, ale nevěřím tomu].*

Druhého července Dedekind správnost Cantorova výsledku potvrzuje a Cantorovi blahopřeje. Nesouhlasí však s tím, že jsou zpochybněny zmiňované geometrické výsledky. Příslušná tvrzení je nutno doplnit o další předpoklady týkající se souřadnic, například o jejich spojitost. K tomu dodejme, že v roce 1890 dokázal Giuseppe Peano (1858–1932), že ani spojitost souřadnic ještě nestačí.

Literatura

[1] *Vzájemná korespondence George Cantora a Richarda Ddedekinda.*

[2] Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Práh, Praha, 2004.

◆

Ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ nejlepším talentům

Bohumil Vybíral, Univerzita Hradec Králové [1]

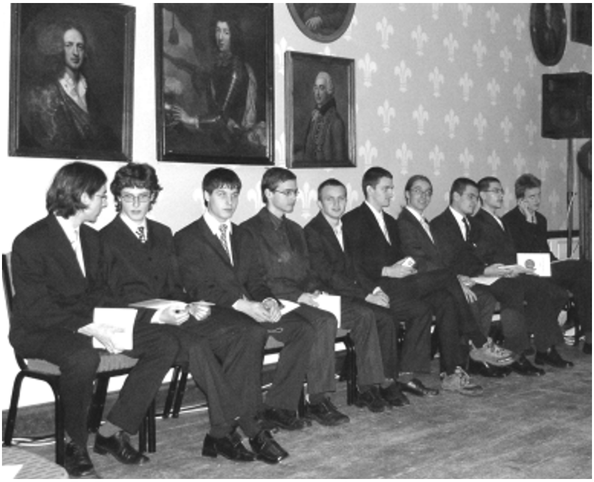
ABSTRAKT. *Stať stručně pojednává o cenách nobelovského typu* PRÆMIUM BOHEMIÆ, *které od roku 2001 každoročně uděluje Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji jednak vynikajícím českým studentům, jednak výrazným osobnostem české vědy. Ceny udělované studentům mají silně motivační charakter a je jimi oceňována jejich úspěšná účast na světových přírodovědných olympiádách v příslušném kalendářním roce. Jde o úspěšné řešitele na těchto soutěžích: mezinárodní fyzikální olympiáda, mezinárodní chemická olympiáda, mezinárodní biologická olympiáda, mezinárodní matematická olympiáda a mezinárodní olympiáda v informatice.*

Podporovat orientaci mladých lidí na vědu je prozíravé a záslužné. Tuto aktivitu od roku 2001 dělá Nadace Bohuslava Jana Horáčka Čes-

---

[1] e-mail: bohumil.vybiral@uhk.cz

kému ráji, která se rozhodla od roku 2001 oceňovat jednak studenty – výrazné talenty, jednak již vyzrálé vědecké osobnosti české vědy, a to v obou skupinách ve formě cen PRÆMIUM BOHEMIÆ. Studentům byly tyto ceny v období let 2001–2006 uděleny již šestkrát. Oceňována je úspěšná účast českých studentů na světových přírodovědných olympiádách v příslušném kalendářním roce. Jde o úspěšné řešitele na těchto světových soutěžích: mezinárodní fyzikální olympiáda, mezinárodní chemická olympiáda, mezinárodní biologická olympiáda, mezinárodní matematická olympiáda a mezinárodní olympiáda v informatice.



Obr. 1: Část studentů oceněných cenami PRÆMIUM BOHEMIÆ v roce 2006

Ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ udělované studentům mají dvě složky: finanční odměnu (ta se v posledních dvou letech podle míry dosaženého úspěchu pohybovala ve výši od 5 do 30 tisíc Kč) a symbolickou ve formě medaile Bohuslava Jana Horáčka, která je podle dosaženého úspěchu na soutěži zlatá, stříbrná nebo bronzová. V uplynulých letech 2001 až 2006 Nadace udělila studentům již 130 cen v celkové výši 2 533 tisíc Kč. Příznačné je, že z těchto 130 cen získali mladí fyzici nebo matematici (včetně oboru programování, který je u nás k matematice přiřazen), celkem 81 cen (tedy 62,3 % z celkového počtu). Úspěchy českých studentů na světových přírodovědných olympiádách jsou pozoruhodné: 130 udělených cen PRÆMIUM BOHEMIÆ studenti získali za úspěchy na světových soutěžích, vyjádřené 11 zlatými, 28 stříbrnými a 62 bronzovými medailemi a 29 čestnými uznáními. Někteří studenti byli pro opakovanou účast na olympiádách v různých letech oceněni i několikrát. Zcela výjimečného úspěchu dosáhla Eva Pluhařová z malého Gymnázia v Ostrově nad Ohří, která na mezinárodních chemických olympiádách v letech 2004 a 2005 získala zlatou medaili, na olympiádě v roce 2003 stříbrnou medaili a jako studentka teprve 1. ročníku gymnázia v roce 2002 již bronzovou medaili.

Akt udílení cen se každoročně koná dne 4. prosince, v den výročí narození zakladatele Nadace B. J. Horáčka, v zámeckém divadle krásného zámku Sychrov nedaleko Turnova.

Motivující pro oceňované studenty je také skutečnost, že akt udílení cen má i významnou druhou část, kdy je oceněna významná česká vědecká osobnost za významný přínos světovému rozvoji vědy. V letech 2002, 2004, 2005 a 2006 byly „velkými“ cenami PRÆMIUM BOHEMIÆ (v celkové výši 2 500 tisíc Kč) oceněny tyto osobnosti české vědy:

- Prof. MUDr. Vratislav Schreiber, DrSc., v oboru biomedicína, za objevné práce v endokrinologii, zejména za průkaz existence mozkového hormonu řídícího sekreci podvěsku mozkového
- Prof. RNDr. Antonín Holý, DrSc., v oboru chemie, za objevné práce v chemii složek nukleových kyselin s významnými aplikacemi v mediciální chemii, zejména za rozhodující podíl na tvorbě antivirových preparátů s celosvětovým rozšířením
- Prof. PhDr. František Šmahel, DrSc., v oboru historie, za mimořádný tvůrčí přínos ve studiu českých dějin v evropském kontextu, zejména pak doby pozdního středověku a husitské epochy
- RNDr. Zdeněk Ceplecha, DrSc., v oboru matematika a fyzika, za vybudování největší a nejdéle fungující sítě pro pozorování bolidů, jež umožnila získání nových poznatků zásadního významu o těchto tělesech

Stoletá zkušenost s udělováním Nobelových cen ukazuje, že objektivně rozhodnout o tom, které osobnosti v daném oboru cenu udělit, není jednoduché. V případě „velkých“ cen PRÆMIUM BOHEMIÆ navrhuje osobnosti k ocenění pro každý obor minimálně tříčlenná odborná komise. Členy těchto komisí jmenuje správní rada Nadace na základě návrhů vrcholových vědeckých, resp. uměleckých institucí (např. České konference rektorů, Akademie věd České republiky, Učené společnosti

České republiky). Správní rada Nadace poté s konečnou platností rozhodne o tom, komu bude v daném kalendářním roce cena udělena.

Rozhodnutí Bohuslava Jana Horáčka podporovat rozvoj české vědy prostřednictvím cen udělovaných jednak studentům – mimořádným talentům – a jednak již vyzrálým osobnostem je zcela mimořádné. Proto bude vhodné poznamenat něco o pozoruhodném životě této osobnosti. *Bohuslav Jan Horáček*, úspěšný podnikatel z Kanárských ostrovů, pochází z Českého ráje. Narodil se 4. prosince 1924 v Radvánovicích u Turnova v chudé venkovské rodině jako nejmladší z osmi dětí. Když mu bylo pět let, zemřel mu otec. Již od útlého dětství musel pomáhat při tvrdé práci na malém hospodářství. Ve svém mládí, které spadalo do složitého období hospodářské krize 30. let a do těžkého období nacistické okupace, zažil chudobu i hlad. Nejprve začal studovat na Gymnáziu v Turnově, později přestoupil na Obchodní akademii v Turnově, na které v roce 1943 maturoval s vyznamenáním. Pokračovat ve studiu na vysoké škole však nemohl, protože české vysoké školy byly za války uzavřeny. To se mu podařilo až po jejím skončení. Za nacistického režimu byl pronásledován a vězněn. Ani poválečné období nebylo pro něj lehké. Po komunistickém převratu v únoru roku 1948 byl jako vysokoškolský student znovu vězněn. Jen s velkými potížemi se mu studia na Vysoké obchodní škole v Praze (ta byla tehdy součástí Českého vysokého učení technického) podařilo dokončit. V té době se v něm také utvrdila láska k demokracii, rovněž odpor k levicovým i pravicovým extrémům.

Obr. 2: Bohuslav Jan Horáček (1924–2002)

Protože byl velmi nespokojen s poměry v naší republice po Únoru 1948, rozhodl se emigrovat. V roce 1949 se mu podařilo uprchnout z Československa nejprve do válkou rozbitého Německa. Později přešel i do jiných západních států. Zde, díky svému obchodnímu zaměření a dobrým znalostem cizích jazyků, úspěšně podnikal; nejprve v bižuterii, klenotnictví a nakonec (v posledních třiceti letech) postupně vybudoval řetězec hotelů ve Španělsku – na Kanárských ostrovech. Koncem devadesátých let hotely prodal. Rozhodl se, že získané prostředky použije ve prospěch rozvoje Českého ráje a na ocenění osobností, které nejvíce přispívají rozvoji vědy a umění v České republice. Bohuslav Jan Horáček nečekaně zemřel dne 18. října 2002 ve Stuttgartu ve věku nedožitých 78 let. Prezident republiky Václav Havel mu 28. října 2002 udělil in memoriam státní vyznamenání – medaili „Za zásluhy“.

Je jen škoda, že v důsledku náhlého úmrtí Bohuslava Jana Horáčka (a dosud nedořešených dědických záležitostí) se oceňování za rozvoj vědních oborů těmito „českými nobelovkami“ zatím nemůže uskutečňovat ve větší míře, jak její zakladatel původně zamýšlel.

Udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ představuje kvalitativní změnu v přístupu společnosti zejména k oceňování mladých přírodovědných talentů za jejich osobní úsilí i za reprezentaci. Ceny pro studenty, avšak i pro vyzrálé vědecké osobnosti, znamenají stimul nejen morální, ale i materiální. Pro nás všechny ostatní znamenají obdiv nad šlechetným činem zakladatele Nadace mecenáše českého národa, filantropa Bohuslava Jana Horáčka, který svým životem ukázal, že pevný postoj, tvrdá práce a překonávání překážek má smysl.

Literatura

[1] Vybíral, B.: Praemium Bohemiae 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006. *Almanachy vydané Nadací B. J. Horáčka Českému ráji* k jednotlivým ročníkům udílení cen, Hrubá Skála 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006.

[2] Vybíral, B.: Ceny Praemium Bohemiae pro studenty. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **47**, 1 (2002), 81–83.

[3] Hužvárová, M.: Praemium Bohemiae 2006. *Akademický bulletin* 01/2007, 26–27.

[4] Vybíral, B.: Ceny Praemium Bohemiae 2006 uděleny. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* **52** 1 (2007), 81–83; *MFI* **16**, 6 (2006/7), 381–383; *Rozhledy MF* **81**, 4 (2006), 55–56.

[5] Praemium Bohemiae – ceny nobelovského typu v České republice. `http://fo.cuni.cz/index.php?file=24&who=student`

[6] Jakubec, P.: Ing. Bohuslav Jan Horáček (1924–2002). `http://pekar.kozakov.cz/cestni/bjhoracek.htm`

[7] Homolová, M.: Novodobí čeští mecenáši. `http://www.opengate.cz/cs/tiskovy_servis/napsali_o_nas/1.shtml`

KRÁTKÉ PŘÍSPĚVKY

Matematicky nadaní žáci a didaktické počítačové hry

Květoslav Bártek, PdF UP, Olomouc[1]

Abstrakt. *V článku jsou úvahy nad možnostmi využití didaktických počítačových her ve vzdělávání matematicky nadaných žáků. Článek rovněž představuje vybrané počítačové hry a simulace využitelné ve výuce matematiky.*

Úvod

Počítačové hry jsou oblíbenou zábavou dětí i dospívající mládeže. Ne o všech však můžeme říci, že mají pozitivní vliv na rozvoj schopností a dovedností (a již vůbec ne matematických) svých uživatelů. V mnoha případech se může jednat o hry obsahově až patologické.

Učiteli, který se zajímá o své žáky, o způsob, jakým tráví svůj volný čas u počítače i mimo něj, i o to, jakým způsobem přemýšlejí a řeší problémy, mohou vhodné počítačové hry poskytnout mnoho nových poznatků z učitelovy odbornosti, o jeho žácích a také podnětů pro práci s nimi.

Didaktické počítačové hry

Didaktickou hrou rozumíme herní činnost probíhající podle předem daných pravidel s jasně vytyčeným cílem, při níž dochází k rozvoji vybraných složek (subsystémů – motivace, schopností) osobnosti či dovedností.

Pro co nejvyšší využití didaktického potenciálu dané herní činnosti je nutné stanovit také didaktické cíle hry. Novák (2005, s. 26) chápe didaktické cíle hry jako „matematické poznatky, které se v průběhu hry budou uplatňovat nebo aplikovat, utvářet nebo upevňovat, resp. matematické schopnosti či vlastnosti osobnosti žáka, které hra rozvíjí“.

Tyto požadavky rovněž splňuje i mnoho klasických stolních her. Proč tedy zařazovat do vzdělávacího procesu hry počítačové?

---

[1] e-mail: bartek93@pdfnw.upol.cz; k.bartek@centrum.cz

Výpočetní technika dovoluje provádět takové činnosti, které by byly za daných podmínek z časového hlediska, technologicky či finančně neproveditelné. V současnosti již existuje celá řada stolních her v elektronické podobě. Je tak možno hrát i v okamžiku, kdy nemáme k dispozici „živého“ protivníka. Výpočetní technika a vhodné programové vybavení též umožňují modelovat jevy, s nimiž se běžně setkáváme, ale studium jejich zákonitostí není z technického hlediska možné. Jedná se o simulátory herních zařízení, losovacích zařízení využívaných např. v televizních soutěžích.

Didaktické počítačové hry využitelné v matematice lze tematicky rozdělit následujícím způsobem:

- *algebraicko-aritmetické* – hry zaměřené převážně na procvičování určitých početních operací (hledání společných násobků a dělitelů, sčítání zlomků, vlastností číselných oborů, řešení algebrogramů, ...)
- *geometrické* – procvičující geometrické pojmy (trojúhelník, čtverec, podobnost a shodnost ...), prostorovou představivost, orientaci v prostoru (Tetris, matematické puzzle) apod.
- *logicko-strategické* – založeny na řešení problémů, vyžadujících vytvoření strategie řešení, její provádění, kontrolu účinnosti této strategie a její případnou modifikaci. Příkladem může být hra Mlýn nebo Žáby (Lucasova hra, Lucasovy kameny v anglické verzi dostupná jako Jump across game)
- *stochastické* – jedná se o hry, na jejichž pozadí lze s žáky zavádět základní kombinatorické, pravděpodobnostní a statistické pojmy (karetní hry, losovací hry, elektronické rulety apod.)
- *kombinované* – vznikají kombinací výše uvedených typů her

Didaktické počítačové hry ve vztahu k žákům nadaným na matematiku

Zabývejme se nyní otázkou využití počítačových her v práci s nadanými žáky. K tomuto účelu je nutné nadaného žáka nejprve charakterizovat.

Vybrané projevy vyjímečných intelektových schopností u mimořádně nadaných dětí dle Laznibatové (2001) jsou:

a) vysoká úroveň logického a abstraktního myšlení
b) vysoká úroveň kombinačních schopností a systémového myšlení
c) vynikající paměť
d) vysoká koncentrace a rozsah pozornosti

Dle Hotové (2006) můžeme tento výčet rozšířit o další specifické projevy. U matematicky nadaných žáků lze pozorovat:

e) nezájem řešit jednoduché úlohy
f) snaha řešit úlohy samostatně
g) snaha samostatně vyhledat další řešení úlohy
h) snaha řešit úlohu zpaměti
i) snaha řešit úlohy samostatně
j) soustředěnost při řešení problému
k) schopnost pracovat s abstraktními symboly
l) výjimečná schopnost orientace v prostoru
m) schopnost analyzovat situaci a rozlišit podstatné od nepodstatného

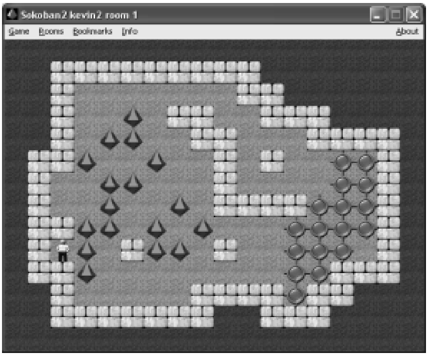
Je zřejmé, že jednou z oblastí kde může počítačová hra najít své uplatnění, je *identifikace či vyhledávání nadaných žáků.*

Tyto procesy probíhají nejčastěji v domácím a školním prostředí, tedy s rodiči a blízkými příbuznými nebo pedagogickými pracovníky. Na základě jejich pozorování pak může být matematické nadání dítěte potvrzeno odborným psychologickým vyšetřením. Při vyhledávání nadaného žáka učitelem je vhodné držet se jednoduchého, ale ne vždy dodržovaného pravidla:

„Chceme-li rozpoznat nadané dítě, musíme je nechat pracovat. Chceme-li rozpoznat intelektově nadané dítě, musíme je nechat přemýšlet (Ostatníková, Laznibatová, Jurášková, 2003, s. 45).“ Jaké možnosti k identifikaci nadaných žáků poskytují učiteli počítačové hry? Počítačová hra se stává pro žáky přirozenou formou zadávání problémů, které vyžadují použití vyšších úrovní myšlení. Žáci řeší problém vlastním nenaučeným způsobem, pomocí vlastního vytvořeného algoritmu. Vyššími úrovněmi myšlení nazýváme složené myšlenkové postupy, mezi něž patří např. analýza, syntéza, porovnání, hodnocení, posuzování nebo logické myšlení (Ostatníková, Laznibatová, Jurášková, 2003).

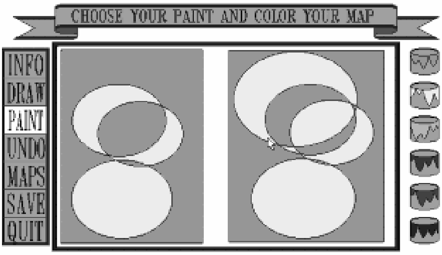
Domnívám se, že pro identifikaci nadaného žáka jsou vhodné hry logicko-strategického charakteru. Jako příklad uvádím hru SOKOBAN, známou také jako Problém skladníka nebo Skladník (obr.1).

Úkolem je přestěhovat v daném herním plánu (skladišti) všechny předměty znázorněné jako diamanty na místa označená kruhovým polem. Předměty lze však pouze tlačit, nelze je odtáhnout. V případě, že se předmět dostane k bariéře tak, že jej nelze odtlačit, je nutno daný problém začít řešit znovu od začátku. Každé skladiště má několik úrovní obtížnosti, problém je proto vhodný pro široké věkové i „schopnostní“ rozpětí žáků.



Obr. 1

Některé verze této hry jsou vybaveny i počítadlem tahů a stopkami. Při použití takto vybavené verze lze pracovní výsledky ještě lépe a pohodlněji sledovat. Počítadlo tahů i stopky mohou značně zvyšovat vnitřní motivaci žáka, ten se pak snaží daný problém vyřešit za použití co nejmenšího počtu tahů nebo v co nejkratším čase.



Obr. 2

Další vhodnou hrou je 4COLORS (obr. 2 je původní verze určená pro operační systém DOS a obr. 3 pochází z přepracované verze pro OS Windows, tato verze však neobsahuje některé prvky obsažené ve verzi původní). Hlavní myšlenka této hry, jak již název napovídá, vychází z formulace, dnes již za pomoci počítačů vyřešeného, problému čtyř barev. Jedná se o jakési matematické omalovánky. Program obsahuje databázi konkrétních i abstraktních map, které mohou uživatelé libovolně vybarvovat. Navíc obsahuje i editor map, v němž lze za použití předem definovaných základních objektů (přímka, čtverec, kružnice, …) či volným kreslením vytvářet vlastní mapy a následně je vybarvovat.

Obr. 3

Problém můžeme s dětmi formulovat následujícími způsoby: *Použijte co nejméně barev k obarvení mapy s podmínkou, že dvě sousední políčka mající více než jeden společný bod nebudou obarveny stejnou barvou. Použijte k vybarvení dané mapy nejvýše čtyři barvy.*

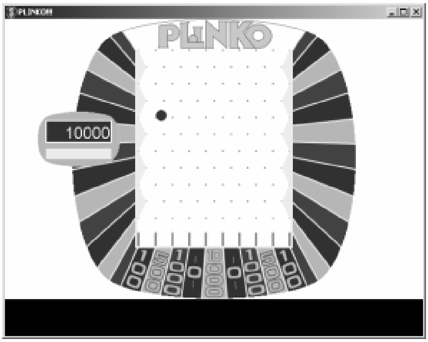
Po hlubším pochopení problému lze formulovat další otázky a úlohy: *Proč k obarvení některé mapy postačují nejvýše 3, resp. 2 barvy? Dokázali byste takovou mapu vytvořit?*

V další části textu se zabývejme otázkou, zda využívání didaktických počítačových her má potenciál obohatit či zpestřit nabídku *metod a forem práce* s matematicky nadanými žáky. Klement (in Laznibatová, 2001) jmenuje mezi jinými formami podpory a rozvíjení nadání, využívané v rakouském školském systému,

1. *učení objevováním* – tyto postupy vnímá jako nosné v každém vyučovacím procesu ve všech třídách,
2. *učení hrou* – které nazývá motorem učení, hru tak považuje za silný motivační nástroj jak vnitřní, tak vnější motivace.

Počítačové hry mohou obě formy propojovat. Jako příklad uvádím hru Plinko! Jedná se o elektronickou podobu televizní soutěže známé v USA pod názvem The Price is Right. Hra je zdarma k dispozici na `http://webrookie.multiservers.com/plinko/plinko.htm`.

Základní myšlenka konstrukce tohoto herního zařízení (obr. 4) vychází z Galtonovy desky. Na Galtonově desce jsou rozmístěny kolíky v trojúhelníkovém tvaru, kdežto na tomto herním zařízení jsou kolíky rozmístěny v obdélníkovém tvaru. Hráči vhazují kuličku do horní části tohoto zařízení, ta jím prochází, aby nakonec skončila v jednom z ohodnocených sektorů.



Obr. 4

Předložíme-li tuto hru-simulaci žákům, otevírá se zde prostor pro jejich experimentování, objevování, formulování vlastních hypotéz, jejich následnou verifikaci (ať již pomocí sérií experimentů či vhodného matematického nástroje) a také k rozvoji argumentace. Základním problémem může být nalezení vhodné strategie k maximalizaci výhry v daném počtu pokusů.

Závěr

Od ledna 2007 je pracovníky a studenty DSP katedry matematiky PdF UP v Olomouci v rámci řešení projektu FRVŠ 1347/2007 „Didaktické počítačové hry ve výuce matematiky a jejich vliv na rozvoj osobnosti žáka“ shromažďován a vytvářen soubor počítačových her využitelných ve výuce matematiky či v matematických kroužcích.

Literatura

[1] Hotová, E.: Žák s nadáním pro matematiku a jeho charakteristika. In: *Matematika 2. Matematika jako prostředí pro rozvoj osobnosti žáka primární školy.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2006, s. 113–116.

[2] Laznibatová, J.: *Nadané dieťa – jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie.* Iris, Bratislava, 2001.

[3] Novák, B.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 2.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2005.

[4] Ostatníková, D., Laznibatová, J., Jurášková, J.: *Spoznajte nadané dieťa.* Asklepios, Bratislava, 2003.

Bludiště na krychli
aneb jak rozvíjet prostorovou představivost

Jana Cachová, PF UHK Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Najít cestu bludištěm patří mezi oblíbenou zábavu dětí i dospělých. Hledání cest může také rozvíjet prostorovou orientaci a představivost. I děti, které jsou nadané na matematiku, potřebují dostávat podnětné úlohy, jimiž mohou své prostorové schopnosti zdokonalovat. V závěru příspěvku najdete několik námětů pro práci s žáky 1. a 2. stupně ZŠ, vycházejících z hledání cest na povrchu i uvnitř krychle.*

Bludiště a labyrinty (v rovině i v prostoru)

Najít cestu bludištěm patří mezi oblíbenou zábavu dětí i dospělých (připomeňme například společné rodinné výlety do bludiště na pražském Petříně). Hledání cest v bludišti ale může také podstatně přispět k rozvíjení prostorové orientace a představivosti. Tu je zapotřebí cvičit a podporovat nejen u dětí, které s ní mají problémy, ale rovněž u dětí, jejichž prostorové schopnosti jsou na velmi dobré úrovni. I jim je zapotřebí poskytnout dostatek podnětných úloh, kterými mohou své schopnosti dále trénovat a zdokonalovat. V tomto příspěvku chci připomenout několik námětů, rozvíjejících prostorovou představivost dítěte, založených právě na hledání cest v bludišti.

Obr. 1

Děti se od útlého věku setkávají formou her s různými typy bludiště. Bludiště (respektive labyrint) budeme v tomto příspěvku chápat v co nejširším významu tohoto slova, sice jako prostředí, ve kterém hledáme cestu od určitého objektu k jinému, popř. zjišťujeme, ke kterému objektu se můžeme danou cestou dobrat. Bludiště může být rovinné i prostorové. Při hře na hřišti děti procházejí nebo prolézají bludištěm (obr. 1), pastelkou nebo prstíkem si ukazují správnou cestu v bludišti v dětském obrázkovém časopise, rozplétají navzájem propletené linie

---

[1] e-mail: jana.cachova@uhk.cz

v pracovních sešitech a knížkách pro předškoláky. Starší děti mohou luštit zajímavá bludiště například v sešitech P. Merrella (2003), kde naleznou nejen rovinná bludiště, ale i bludiště, která jsou rovinnými obrazy prostorových labyrintů, nebo při hře – manipulaci s různými hračkami a hlavolamy (obr. 2).

Obr. 2

Jak dítě poznává prostor

S rozvíjením prostorové představivosti dítěte a jeho orientace v prostoru úzce souvisí otázka, jak dítě poznává prostor. Touto otázkou se z pohledu didaktiky geometrie zabývá například F. Kuřina (2007). Podle něj jsou důležitá čtyři hlediska, a sice:

- dělení prostoru (postýlka, pokoj, dům, zahrada, ..., list papíru, ...),
- vyplňování prostoru (stavby z kostek, skládání předmětů do krabice, dláždění, ...),
- pohyb v prostoru (pohyb ruky, míče, osoby, ..., kreslení, ...),
- dimenze prostoru (botička – stopa, člověk – stín, geometrický útvar jako obraz, text jako jednodimenzionální transformace ...).

Dětští psychologové rozlišují tři stádia postupného poznávání trojrozměrného prostoru:

- nejdříve dítě zvládá operace ve směru *vertikálním*,
- dále *předozadním,*
- na závěr ve směru *horizontálním* (pravolevém).

Přitom pojmy *nahoře* a *dole* jsou jednoznačné, kdežto pojmy *vpředu – vzadu*, *vpravo – vlevo* mění svůj význam vzhledem k poloze těla.

Orientace v prostoru a prostorová představivost

Bludiště, podobně jako například puzzle, patří mezi hry, které bezpochyby napomáhají rozvíjet orientaci v prostoru. Děti mají vzhledem k orientaci v prostoru a vnímání prostoru rozdílné vrozené dispozice.

I u dvou sourozenců stejného pohlaví, narozených blízko po sobě (věkový rozdíl 17 měsíců), společně vychovávaných ve stejných podmínkách, můžeme vypozorovat odlišnost v jejich prostorové orientaci.

- Starší z chlapců – odmala nevidí „kolem sebe“, nenajde to, co hledá; na druhou stranu ale nemá problémy najít cestu venku v terénu nebo ve městě; nebaví jej skládat puzzle.
- Mladší hoch – odmala hned vše kolem sebe najde, rád skládá puzzle a také mimo jiné hraje dobře šachy (i zde je podle mého názoru zapotřebí se „zorientovat“).

Podle neuropsychologie lidského mozku (např. H. Gardner, 1999) je orientace v prostoru provázána především s pravou mozkovou hemisférou. To tedy znamená, že lépe by se měli orientovat v prostoru většinou leváci. Bohužel v naší ilustraci je tomu právě naopak – starší z obou bratrů je levák, mladší pravák. Nechci tím v žádném případě popírat poznatky neuropsychologie, pouze bych chtěla upozornit na to, že otázka orientace dítěte v prostoru není zdaleka jednoduchá a že se jedná o složitý komplex dílčích schopností a dovedností.

Stejně tak je možné hledat rozdíly v prostorové orientaci podle pohlaví. F. Vyskočil (2006) uvádí, že *se muži lépe než „na blízko“ orientují v prostoru „na dálku“, jelikož mají horší periferní vidění než ženy.* V naší ilustraci jsou obě děti chlapci, přesto se mladší z nich dobře orientuje jak „na blízko“, tak „na dálku“. Opět tím nechci žádnou teorii vyvracet, ale jen znovu upozornit na skutečnost, že na orientaci v prostoru je třeba nahlížet jako na pojem, který je složitým komplexem jednotlivých dílčích hledisek.

Pojem orientace v prostoru tak můžeme dále členit třeba podle výše uvedených hledisek F. Kuřiny:

- pohyb v prostoru – pohyb po městě, v lese,
- vyplňování prostoru – například skládání puzzle,
- dělení prostoru – hledání předmětů „na blízko“,
- dimenze prostoru – hledání sítě k danému tělesu.

Podle H. Gardnera (1999) je možné na lidskou inteligenci nahlížet jako na soubor šesti základních schopností, které spolu navzájem spolupracují, sice *jazykovou, hudební, prostorovou, logicko-matematickou, tělesně-pohybovou, personální (iter- a intra-), přičemž je logicko-matematická schopnost závislá především na práci levé hemisféry a prostorová schopnost na činnostech pravé hemisféry.*

Z výše uvedeného dělení lidské inteligence tedy můžeme usuzovat, že žáci talentovaní na matematiku mají buď silně rozvinuté schopnosti logicko-matematické nebo prostorové. Tyto inteligence spolu nemusí nutně souviset, ale mohou. Podle některých výzkumů určitý rozvoj jedné hemisféry příznivě ovlivňuje druhou – tak je tomu například u relaxačního malování, naopak stálé pasivní sledování obrazových jevů z televize způsobí útlum i levé mozkové hemisféry.

Prostorovou představivost H. Gardner vymezuje jako „…schopnosti, které zajišťují přesné vnímání vizuálního světa, umožňují transformovat a modifikovat původní vjemy a vytvářet z vlastní vizuální zkušenosti myšlenkové představy, i když už žádné vnější podněty nepůsobí.“

J. Perný (2004) rozlišuje tři druhy představivosti, a to *matematickou, geometrickou a prostorovou.* Podobně i D. Jirotková (1990) rozděluje představivost na geometrickou a prostorovou, přičemž prostorová představivost podle ní umožňuje si představit:

- dříve viděné – vnímané objekty v trojrozměrném prostoru (vlastnosti, polohu a prostorové vztahy),
- dříve nebo v daném momentě viděné – vnímané objekty v jiné vzájemné poloze, než v jaké byly, jsou skutečně vnímány,
- objekt v prostoru na základě jeho rovinného obrazu,
- neexistující reálný objekt v trojrozměrném prostoru na základě jeho slovního popisu.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy
Očekávané výstupy – 2. období
žák
▷ řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky
Učivo
- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost

Tab. 1

Připomeňme ještě, jak pamatuje na rozvíjení prostorové představivosti Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. V *RVPZV*

– *Matematika a její aplikace – 1. stupeň* je prostorová představivost zařazena k nestandardním aplikačním úlohám a problémům (tab. 1), což příliš neodpovídá tomu, jak je důležitá v běžném životě dítěte i dospělého (např. při parkování, hledání cesty v neznámém městě atd.).

Bohužel situace není lepší ani u *RVPZV – Matematika a její aplikace – 2. stupeň* (tab. 2).

Nestandardní aplikační úlohy a problémy
Očekávané výstupy
žák

- ▷ užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
- ▷ řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Tab. 2

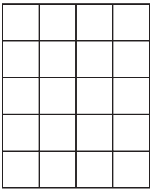
Několik námětů k rozvíjení prostorové představivosti

Všechny činnosti, které zde uvádím a které mají posloužit jako námět k rozvíjení prostorové představivosti žáka, jsou zároveň vhodnými podněty z hlediska konstruktivistických přístupů k vyučování (podrobně Stehlíková, Cachová, 2006). Většinou dokáží žáka zaujmout a podnítit k matematickým činnostem. Žáci přistupují k jejich řešení aktivně, samostatně nebo ve skupině o nich přemýšlejí a poté vzájemně diskutují. Nebojí se hledat různá řešení; pokud se dopustí chyby, je pro ně výzvou k dalšímu hledání. Rozhodně tyto úlohy nevedou žáky k reprodukci.

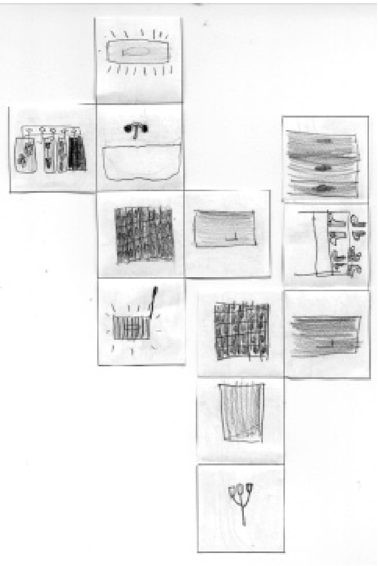
Obr. 3

Silnice na krychli

Námět vychází z činností J. Michnové s neúplnými sítěmi krychle (podrobně popisuje J. Perný, 2004 a 2006). Podobně jako J. Michnová nechává dítě zakreslovat pohled do pokoje v neúplné síti krychle, můžeme žáky nechat zakreslovat pohled do místnosti do jedné ze sítí krychle. Těmto činnostem může předcházet hledání všech sítí krychle pomocí dětské stavebnice (obr. 3). Děti si vyberou síť, která je nevíce zaujala a přenesou ji do připravené čtvercové sítě (obr. 4). Zakreslí pohled do smyšlené místnosti a pak síť vystřihnou (obr. 5). Aby mohly opravit případné chyby, otočí síť a zakreslují smyčku silnic s křižovatkami a kruhovými oblouky (obr. 6). Tyto činnosti jsou určeny pro žáky 1. stupně a nižších tříd 2. stupně, je možné je zahrnout do projektu *Krychle*.



Obr. 4



Obr. 5

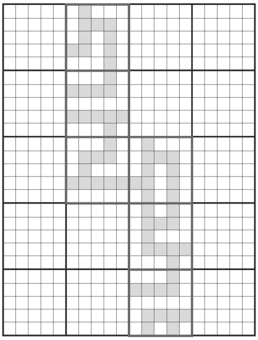
Obr. 6

Labyrint na krychli

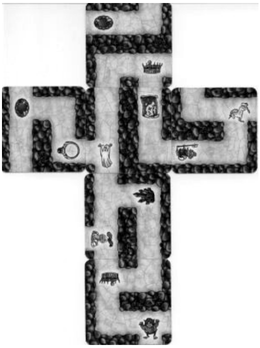
K úlohám je možné využít karty z karetní hry Mini Labyrinth (2001), nebo si vytvořit vlastní soubor karet s dalšími kombinacemi cest (cesty je možné zakreslovat do připravené čtvercové sítě, obr. 7).

Úlohy k labyrintu na krychli:

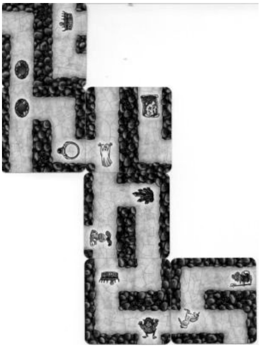
- Sestavit z karet Labyrintu síť krychle (obr. 8).
- Pomocí těchto karet sestavit další sítě krychle (obr. 9).
- Najít v síti krychle jednu kartu, která je chybně umístěná, a opravit ji.
- Najít v síti krychle jednu kartu, která do ní nepatří. Nakreslit namísto ní jinou kartu, která bude do sítě patřit.
- Nakreslit vlastních šest karet a sestavit z nich síť krychle (obr. 7).
- Zkusit to i pro osmistěn a čtyřstěn (v trojúhelníkové síti).



Obr. 7



Obr. 8



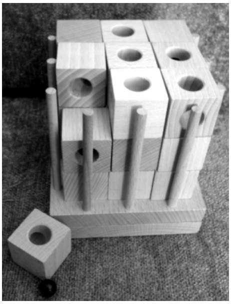
Obr. 9

Dřevěná krychle s kuličkou

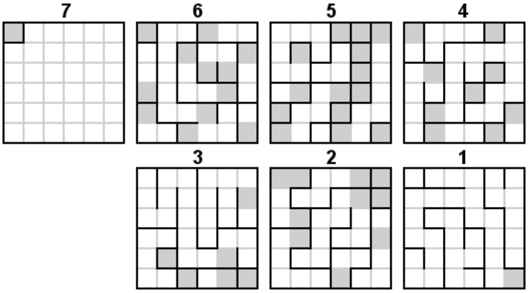
Další činnosti vycházejí ze hry s hlavolamem na obr. 10. Hlavolam se skládá z krychlových dílků s „tunely“. Cílem hry je sestavit cestu, aby kulička prošla všemi díly hlavolamu. Děti mohou ale rovněž sestavovat menší „průchozí“ tělesa. Pro využití ve vyučování matematice je možné za podobným účelem použít plné dřevěné krychle, na které nakreslíme značky, které budou představovat průchod krychlí. Děti sestavují různé cesty a zakreslují je pomocí šipkového pravidla, které používá J. Michnová (2005).

Patrové bludiště

Poslední námět vychází z tzv. prostorového bludiště, jehož princip popisuje M. Hejný (1990), popř. je možné podobné bludiště nalézt na `http://hlavolamy.zde.cz` (odtud je převzat i obr. 11). Tento typ bludiště je tvořen jednotlivými patry, která spojují žebříky mezi nimi (šedě vyplněná políčka). Děti si taková bludiště mohou konstruovat samy. Doplňující úloha pro šikovné žáky by mohla být: Nakresli svislé řezy bludištěm.



Obr. 10



Obr. 11

Literatura

[1] Gardner, H.: *Dimenze myšlení.* Portál, Praha, 1999.

[2] Hejný, M.: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava, 1990.

[3] Jirotková, D.: Rozvoj prostorové představivosti žáků. *Komenský*, č. 5, Brno, 1990.

[4] Kobbert, M.: *Mini Labyrinth.* Ravensburger Spieleverlag, Ravensburg, 2001.

[5] Kuřina, F.: *Matematika pro rodiče.* Rukopis, 2007.

[6] Merrell, P.: *Bludiště čtvrtý rozměr (gymnastika pro tvůj mozek).* Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.

[7] Michnová, J.: Krychlová tělesa a hlavolamy. In: *Dva dny s didaktikou matematiky*, PedF UK, Praha, 2005.

[8] Perný, J.: Mentální manipulace se sítí tělesa. In: *10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Vydavatelský servis, Plzeň, 2006.

[9] Perný, J.: *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti.* Vysokoškolský podnik, s.r.o., Liberec, 2004.

[10] Stehlíková, N., Cachová, J.: Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In: *Studijní materiály k projektu Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP*, JČMF, Praha, 2006.

[11] Vyskočil, F.: Rozdíly mezi mužem a ženou. *Vesmír* **85**, 7 (2006), 429.

Algoritmy ve výuce na střední škole [1]

Hashim Habiballa, PřF OU Ostrava [2]
Antonín Jančařík, PedF UK Praha [3]

ABSTRAKT. *Příspěvek ukazuje spojení teoretické (matematické) informatiky s algoritmizací a praxí. Zvolená úloha jasně ukazuje význam teoretických disciplín, konkrétně teorie formálních jazyků a automatů, pro schopnost středoškolských studentů naučit se návrhu efektivních algoritmů. Tato úloha zahrnuje pro informační technologie a programování nezbytnou syntaktickou analýzu a překlad. Vybraný příklad jazyka aritmetických výrazů je navíc vhodný pro výuku v rámci matematiky, neboť jde o všeobecně používaný matematický aparát.*

Úvod

V dnešní době se ve výuce informatiky na střední škole bohužel často projevuje trend klesající odborné úrovně. Jde zejména o výuku orientovanou na aplikační programy, bez důrazu na principy informatiky, zahrnující především algoritmy a teoretické disciplíny zkoumající související pojmy, jako je teorie formálních jazyků a automatů, formální logika nebo vyčíslitelnost a složitost. Tento článek navazuje na některé již uveřejněné materiály, viz např. [8], [9], [10].

Úloha, kterou přinášíme, má hodně společného s typickou úlohou v informatické praxi, a tou je překlad, resp. interpretace, nějakého zdrojového kódu (programu) do jiného jazyka (včetně optimalizací vzniklého kódu). S tímto se setkáváme prakticky každodenně (otázkou je, zda si to uvědomujeme). Samozřejmě nejprve informatika asi napadne úloha typu – programuji řešení zadaného úkolu v nějakém programovacím jazyce (např. Pascalu) a pak použiji překladač, který mi vyrobí kód v nějakém počítačově použitelném formátu (třeba .exe soubor pro počítač typu PC pod platformou MS-DOS). Nemusí však jít jen o tento „programátorský" případ. Aniž si to mnohdy uvědomujeme, pokud prohlížíme libovolnou webovou stránku, tak náš webový prohlížeč získává z daného URL kód v jazyce HTML. Ten by samozřejmě pro člověka asi nebyl na čtení to nejlepší. Proto prohlížeč musí PŘELOŽIT a interpretovat tento kód tak,

---

[1] Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

[2] e-mail: habiballa@volny.cz, www: http://www.volny.cz/habiballa/

[3] e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

aby byl pro člověka příjemný. Jde o zobrazení různých velikostí písma, tabulek, obrázků, pozadí stránek atd. Jakkoliv to vypadá naprosto přirozeně, při zkoumání principů a metod programů pro tuto činnost zjistíme, že to není až tak triviální činnost a souvisí neoddělitelně právě s teorií formálních jazyků. I zdánlivě jednoduchá součást tohoto procesu je bez dobré znalosti pojmů a postupů, které přináší teorie formálních jazyků a automatů, takřka neřešitelný úkol.

Touto jednoduchou úlohou, se kterou se nyní důkladně seznámíme a ukážeme si její obecně použitelné řešení, je kontrola, překlad a vyhodnocení aritmetického výrazu. Úlohu si samozřejmě pro naše účely výkladu algoritmů zjednodušíme oproti klasickým programovacím jazykům, kde můžeme používat reálná čísla v různých tvarech nebo číselné proměnné. To ale nijak nesnižuje obecnost principů, které se zde naučíme. Aritmetickým výrazem budeme myslet řetězce s číslicemi 0–9, operace sčítání a násobení, $+, *$, lze používat i pomocné symboly závorek $(,)$. Na místě operandu může stát struktura obecně stejného typu, jako jsme právě definovali (výraz lze vnořit do výrazu). Příkladem budiž velmi jednoduchý výraz $5 + 3 * 2$, jehož hodnotu lehce spočítáme. Uvědomíme si prioritu operátorů a nejprve spolu vynásobíme $3 * 2 = 6$ a tento mezivýsledek pak použijeme při operaci s nejnižší prioritou $5 + 6 = 11$. Tato jednoduchost je však jen zdáním, uvědomme si, že počítač pracuje s datovými strukturami bez „lidského vidění“. To zahrnuje velmi rychlé vyhodnocení hierarchie formule. Navíc tento postup předpokládá, že ve výrazu není žádná syntaktická chyba (např. chybějící párová závorka). Takovou chybu by musel člověk rovněž odhalit.

Poznámka. Zobecnění na složitější operandy, jako jsou reálná čísla, není principiálně problém – stačí během analýzy nevytvářet jen znaky jako výstup, ale struktury obsahující přímo reálné číslo. Stejně tak lze navázat i jinými operacemi.

Takovéto výrazy jsou nedílnou součástí každého vyššího procedurálního programovacího jazyka (řešení všech problémů obvykle stavíme na správně formulovaných podmínkách a aritmetických výpočtech). Samozřejmě úloha má ještě důležitou část, která je již za hranicí tohoto článku – jsou jím různé optimalizace kódu; lze např. u logických podmínek vyhodnotit, zda formule není platná či nesplnitelná, případně ji značně zmenšit. Ale jak tuto činnost překladače – programy – realizují? Uvažujeme-li jako lidé s inteligencí a schopností číst text nejen lineárně (po znacích), pak v našem mozku probíhají pochody přímo na počítači realizovatelné velmi těžko. Na našem výrazu si ihned uvědomíme, v jakém pořadí probíhá vyhodnocení jednotlivých operací. Nejvyšší prioritu mají číslice a závorky, pak postupujeme ve vyhodnocování podvýrazů podle struktury výrazu a priorit operátorů (nejdříve násobení a pak sčítání). Bohužel dnešní počítače a klasické procedurální programovací jazyky takovou inteligencí nedisponují a uvědomme si například, že výraz musíme zadat jako nějaký řetězec znaků, který pak můžeme číst po znacích. Je také dobré si uvědomit, že aby program (překladač) měl pro praktickou práci smysl, musí být efektivní – mít dobrou časovou složitost, viz [9]. Určitě bychom nechtěli mít překladač, který řetězec prochází opakovaně a stále se vrací k tomu, co už jednou přečetl. V obecném případě může být program o desítkách nebo stovkách tisíc znaků, a tudíž opakované procházení v závislosti na jeho velikosti je velmi neefektivní.

Sami si představte, že program v Pascalu vám překladač kompiluje hodiny, dny nebo měsíce, aby nakonec oznámil, že v něm máte na konci syntaktickou chybu. Takový přístup by vás asi napadl, budete-li se snažit vyhodnocovat výraz nějakým triviálním algoritmem. Tedy postupně vyhodnocovat podvýrazy a stále znovu procházet řetězec. To je však z hlediska optimality zcela nepřijatelné – my se přece snažíme ušetřit každou operaci, a tedy opakované procházení je zcela proti tomuto cíli. Budeme tedy muset zřejmě zapojit nějaké „know-how“ a v našem případě to budou právě prostředky a algoritmy, které nám dává teorie formálních jazyků a překladačů.

1. Definice jazyka pomocí gramatiky – Backusovy–Naurovy formy

Aby byl schopen počítač pracovat s aritmetickým výrazem (resp. s jakýmkoliv jiným syntaktickým elementem v libovolném zdrojovém kódu), musíme nějakým vhodným formálním prostředkem zapsat definici tohoto výrazu. Tyto výrazy vlastně tvoří specifický jazyk, a tedy teoretická informatika nám dává prostředek ve formálních gramatikách.

Pro definice struktur programovacích jazyků se velmi dobře hodí takzvaná Backusova–Naurova forma. Je podobná bezkontextovým gramatikám (má terminální symboly, neterminální symboly, pravidla pro přepis neterminálů). Navíc zjednodušuje zápis obvyklých technik, jako je opakování nějakého řetězce (např. přičítání podvýrazů v aritmetických výrazech se může dělat opakovaně). U bezkontextových gramatik bychom toto museli řešit krkolomně pomocí jakési „rekurze“. Bezkontextová gramatika (BKG) je jedním z možných způsobů zápisu syntaxe jazyků. Syntaxí zde rozumíme jejich jazykovou strukturu. Umožňuje totiž vyjádřit většinu technik, které například u programovacích jazyků používáme. Jde o alternativu několika možností, opakování stejného jazykového výrazu a hlavně vnořování celých rozvětvených struktur mezi sebou. Poslední zmiňovaná technika je právě onou technikou, kterou neumíme vyjádřit pomocí jazyků regulárních, ale teprve pomocí bezkontextových jazyků. Zkusme si představit velmi omezenou část nějakého programovacího jazyka – například strukturu aritmetického výrazu. Principiálně je většina jiných struktur velmi podobných (např. sekvence příkazů je analogická opakovanému sčítání podvýrazů!).

Příklad. Sestrojme BKG pro jazyk složený z aritmetických výrazů s operandem x, operacemi $+$, $*$ a umožňující vnořovat další podvýrazy stejného typu pomocí symbolů závorek $(,)$. Kupříkladu se může jednat o výraz $x * (x + x + x)$.

Gramatiku sestrojíme hierarchicky – tedy aby byla rozlišena priorita operátorů – a využijeme „rekurzivní“ vlastnosti přepisu neterminálu, abychom docílili možnosti generovat opakovaně sčítání a násobení (Pozn.: Horní index u symbolu → určuje pomocné číslo pravidla.):

$G = (\{S, A, B\}, \{x, *, +, (,)\}, S, P)$

$P : S \rightarrow^1 A + S,\ S \rightarrow^2 A$ (opakovaný přepis na S nám umožní generovat libovolně mnoho sčítání struktury A)

$A \rightarrow^3 B * A,\ A \rightarrow^4 B$ (opakovaný přepis na A nám umožní generovat libovolně mnoho násobení struktury B)

$B \rightarrow^5 (S),\ B \rightarrow^6 x$ (rekurzivním přepisem na S můžeme vnořit libovolně mnoho podvýrazů zcela stejné struktury jako výraz sám do závorek anebo ukončit generování operandem x)

V této gramatice pak lze snadno generovat například výše uvedený výraz $x * (x + x + x)$:

$S \rightarrow^2 A \rightarrow^3 B * A \rightarrow^6 x * A \rightarrow^4 x * B \rightarrow^5 x * (S) \rightarrow^1 x * (A + S) \rightarrow^4 x * (B + S) \rightarrow^6 x * (x + S) \rightarrow^1 x * (x + A + S) \rightarrow^4 x * (x + B + S) \rightarrow^6 x * (x + x + S) \rightarrow^2 x * (x + x + A) \rightarrow^4 x * (x + x + B) \rightarrow^6 x * (x + x + x)$

Zmiňovaným a hlavně v praxi ještě více využívaným způsobem zápisu syntaxe jazyka je takzvaná Backusova–Naurova forma (BNF). Jde o zápis podobný bezkontextové gramatice, ale přitom bližší spíše programátorům, resp. praxi.

BNF obsahuje podobně jako BKG neterminály, které se uvádějí do úhlových závorek a přepisují skrze symbol := na řetězce terminálních a neterminálních symbolů. Jde tedy o pravidla tvaru:

$$\langle X \rangle ::= \alpha_1 | \ldots | \alpha_n$$

Pro přehlednější zápis je však ještě lepší modifikace BNF zvaná EBNF (Extended BNF) – rozšířená BNF, která zjednodušuje zápis opakovaně používaných, příp. podmíněně vyskytujících se výrazů. Umožňuje následující zápisy:

$\{\alpha\}$ – znamená, že výraz se vyskytuje v libovolném počtu (ekvivalent operace iterace)

${\{\alpha\}_n}^m$ – znamená, že výraz se vyskytuje v počtu nejméně n a nejvýše m (ekvivalent operace mocniny od n do m)

$[\alpha]$ – znamená, že výraz se může a nemusí na daném místě vyskytnout, je to ekvivalentní zápisu ${\{\alpha\}_0}^1$

Příklad. Gramatika z předchozího příkladu by v BNF mohla být zapsána například takto:

$\langle aritmetickyvyraz+\rangle ::= \langle aritmetickyvyraz*\rangle \{+\langle aritmetickyvyraz*\rangle\}$
$\langle aritmetickyvyraz*\rangle ::= \langle operand/podvyraz\rangle \{*\langle operand/podvyraz\rangle\}$
$\langle operand/podvyraz\rangle ::= (\langle aritmetickyvyraz+\rangle)|x$

BNF umožňuje přehledný zápis a navíc i jednoduchý přechod k některým typům SA. Pomocí BNF je zapsána například celá gramatika jazyka Pascal v učebnici [13]. Příkladem může být deklarace podmíněného příkazu:

$\langle podminenyprikaz\rangle ::= if \langle booleovskyvyraz\rangle then \langle prikaz\rangle [else \langle prikaz\rangle]$

2. Metoda rekurzivního sestupu pro syntaktickou analýzu

Prvním důležitým úkolem při překladu z nějakého zdrojového jazyka do cílového je především syntaktická analýza – tedy kontrola, zda je text ve zdrojovém jazyce správně zapsán. V nejjednodušším případě pouhé kontroly typu ANO/NE (program je správně/není správně syntakticky zapsán) se jedná o takzvanou syntaktickou analýzu (dále budeme zkracovat SA). V anglicky psaných zdrojích se setkáte spíše s jednoslovným označením „parsing“. O daném postupu, algoritmu, jak tuto SA provést, pak hovoříme jako o syntaktickém analyzátoru (anglicky „parser“).

Velice oblíbenou, jednoduchou a přehlednou metodou vedoucí přímo k hotovému a dobře čitelnému analyzátoru v libovolném strukturovaném programovacím jazyce je metoda rekurzivního sestupu (Recursive Descent Parsing), viz [2]. Metoda je založena na principu analýzy „shora dolů“, tedy se snažíme hledat odvození slova podle dané gramatiky od počátečního neterminálu v hierarchii směrem „dolů“.

Metoda rekurzivního sestupu spočívá v konstrukci procedur strukturovaného programovacího jazyka přesně dle Backusovy–Naurovy formy (BNF), kde je každému neterminálu přiřazena jedna procedura a je volána procedura GetChar (načítající vždy následující symbol slova) před každým terminálem. Výskyt neterminálu v pravidle je v proceduře nahrazen rekurzivně voláním příslušné procedury. Iterace a podmínka v Backus-Naurově formě je nahrazena jednoduše jejich programátorskými protějšky. Vyžaduje se, aby jazyk byl definován tzv. LL(k) gramatikou (detailní podmínky v [6], pro účely tohoto článku budou takovéto gramatiky vytvořeny). Z hlediska časové složitosti je použitelná pro jednoduché gramatiky z praxe a zejména je její výhodou vysoká čitelnost kódu ve vztahu k výchozí gramatice. Navíc existuje modifikace, tzv. „packrat parser“, která pro omezenou třídu takzvaných „parsing expression grammars“ pracuje v *lineárním čase*. Lineární časová složitost je oproti naivním metodám analýzy, které jsou typicky kvadratické složitosti, o třídu lepší. Také je tento postup flexibilní, protože umožňuje kdykoliv změnit a přidat syntaktický element bez nutnosti měnit celý kód, ale pouze dotčenou část gramatiky (například změna struktury číslo z celého čísla na reálné znamená pouze změnu procedury reprezentující tento element).

Podívejme se nyní na příklad gramatiky pro generování aritmetických výrazů se sčítáním, násobením, číslicemi a vnořenými závorkovanými strukturami. Vyhodnocování takového výrazu strojově je velmi jednoduché pomocí tzv. postfixové notace (reverzní polská notace), kde se operátory vždy vyskytují až za jeho operandy. Pro vyhodnocení takové notace postačí jen datová struktura typu zásobník a nijak to neovlivní *lineární* časovou složitost celého procesu včetně syntaktické analýzy.

Příklad. Nejprve sestrojme mírně modifikovanou gramatiku (oproti příkladu z minulé kapitoly) v Backusově–Naurově formě:

$\langle Vyraz\rangle ::= \langle Term\rangle\{+\langle Term\rangle\}$

$\langle Term\rangle ::= \langle Faktor\rangle\{*\langle Faktor\rangle\}$

$\langle Faktor\rangle ::= (\langle Vyraz\rangle)|0|1|2|\dots|9$

Nyní se schématicky pokusíme ukázat (nejde o zcela hotový kód, ale o jeho fragmenty po částech, které byly dohromady úspěšně testovány), jak bychom sestrojili SA metodou rekurzivního sestupu pro tuto gramatiku v jazyce Pascal. Tento kód pak umožňuje nejen SA, ale i detekci možných chyb. Nejprve sestrojíme proceduru, která zapouzdřuje celou činnost SA. Její hlavička může vypadat například takto:

```
program Preklad;
var ch:char;     {aktuální zpracovávaný znak}

  infixProg, postfixProg:string; {glob. prom. pro uchování výrazu}
  errProg, posProg, infixpos:word;
  value:integer;   {globální prom. čísla chyby, hodnota výrazu}

procedure SyntaktickaAnalyza(infix:string; var err,pos:word;
                      var postfix:string);
   {procedura analyzuje aritmetický výraz infix,
    postfix obsahuje postfixovou notaci vhodnou
    pro vyhodnocení zásobníkem, err obsahuje číslo chyby,
    pos obsahuje pozici, kde analýza skončila}

procedure Term;forward;
procedure Faktor;forward;
```

Používají se proměnné `infixpos` (pozice aktuálně čteného znaku ze vstupu), `ch` (aktuální znak). Analyzátor dále obsahuje nezbytný lexikální analyzátor pro načítání jednotlivých symbolů (v našem zjednodušeném případě jde o jednoznakové symboly). Lexikální analýza je realizována procedurou `GetChar`, která ukládá znak do proměnné `ch` a případně provede detekci chybové situace `err` $= 2$, pokud načteme zcela nepřípustný znak. V rámci SA je pak otázka jen přidat několik vhodně umístěných přiřazení do výstupní proměnné `postfix`, kde je přeložený výraz do postfixové notace, kterou lze velmi jednoduše algoritmicky vyhodnotit:

```
procedure Getchar;     {čte znak z infixu do proměnné ch}
begin
  if err=0 then
    begin
      Inc(infixpos);
      if infixpos<=Length(infix) then ch:=infix[infixpos]
                                 else ch:=#0;
      ch:=Upcase(ch);
```

```
      if not((ch in ['0'..'9'])or(ch in ['(',')','*','+',#0]))
            then err:=2;       {ošetření nežádoucích znaků}
    end;
end;
```

Jádrem analyzátoru jsou jednotlivé rekurzivní procedury `Výraz` (sčítaní), `Term` (násobení), `Faktor` (číslice, vnořený závorkovaný výraz). `Výraz` přesně podle BNF buď volá podřízený `Faktor` nebo čte terminální symboly:

```
procedure Vyraz;               {výraz s nižší prioritou}
begin
  if err=0 then
    begin
      Term;
      while (ch='+') do
        begin
                 Getchar;       {sčítání}
                 Term;
         postfix := postfix + '+';
        end;
    end;
end;

procedure Term;               {výraz s~vyšší prioritou}
begin
  if err=0 then
    begin
      Faktor;
      while (ch='*') do
        begin
                 Getchar;        {násobení}
                 Faktor;
         postfix := postfix + '*';
        end;
    end;
end;
```

A dále musíme sestrojit proceduru pro `Faktor`, která bude mít vzhledem k jinému charakteru přepisovaného řetězce i jiný kód:

```
procedure Faktor;     {synt. analýza operandu}
begin
```

```
  if err=0 then
    begin
      case ch of
      '0'..'9':
          begin
            postfix:=postfix+ch;      {anal. číslic}
            Getchar;
          end;
      '(':begin
            Getchar;
                        {analýza výrazu se závorkou}
            Vyraz;
            if (ch<>')')and(err=0) then err:=4
                   {chyba - není ukončen závorkou}
            else if err=0 then
              begin
                Getchar;
              end;
          end;
      else if err=0 then err:=5;
                  {nebyl detekován ani vyraz, ani číslice}
      end;
    end;
end;
```

`Faktor` tedy rozlišuje dvě situace – buď jde o číslici, nebo jde o výraz začínající závorkou a ukončený opačnou závorkou. Logicky tedy můžeme odhalit další dvě chyby (`err` = 4, když chybí závorka, `err` = 5, když není detekován ani výraz ani číslice). Postfixová notace se generuje postupně – každá číslice se vloží okamžitě po načtení, znak operátoru se přidá až po zpracování podstromu. Nebyl by problém se zcela vyhnout tvorbě postfixu a stejným rekurzivním principem přímo vyčíslovat postupně hodnotu výrazu (procedury `Faktor`, `Term` a `Výraz` by pak měly návratovou hodnotu rovnou výsledku po aplikaci všech operací na dané úrovni podvýrazu).

Samozřejmě, že chybové detekce by mohly odhalit ještě další problematické konstrukce, např. skončení nejvyššího volání procedury `Výraz` před přečtením posledního znaku apod. Vlastní tělo procedury pro SA pak provede volání počátečního neterminálu a odhalí některé chyby dodatečně po přečtení výrazu, např. že sice skončila nejvyšší procedura `Vyraz`, ale ještě ve vstupu jsou nějaké znaky:

```
begin
  err:=0;            {inicializace prom.}
  infixpos:=0;
  postfix:='';
  Getchar;
  Vyraz;             {zavolání syntaktické analýzy výrazu}
  if (ch=')') and (err<>5) then
    begin
      err:=6;
      pos:=0;
    end;     {ošetření přebytečné pravé závorky}
  if (ch<>#0) and (err=0) then err:=1;
           {ošetření konce kompilace-není konec infixu}
  pos:=infixpos;     {nastavení návratových hodnot}
end;
```

Nakonec můžeme v hlavním programu použít tuto proceduru:

```
begin
  infixProg := '5+3*(2+5)*2'; {zadej si vlastní výraz}
  Writeln('Vstupni infixni vyraz:', infixProg);
  SyntaktickaAnalyza(infixProg, errProg, posProg, postfixProg);
  Writeln('Doslo k~chybe:', errProg);
  if errProg<>0 then exit;
  Writeln('Postfixova notace:', postfixProg);
  value := VyhodnotPostfix(postfixProg);
  Writeln('Hodnota vyrazu:', value);
  readln;
end.
```

Průběh výpočtu procedury `Výraz` na výrazu $5 + 3 * 2$ je v tab. 1.

3. Vyhodnocení postfixové notace výrazů

Rozeberme nyní jádro vyhodnocení výrazu v infixní formě. Toto jádro provádí kompilaci aritmetického výrazu v infixové (tedy přirozené) notaci do notace postfixové. Ta je vhodná pro zpracování pomocí počítače, např. se jedná o vyhodnocení pomocí zásobníku. Aritmetický výraz $5 + 3 * 2$ v infixové (přirozené) notaci lze pomocí této procedury přeložit na výraz 5 3 2 * + v postfixové notaci. Ta je konstruována tak, že místo tvaru, kde je operátor mezi operandy, má operátor až za oběma operandy.

Tento výraz lze pak pomocí zásobníku vyhodnotit tak, že čteme jednotlivé symboly a provádíme s nimi tyto dvě operace, viz tab. 2:

1. Je-li čtený symbol operandem, pak ulož operand na zásobník.
2. Je-li čtený symbol operátorem, pak vyber ze zásobníku posledních n operandů (kde n je arita operátoru; např. pro + je $n = 2$). Proveď operaci dle operátoru s vybranými operandy a výsledek ulož na zásobník.

Infixová notace	Aktuální znak	Aktuální procedura	Návrat do procedury
5 + 3 * 2	5	Výraz	
5 + 3 * 2	5	Term	
+ 3 * 2	+	Faktor	Term
+ 3 * 2	+	Term	Výraz
3 * 2	3	Výraz (+)	
3 * 2	3	Term	
* 2	*	Faktor	Term
2	2	Term (*)	
		Faktor	Term (*)
		Term (*)	Výraz (+)
		Výraz (+)	

Tab.1: Průběh rekurzivního sestupu

Nepřečtená část	Aktuální znak	Zásobník	Vybírané symboly	Operace
5 3 2 * +	5			
3 2 * +	3	5		
2 * +	2	3 5		
* +	*	2 3 5	2 3	$2 * 3 = 6$
+	+	6 5	6 5	$6 + 5 = 11$
		11		

Tab. 2: Vyhodnocení výrazu s pomocí zásobníku

Pro výraz $5 + 3 * 2$ vezměme jeho postfixovou notaci 5 3 2 * + a vyhodnoťme ho s pomocí zásobníku.

Obsah zásobníku po přečtení slova je roven hodnotě výrazu. Postup by samozřejmě bylo možno zobecnit na složitější čísla nebo proměnné, ale vyžadovalo by to složitější struktury zásobníku.

Náš kód už tedy zbývá jen obohatit o proceduru provádějící vyhodnocení výrazu v postfixové notaci:

```
function VyhodnotPostfix(var postfix:string):integer;
{vyhodnotí postfixovou formu výrazu zásobníkem / vrátí číslo}
var Stack:array[1..1000] of integer;
   {zásobník čísel jako statické pole}
   headindex, i, val1, val2 :integer;
   {index vrcholu zásobníku, val1, val2 - operandy z vrcholu zás.}
begin
  headindex := 0; {nastav vrchol zásobníku na nulu}
  for i:= 1 to length(postfix) do {projdi celý postfix}
  begin
    ch := postfix[i]; {do pomocné proměnné dej aktuální znak}
    if (ch in ['0'..'9']) then  {je-li to číslice}
    begin
      Inc(headindex);  {vlož do zásobníku}
      Stack[headindex]:= ord(ch) - 48; {příslušné číslo}
    end
    else    {je-li to operátor}
    begin
      case ch of
        '+': begin
               val2 := Stack[headindex];  {vrchol - druhý operand}
               val1 := Stack[headindex - 1];
                    {o pozici níže - první op.}
               Dec(headindex);
                     {odeber operandy a vlož místo nich výsledek}
               Stack[headindex] := val1 + val2;
             end;
        '*': begin
               val2 := Stack[headindex];
               val1 := Stack[headindex - 1];
               Dec(headindex);
               Stack[headindex] := val1 * val2;
             end;
      end;
    end;
  end;
  VyhodnotPostfix := Stack[headindex];
          {na konci je na vrcholu výsledek}
end;
```

Poznámka. Čtenář možná považuje za nevhodné použití globální proměnné `ch`, se kterou se pracuje zejména v syntaktické analýze. Máme pro její užití ale jeden pádný argument. Procedury analýzy se volají rekurzivně navzájem, a to mnohdy do velké hloubky vnoření (v závislosti na struktuře výrazu). Pokud bychom použili lokální proměnné, resp. parametry procedur, znamenalo by to alokaci paměti pro tyto proměnné. Takových alokací bychom udělali velmi mnoho podle počtu volání procedur pro neterminály. To by algoritmus zatížilo časově i prostorově.

Závěr

Na poměrně detailním textu jsme si ukázali, jak lze zapisovat syntaxi jazyka (výrazů), analyzovat je, překládat do jiných forem a také vyhodnocovat. Chtěli jsme ukázat, že zdánlivě složité úkoly lze dělat přehledně, ilustrativně a hlavně efektivně z hlediska časové a prostorové složitosti. Ukázali jsme, že teorie formálních jazyků a automatů je nám blíž, než bychom čekali. Úloha sestrojit jednoduchý analyzátor nebo překladač bezkontextového jazyka může potkat každého informatika, vždyť strukturované vstupy jsou součástí mnoha informačních systémů, včetně různých databázových aplikací. Lze to hezky ilustrovat na příkladu ze života. Jeden ze studentů autorů, který rozhodně nebyl nadšenec do teoretické informatiky, nás asi rok po státnicích potkal a uvedl, že nejdůležitější znalostí, kterou využil z naší školy v softwarové firmě, nebyla žádná moderní technologie, ale znalost tvorby analyzátorů bezkontextových jazyků! Jeho úkolem bylo přijímat na vstupu jistý strukturovaný vstup informací zaslaných podle síťového protokolu a překládat jej do jiného formátu. Metoda rekurzivního sestupu není sice tou nejefektivnější, spíše se používají přímo automatizované nástroje na tvorbu kódu analyzátoru, má ale výhodu v přehlednosti, jednoduchosti a kód lze lehce upravit. Pokud bychom chtěli třeba místo číslic používat v aritmetických výrazech nějakou složitější strukturu, není problém změnit pouze tuto malou část gramatiky a kódu a zbytek se nezmění. A možná nejdůležitější výhoda je, že si jej programujete zcela sami – tudíž máte nad kódem plnou kontrolu.

Doufáme, že tento exkurz do světa překladačů je pro čtenáře poučný nejen teoreticky, ale i programátorsky. Tvorba složitějších překladačů samozřejmě obsahuje další důležité prvky, které zde nezmiňujeme (např. tabulky symbolů).

Literatura

[1] Češka, M., Rábová, Z.: *Gramatiky a jazyky.* VUT, Brno, 1992, `http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TI1/public/gj-1.3.pdf` (2003).

[2] Dvořák, S.: *Dekompozice a rekurzivní algoritmy.* Grada, Praha, 1992.

[3] Hopcroft, J. E., Ullman, J. D.: *Introduction to Automata theory, Languages and Computation.* Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1979.

[4] Habiballa, H.: *Formální úpravy ve výrokové logice (aplikace Bachelor).* Bakalářská práce, Ostravská Univerzita, PřF, Ostrava, 1997, `http://www1.osu.cz/home/habibal/publ/bachelor.zip`

[5] Habiballa, H.: *Regulární a bezkontextové jazyky I.* Ostravská univerzita, Ostrava, 2003, `http://www1.osu.cz/home/habibal/kurzy/xrab1.pdf`

[6] Habiballa, H.: *Regulární a bezkontextové jazyky II.* Ostravská univerzita, Ostrava, 2005, `http://www1.osu.cz/home/habibal/kurzy/rabj2.pdf`

[7] Habiballa, H.: *Překladače.* Ostravská univerzita, Ostrava, 2006, `http://www1.osu.cz/home/habibal/kurzy/xprek.pdf`

[8] Habiballa, H.: Formální jazyky a automaty. *MFI* **13**, 5–6 (2004).

[9] Habiballa, H., Kmeť, T.: Vyčíslitelnost a složitost. *MFI* **14**, 2–3 (2005).

[10] Habiballa, H., Pavlisková, L., Kmeť, T.: Logika. *MFI* **15**, 7–9 (2005/6).

[11] Chytil, M.: *Automaty a gramatiky.* Matematický seminář SNTL, Praha, 1984.

[12] Jančar, P.: *Teorie jazyků a automatů.* VŠB TU, Ostrava, 2003, `http://www.cs.vsb.cz/jancar/`

[13] Jinoch, J., Muller, K., Vogel, J.: *Programování v jazyce Pascal.* SNTL, Praha, 1988.

[14] Lukasová, A.: *Formální logika v umělé inteligenci.* Computer Press, Brno, 2003.

Matematicky nadaný žák pohledem budoucích učitelů

Eva Hotová, PdF UP Olomouc [1]

Abstrakt. *Příspěvek seznamuje s výsledky dotazníkového šetření zaměřeného na povědomí studentů 1. a 2. ročníků oboru Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ a Učitelství 1. stupně ZŠ na PdF UP o problematice matematicky nadaných žáků.*

---

[1] e-mail: hotova@email.cz

Úvod

V rámci rozvíjení nadání ve škole musí být učitel připraven a schopen optimalizovat vzdělávací postupy podle potřeb nadaných žáků. Slovenská psycholožka, Jolana Laznibatová (2001), považuje učitele za jeden ze tří hlavních faktorů, které napomáhají rozvoji nadaného dítěte ve škole. Mezi zbývající patří:

- klima – atmosféra školy, třídy, kolektivu žáků, vrstevnických skupin ve škole
- vědomé, cílené úsilí dítěte, jeho dobrý postoj ke škole a učení se

Učitel je osobou výrazně ovlivňující a formující žáka, výuka pro nadaného by měla být pestrá a podnětná, měla by navazovat na jeho schopnosti a potřeby. Vzhledem k charakteristickým vlastnostem nadaných žáků by měl učitel akceptovat nezvyklá řešení žáků, dokázat jim odborně podat informace, volit takové metody, které stimulují jejich aktivitu a motivují je k tvořivé myšlenkové činnosti.

Charakteristika průzkumného šetření

Průzkumné šetření bylo provedeno v měsíci dubnu 2007 na katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Výzkumný vzorek tvořili studenti oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ a studenti oboru Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ. Pro získání dat byl zvolen dotazník, jenž obsahoval celkem 6 položek. Položky č. 1, 2, 3 a 6 nabízely výběr z možností ano, ne. V případě kladné odpovědi bylo třeba svou odpověď konkretizovat. Zbývající dvě položky (č. 4 a 5) vyžadovaly otevřenou odpověď.

Šetření se zúčastnilo celkem 121 respondentů, z toho 55 studentek oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ a 52 studentek a 14 studentů oboru Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

Cílem průzkumu bylo zjistit, kolik a jaké informace mají studenti o problematice vzdělávání nadaných žáků a zda je tato problematika blíže zajímá.

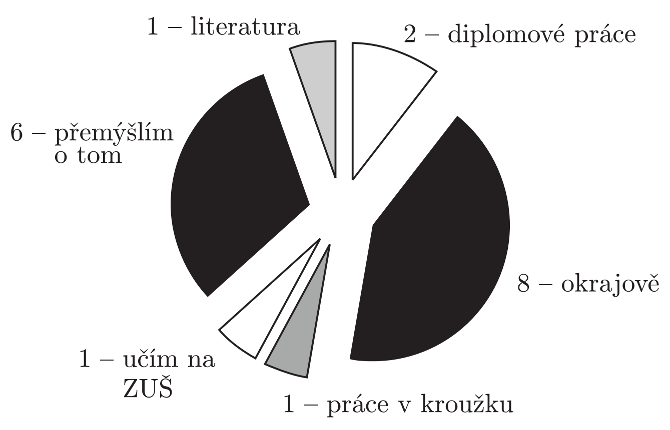
Výsledky průzkumu

Položka č. 1 *Zajímáte se blíže o problematiku nadaných žáků? V případě, že ano, svou odpověď specifikujte.*

V této položce 102 respondentů odpovědělo záporně a 19 kladně. Graf 1 znázorňuje četnosti všech odpovědí uvedených v dotazníku.

Nejčastěji respondenti uváděli, že se problematice nadání blíže nevěnují, pouze v případě, že narazí v časopise nebo v televizi na článek či pořad věnující se nadaným dětem, tak si ho přečtou, příp. se na něj podívají. V grafu je tato kategorie označena pojmem okrajově. Mezi další kategorie patří:

- diplomové práce (2 studentky uvedly, že by na toto téma rády psaly diplomovou práci)
- přemýšlím o tom (studenti uvedli, že již o vzdělávání nadaných někdy alespoň přemýšleli – o formách vzdělávání, o tom, jak vzdělávát nadané žáky, o rozdílu mezi vzdělaností a nadáním apod.)
- ZUŠ (jeden ze studentů je vyučujícím na Základní umělecké škole)
- literatura (jedná se o záměrné vyhledávání a studování literatury věnující se nadaným dětem)
- práce s nadanými žáky v zájmovém kroužku (bohužel již nebylo blíže uvedeno v jakém)

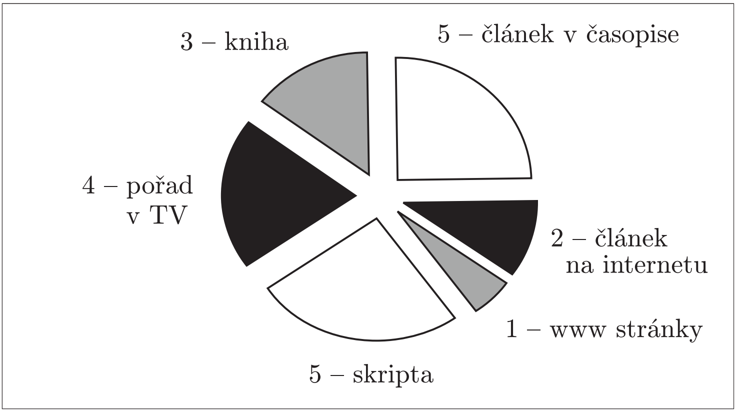


Graf 1

Položka č. 2 *Četli jste v poslední době nějaký článek nebo knihu věnující se problematice nadaných žáků? V případě, že ano, uveďte jakou.*

Ze všech dotázaných odpovědělo 105 záporně, 15 kladně a jeden odpověď neuvedl. Uvedené kategorie (graf 2) tvořilo celkem 20 odpovědí (někteří z respondentů uvedli 2, příp. 3 různé odpovědi). Mezi zdroje informací o nadaných pro studenty patřily:

- www stránky (věnované přímo nadaným dětem)
- kniha (literatura zaměřená na nadané děti)
- článek na internetu
- pořad v TV
- skripta (pedagogicky zaměřená)
- článek v časopise nebo v novinách



Graf 2

Položka č. 3 *Znáte organizace, instituce věnující se péči o nadané žáky? V případě kladné odpovědi uveďte jejich název.*

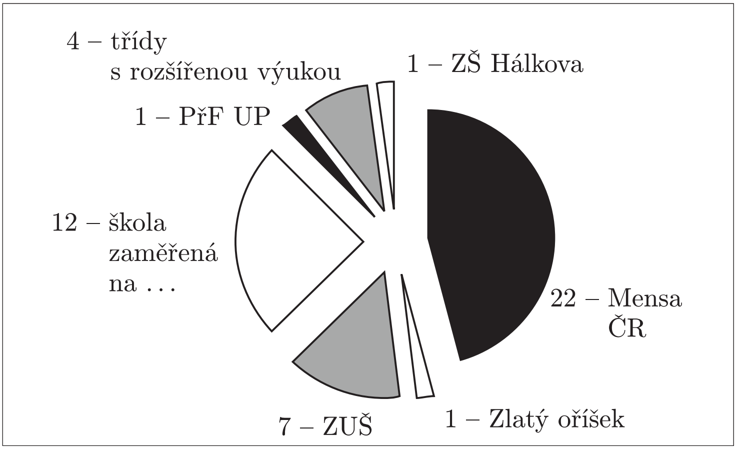
Z celkem 121 odpovědí se kladná odpověď objevila v 37 případech, záporná v 83 případech a 1 z respondentů na otázku neodpověděl. Uvedené kategorie jsou tvořeny z celkem 48 odpovědí (graf 3). Nyní jednotlivé kategorie blíže specifikujme. Mezi nejčastěji uvedené odpovědi patřily:

- Mensa ČR
- školy zaměřené na … (tzn. jazyková a sportovní gymnázia, konzervatoř apod.)
- školy s třídami s rozšířenou výukou matematiky
- ZUŠ

Po jedné odpovědi také získaly:

- Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci
- ZŠ Hálkova (ve školním roce 2006/2007 zde začala fungovat třída pro mimořádně nadané žáky)
- Zlatý oříšek (soutěž je určena pro děti ve věku 6–14 let, vítězem se stane dítě, které v daném roce vytvoří nebo učiní něco mimořádného

v jakémkoliv oboru – umění, sport, jazykové schopnosti, přírodověda apod.)



Graf 3

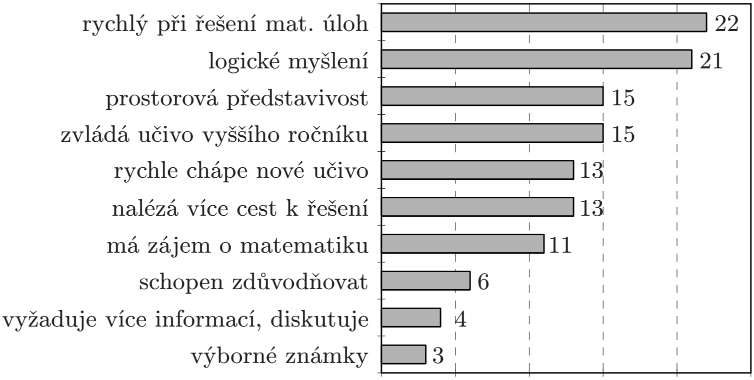
Položka č. 4 *Pokuste se charakterizovat matematicky nadaného žáka.*

Zde se již jednalo o položku vyžadující otevřenou odpověď. Grafy vyjadřují četnosti odpovědí respondentů pro danou kategorii. Do grafu bylo vybráno deset nejčastěji se objevujících odpovědí respondentů.

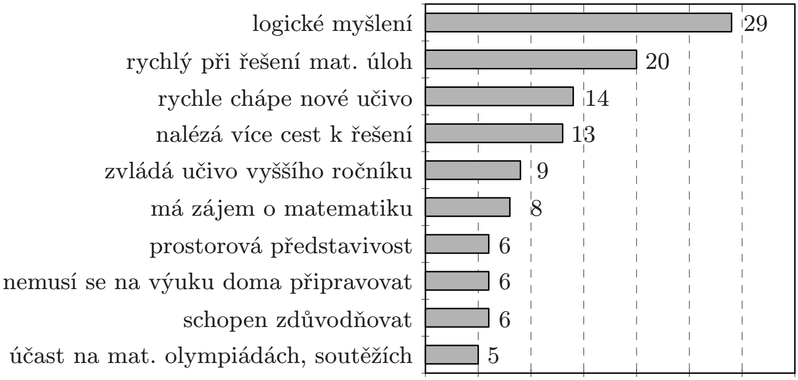
Obě skupiny charakterizovaly nejčastěji matematicky nadaného žáka jako jedince, který je rychlý při řešení matematických úloh a jeho logické myšlení je na vysoké úrovni. Třetí místo obsadila u studentů učitelství pro 1. stupeň výborná prostorová představivost jedince (graf 4), studenti učitelství pro 2. stupeň uvedli výraznou rychlost při pochopení nového učiva v porovnání s ostatními žáky (graf 5).

Položka č. 5 *Jaké metody práce byste se jako vyučující, který má ve třídě matematicky nadaného žáka, snažili ve výuce uplatnit?*

Uvedené grafy opět vyjadřují četnosti odpovědí respondentů pro danou kategorii. Bylo vybráno sedm nejčastěji se opakujících odpovědí a pro srovnání studentů 1. stupně (graf 6) a 2. stupně (graf 7) vytvořeny grafy dva. Nejčastěji volenými metodami práce bylo u studentek učitelství 1. stupně zadávání většího množství příkladů (ve 20 případech), u studentů učitelství pro 2. stupeň se pak jednalo o zapojení nadaných žáků do různých matematických soutěží, do matematické olympiády (ve 14 případech). Obě skupiny respondentů volily možnost postavit matematicky nadaného žáka do role učitele – to je spojeno se samostatným nastudováním a zpracováním libovolného tématu, a poté jeho prezentováním ostatním žákům. Respondenti rovněž sympatizovali s možností zadávat žákům různé matematické hříčky, hádanky hlavolamy a nechat žáky pracovat samostatně.



Graf 4: Studenti učitelství pro I. stupeň



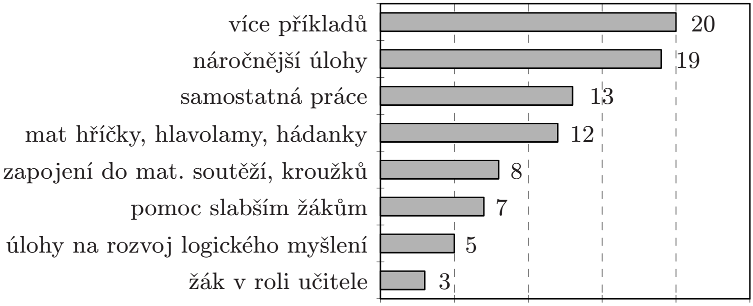
Graf 5: Studenti učitelství pro II. stupeň

Ne příliš příznivé je zjištění, že se v odpovědích neobjevovaly činnosti, které by významně přispěly k žákovu rozvoji jako:

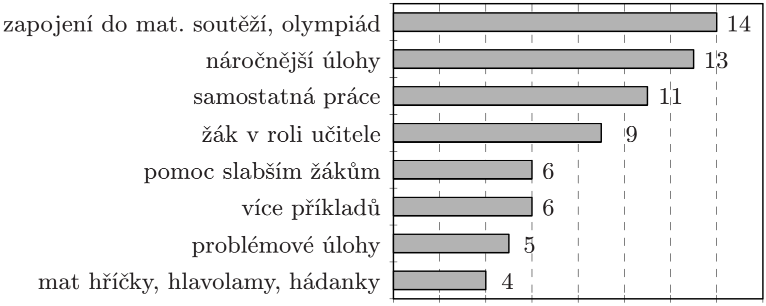
- zadávání problémových úloh (0/5)
- diskuze, konzultace s vyučujícím učitelem (0/4)
- probírání učiva více do hloubky s daným žákem (2/1)
- samostatná práce s knihou, internetem (0/1)

- rozšiřování učiva (0/0)
- zadávání úloh vyžadujících tvořivou odpověď (0/0)

(Pozn.: První číslo v závorce vyjadřuje počet odpovědí studentů učitelství pro 1. stupeň, druhé číslo počet studentů učitelství pro 2. stupeň.)



Graf 6: Studenti učitelství pro I. stupeň



Graf 7: Studenti učitelství pro II. stupeň

Závěr

Vyhodnocení poslední položky dotazníku bylo záměrně ponecháno na závěr příspěvku. Je příjemným zjištěním, že na otázku, zda by studenti v rámci studia uvítali předmět, který by byl zaměřen přímo na péči o žáky matematicky nadané, odpověděli převážně kladně, a to v 99 případech.

Literatura

[1] Laznibatová , A.: *Nadané dieťa.* IRIS, Bratislava, 2001.

Algoritmy ve výuce matematiky na základní škole [1]

Antonín Jančařík, PedF UK Praha [2]
Hashim Habiballa, PřF OU Ostrava [3]

Abstrakt. *Matematika a informatika jsou velmi blízké vědní obory. V některých případech je velmi těžké rozlišit, zda je dané téma matematické nebo informatické. Patří logika, teorie grafů, či diskrétní matematika více do matematiky nebo do informatiky? Jsou algoritmy výsadou informatiky? V mnoha zemích, včetně sousedního Slovenska, je informatika součástí učebních osnov. U nás se na informatiku při tvorbě Rámcového vzdělávacího programu poněkud pozapomnělo. Obsah Rámcového vzdělávacího programu, nízká hodinová dotace a společenská poptávka způsobují, že jsou žáci ZŠ vyučováni informační gramotnosti a s informatikou obvykle seznamováni nebývají. Autoři tohoto článku hledají způsoby, jak se základními otázkami informatiky žáky seznamovat, a to především v hodinách matematiky. V tomto článku uvádíme dvě ukázky možného propojení mezi matematikou a informatikou.*

Úvod

Informatika je, velmi jednoduše řečeno, matematikou na informacích. Učí nás, jak s informacemi pracovat, obdobně jako nás matematika učí pracovat s čísly. Díky informatice můžeme bezpečně zasílat pokyny bance přes internet, nakupovat pomocí platební karty či vyhledávat na serveru Google. Žádná z těchto činností by bez matematiky a informatiky nebyla možná. Zajisté je správné, že se žáci seznamují s tím, jak efektivně využívat počítače – učí se počítačové gramotnosti. Počítačově gramotný člověk má mnohem větší uplatnění na trhu práce. Stejně důležité ale je i využít potencionálu matematicky nadaných žáků a směřovat jejich rozvoj tak, aby v budoucnu nebyli pouhými spotřebiteli moderních technologií, ale experty, kteří se budou na rozvoji moderních technologií podílet. Z tohoto důvodu je velmi důležité, aby se talentovaní žáci seznamovali nejen s tím, jak věci fungují, ale i *proč* tak fungují.

---

[1] Příspěvek byl vypracován s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

[2] e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz

[3] e-mail: habiballa@volny.cz, www: http://www.volny.cz/habiballa/

Algoritmy a RVP

Autoři článku prezentují názor, že algoritmy, a další informatická témata, by se měly stát součástí výuky matematiky na základních a středních školách. K tomuto závěru je vede fakt, že není jiný předmět, který by mohl žáky s informatikou seznamovat. Obsah předmětu matematika však není ponechán libovůli autorů či příslušných pedagogů, je určen Rámcovým vzdělávacím programem (RVP). Je tedy důležité zjistit, zda algoritmy patří do rámce vymezeného vzdělávací oblastí Matematika a její aplikace, a tudíž je oprávněné zařazovat informatická témata do výuky. V charakterizaci vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace RVP (viz [1]) kromě jiného uvádí: „Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.“ Následně v cílovém zaměření vzdělávací oblasti nalezneme, že výuka matematiky má žáky vést k „vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu …“

Přestože se jedná jen o letmé zmínky, je zřejmé, že zařazování (především početních) algoritmů do výuky matematiky je legitimní. RVP dokonce předpokládá, že s žáky bude u jednotlivých postupů-algoritmů prováděn rozbor a vyhodnocování správnosti zvoleného postupu a dosaženého výsledku.

Základní otázky informatiky

Každá vědní disciplína má stěžejní otázky, kterými se zabývá. V případě informatiky to jsou následující otázky:

- Lze problém vyřešit?
- Jakým postupem lze problém řešit?
- Funguje postup řešení a proč?
- Jak rychle výpočet probíhá?
- Jde to udělat lépe, resp. jak nejlépe, nejrychleji lze úlohu řešit?

Každé z těchto otázek se budeme věnovat v samostatném odstavci.

Lze problém vyřešit?

Tato otázka má silně teoretický charakter. V praxi nás většinou zajímá konkrétní postup hledání řešení. Existují však i problémy, u kterých sice víme, že jdou řešit, ale nevíme jak, resp. postup, který máme k dispozici, je z časových důvodů nerealizovatelný. U jiných otázek naopak víme, že řešení nemají. Jeden z nejznámějších problémů informatiky, Problém NP úplnosti, má také ryze teoretický charakter. Problém NP úplnosti řeší otázku, zda každý problém, jehož řešení lze „rychle“ ověřit, lze také „rychle“ řešit. Odpověď na tuto otázku bude velmi pravděpodobně opět jen teoretická, je dokonce možné, že konečným řešením této otázky bude odpověď, že tato otázka je nerozhodnutelná.

Jakým postupem lze problém řešit?

Odpovědí na otázku, jak problém řešit, je postup vedoucí k vyřešení – algoritmus. Obsahem výuky matematiky jsou velmi často postupy – algoritmy. Žáci znají algoritmus písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení. Ve vyšších ročnících se seznamují s rozkladem čísla na součin prvočísel, hledáním největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku, dosazováním do polynomu či hledáním kořenů polynomů. Všechny tyto vědomosti jsou předávány ve formě algoritmů, postupů, které žák musí pouze správně aplikovat na zadaná data. Matematika, stejně jako informatika, je z velké části o hledání postupů-algoritmů.

Funguje algoritmus a proč?

Pro hlubší porozumění a chápání souvislostí je nutné učit nejen jak, ale i proč věci fungují. Matematika (spolu s informatikou) je možná jediným vědním oborem, který dokáže dávat přesné a nezpochybnitelné zdůvodnění. Pro rozvoj matematického myšlení, a to především při práci s matematickými talenty, je nutné tyto souvislosti odkrývat – matematika není soustava vzorců, které spadly z nebe. Všechna tvrzení, která v matematice používáme, lze dokázat. Je zřejmé, že na všechny důkazy není ve výuce místo. Na druhou stranu, pokud vyučujeme matematiku bez důkazů, žáky velmi ochuzujeme. Provést na základní škole jeden důkaz, např. věty Pythagorovy, pro pochopení stavby světa matematiky nestačí.

Jak rychle výpočet probíhá?

Nyní se dostáváme k stěžejní otázce, která odděluje informatiku od matematiky. Pro matematika je důležitá otázka, jak nalézt řešení. Informatika si navíc klade otázku: „Jak rychle výpočet probíhá?“ Některé postupy, se kterými se v matematice setkáváme, jsou v praxi zčásti nebo zcela nerealizovatelné z časových důvodů. Je velmi důležité, aby se žáci seznámili s tím, že některé výpočty jsou tak pomalé, že je není možné realizovat ani na nejrychlejších počítačích. Typickým příkladem je hledání rozkladu čísla na součin prvočísel pomocí postupného dělení všemi potencionálními děliteli. V roce 1876 poukázal F. E. A. Lucas, že číslo $2^{127} - 1$, které má 39 cifer, je prvočíslo. Je jisté, že nemohl k výpočtům použít ani počítač ani kalkulačku. Zkuste s žáky spočítat, kolik času by potřebovali, kdyby museli zkoušet všechny potencionální dělitele. Dnes největší známé prvočíslo má přibližně 8,5 miliónu cifer. Opět lze snadným výpočtem ověřit, že prověřit všechny jeho potencionální dělitele by nebylo možné ani s využitím všech počítačů na Zemi využitých po dobu celého tisíciletí.

Předchozí otázky jsou sice zajímavé, ale od školské matematiky poněkud vzdálené. Ukážeme proto dva alternativní, mnohem rychlejší algoritmy k úlohám, se kterými se žáci běžně na základních a středních školách setkávají.

Hornerovo schéma

Prvním algoritmem je Hornerovo schéma. Tento algoritmus se, kromě jiného, používá pro výčet hodnoty polynomu v bodě. Pokud hodnotu polynomu stupně n v bodě x počítáme běžným dosazováním, tak potřebujeme $n-1$ násobení pro výpočet všech mocnin x až do stupně n, dále $n+1$ násobení na vynásobení vybrané mocniny příslušným koeficientem a nakonec n sčítání na sečtení všech členů polynomu dohromady.

Nyní je dobré položit si otázku, zda nemůžeme počítat efektivněji, tedy s využitím menšího počtu početních operací. Odpověď na tuto otázku je kladná – ano, existuje způsob, jak hodnotu obecného polynomu spočítat rychleji. Nazývá se Hornerovo schéma.

Myšlenka výpočtu podle Hornerova schématu je velice jednoduchá a budeme si ji demonstrovat na polynomu $5x^3 - 6x^2 + 4x - 5$. Tento polynom můžeme vhodným přezávorkováním upravit do tvaru $((5 \cdot x - 6) \cdot x + 4) \cdot x - 5$. Z něj je zřejmé, že pro výpočet hodnoty polynomu (pokud je zapsán v tomto tvaru) stačí použít pouze třikrát operaci násobení a třikrát operaci dělení. Na rozdíl od šesti násobení a tří sčítání v případě běžného dosazování.

Výpočet podle Hornerova schématu můžeme zapsat do tab. 1:

	5	-6	4	-5
v bodě 3		$5 \cdot 3 = 15$	$9 \cdot 3 = 27$	$31 \cdot 3 = 99$
	5	$15 - 6 = 9$	$27 + 4 = 31$	$93 - 5 = \mathbf{88}$

Tab.1: Průběh výpočtu podle Hornerova schématu

V případě obecného polynomu stupně n potřebujeme při použití Hornerova schématu pro výpočet hodnoty v bodě $2n$ operací na rozdíl od $3n$ operací v případě normálního dosazování. Druhou výhodou Hornerova schématu je to, že se v něm obvykle vyskytují mnohem menší čísla než v případě běžného dosazování.

Euklidův algoritmus

Druhým algoritmem, který si představíme, je Euklidův algoritmus pro hledání největšího společného dělitele. Pomocí Euklidova algoritmu je možné vypočítat velice rychle největší společný dělitel dvou čísel bez toho, abychom znali jejich rozklad na prvočísla.

Postup je velice jednoduchý: Vezmeme obě čísla a větší z nich nahradíme zbytkem po dělení většího čísla menším (popřípadě rozdílem většího a menšího čísla). Celý postup opakujeme, dokud jedno z čísel není nula. Potom druhé z čísel je hledaný největší společný dělitel zadaných čísel.

Příklad. Nalezněte největší společný dělitel čísel 3 565 a 5 704.

3 565	5 704
3 565	2 139
1 426	2 139
1 426	713
0	713

Tab. 2: Průběh výpočtu podle Euklidova algoritmu

Uvedený výpočet ukazuje (tab. 2), že největším společným dělitelem čísel 3 565 a 5 704 je číslo 713. Euklidův algoritmus je v porovnání s klasickým algoritmem, který využívá rozkladu čísla na prvočísla, výrazně rychlejší. Chtělo by se říci nesrovnatelně rychlejší, informatika nás však právě srovnávat rychlost algoritmů učí. Pokud by někdo dokázal rozkládat čísla na součin prvočísel v čase srovnatelném s časem, který potřebuje Euklidův algoritmus na nalezení největšího společného dělitele, bylo by nutné výrazně změnit zabezpečení sítě Internet. Praktická neproveditelnost rozkladu čísla na prvočísla je základem RSA algoritmu, který je nejčastěji využívaným šifrovacím algoritmem v síti Internet.

Závěr

Uvedené dva algoritmy představují náznak cesty, jak seznamovat žáky s problémy z oblasti teorie složitosti. Autoři zastávají názor, že informatika jako věda by neměla být na našich školách opomíjena. Diskuze o „rychlosti" algoritmů a seznamování s alternativními algoritmy je jen prvním krůčkem na cestě k rozvoji algoritmického myšlení.

Dalším krokem je seznamovat žáky s klasickými algoritmy. Vhodné je i formální zavedení složitosti a vyčíslitelnosti. Tato témata jsou důležitá především pro talentované žáky, kteří mají zájem účastnit se matematické olympiády kategorie P. Jsou proto vhodná především jako rozšiřující učivo matematiky na středních školách. Praktickou ukázku úlohy demonstrující úzký vztah mezi matematikou a informatikou představují autoři článku v příspěvku Algoritmy ve výuce matematiky na SŠ, rovněž uvedeném v tomto sborníku.

Literatura

[1] *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* `http://www.vuppraha.cz`

Paralelní dějiny matematiky a fyziky jako zdroj motivace pro talentované žáky

Miroslava Jarešová, UHK Hradec Králové [1]

ABSTRAKT. *Zkušenosti jsou základem lidských znalostí a my se učíme tyto zkušenosti aplikovat v běžném životě. V průběhu vyučovacího procesu získává žák informace na úrovni doposud známých poznatků. Vzhledem k tomu, že*

---

[1] e-mail: jaresova.m@seznam.cz

žáci získávají ve velmi krátké době znalosti, které se vyvíjely v mnoha případech po mnoho staletí, nelze historický vývoj úplně přeskočit. Cílem příspěvku je poskytnout náměty pro práci s talentovanými žáky pohledem zpět do historického vývoje a ukázat, že historické poznatky a jejich paralelní prolínání v matematice a fyzice mohou být zdrojem motivace při výuce talentovaných žáků v těchto dvou předmětech. Vzhledem k velkému rozvoji výpočetní techniky v současné době se ukazuje jako vhodné (i z hlediska motivace pro práci s talentovanými žáky) využití výpočetní techniky v matematice a fyzice. Z tohoto důvodu byl vytvořen CD ROM vhodný pro procvičování a rozšiřování poznatků z matematiky a fyziky s využitím počítače.

Vztah matematiky a fyziky v procesu poznávání z historického hlediska

Proč je pohled na historii tak důležitý

Zkušenosti jsou základem lidských znalostí a my se učíme tyto zkušenosti aplikovat v běžném životě.

- V průběhu vyučovacího procesu žák získává informace na úrovni doposud známých poznatků.
- Vzhledem k tomu, že získává v krátké době znalosti, které se vyvíjely po mnoho století, nelze v některých případech tento vývoj úplně přeskočit.
- Analýzou historie matematiky je možno získat užitečné představy o genezi myšlení. (Zrod matematiky je možno zařadit asi do 6. století před naším letopočtem do Řecka.)

V další části bude ukázán vývoj pojmu funkce z hlediska fylogeneze[2] funkčního myšlení a ontogeneze[3] myšlení.

Fylogeneze funkčního myšlení

Starověk

Ve starověku má význam několik níže uvedených okamžiků.

- První matematické vyjádření funkcí lze nalézt v babylónských tabulkách funkcí.

---

[2] fylogeneze = „skupinový“ historický vývoj

[3] ontogeneze = individuální vývoj

- Významný model pro hledání funkčních závislostí poskytovala hvězdná obloha a následná dlouhodobá pozorování a záznamy pohybů hvězd, což vedlo k předpovědi pohybů planet. Člověk se postupně učil pomocí posloupností diskrétních údajů popsat spojitý děj.
- První, kdo si uvědomili rozdíl mezi diskrétním a spojitým, byli Řekové. *Pythagoras* dělil vědy na diskrétní (aritmetika a hudba) a spojité (geometrie a astronomie). Geometři – *Meneachmus, Hippias, Archimédes, Apollónios* a další rozpracovali teorie mnoha křivek, které vznikají spojitým pohybem bodu.

Středověk

Toto období s sebou přineslo dva významné poznatky uvedené níže.

- Řekové rozpracovali mnoho konkrétních křivek. Nedospěli však k myšlence obecné křivky. Tento přechod od oddělených modelů k univerzálnímu provedl až arabský matematik *al-Birúni* (973–1048). Jako první začal uvažovat o křivce všeobecně, provádět její interpolaci a hledat její extrémy.
- Ve 12.–14. století scholastičtí myslitelé na anglických a francouzských univerzitách přinesli další myšlenky o křivkách. V Oxfordu *Robert Grossette* (1168?–1253) tvrdil, že „všechny příčiny přírodních dějů musí být vyjádřeny pomocí čar, úhlů a obrazců“. Profesor téže univerzity *Thomas Bradwardinus* (1290?–1349) přemýšlel o kontinuu, hledal zákon, který by spojoval rychlost pohybu se silou. V Paříži *Nicole Oresme* (1323?–1382) rozvinul (podle [2]) teorii rovnoměrného a zrychleného pohybu v geometrickém pojetí.

17. století

- „Descartova proměnná veličina“ vyvolala převrat v dosavadní matematice, k čemuž přispěl rozvoj řemesel a techniky.
- Křivku bylo možno popsat rovnicí

  $$f(x, y) = 0,$$

  což otevřelo nové možnosti jejího studia.

Následující století byla již ve znamení bouřlivého rozvoje funkcí. Dále již bude uveden v podobě shrnutí stručný přehled fylogeneze.

Shrnutí

- Člověk si uvědomil a registroval (i když jen v diskrétní podobě) funkční závislosti ve svém životě.
- Registrované údaje se naučil používat k plánování vlastní činnosti a předpovídání některých dějů v přírodě.
- Člověk začal vytvářet tabulky některých funkcí.
- Řekové si začali uvědomovat existenci vztahu diskrétní & spojité a tento vztah rozpracovali v geometrickém popisu křivek.
- Objektem výzkumu se staly konkrétní křivky.
- *al-Birúni* začal se studiem zobecněných křivek.
- Scholastika nastolila otázku funkční závislosti jako problému filozoficko-matematického; snaží se o geometrické modelování pohybu, byla provedena analýza kontinua.
- *Descartes* a *Fermat* studovali křivky pomocí analytického aparátu.
- *Newton* a *Leibniz* analyzovali zápis $f(x, y) = 0$, resp. $y = f(x)$, jako samostatný objekt, rozpracovali početní postupy jako je substituce, vyjadřování funkce pomocí mocninné řady apod.
- *Johann Bernoulli* definoval funkci analyticky bez užití geometrie a fyziky.
- *Gregory* a *Taylor* rozpracovali univerzální metodu rozvoje funkcí pomocí mocninné řady.
- *Euler* v polovině 18. století kladl pojem funkce jako ústřední pojem v matematické analýze.
- V 19. století se pojem funkce zevšeobecňuje na libovolné zobrazení $A \to B$, kde A, B jsou neprázdné podmnožiny množiny $\mathbb{R}$.

Ontogeneze funkce ve výuce

Ontogenezi funkčního myšlení žáka je možno rozčlenit na tři etapy:

- Žák si nejprve na základě svých zkušeností vytvoří představu kvantitativních vazeb příčinných jevů – např. když kohoutkem vodovodu reguluje proud vody nebo když při jízdě na kole páčkou u brzdy reguluje zpomalování pohybu kola apod.
- Později žák intuitivně využívá své zkušenosti k řešení dílčích problémů.
- Na střední škole se žák naučí systematicky s funkcemi pracovat.

  Obecně lze říci, že práce s funkcemi má dvě podoby:

  1. vnitřní – studium funkcí jako speciálních matematických objektů

2. vnější – využití funkcí k modelování různých situací a jevů z matematiky, fyziky a dalších oborů

Historický vývoj však pokračuje dál. V současné době se čím dál více začíná prosazovat použití výpočetní techniky v různých oblastech. Ukazuje se, že by bylo vhodné využít ji také v případě výuky funkcí, ale i v dalších oblastech matematiky a fyziky, jak bude dále uvedeno.

Matematika ve fyzice – CD ROM a studijní texty

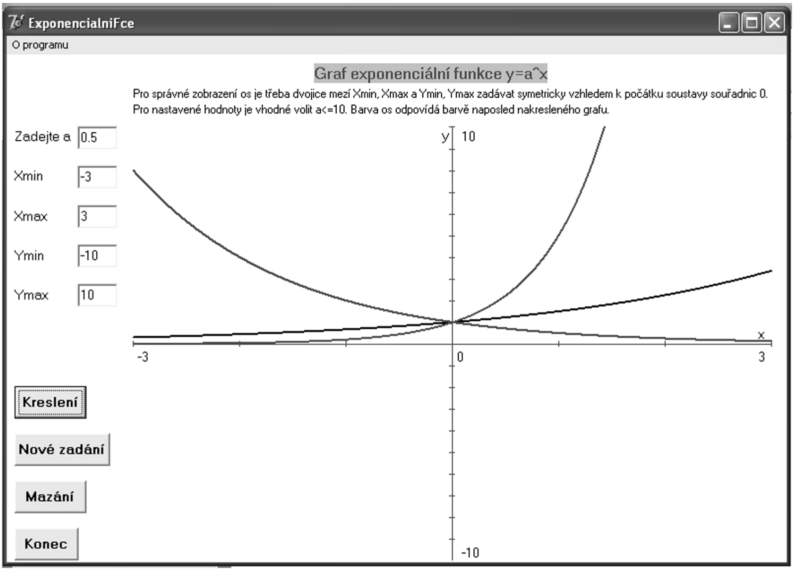
Jedna z možností, jak využít výpočetní techniky při výuce matematiky a fyziky (především v případě talentovaných žáků, ale i v případě netalentovaných), byla vytvořit výukový CD ROM Matematika ve fyzice. CD ROM jsem zpracovala v rámci svého doktorského studia na Univerzitě Hradec Králové pod vedením prof. RNDr. Ivo Volfa, CSc. Tento CD ROM je zároveň také součástí vytvořené sady studijních textů sloužících k matematické přípravě talentovaných žáků řešících úlohy fyzikální olympiády.

Charakteristika CD ROMu

Výukový CD ROM byl zpracován především pro zkvalitnění matematické přípravy talentovaných studentů řešících úlohy fyzikální olympiády. Při sestavování CD ROMu byla však také z naší strany snaha, aby CD ROM byl „víceúčelový“ a bylo možno ho využívat jak v hodinách matematiky a fyziky za použití dataprojektoru, tak i pro samostatnou práci žáků.

Na CD ROMu je zpracováno několik tematických celků, o nichž se dále zmíním.

První tematický celek tvoří *Funkce ve fyzice*. V rámci tohoto tematického celku jsou nejprve zopakovány základní matematické poznatky o funkcích s možností samostatného procvičování pomocí příkladů uvedených na CD ROMu. Je zde zpracována celá řada aplikací vytvořených v prostředí DELPHI, pomocí kterých je možno modelovat grafy různých funkcí pro zadané koeficienty (obr. 1). Na tyto procvičovací a opakovací úlohy pak navazuje řada úloh z fyziky, při jejichž řešení bychom se bez znalostí kreslení grafů funkcí neobešli, a jsou zde uvedeny odkazy na studijní texty (ty jsou umístěny na CD ROMu) pro řešitele fyzikální olympiády, kde se ve velké míře s poznatky o funkcích pracuje.



Graf exponenciální funkce y=a^x

Pro správné zobrazení os je třeba dvojice mezí Xmin, Xmax a Ymin, Ymax zadávat symetricky vzhledem k počátku soustavy souřadnic 0.
Pro nastavené hodnoty je vhodné volit a<=10. Barva os odpovídá barvě naposled nakresleného grafu.

Zadejte a 0.5
Xmin -3
Xmax 3
Ymin -10
Ymax 10

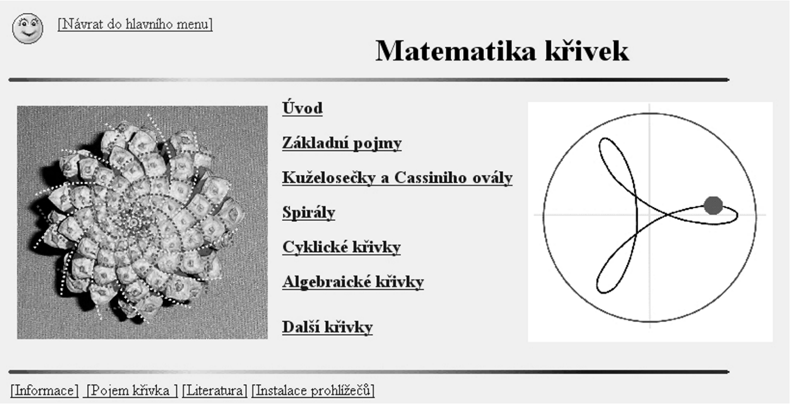
Obr. 1: Modelování exponenciální funkce na CD ROMu

Druhý a třetí tematický celek tvoří *Derivace ve fyzice* a *Integrální počet ve fyzice*. V rámci těchto celků jsou nejprve zavedeny pojmy derivace funkce (integrál) a jsou podrobně zopakovány (ev. i vysvětleny) základní pojmy z vyšší matematiky s postupným přechodem k užití vyšší matematiky ve fyzice. Tyto dva celky byly zařazeny z toho důvodu, že v současné době již na celé řadě škol není fyzika ve čtvrtém ročníku (kdy se v probírají základy vyšší matematiky) zařazena mezi povinné předměty. Ve fyzikální olympiádě je však třeba tohoto aparátu použít při řešení úloh v kategorii A (od úloh domácího kola až po úlohy mezinárodní fyzikální olympiády).

Za těmito tematickými celky navazují studijní texty *Diferenciální rovnice* ve fyzice, *Numerické metody řešení rovnice* $F(x) = 0$, *Skaláry, vektory, . . . , Souřadnice ve fyzice.*

Posledním tematickým celkem, zpracovaným na CD ROMu, je *Matematika křivek* (obr. 2). Tento celek je nejrozsáhlejší a v řadě případů využívá poznatků uvedených v předchozích tématických celcích. Je zde jednak matematická část, kde jsou uvedeny rovnice různých křivek, se kterými je možno se setkat v praktickém životě, v řadě případů je uveden výpočet jejich délky nebo obsahu plochy vymezeného danou křivkou.

Dále je zde také uvedena historie vzniku křivek (ze které je velmi dobře vidět, jak se poznatky z matematiky a fyziky v historii navzájem prolínaly mezi sebou …). Opět, jako v případě tematického celku Funkce ve fyzice, je zde možnost modelování těchto křivek (tentokrát i v podobě animací vytvořených v prostředí DELPHI s možností vstupu uživatele, ale i animací demonstračních bez možnosti vstupu uživatele). Tuto část jsem doplnila také celou řadou vlastních fotografií z praktického života, kde je možno se s těmito křivkami setkat.



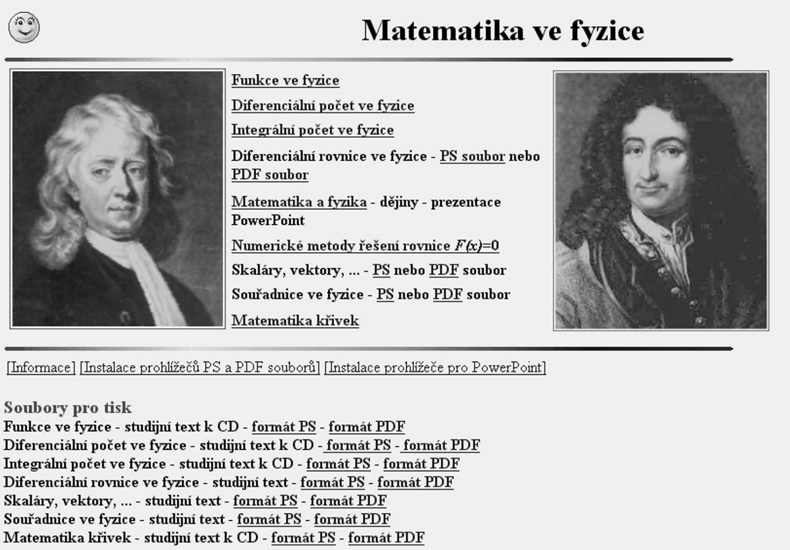
Obr. 2: Matematika křivek

Kromě výše uvedených témat je na CD ROMu pro doplnění uvedena prezentace Matematika a fyzika – dějiny. Jedná se o prezentaci vytvořenou v PowerPointu se zaměřením na osobnosti, které přispěly k rozvoji těchto dvou věd od minulosti až po současnost (obr. 3).

Studijní texty

Vzhledem k tomu, že ne každý chce pracovat s texty v elektronické podobě, jsou součástí výše uvedeného kompletu také studijní texty, jejichž názvy zde uvádím (tyto texty jsou v elektronické podobě rovněž na CD ROMu). Jedná se o stejné studijní texty jako na CD ROMu. Tyto texty je rovněž možné stáhnout z Internetu a vytisknout. Jsou uvedeny na stránkách fyzikální olympiády na adrese http://www.uhk.cz/fo.

Zájemci, kteří chtějí celý komplet – Kapitoly z matematiky pro řešitele fyzikální olympiády najednou – tj. studijní texty v papírové podobě i CD ROM, mohou si jej objednat na adrese ivo.volf@uhk.cz.



Matematika ve fyzice

Funkce ve fyzice

Diferenciální počet ve fyzice

Integrální počet ve fyzice

Diferenciální rovnice ve fyzice - PS soubor nebo PDF soubor

Matematika a fyzika - dějiny - prezentace PowerPoint

Numerické metody řešení rovnice *F(x)*=0

Skaláry, vektory, ... - PS nebo PDF soubor

Souřadnice ve fyzice - PS nebo PDF soubor

Matematika křivek

[Informace] [Instalace prohlížečů PS a PDF souborů] [Instalace prohlížeče pro PowerPoint]

Soubory pro tisk

Funkce ve fyzice - studijní text k CD - formát PS - formát PDF

Diferenciální počet ve fyzice - studijní text k CD - formát PS - formát PDF

Integrální počet ve fyzice - studijní text k CD - formát PS - formát PDF

Diferenciální rovnice ve fyzice - studijní text - formát PS - formát PDF

Skaláry, vektory, ... - studijní text - formát PS - formát PDF

Souřadnice ve fyzice - studijní text - formát PS - formát PDF

Matematika křivek - studijní text k CD - formát PS - formát PDF

Obr. 3: CD ROM

Vraťme se ale ještě zpět do historie.

Archimédův spis Metoda

V roce 1906 nalezl dánský učenec, vydavatel Eukleida a Archiméda, *J. L. Heiberg* dosud neznámý spis *Metoda.* V cařihradském klášteře sv. Hrobu byl uložen pergamenový rukopis pocházející z Jeruzalémského kláštera sv. Sabby, který obsahoval opisy některých Archimédových spisů z 10. století. Zbožní mniši litovali tento velmi kvalitní pergamen pro světské, jim nesrozumitelné Archimédovy spisy a v 12. až 14. století smyli staré písmo, aby na tomto pergamenu pak napsali posvátnou liturgickou knihu *euchologion.* Naštěstí se jim nepodařilo písmo smazat úplně. Heiberg knihu našel a podařilo se mu rozluštit zbytky písma a doplnit chybějící část. Vedle některých známých rukopisů nalezl v rukopisu i dosud neznámý Archimédův spis Metoda (obr. 4.). Tento svůj objev zveřejnil v časopise *Hermes* v roce 1907.

V roce 1998 koupil za 2 milióny dolarů Archimédův rukopis v aukci soukromý sběratel Christie. Ten rukopis zapůjčil k vědeckému výzkumu, který začal v roce 2000. Skupina vědců začala rukopis zkoumat pomocí prostředků a metod současné fyziky. Jako nejpřijatelnější metoda výzkumu se v tomto případě ukázala multispektrální analýza. Tento výzkum by měl skončit někdy kolem roku 2008. (Více informací je uvedeno na http://www.omogenia.com/arch.htm.)

Obr. 4: Archimédův spis Metoda

Archimédův spis Metoda nabízí také jeden ze zdrojů motivace pro žáky – sledování výsledků výzkumu tohoto spisu na Internetu. Zároveň s tím je možno také poukázat na skutečnost, že Archimédovy spisy studoval také Newton a možná že na jejich základě pak vytvořil svůj infinitezimální počet, o němž je známo, že má svůj původ v řecké matematice.

Možností, jak motivovat žáky na základě historických poznatků, je celá řada. Vzpomeňme např. na kvadraturu paraboly, problém Archimédova kužele a koule, Archimédovu mechanickou metodu a řadu dalších … Vzhledem k omezenému rozsahu článku však toto není jeho cílem – cílem bylo připomenout si a uvědomit si, že i dnes se ukazuje vhodné se vracet do historie a hledat zde další možnosti, jak motivovat žáky ke studiu matematiky a fyziky.

Ukazuje se, že v současné době jedna z možností, jak motivovat žáky, je také práce s výpočetní technikou, což vedlo k tvorbě CD ROMu, který byl v tomto příspěvku představen a který by snad mohl svým dílem přispět ke zvýšení motivace žáků zabývat se těmito přírodními vědami.

Literatura

[1] Hejný, R. a kol: *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava, 1990.

[2] Znám, Š.: *Pohľad do dejín matematiky.* ALFA, Bratislava, 1986.

[3] Jarešová, M. , Volf, I., Vybíral, B.: *Kapitoly z matematiky pro řešitele fyzikální olympiády (s doprovodným CD ROMem).* Knihovnička FO č. 73, MAFY, 2006.

[4] `http://www.omogenia.com/arch.htm` (anglicky).

[5] `http://www.archimedespalimpsest.org/` (anglicky).

[6] `http://www.math.ubc.ca/~cass/archimedes/parabola.html` (anglicky).

Rozdíly ve strategiích řešení u devítiletých žáků

Michaela Kaslová, PedF UK Praha

ABSTRAKT. *Jde opravdu vytipovat nadprůměrného žáka již ve věku 9 let? K pokusu byly vybrány tři úlohy, žákovská řešení byla analyzována a žáci dále sledováni v přechodu z prvního na druhý stupeň a u vytypovaných dále na druhém stupni ZŠ, respektive na nižším stupni gymnázia. Jsou žáci, kteří se jevili průměrní v těchto úlohách, a přesto se u nich prokázal „talent na matematiku“? V článku jsou analyzovány dvě úlohy.*

1 Žáci a volba úloh

Jak bylo uvedeno na Dvou dnech s didaktikou matematiky 2006 (Kaslová, 2007), významnou roli *v kvalitě řešení* úloh nadprůměrnými žáky hraje, kromě primární motivace (rád řeší, problém ho zaujal svojí podstatou), trpělivost. Žáci, kteří vykazují nadprůměrné výkony v mladším a středním školním věku (ve smyslu Matějčka, Mertina), přicházejí na řešení zpravidla rychle, nezřídka vhledem. Všimněme si nyní žáků, kteří nejsou zvyklí experimentovat po delší dobu. Je-li úloha takového charakteru, že vyžaduje delší zamyšlení, nezanedbatelná část žáků uvedeného věku vzdá její řešení pro netrpělivost. Stačí však nadprůměrného žáka povzbudit, případně sekundárně motivovat (je-li na to citlivý) a zpravidla práci dokončí. V rámci laboratorního experimentu hraje v překonání netrpělivosti významnou roli snaha o udržení sociální prestiže, i když to není žákovi jakkoli naznačováno.

Nadprůměrní žáci při řešení úloh ve škole často nepotřebují dělat (nejen díky paměti) zápisky, poznámky, zdaleka *nejsou zvyklí při řešení psát* v takovém objemu, jako je tomu u průměrných či výrazně submisívních nadprůměrných žáků (v druhém případě jde podle mé zkušenosti častěji o děvčata, respektující pokyn k psaní od třídních učitelů, nebo o chlapce z učitelských rodin).

Díky způsobu řešení, přemýšlení, mají nadprůměrní žáci nezřídka podobné problémy jako ti žáci, kteří řešení hledají velmi obtížně – *nedokáží vhodně popsat slovy*, jak na řešení přišli, jak postupovali. Pokud má jejich řešení alespoň zčásti písemnou podobu, považují to za postačující a tím pro ně verbalizace grafických znaků ztrácí na smysluplnosti – oslabuje se zkušenost práce s jazykem. Verbalizace v úlohách zaměřených na usuzování by přitom mohla mnohé usnadnit, pomoci probrané možnosti si lépe zapamatovat, snadněji negovat ve spojení s metodou vylučovací, zvědomit některé postupy.

Nadprůměrní žáci mají tendenci *podceňovat úlohy*, kde se pracuje s „malými čísly“ nebo jednocifernými násobky mocnin deseti. Přeceňují metodu kalkulu a na druhé straně podceňují jiné metody řešení, možná i pod sociálně kulturním tlakem médií, rodičů.

Pod vlivem učitelů často nadprůměrní žáci neuvažují o existenci *více řešení*. Dvacetiletá hospitační zkušenost ukázala, že pokud má úloha více řešení (řešením je více čísel, více umístění, více n-tic apod.), učitel se většinou spokojí s jedním (prvním nalezeným) případem vyhovujícím podmínkám zadání, případně s náznakem, že existuje i další. V podstatě se pracuje s částečným řešením, úloha tak zůstává neuzavřena. Výjimku tvoří např. řešení nerovnic. Učitelé zpravidla nesměřují k výčtu celé množiny čísel, avšak alespoň usilují o náznak jejích hranic. To vede nadprůměrné žáky k pohodlnosti uvažovat o dalších možnostech, pokud to není přímo v zadání úlohy, k návyku nedotáhnout řešení do konce.

Jednou z významných motivací nadprůměrných žáků je *objevit a pochopit princip*, na kterém řešení stojí. Jakmile ho objeví, napětí („matematický adrenalin“) opadá a dotažení řešení do potřebných detailů je pro ně již nezajímavé, popřípadě *podceňují* poslední fázi řešení, *prezentaci řešení*, kterou odbývají – pracují nejraději s náznakem. To může být také důvod, proč pro případné vysvětlování (s výjimkou typu „samaritán“ ve smyslu Slavíkově (1995), nebo typu, který se rád předvádí a mluví u toho) vyhledávají partnera nejméně téže intelektové úrovně.

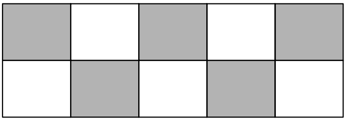
Volba úloh se opírala na jedné straně o tyto slabiny, na druhé straně bylo při jejich prezentaci usilováno o maximální *otevřenost v charakteristice* těchto úloh – žákům bylo vysvětleno, co úlohy vyžadují – že nejsou na rychlost, to že se pracuje s čísly, případně malými čísly, neznamená, že jsou snadné, avšak vyžadují uvažování a trpělivost. Je na řešiteli poznat, zda má úloha řešení, nebo ne, případně nemá-li jich více.

2 Zadání a řešení

2.1 Úloha 1

V posledních sedmi letech dostávají členové Klubu přítel matematiky (žáci prvního stupně ZŠ) tři stejné úlohy. První úloha je přejata z Haló sobota 1985, zadání je upraveno: *Máme 10 čísel – od 1 do 10. Doplň čísla do tabulky na obr. 1 tak, že každé číslo v šedém poli je součtem čísel* *v sousedních bílých polích. Každé číslo je v tabulce jen jednou. Popiš, jak jsi našel/la řešení.*

Předmětem našeho zkoumání jsou řešení 65 devítiletých žáků, jen výjimečně jsou mezi sledovanými řešiteli žáci mladší (8 let). Nehovořme zatím o tom, kteří ze sledovaných žáků byli učiteli hodnoceni jako nadprůměrní nebo se jevili při práci v Klubu jako nadprůměrní experimentátorce. Úloha byla také zadána 12 žákům prvních a druhých ročníků, žákům ve věku mezi 7 a 8 lety. Ty do analýzy nezahrnujeme.



Obr. 1

2.2 Ukázky dialogů

V následujících dialozích je patrné, že úloha děti zaskočila. Přechod od pocitu snadnosti k soustavnějšímu zkoumání zbaveného pocitu zklamání byl u dětí různý. U některých byla tato fáze provázena opakovaným odsouváním a přisouváním papíru se zadáním. V ukázkách *D* značí dítě, *E* učitele.

*D*1: „To nejde spočítat. To se musí zkoušet …?! … (*zkouší umístit první čísla do tabulky*) … A má to vůbec řešení?“ *E*: „Ano, dvě …“ *D*1: „Ach jo, to se bude fakt muset zkoušet.“ *E*: „Ale počítat budeš muset.“ *D*1: „Tak jo. …“

*D*2: „Hele, vono to není tak lehký.“ *E*: „Proč sis to myslel? Dávám moc lehké úlohy?“ *D*2: „Né, ale tohle mi připadá jako pro mrňata. … To bude na dlouho.“ *E*: „Tak si to zjednoduš.“ *D*2: „No, to by šlo, vlastně … jo, to jsou sčítanci!!! Cha.“

*D*3: „… Už to dělám ňák dlouho. Ale 10 nemůže být bejt v rohu, … taky musí stát v šedivým … No, a devět a vosum taky … no, pět a ty menší bejt v šedým nemůžou. Už to mám! … Nemám! (*prudce škrtá v tabulce a začíná psát vedle*). Teď co s jedničkou, třeba taky někde musí stát? …“

*D*4: „Mám to! … Nemám. Zase vosum. Hé…Jó!! … Né! Ale musí tam bejt velký číslo. Že jo?“ *E*: „Proč? …“ *D*4: „No jedna nemůže bejt v šedivým, jako že sečtu, dvě taky ne … Aha! Ale čtyři to nejde, protože sudý a sudý a to by tam muselo bejt dvě dvakrát, nebo tři a jedna, ale … Asi vim …“

*D*5: „Už to zkouším počtvrté!!! Zas to nevyšlo. To je děsný, fakt.“ *E*: „Ukaž, jak postupuješ. (*předkládá čtyři různě a chybně vyplněné tabulky*).“ *D*5: „Tak znova, že jo? ... Zas třikrát, to je děsný. Dá se to? ... Asi jo. Už to nevydržim. Můžete mi napovědět?“ *E*: „Víš, proč to ti v tabulce nevyšlo?“ *D*5: „Se kouknem. ... Aha!! ...Ne. ...Jo, to je vono.“

*D*6: „Hm. Hm. De to?“ *E*: „Ano.“ *D*6: „Takhle bych to dělal ale moc dlouho. To se musí ... nejdřív devět do rohu ... to by pak ... nebo sem čtyři ... ne tři ... dyby tam bylo vosum jo ... to ... to ne ale dvě ... pak sedum sem ... jo ... jo ... jo ...“

Výpovědi svědčí nejen o tom, že žáci uvažují různě, ale i o tom, že pro některé zůstalo řešení na úmorném, více či méně systematickém zkoumání pokusů. Doba řešení se u této úlohy pohybovala mezi 5 a 17 minutami. Ten, kdo řešení nenašel (někdo po 12, jiní maximálně po 21 minutách), úlohu buď odložil, nebo požádal, aby si ji mohl vzít domů. To ovšem neznamená, že by to bylo poprvé, kdy tito žáci řešili úlohu déle než 5 minut. Jednalo se však o úlohy geometricky laděné nebo zjevně orientované na permutace. *Schopnost soustředit se* je v tomto věku ještě významně ovlivňována motivací a postojem k řešení bez ohledu na to, jaké postavení ve třídě v žebříčku hodnocení učitelem žák zaujímá.

Tato úloha je také opakovaně zadávána studentům – oboru učitelství 1. stupně nebo Sppg. Doba řešení nebyla u žádného ze studentů kratší než 5 minut. Je zajímavé, že podobné krize jako u žáků se objevily i u studentů. Studenti, kteří nenašli řešení, požadovali řešení domů po 10 minutách.

2.3 Použité postupy

Při řešení úlohy bylo možné vysledovat tyto postupy řešení:

a) *zkusmo* umístění čísel do tabulky a ověřování podmínek
b) *třídění* čísel na „větší“ a „menší“
c) uvažování o *potencionálních sousedech* (např. přes rozklady čísel na dvojice či trojice sčítanců)
d) práce s *charakteristikou čísel* (sudost a lichost čísel)
e) *vnesení systému* do zkoumání (nabytí jistoty, že nebude žádná možnost vynechána, respektive že se omezí počet vynechaných možností)

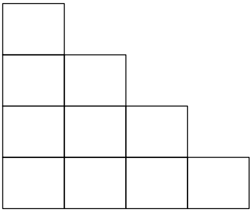
Nikdo z žáků, kteří pracovali jen postupem a), úlohu nevyřešil. Takových žáků bylo 10, tedy 17 %, pouze jeden z nich úlohu dořešil doma a není zcela jasné, zda mu někdo nepomáhal; žák to nepopřel, ani nepotvrdil. Dalších 6 žáků (9 %) přešlo od a) k b), ale ani ti nebyli ve třídě úspěšní, 4 z nich úlohu dořešili doma a hlásili se k tomu, že jim zaručeně nikdo nepomáhal. Podle projevené radosti se lze k této verzi přiklonit. Během 7 let pouze 4 žáci (6 %) nenašli řešení v kombinaci a) a c), ale všichni našli řešení doma. Problém u tří z nich byl v tom, že se stále bránili vytváření zápisků – poznámek o nevyhovujících variantách. Ani jeden z uvedených 4 po prvním pokusu zapisovat řešení rovnou do tabulky dále uvažované varianty nezapisoval a neustále se snažil varianty hodnotit v představě, což se projevovalo občasnými polohlasnými komentáři.

Celkem 45 žáků odevzdalo úlohu jako vyřešenou (69 %), z toho 7 žáků (15 %) předložilo chybné řešení přehlédnutím chyby (5 z nich s numerickou chybou v určování součtu, 3 měli v tabulce jedno číslo dvakrát). Všichni tito žáci používali strategie a), b), c).

Z celkového počtu 65 žáků jich 38 (58 %) našlo aspoň jedno správné řešení. Všichni úspěšní řešitelé přešli od strategií a) a b), ke kombinaci strategií strategii buď c), d), nebo c), e). Z uvedených 38 úspěšných řešitelů jich 12 našlo 2 různá řešení, přičemž jen 9 žáků (14 % z celkového počtu řešitelů) mělo obě řešení správně. Pouze jediný žák tvrdil, že více řešení již být nemůže, a argumentoval pomocí strategie c). Z těch, co našli jen jedno správné řešení, bylo pět, kteří našli doma ještě druhé, avšak u dvou z nich jsou vážné pochybnosti, zda je našli sami. To neznamená, že by je nenašli, patrně do řešení významně zasahovali ambiciózní rodiče.

2.4 Úloha 2 – autorská (1995)

Máme (přirozená) čísla od 1 do 10. Naším úkolem je všechna zapsat do následující tabulky podle těchto pravidel: a) v sousedních polích nesmí být čísla, která se od sebe liší o 1; b) v sousedních polích nesmí být čísla, která patří do téže násobilky (jsou násobky téhož čísla různého od 1). Sousední pole jsou ty „malé“ čtverce, co se dotýkají celou stranou (ve sloupci nebo řádku). Úloha byla zadána za podobných podmínek jako úloha 1, a to 64 žákům.



Obr. 2

2.5 Ukázky dialogů

E: „Rozumíte tomu?“ $D1$: „Jasně. No napíšu tam čísla.“ E: „Je to lehké?“ $D1$: „Čísla do 10.“ E: „Ale nemůžeš je tam napsat, jak chceš.“ $D1$: „Musej se přeházet. ... To je divný, vono to nejde.“ E: „Myslíš, že to nemá řešení? Tak mě o tom musíš přesvědčit.“ $D1$: „Ale vono to řešení má, že jo? ... Tak mi to řekněte.“

E: „Chceš poradit?“ $D2$: „Ne. ... Je tam chyba? (*E kývá, že ano*). Proč to mám blbě?“ E: „Musíš splnit obě podmínky najednou: ani o jednu menší a přitom ani ze stejné n-násobilky.“ $D2$: „Aha, ne jedno nebo ... (druhé) ... To se musí víc přemejšlet.“

$D3$: „Jak to, že 10 nejde ani sem, ani sem, ani tady ... ?“ E: „Víš, co jsi objevil?“ $D3$: „Něco jsem objevil!? ... No, tak těch deset budu zkoušet na další místa ... No jóóó, jen tady! Tak ... možná najdu další takový divný číslo (jako 10) ... “

Podobně jako u úlohy 1 i zde došlo v první fázi k podcenění obtížnosti úlohy. Řešení vyžadovalo dobrou orientaci v rovině, schopnost zpracovat dvě podmínky ve vztahu konjunkce, dobrou orientaci v násobcích čísel v oboru malé násobilky, rychlé vybavování číselné řady přirozených čísel jak v přirozeném, tak sestupném ostrém lineárním uspořádání. Podcenění úlohy vedlo k vyblokování usuzování nejméně v prvních 20 sekundách a první reakce byly poměrně rychlé ve snaze zaplnit co nejdříve všechna pole, přičemž byla vynechána zpravidla jedna z obou podmínek: stabilně táž, nebo se podle okolností skákalo z jedné podmínky na druhou. V prvních reakcích se neliší VŠ studenti od dětí, avšak studenti v průměru výrazně rychleji sami přecházejí k pokusu-omylu, k usuzování a stanovování dílčích hypotéz, méně potřebují oporu, i když i zde padají dotazy, zda má úloha řešení a případně kolik. U této úlohy se jim nezdá fér hledat argumenty, proč má podle nich právě tolik řešení a ne více. Diskuse u studentů se točí více kolem této problematiky. Více než děti mají studenti potřebu tiše komentovat vlastní postupy.

2.6. Použité dětské strategie

a) *Strategie pokus-omyl provázená opakovanými opravami* v tabulce gumováním nebo použitím nové tabulky. Tato strategie většinou nevedla k řešení a pokud náhodně žáci na řešení přišli, nebyli si jisti, zda je správné, nedávali vyplnění tabulky do souvislosti s oběma podmínkami. U nadprůměrných chyběla argumentace, spíše se podivili, že to „asi vychází“.

b) *Vnesení systému* do experimentování zpravidla *s volbou čísla do vrchního čtverce* a variování číslic na zbylých pozicích (když bude nahoře dvojka, pod ní může – musí být . . .). Obdobou této strategie je *formace dolního řádku čtverců* – zřejmě u takzvaných konstrukčních typů žáků (Atkinsonová), kteří používají jinou spolupráci hemisfér mozku než typ postupující shora. Tito žáci vycházejí ze čtveřice čísel relativně náhodně zvolených, u které jsou provedeny následné úpravy (2, 5, 7, 8 → 2, 7, 5, 8) zpravidla v jejich pořadí. Východiskem je výběr jednoho pole a uvažování o jeho obsazení.

c) *Uvažování o* 4 *čtvercích* „na hřebenu svahu“ zpravidla v souvislosti s *charakteristikou čísel sudá-lichá* nebylo voleno často, u 50 % řešitelů vedlo k úspěchu. Tyto čtverce mají „málo“ sousedů, a tudíž je nutné je obsadit sudými čísly. Na tento krok navazovala idea soused sudý-lichý. Dominanta je v uvažování o rozmístění polí v tabulce a teprve po té o druhé podmínce.

d) *Uvažování o čtvercích z pohledu počtu sousedů* a v důsledku toho uvažování o jednotlivých číslech, která další čísla mohou tvořit jejich sousedy, mělo nejvyšší úspěšnost. Klíčovým výstupem této úvahy, vedoucí k úspěchu, je vymezení polí s jedním sousedem nebo čtyřmi sousedy.

e) *Vyhodnocení čísel podle počtu možných sousedů* a následné uvažování o jejich vzájemném umístění v tabulce (např. Toník): **10** / 1, 3, 7; **9** / 7, 5, 4, 2, 1; **7** / 10, 9, 5, 4, 3, 2, 1; **6** / 1; **5** / 9, 8, 7, 3, 2, 1; **4** / 9, 7, 1; **3** / 10, 8, 7, 5, 1; **2** / 9, 7, 5; **1** / 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2. Východiskem se stala *druhá podmínka.* Zaměřenost řešitele se koncentruje zpravidla na číslo 6 a jeho následné umístění do jednoho ze dvou „ocásků“. Tato strategie nebyla u všech úspěšná, a to ze dvou důvodů: chyběla koncentrace a trpělivost v následném experimentování a uvažování. U čtyř prokazatelně nadprůměrných žáků, tedy u 6 % došlo k opuštění řešení z důvodů poklesu motivace – odkryli klíč k řešení a uvědomovali si, že nyní je nalezení výsledku pouhá otázka času (což sami komentovali „teď už je to jasný“, „je aha . . . ale mě se už nechce, že nemusim, rači to řeknu“ apod.). Pouze u dvou řešitelů, t.j. u 3 % došlo k uvažování o tom, které z čísel může obsadit pole se 4 sousedy. Oba byli v řešení úspěšní. Obměnou této strategie byla orientace na dvojice čísel, které *vedle sebe být nemohou.* Tato varianta rozdělila řešitele do dvou skupin – početnější skupina 7 žáků (11 %) k řešení nedospělo přes množství „nevhodných dvojic“ – vylučovací metoda se ukázala neekonomická. Pouze dva žáci (3 %) nevhodných dvojic využili jako oporu paměti s tím, že celá následná úvaha byla provedena polohlasem bez dalších grafických pomocných záznamů, jen s dotýkáním se prstu polí v tabulce. Tato egocentrická řeč (Vágnerová 2000) byla pro tyto žáky opakovaně důležitá (srovnej řešení úlohy 1) a je pro ně i nadále podstatnou formou řešení, respektive podmínkou vedoucí s vyšší pravděpodobností ke správnému výsledku. U posledně zmíněných je diskutabilní hovořit o jediné strategii.

f) *Vytvoření řady čísel v přirozeném uspořádání* od 1 po 10 s tím, že řešitelé uvažovali buď nahlas o vhodných dvojicích, nebo vyznačovali různým spojováním vhodné dvojice čísel. Východiskem byla první podmínka. Tuto strategii nepoužil nikdo z později úspěšných žáků a tato strategie nebyla z 50 % úspěšná.

3 Závěry

Pokud sledujeme *nejméně dva roky* žáky po řešení první úlohy, můžeme vidět, že všech 12 žáků (8 chlapců a 4 dívky, kteří našli dvě řešení) patří i na druhém stupni mezi nejlepší v matematice. S nejméně dvouletým odstupem času lze konstatovat, že úspěšnost v řešení této úlohy ve třídě není jediným znakem signalizujícím nadprůměrnost. Mezi i později úspěšné žáky patří i dva z těch, kteří úlohu dořešili doma (rozhodně nepatří mezi soutěživé typy). Mezi žáky, kteří i později vykazovali nadprůměrné výkony, byli 3 žáci, kteří našli ve třídě jedno řešení a druhé našli doma. Sami uvedli, že se raději soustředí v klidu. Úloha se jim líbila. Mezi nadprůměrné se řadily i dvě žákyně, které našly jen jedno řešení a po druhém nepátraly ani doma. Je nutné zdůraznit, že do Klubu přátel matematiky (KPM) chodí žáci, které práce v KPM baví, a to neznamená, že by museli být tím pádem nadprůměrní.

Sledujeme-li dále žáky z KPM a vyčleníme z nich ty, kteří se i později jeví jako nadprůměrní, vidíme, že během práce v KPM na prvním stupni vykazovali u zkoumaných úloh již řadu určitých specifik. Co však všechny vysoce nadprůměrné žáky v úloze 1 spojuje, je po opuštění strategie a) přechod k jedné z kombinací strategií b), c), d), nebo b), c), e). Naopak nelze říci, že kdo použil tuto kombinaci, by pak nutně měl i na druhém stupni vykazovat nadprůměrné výkony.

Nalezená řešení úlohy 2 lze rozdělit do dvou skupin:

1) *Náhodně objevené řešení* (u menšiny dětských řešitelů) blokující pokusy o hledání případných dalších řešení, a to bez ohledu na pozdější úspěchy v matematice.

2) *Hledání a použití strategie* nevedlo k úspěchu, pokud bylo omezené na jednu podmínku, což se stalo u dvou nadprůměrných žáků, pro

něž ovšem (po opakování téže chyby v úloze 3) došlo k poučení a zvýšené koncentraci na podmínky v zadání. Nadprůměrní žáci ve většině případů pracovali sice s jednou podmínkou na začátku, avšak v dalším kroku dělali selekci prvních možností s následným použití síta skrze *další podmínku.* U nadprůměrných žáků se vyskytovalo převážně jako první vyhodnocení druhé podmínky (násobky) a teprve pak výběr/vyloučení čísel, která vedle sebe být mohou/nemohou. Pouze žáci takto postupující (8 žáků, tedy 13 %) uvažovali o tom, jak jinak tabulku vyplnit. Jistým způsobem to svědčí o ekonomičnosti použité strategie; neunavila je a neodradila od dalšího hledání. U všech úspěšných řešitelů způsob zápisu nehrál roli; forma a rozvržení poznámek u nadprůměrných žáků nevykazovaly významné shody. Oproti úloze 1 u této úlohy žáci používali více *strukturovaných poznámek.* Vhodnost či nevhodnost poznámek je zde *záležitost značně individuální.* V letech po sobě jdoucích se u úlohy 2 vyskytují podobné poznámky, ale určitý typ poznámek nezaručuje (ne)úspěch. U slabších žáků bylo možné zaznamenat určitý zmatek z toho, že nejsou ze školy zvyklí dělat si k aritmetickým úlohám svoje poznámky (často mají i u slovních úloh předepsáno, jak poznámky dělat). Nadprůměrní žáci si od počátku vytvářeli poznámky tak, aby jim umožnily informace dále zpracovat, což se projevovalo relativně vyšším počtem škrtů, které nebyly projevem hledání řešení, ale vhodnosti – přehlednosti poznámek k nápadům pro řešení úlohy (tatáž strategie s různou podobou zápisu). Ti žáci, kteří byli úspěšní v rámci práce v KPM v úlohách kombinatorického charakteru (kde stačilo najít systém a vypisovat možnosti), nebyli automaticky úspěšnými řešiteli úlohy 2. Hledání možností vyplňováním tabulky (jde také o práci s možnostmi) – strategie a) – zde nestačilo. Významná se v úloze 2 ukázala *schopnost adaptovat se na nové podmínky* (nikoli práci se dvěma podmínkami) a řešit úlohu nikoli slovní, avšak vyžadující také *vytvoření poznámek.*

I když se obě úlohy zdály podobné, úspěšnost řešení nebyla vázána na tytéž strategie. Naopak neúspěšnost řešení měla řadu styčných bodů, což by mohlo obohatit práci učitelů.

Literatura

[1] Atkinsonová, L. R. a kol.: *Psychologie.* Victoria Publisching, Praha, 1995.

[2] Kaslová, M: Úlohy vhodné pro nadprůměrné žáky prvního stupně. In: Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.): *Dva dny s didaktikou matematiky 2006*, PedF UK, Praha, 2007.

Vývoj nových forem péče o talenty [1]

Josef Molnár, PřF UP Olomouc [2]
Libor Kvítek, PřF UP Olomouc [3]

ABSTRAKT. *Článek pojednává o nových přírodovědných soutěžích na Univerzitě Palackého v Olomouci, jako jsou Přírodovědný klokan, Fermiho úlohy, Věda je zábava, Věda v éteru, Turnaj měst, Mladý vynálezce, Chemické workshopy atd.*

Zájem o přírodovědné obory bohužel klesá. Proto jsme se my, pracovníci Univerzity Palackého v Olomouci, rozhodli hledat atraktivní formy práce s mládeží v oblasti soutěží. Zaměřili jsme se přitom na následující oblasti:

- *Věda je zábava*: Kolektivní soutěž formou přírodovědných kroužků s prezentací výsledků na závěrečné soutěžní konferenci.
- *Přírodovědný klokan*: Soutěž odvozená od populární mezinárodní soutěže Matematický klokan.
- *Věda v éteru*: Interaktivní soutěže pro jednotlivce i kolektivy přes Internet – MKS, OlFyS, L@byrint.
- *Bavíme se s přírodou*: Popularizace přírodních věd formou zábavně soutěžních jednorázových akcí typu Jarmark Ch–F–M, Letní škola mladých chemiků, fyziků a matematiků, Běh s Klokanem a jiné.
- *Turnaj měst*: Postupné začlenění ČR do mezinárodní soutěže, která je vhodná pro třídní kolektivy kombinované případně i z více škol.
- *Středoevropská matematická olympiáda*: MMO v regionu Střední Evropy.
- *Hrátky s matematikou*: Jednoduché matematické soutěže a projekty v rámci třídy, resp. školy, (etapové soutěže jednotlivců a skupin) pro 1. a 2. stupeň ZŠ (víceletá gymnázia) s možností zapojení i handicapovaných žáků.

---

[1] Zpracováno v rámci řešení projektu „STM Morava aneb Věda v přímém přenosu“, který je pod číslem 2E06029 podporován MŠMT ČR v rámci Národního programu výzkumu II.

[2] e-mail: molnar@inf.upol.cz

[3] e-mail: libor.kvitek@upol.cz

- *Mladý vynálezce*: Tvůrčí soutěž charakteru vyžadující aktivní práci soutěžícího se souborem vstupních dat (Fermiho problémy) či vytvářejícího novou realitu (Vynálezce).
- *Badatel*: SOČ v novém hávu – středoškolský student ve spolupráci s vysokoškolským učitelem – vědcem.
- *Věda z „výšky“*: Studentské vědecké soutěže na VŠ ve formě vědecké konference.
- *Chemické workshopy*: Netradiční chemické kompetitivní workshopy – inovativní forma afektové výuky a její pedagogické hodnocení.
- *Časopisy*: Přča, PřírodoVědník.

Věnujme se nyní některým výše zmíněným aktivitám podrobněji.

Přírodovědný klokan

Cílem soutěže je popularizovat přírodovědné obory mezi mládeží, vzbuzovat a podporovat zájem žáků a studentů o tyto obory, prezentovat jejich zajímavost a užitečnost. První ověřovací ročník soutěže Přírodovědný klokan se v ČR uskutečnil 25. 4. 2007, a to v kategoriích Kadet (8. a 9. ročník ZŠ, 14–15 let) a Junior (I. a II. ročník SŠ, 16–17 let). V každé kategorii bylo zadáno 24 úloh a na jejich vyřešení měli soutěžící 45 minut čistého času. Řešili například i takovéto úlohy:

Kategorie Kadet

2. Nejvíce znaků blízkých člověku můžeme nalézt

(A) u gibona (B) u gorily (C) u šimpanze (D) u makaka (E) u orangutana

4. Mezi kovy nepatří

(A) rtuť (B) hořčík (C) zinek (D) křemík (E) cín

5. Kolik má „dodekaedr“ stěn?

(A) 4 (B) 6 (C) 10 (D) 12 (E) 20

6. Největší hustotu má voda při teplotě

(A) 10 °C (B) 4 °C (C) 0 °C (D) −4 °C (E) −10 °C

7. Ve kterém jazyce znamená „kangourou“ klokan?

(A) anglický (B) německý (C) francouzský (D) polský (E) estonský

8. Rybář ulovil kapra, jehož ocas vážil 1 libru, hlava tolik, co ocas a půl těla dohromady, a tělo tolik, co hlava a ocas dohromady. Celý kapr vážil

(A) 6 liber (B) 8 liber (C) 10 liber (D) 12 liber (E) 14 liber

10. Která odpověď na otázku „Kolik kostí a svalů má člověk“ je nejpřesnější?

(A) člověk má 200 kostí a 600 svalů
(B) člověk má 600 kostí a 200 svalů
(C) člověk má 300 kostí a 300 svalů
(D) člověk má 250 kostí a 250 svalů
(E) člověk má 250 kostí a 400 svalů

13. Kryštof Kolumbus objevil Ameriku roku

(A) 1592 (B) 1515 (C) 1352 (D) 1392 (E) 1492

14. Martin, jehož oči jsou ve výšce asi 150 cm od Země, určoval výšku topolu před školou pomocí odrazu v kaluži. Zjistil, že kaluž je ve vzdálenosti 20 m od topolu a když stojí 3 m od kaluže, vidí v kaluži odraz vrcholu stromu. Topol je vysoký asi

(A) 15 m (B) 20 m (C) 10 m (D) 6 m (E) 22 m

15. Mezi metody, které slouží k oddělování složek směsí, nepatří

(A) rekrystalizace (B) extrakce (C) destilace (D) titrace
(E) chromatografie

19. Mezi zeleninu, kterou konzumujeme z čeledi lilkovitých (Solanaceae), patří

(A) pažitka, pór (B) okurka, patison (C) brokolice, květák
(D) paprika, rajče (E) petržel, celer

20. Vynálezce parního stroje James Watt se k výrobě parních strojů spojil s bohatým birminghamským majitelem továrny Boultonem. Při získávání nových zákazníků bylo důležité vyjádřit, kolik koňských sil jejich vynález majitelům dolů ušetří. Změřili, že silný kůň vytáhne za 1 s 75 l vody z hloubky jednoho metru. Tak vznikla jednotka výkonu 1 kůň. Kolika wattům odpovídá výkon 10 koní? (Tíhové zrychlení je $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, hustota vody je $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.)

(A) 750 W (B) 7 500 W (C) 1 500 W (D) 15 000 W (E) 5 000 W

21. Pro atom, který má nukleonové číslo 12, určitě platí, že jeho jádro se skládá z

(A) 12 neutronů (B) celkem 12 protonů a neutronů
(C) celkem 12 neutronů a elektronů (D) 12 elektronů (E) 12 protonů

22. Které sdělení je správné?

(A) největším kloubem u člověka je kloub kolenní a nejpohyblivějším kloubem je kloub ramenní

(B) největším kloubem u člověka je kloub ramenní a nejpohyblivějším kloubem je také kloub ramenní
(C) největším kloubem u člověka je kloub kyčelní a nejpohyblivějším kloubem je kloub kolenní
(D) největším kloubem u člověka je kloub kyčelní a nejpohyblivějším kloubem je kloub ramenní
(E) největším kloubem u člověka je kloub kolenní a nejpohyblivějším kloubem je kloub loketní

23. Jaké množství vody vznikne spálením 10g plynné směsi vodíku a kyslíku v ideálním poměru?

(A) 100 g (B) 1 kg (C) 0,1 g (D) 10 g (E) 1 g

Kategorie Junior

1. Na proužek papíru délky 1 m zakreslíme nejprve značky, které jej rozdělí na 4 stejně dlouhé části a potom další značky, které jej rozdělí na 3 stejně dlouhé části. Pak tento proužek rozstříháme v každém místě, kde je nějaká značka. Kolik různých délek mají takto vzniklé proužky?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

2. Která z následujících organel je společná rostlinným i živočišným buňkám?

(A) chloroplasty (B) buněčná stěna tvořená celulózou (C) vakuoly (D) mitochondrie (E) leukoplasty

10. Mezi prokaryotické organismy patří

(A) prvoci (B) houby (C) rozsivky (D) řasy (E) sinice

13. Letos 31. března jsme si připomněli 280. výročí úmrtí jednoho z největších fyziků všech dob (připomenout jsme si ho mohli i 20. března, neboť v jeho zemi ještě tehdy platil juliánský a ne náš dnešní gregoriánský kalendář). Tímto slavným velikánem je

(A) Albert Einstein (B) Thomas Alva Edison (C) Galileo Galilei
(D) Isaac Newton (E) André-Marie Ampère

14. Stavebnice obsahuje pouze díly tvaru kvádru o rozměrech $2 \times 3 \times 1$. Jaký nejmenší počet těchto dílů potřebujeme k sestavení krychle?

(A) 6 (B) 12 (C) 36 (D) 216 (E) 288

17. Které látky zastavují buněčné dělení?

(A) kancerogeny (B) cytostatika (C) antihistaminika (D) antibiotika
(E) antiseptika

18. Kolik litrů horké vody o teplotě 80 °C je třeba přilít do vany, ve které je 80 litrů vody o teplotě 20 °C, aby teplota byla 40 °C?
(A) 20 litrů (B) 30 litrů (C) 40 litrů (D) 50 litrů (E) 60 litrů

23. Látkové množství je dáno
(A) součinem hmotnosti a molární hmotnosti
(B) součinem hmotnosti a molární koncentrace
(C) podílem hmotnosti a molární hmotnosti
(D) podílem molární hmotnosti a hmotnosti
(E) součinem molární hmotnosti a druhé mocniny hmotnosti

Správná řešení některých úloh

Kadet: 2 C, 4 D, 5 D, 6 B, 7 C, 8 B, 10 A, 13 E, 14 C, 15 D, 19 D, 20 B, 21 B, 22 A, 23 D
Junior: 1 B, 2 D, 10 E, 13 D, 14 C, 17 B, 18 C, 23 C

Fermiho úlohy

Soutěžící dostanou k vyřešení několik tzv. Fermiho úloh a pokusí se je ve vymezeném čase s pomocí dostupných informačních zdrojů vyřešit. Soutěžící řeší všechny zveřejněné úlohy daného kola. První a druhé kolo probíhá korespondenčně. Do druhého kola se mohou zapojit i ti, kteří se prvního kola nezúčastnili. Soutěží se ve dvou kategoriích – ZŠ, SŠ, a to zvlášť jednotlivci a zvlášť kolektivy. Kritérii hodnocení jsou přesnost výsledného odhadu, počet doplňujících kroků k vyřešení úlohy, doplňkové otázky a hledání odpovědí na ně, originalita a způsob prezentace výsledků řešení.

Soutěžící řeší např. tyto úlohy:

První kolo (proběhlo v termínu říjen–listopad 2006)

1. Kolik zrnek fazole vyplní jednolitrovou sklenici (odměrný válec)?
2. Jaká je hmotnost (v kilogramech) všech žáků vaší školy?
3. Kolik vlasů má na hlavě průměrně dospělý člověk?
4. Kolik energie je potřeba k tomu, abychom uvedli do varu vodu ve všech světových oceánech?
5. Kolik váží plně naložený Boeing 747?
6. Kolik času stráví používáním mobilního telefonu žák vaší školy průměrně za 1 rok?
7. Kolik 100 W žárovek má stejnou energii jako Slunce?

Vybraná žákovská řešení

1. *Kolik zrnek fazole vyplní jednolitrovou sklenici?*

Nalili jsme do odměrného válce 30 ml vody a jedna fazole zvedla hladinu vody o 0,5 ml.

1 fazole . . . 0,5 ml
20 fazolí . . . 10 ml
$10\,\mathrm{ml} \cdot 100 = 1\,000\,\mathrm{ml} = 1\,\mathrm{l}$
20 fazolí $\cdot\, 100 = 2\,000$ fazolí
Do 1 l nádoby se dá vložit cca 2 000 fazolí.

3. *Kolik vlasů má na hlavě průměrně dospělý člověk?*

Pro výpočet povrchu hlavy použijeme výpočet povrchu koule pomocí jejího průměru.

$S = \pi d^2$
$S = 3{,}14 \cdot 162\,\mathrm{cm}^2 = 803\,\mathrm{cm}^2$
803 cm^2 je 100 % povrchu hlavy.
Vlasy zabírají asi 40 % hlavy, 40 % činí přibližně 321 cm^2.
Na 1 cm^2 povrchu hlavy připadá cca 300 vlasů.
$321 \cdot 300 = 96300$ vlasů
Odhadem má dospělý člověk na hlavě 96 300 vlasů.

4. *Kolik energie je potřeba k tomu, abychom uvedli do varu vodu ve všech světových oceánech?*

Abychom uvedli vodu do varu, musíme jí dodat teplo $Q = mc(t - t_0)$.
$Q = 1 \cdot 4\,180 \cdot (100 - 18)\,\mathrm{J} = 342\,760\,\mathrm{J}$
K uvedení 1 l vody (hmotnost 1 l vody je 1 kg) o teplotě přibližně 18 °C do varu musíme dodat teplo 342 760 J.
V oceánech je 13 608,1 hl vody = 13 608 100 l, hmotnost vody je tedy $m = 13\,608\,100\,\mathrm{kg}$.
$Q = 13\,608\,100 \cdot 4\,180 \cdot (100 - 18)\,\mathrm{J} = 4\,664\,312\,356\,000\,\mathrm{J}$
K tomu, abychom uvedli do varu vodu ve všech světových oceánech, potřebujeme energii přibližně 4 664 GJ.

6. *Kolik času stráví používáním mobilního telefonu žák vaší školy průměrně za 1 rok?*

Kolik času stráví průměrně jeden žák používáním mobilního telefonu za den? 15 min.
Kolik času stráví průměrně jeden žák používáním mobilního telefonu za rok? $365 \cdot 15$ min $= 5\,475$ min.
V přepočtu na hodiny je to 91 h 25 min.

Jeden žák naší školy stráví používáním mobilního telefonu za rok odhadem 91 h 25 min.

Druhé kolo (leden–březen 2007)

1. Kolik elektronů projde průřezem vlákna žárovky během jednoho dne, bude-li žárovka svítit celých 24 hodin?
2. Jakou dobu v sekundách by potřeboval zvuk signalizující výbuch sopky, aby oběhl celou Zemi?
3. Kolik zrnek rýže snědli obyvatelé Prahy za posledních 10 let?
4. Nová hvězda byla objevena ve vzdálenosti 4 světelných let od Země. Jak velký je objem koule o poloměru 4 světelných let (v km^3)?
5. Kolik atomů obsahuje krystal chloridu sodného o hraně délky 2 cm?
6. Kolik kilogramů CO_2 vznikne spálením 1 tuny surové ropy?
7. Jak velká hromada tisícikorun by vznikla, kdyby vám někdo zaplatil za každý atom železa ve vašem těle 10 Kč?

Třetí kolo – FINÁLE – bylo naplánováno na 25. 5. 2007 na PřF UP v Olomouci.

Součástí vývoje a výzkumu nových forem péče o talenty je ověřování účinnosti působení těchto aktivit na žáky a studenty i zjišťování názorů učitelů a dalších pedagogických pracovníků školské praxe zapojených do realizace zmíněných aktivit. Na základě zpracovaných výsledků šetření psychologů a pedagogů budou jednotlivé formy práce o talenty modifikovány a dále ověřovány. Zájem o podporu přírodovědných oborů dokazují i materiály zpracované praktiky i teoretiky z Velké Británie, Rakouska, Slovenska a České republiky v rámci projektu Socrates–Comenius „PROMOTE MSc“ i právě se v Gruzii formující světovou asociací národních pořadatelů přírodovědných soutěží s důrazem na Přírodovědného klokana.

Literatura

[1] Nezvalová, D., Molnár, J.: *Provide Motivation Through Exciting Materials in Mathematics and Science, Sample Units.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2006.

[2] Opatrný, T., Kvítek, L., Fadrná, V., Menzelová, R. (eds.): *Sborník konference Nové metody propagace přírodních věd mezi mládeží.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2006.

[3] `http://isouteze.upol.cz`

[4] `http://matematickyklokan.net`

[5] `http://souteze.upol.cz`

Tabulky fyzikálních veličin

Karel Popp[1]

Abstrakt. *Součiny mocnitelů základních veličin určují rozměry i ostatních veličin. Uspořádanou n-tici mocnitelů můžeme považovat za polohový vektor v n-rozměrném prostoru. Operacím s veličinami odpovídají příslušné operace s vektory.*

Veličiny jako vektory

Základních veličin (ZV) je v Mezinárodní soustavě veličin (ISQ) a jednotek (SI) sedm. Od nich odvozujeme různými způsoby veličiny další. Rozměr každé veličiny je určen n-ticí ($n = 7$) mocnitelů ZV za předpokladu, že ZV jsou vždy seřazeny stejným způsobem. Takovou n-tici můžeme považovat za polohový vektor (PR) mřížového bodu 7-rozměrného prostoru (7D). Složky tohoto PR jsou až na málo záludných výjimek (např. rozměr vlnové funkce v 3D) celá čísla.

Název veličiny (terminus technicus) v každém jazyce určuje tuto veličinu jednoznačně a ta má jednoznačně určen svůj rozměr. Mezi rozměry, polohovými vektory a jejich koncovými (mřížovými) body existuje vzájemně jednoznačné přiřazení. Mezi veličinami a rozměry však přiřazení jednoznačná být nemusejí. Různé veličiny mohou mít týž rozměr (práce, energie, teplo, moment síly, …). Lze si snadno představit rozměr, pro který nebyla zatím žádná veličina zavedena. Vztah míti stejný rozměr je ekvivalencí na množině veličin, ale nikoliv rovností.

Rozměru násobku veličin odpovídá v tomto znázornění součet jim příslušejících PR. Integrál (díky členu dq) zvětší o jednu mocnitele veličiny q, přes kterou se integruje. Křivkový integrál tedy zvětší mocnitele délky o jednu, plošný integrál o dvě a objemový integrál o tři. Převrácené hodnotě veličiny odpovídá PR opačný, tedy středově souměrný podle počátku, který odpovídá nulovému vektoru. Proto se dělení veličinou projeví jako odčítání jí odpovídajícího PR. Derivace první, obyčejná i parciální, sníží o jednu mocnitele příslušné veličiny. Při užití gradientu, rotace nebo divergence se tedy sníží o jednu mocnitel délky, užití Laplaceova operátoru snižuje mocnitele délky o dvě. Sčítat, odčítat nebo porovnávat

---

[1] e-mail: poppk@post.cz

v rovnici lze pouze veličiny stejného rozměru. Vzájemné přiřazení PR a rozměru je příkladem izomorfizmu.

Zjednodušení

Pro odvození žádné veličiny nepotřebujeme všech sedm ZV. Navrhuji jedno zobrazení pro mechaniku, tj. tabulku veličin odvozených od délky, času a hmotnosti (LTM), dále dvě tabulky pro elektřinu, tj. pro veličiny odvozené za prvé od délky, času, hmotnosti a proudu (LTMI), za druhé od napětí, proudu, délky a času (UILT). Pro mechaniku stačí zobrazit mřížové body (jejich PR) v 3D. Pro elektřinu potřebujeme 4D. Protože se ve všech těchto tabulkách vyskytuje délka i čas, neuškodí sestavit nejdříve pomocnou tabulku (LT) v 2D. Veličiny, definované pomocí teploty, látkového množství nebo svítivosti, nepůsobí zvláštní potíže. Tento nápad by snad mohl usnadnit kontrolu při překladech z jednoho jazyka do druhého nebo při tvorbě slovníků.

Mocniny ZV

Nultá mocnina vždy značí veličinu bezrozměrovou, tedy číslo (jedná se např. o počet kusů nebo o poměr veličin téhož rozměru). První mocnina veličiny je táž veličina, minus první mocnina označuje její převrácenou hodnotu.

Zaměříme-li se na mocniny délky, vytvoříme tuto 1D tabulku:

(−3) převrácená hodnota objemu (1/objem)

(−2) 1/ plošný obsah

(−1) 1/délka, optická mohutnost

(0) číslo, . . .

(1) délka (i vlnová), hloubka, výška, šířka, statický moment (M1) nehmotného bodu

(2) (plošný) obsah, M1 úsečky nebo oblouku nebo moment setrvačnosti (M2) nehmotného bodu

(3) objem nebo M1 plošného obrazce nebo M2 úsečky nebo oblouku

(4) M1 objemu nebo M2 plošného obrazce

(5) M2 objemu

Pro mocniny času dostaneme:

(1) čas, perioda, poločas rozpadu

(0) číslo, ...

(−1) frekvence

(2) časová změna frekvence

(−3) časová změna předcházející veličiny

Obdobně si budeme počínat při konstrukci tabulek ostatních ZV.

Tabulka LT

Zkřížíme-li tabulku pro mocniny délky (L) s tabulkou pro mocniny času (T), budeme v ní moci pomocí vektorů zobrazit nejen délku $(1, 0)$, objem $(3, 0)$, frekvenci $(0, -1)$, ale také rychlost $(1, -1)$, zrychlení $(1, -2)$ nebo čtverec rychlosti $(2, -2)$. První složka vektoru se bude rovnat mocniteli délky a druhá mocniteli času. Tabuka LT bude základem pro konstrukci dalších vícerozměrných tabulek.

Tabulka LTM

Tato tabulka vznikne zkřížením tabulky LT s tabulkou hmotnosti (M) a umožní kromě již dosaženého zobrazit i sílu $(1, -2, 1)$, práci $(2, -2, 1)$, výkon $(2, -3, 1)$ nebo i spoustu jiných veličin. První složka značí mocnitele délky, druhá času, třetí hmotnosti. Na pořadí zřejmě záleží. Toto pořadí užívá ve své knize Grössen (Kienle, 1994). Liší se tím od mnoha autorů jiných, ale pro to, oč usiluji, se mi toto pořadí zdá výhodnější.

Každému mřížovému bodu přiřadíme „nálepku“, která jej reprezentuje a nese informaci o této veličině. Bude mít zpravidla tvar obdélníkového políčka na obrazovce nebo na papíře. Tam zřídíme terčík, na který bude možno kliknout, aby se obsah „nálepky“ rozprostřel po celé obrazovce. Tento obraz by mohl obsahovat další terčíky pro vysvětlení a doplnění dalších podrobností. Tuto vymoženost by bylo záhodno vybavit zařízením pro návrat do předcházejících úrovní. Znalost veličin můžeme procvičovat i tak, že na tabulce budeme hrát jakési pseudopexeso, jehož popis se objeví v příští verzi.

Tabulku LTM možno použít samostatně i jako podklad pro tabuly o více rozměrech než tři. Při samostatném použití nutno rozčlenit každé políčko tabulky LT na tři části podle toho, zda je mocnitel hmotnosti roven $-1, 0, +1$. Můžeme si představit, že na každé políčko tabulky LT postavíme domeček, ve kterém veličiny s různými mocniteli hmotnosti ubytujeme po řadě do sklepa, do přízemí a do 1. patra. Víc zatím nepotřebujeme, i když víme, že ve vzorci pro přitažlivou sílu vystupuje součin dvou hmotností. Stačí, když se mocnitelé délky budou měnit jen od -3 do $+3$. Mocnitel 5 momentu setrvačnosti objemu zde již nebudeme potřebovat, ani mocnitel 4.

Různé možnosti grafického provedení ukáží obrázky. Rozměry veličin, vystupujících v této tabulce, můžeme označit příslušnými vektory. Bez ztráty informace můžeme vynechat obě závorky. Pokud se budou složky (mocnitelé) pohybovat v jistých mezích, můžeme vynechat i čárky mezi nimi. Znaménka minus se můžeme zbavit různým způsobem: místo $-1, -2, -3, -4$ můžeme psát $1, 2, 3, 4$ bíle na černém, nebo k nim přičíst 10, čímž dostaneme $9, 8, 7, 6$. Pak bychom s nimi počítali modulo 10. Doplňky do 10 se objeví po složkách v rozměrech veličin vzájemně reciprokých. Délka by byla zakódována jako 100, objem jako 300, hmotnost jako 001, frekvence jako 090, objemová hustota jako 701. Rychlost, zrychlení, sílu, práci, výkon, povrchové napětí a tlak zakódujeme tedy po řadě jako $190, 180, 181, 281, 271, 081$ a 981. Všimneme si, že kódy pro práci, sílu, povrchové napětí a tlak se liší pouze v první složce svých PR, tedy v mocnitelích délky.

Elektřina

Pro rozlišení těchto veličin potřebujeme čtyři souřadnice, tedy čtyři ZV. Někdy se setkáme se čtveřicí: délka, čas, hmotnost a proud (LTMI). Jindy se bude hodit čtveřice: napětí, proud, délka, čas (UILT). Co ale udělat s jejich pořadím, aby se snadno pracovalo nebo aby to nebylo proti srsti ustáleným zvyklostem? Co je pro koho důležitější? Padá v úvahu i jiná čtveřice, třeba s nábojem jakožto se ZV místo proudu? Obecným problémem zase bude dostat polohový vektor z D4 na papír nebo na obrazovku do 2D. Způsobů je mnoho, snad nelze vyjmenovat, porovnat a ohodnotit všechny. Proč se nezamyslet nad množinou vektorů? Počáteční i koncový bod každého mají po dvou souřadnicích jako zápis tahu v korespondenčním šachu. Co už je známo? Co napadne jiné snaživce? Z toho, co jsem dosud zkoušel, mne zaujaly dvě možnosti. První (LTMI) připomíná tradiční způsob zápisu rozměrů veličin. Druhá (UILT) umožňuje snáze postřehnout užitečné souvislosti.

LTMI

Zde jsou jednotky m, s, kg, A. Sestrojíme nejdříve dosti prostornou tabulku LT. Vyskytuje-li se první mocnina hmotnosti ve znázorňované veličině, orámujeme příslušné políčko plnou čarou. Při dělení hmotností užijeme čáru přerušovanou. Pak do políčka zapíšeme mocnitele proudu nebo pro různé jeho mocnitele zavedeme různé znaky, třeba hvězdičky nebo trojúhelníčky. Překvapilo mne, že se políčka se stejným mocnitelem hmotnosti shlukují do větších bloků a že až na výjimky do každého políčka zapadne nejvýš jediná dvojice mocnitelů hmotnoti i proudu.

UILT

Zde jsou jednotky V, A, m, s. Vytvoříme mříž s třikrát třemi zahrádkami. Do každé umístíme tabulku LT. V pravém sloupci vynásobíme všechny tři LT tabulky napětím (V) se vším, co obsahují, v levém sloupci budeme napětím dělit. V horní řadě budeme vše proudem (A) násobit, v dolní řadě dělit. Zahrádky můžeme pojmenovat podle rozměrů jejich řídících veličin, to jest podle toho, co se nyní objeví všude tam, kde před úpravou v tabulkách LT byl PR (0,0), to jest:

$$\begin{array}{lll} \{\mathrm{A/V} = \mathrm{S}, & \mathrm{A}, & \mathrm{VA} = \mathrm{W}\} \\ \{1/\mathrm{V}, & 1, & \mathrm{V}\} \\ \{1/(\mathrm{VA}) = 1/\mathrm{W}, & 1/\mathrm{A}, & \mathrm{V/A} = \Omega\} \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{c} \{(-1,1),(0,1),(1,1)\} \\ \{(-1,0),(0,0),(1,0)\} \\ \{(-1,-1),(0,-1),(1,-1)\} \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{c} \{91,01,11\} \\ \{90,00,10\} \\ \{99,09,19\} \end{array}$$

Dvojice mocnitelů napětí a proudu je v každé zahrádce všude stejná. Totéž platí po přepočtení i pro mocnitele hmotnosti a proudu. Rozměr veličiny je pak určen zahrádkou a mocnitely délky a času. Prostřední tabulka je vlastně LT, vynecháme-li nuly na začátku. V tabulkách pro W a 1/W vystačíme s jednotkami m, s, kg. Můžeme se bavit hledáním veličin, vystupujících v Maxwellových rovnicích, a po způsobu hvězdářů kreslit záhadné útvary spojováním středů příslušných políček, jako by to byla souhvězdí. Objevíme jedno takové souhvězdí spolu i s jeho věrnou kopií vzniklou posunutím a všimneme si nějaké analogie. Kromě toho lze každou rovnici jako celek umístit do některého políčka a tím vyznačit její rozměr, přesně řečeno rozměr veličin, vystupujících po obou stranách rovnítka, který musí být stejný. Mezi různými tvary Maxwellových rovnic se vyskytují rovnice těchto rozměrů:

Rovnice	1MI	1MD	2MI	2MD	3MI	3MD	4MI	4MD
Rozměr	A	$\mathrm{A/m^2}$	V	$\mathrm{V/m^2}$	As	$\mathrm{As/m^3}$	Vs	$\mathrm{Vs/m^3}$
UILT	0100	0180	1000	1080	0101	0171	1001	1071
LTMI	0001	8001	2719	0719	0101	7101	2819	9819

Další příklady následují. Není-li uvedeno jinak, jedná se o veličiny elektrické. Všimněte si, že dvojice vodivost a odpor a dále konduktivita a rezistivita jsou veličiny vzájemně reciproké:

Veličina	výkon	proud	napětí	odpor	vodivost	kapacita
Jednotka	W	A	V	Ω	S	F
Poznámka	VA		W/A	V/A	A/V	As/V
LTMI	2710	0001	2719	2718	8392	8492
UILT	1100	0100	1000	1900	9100	9101
Jinak	W00	A00	V00	Ω00	S00	S01

Veličina	konduktivita	rezistivita	indukčnost
Jednotka			H
Poznámka	S/m	Ωm	Wb/A
LTMI	7392	3718	2818
UILT	9190	1910	1901
Jinak	S90	Ω10	Ω01

Přepočítání složek vektorů z jedné soustavy do druhé je umožněno znalostí rozměru voltu v soustavě LTMI a kilogramu v soustavě UILT:

v soustavě LTMI: V = W/A, rozměr V = 2710 − 0001 = 2719
v soustavě UILT: kg=$\mathrm{W/(m^2s^{-3})}$= VA $\mathrm{m^{-2}s^3}$,
rozměr kg = 1000 + 0100 + 0080 + 0003 = 1183

Pro porovnání doporučuji knihu [9]. Tam se již vyskytují vektory mocnitelů ZV. Autoři, snad inspirováni Goedelem, zamířili však jinam. Různým ZV přiřadili různá prvočísla, jejich mocninám pak mocniny těchto prvočísel a odvozeným veličinám zase součiny těchto mocnin. Kódování i dekódování těchto veličin funguje vzájemně jednoznačně. Záporní mocnitelé dávají vzniknout zlomkům. Všechny veličiny (ZV i odvozené) lze pak seřadit podle velikosti číselných hodnot těchto zlomků. Stává se to však za tu cenu, že termika bude promíchána s elektřinou a podobně a že nepoznáme, že se tlak, povrchové napětí, síla a práce liší pouze mocninami délky.

Závěr

V naší zemi, jak jsem se dozvěděl, se touto problematikou, nazývanou teorie rozměru, zabývají i V. Havel, E. Mechlová a J. Obdržálek, jemuž děkuji za zajímavé odpovědi na moje e-maily a hlavně za užitečnou kritiku a různé rady. Na internetu je přístupná i jiná práce. Její autor je dosažitelný jako bures@centrum.cz. Stačí však ve vyhledavači Google napsat SI nebo třeba jen „viskozita“ a jeho dílo se objeví na obrazovce.

Snad by se část tabulek, jak je zde navrhuji, mohla po vhodné úpravě použít při výuce fyziky i na středních školách. Jako žák reálného gymnázia jsem se sám pokoušel takto uspořádat část svých vědomostí, abych zachytil souvislosti mezi nimi a ulehčil své paměti. Středoškoláci by mohli dostat buďto prázdné tabulky, do kterých by si zaznamenávali veličiny právě probírané, nebo tabulky vyplněné, ve kterých by si značili probírané učivo barevnými fixkami světlých odstínů. Učitelům fyziky, i těm budoucím, snad neuškodí, pokud si látku takto zopakují a doplní. Budou mít pak lepší představu o tom, co některé jejich žáky čeká na vysoké škole, kde se pak nové znalosti na ně pohrnou jako vodopád.

Přehledy fyzikálních veličin a jejich rozměrů se skutečně vyskytují v různých knihách i skriptech, často uspořádány podle abecedy v některém jazyku. Jednotky m, kg, s, A, nejčastěji v tomto pořadí, se stále opakují, nikoliv vždy pod sebou. Mocnitelé jsou vytištěni malým písmem, někdy s překlepy. Znaménko minus je často malé jako smeť, kterou se čtenář marně snaží odfouknout.

Nevýhodou mnou navrhovaného zobrazení je spousta prázných políček. Jejich počet je však možno snížit za tu cenu, že tabulky okrájíme, a co odpadne, poznamenáme v textu. Tak například, protože užíváme málo veličin, kde hmotnost vystupuje v minus první mocnině, můžeme si

„sklepení“ odpustit. Obětujeme tím však středovou souměrnost. Pak si můžeme dovolit různou šířku různých řádků i sloupců. Přivítal bych spolupráci na vylepšováni tohoto nápadu, které by mohlo vést k vytvoření elektronické učebnice. Mohli by se na tom cvičit a podílet i středoškoláci. Za první příspěvek tohoto druhu děkuji O. Černému, žáku SPŠE v Plzni na Slovanech.

Literatura

[1] Fischer, R., Vogelsang, K.: *Grössen und Einheiten in Physik und Technik.* VEB Verlag, Berlin, 1983.

[2] Hlavatý, V., Navrátil, L.: *Supplementum. Biofyzika v medicíně.* Manus, Praha, 2003.

[3] Kienle, L.: *Grössen Grössenkalkül Dimensionsanalyse.* Franzbecker, Hildesheim, 1994.

[4] Mayer, D.: *Teorie elektromagnetického pole.* FEL ZČU, Plzeň, 2004 (skripta).

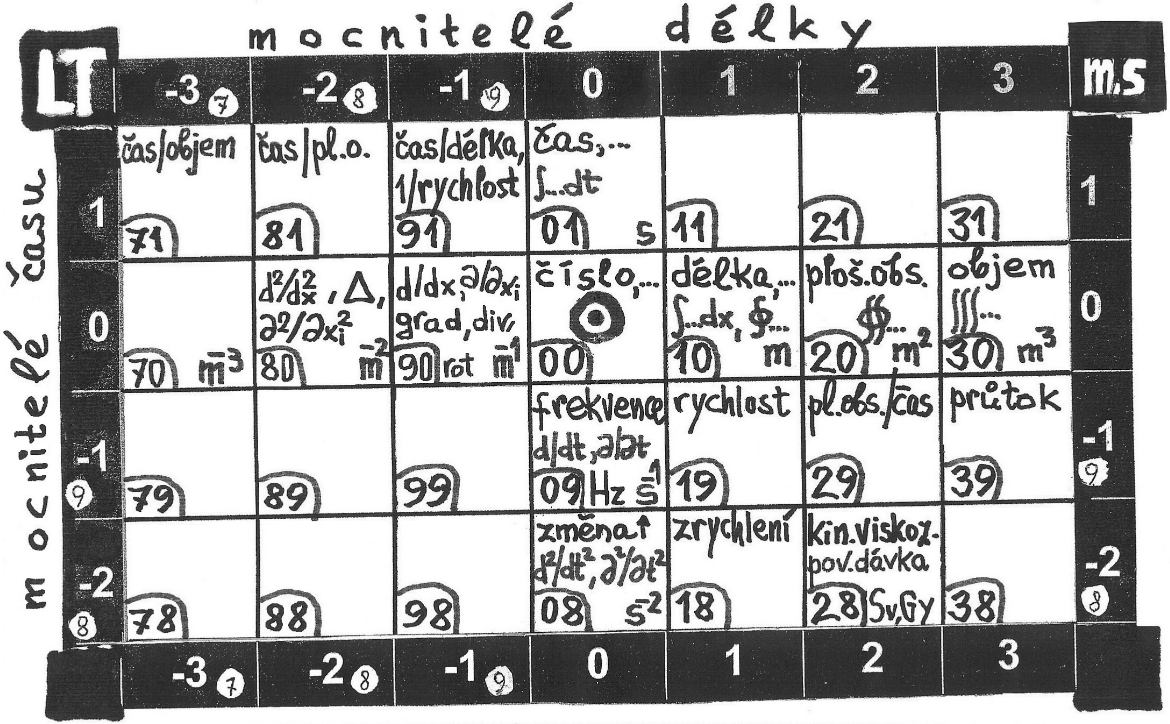
[5] Novotný, K.: *Teorie elektromagnetického pole I.* FEL ČVUT, Praha, 2002 (skripta).

[6] Obdržálek, J.: Dimense složitějších fyzikálních veličin. *MFI* (1992/93), 25–.

[7] Obdržálek, J.: *Fyzikální veličiny a jejich jednotky v SI.* Albra, Úvaly, 1. díl 2004, 2. díl 2006.

[8] Roubíček, O.: Pincipy fyzikální podobnosti. *AUTOMA* **10** (2004).

[9] Šindelář, V., Smrž, L.: *Nová měrová soustava.* SPN, Praha, 1968.



mocnitelé délky

mocnitelé času

LT	-3 ⑦	-2 ⑧	-1 ⑨	0	1	2	3	m.s
1	čas/objem 71	čas/pl.o. 81	čas/délka, 1/rychlost 91	čas,... $\int \dots dt$ 01 s	11	21	31	1
0	70 m^{-3}	d^2/dx^2, Δ, $\partial^2/\partial x_i^2$ 80 m^{-2}	$d/dx, \partial/\partial x_i$ grad, div, 90 rot m^{-1}	číslo,... ⊙ 00	délka,... $\int \dots dx$, $\oint \dots$ 10 m	ploš.obs. $\oiint \dots$ 20 m^2	objem $\iiint \dots$ 30 m^3	0
-1 ⑨	79	89	99	frekvence $d/dt, \partial/\partial t$ 09 Hz s^{-1}	rychlost 19	pl.obs./čas 29	průtok 39	-1 ⑨
-2 ⑧	78	88	98	změna↑ $d^2/dt^2, \partial^2/\partial t^2$ 08 s^{-2}	zrychlení 18	kin.viskoz.- pov.dávka 28 Sv,Gy	38	-2 ⑧
	-3 ⑦	-2 ⑧	-1 ⑨	0	1	2	3	

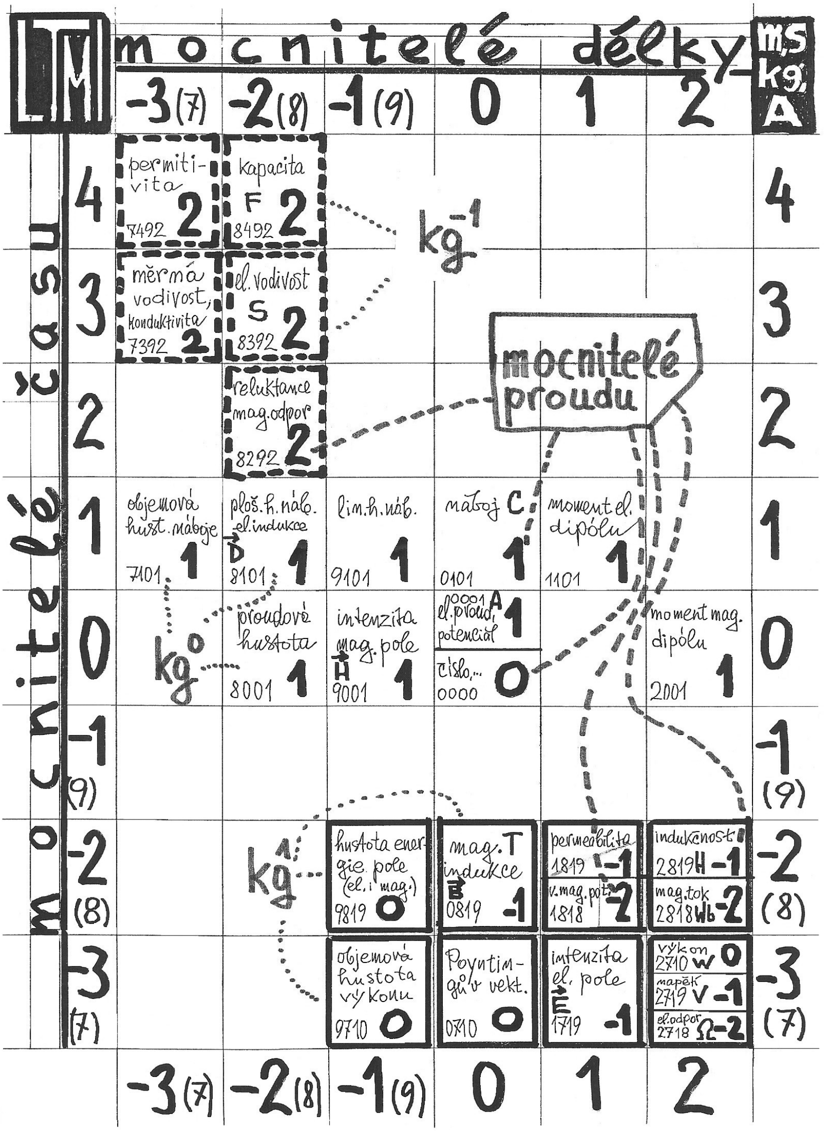
Tab. 1: Tabulka LT

mocnitelé délky

LTM	-3	-2	-1	0	1	2	3	m,s,kg
1								1
	1/průtok	1/pl.rych.	1/rychlost	čas, poloč., perioda,... s				
0	obj.hustota	ploš.hustota	délková hustota	hmotnost kg	stat. moment hm. bodu	m. setrvač. hm. bodu		0
	1/objem m^{-3}	1/pl.obs. m^{-2}	1/délka D opt.moh. m^{-1}	číslo, počet, poměr,...	délka, dráha, ,... m	ploš.obsah ,... m^2	objem ,... m^3	
-1			dyn.vazkost	útlum	hybnost	Planck.konst.		-1
				frekvence,... Hz s^{-1}	rychlost	ploš.rychlost kin.vazkost	průtok	
-2			tlak Pa	povrch.napětí	síla,... N	práce, teplo, energie J		-2
				č.změna f. s^{-2}	zrychlení	ploš.zrych. Sv, Gy		
-3			obj.hustota výkonu	intenzita vlnění, hustota toku		výkon, tok t.z.,... W		-3
				s^{-3}				
	-3	-2	-1	0	1	2	3	

mocnitelé času

Tab. 2: Tabulka LTM

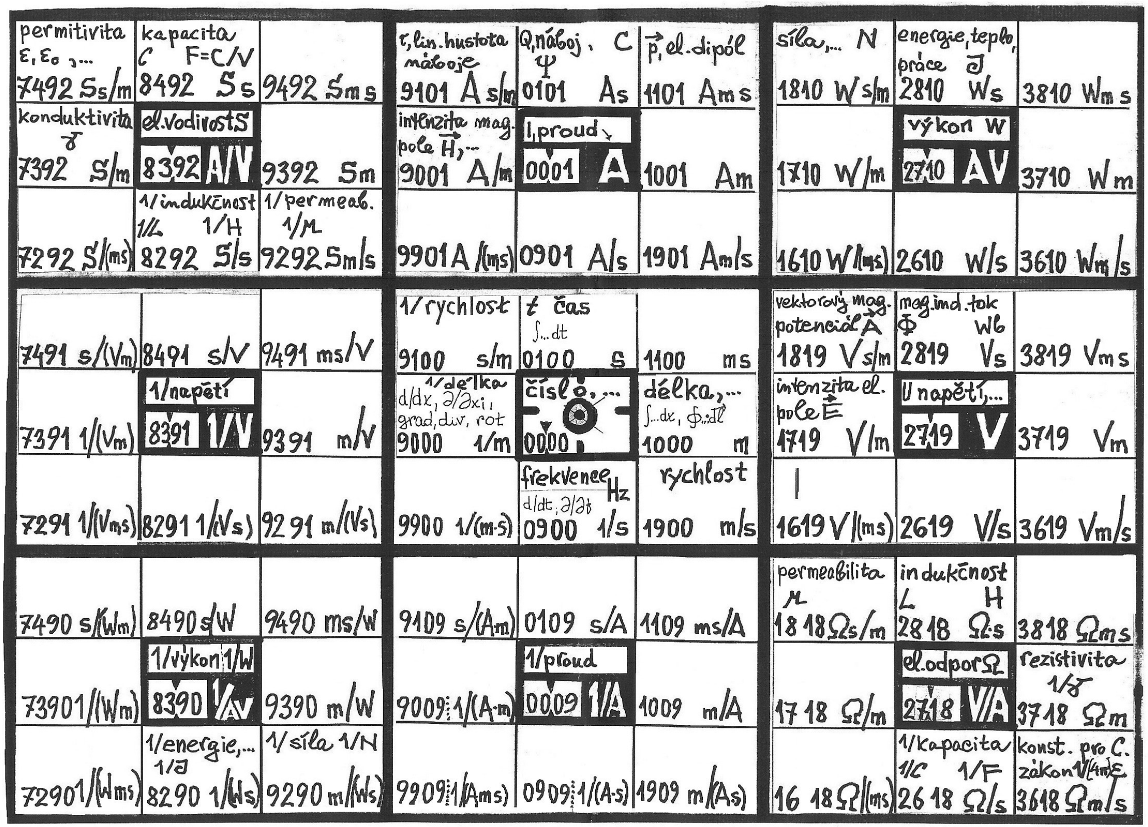


mocnitelé délky

mocnitelé času

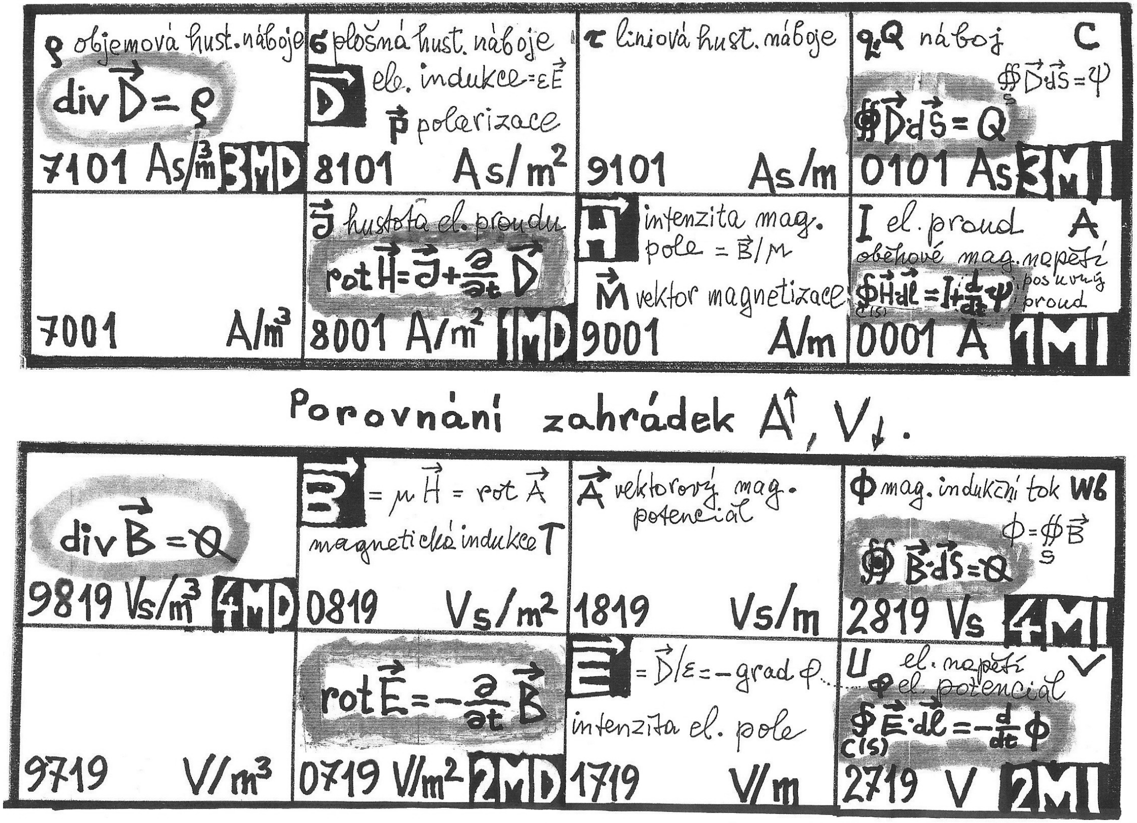
LTMI	-3(7)	-2(8)	-1(9)	0	1	2	m,s kg, A
4	permitivita 7492 2	kapacita F 8492 2					4
3	měrná vodivost, konduktivita 7392 2	el. vodivost S 8392 2					3
2		reluktance mag. odpor 8292 2					2
1	objemová hust. náboje 7101 1	ploš. h. náb. el. indukce $\vec{D}$ 8101 1	lin. h. náb. 9101 1	náboj C 0101 1	moment el. dipólu 1101 1		1
0		proudové hustota 8001 1	intenzita mag. pole $\vec{H}$ 9001 1	0001 A el. proud, potenciál 1 číslo,... 0000 0		moment mag. dipólu 2001 1	0
-1 (9)							-1 (9)
-2 (8)			hustota energie pole (el. i mag.) 9819 0	mag. T indukce $\vec{B}$ 0819 -1	permeabilita 1819 -1 v. mag. pot. 1818 -2	indukčnost 2819 H -1 mag. tok 2818 Wb -2	-2 (8)
-3 (7)			objemová hustota výkonu 9710 0	Poyntingův vekt. 0710 0	intenzita el. pole $\vec{E}$ 1719 -1	výkon 2710 W 0 napětí 2719 V -1 el. odpor 2718 Ω -2	-3 (7)
	-3(7)	-2(8)	-1(9)	0	1	2	

Tab. 3: Tabulka LTMI



permitivita $\varepsilon, \varepsilon_0$,… 7492 Ss/m	kapacita C F=C/V 8492 Ss	9492 Sms	τ, lin. hustota náboje 9101 As/m	Q, náboj , C Ψ 0101 As	$\vec{p}$, el. dipól 1101 Ams	síla,… N 1810 Ws/m	energie, teplo, práce J 2810 Ws	3810 Wms
konduktivita γ 7392 S/m	el. vodivost S 8392 A/V	9392 Sm	intenzita mag. pole $\vec{H}$,… 9001 A/m	I, proud 0001 A	1001 Am	1710 W/m	výkon W 2710 AV	3710 Wm
7292 S/(ms)	1/indukčnost $1/L$ 1/H 8292 S/s	1/permeab. $1/\mu$ 9292 Sm/s	9901 A/(ms)	0901 A/s	1901 Am/s	1610 W/(ms)	2610 W/s	3610 Wm/s
7491 s/(Vm)	8491 s/V	9491 ms/V	1/rychlost 9100 s/m	t čas $\int \ldots dt$ 0100 s	1100 ms	vektorový mag. potenciál $\vec{A}$ 1819 Vs/m	mag. ind. tok Φ Wb 2819 Vs	3819 Vms
7391 1/(Vm)	1/napětí 8391 1/V	9391 m/V	1/délka d/dx, $\partial/\partial x_i$, grad, div, rot 9000 1/m	číslo,… 0000	délka,… $\int \ldots dx$, $\oint \ldots d\vec{l}$ 1000 m	intenzita el. pole $\vec{E}$ 1719 V/m	U napětí,… 2719 V	3719 Vm
7291 1/(Vms)	8291 1/(Vs)	9291 m/(Vs)	9900 1/(m·s)	frekvence Hz d/dt ; $\partial/\partial t$ 0900 1/s	rychlost 1900 m/s	| 1619 V/(ms)	2619 V/s	3619 Vm/s
7490 s/(Wm)	8490 s/W	9490 ms/W	9109 s/(Am)	0109 s/A	1109 ms/A	permeabilita μ 1818 Ωs/m	indukčnost L H 2818 Ω·s	3818 Ωms
7390 1/(Wm)	1/výkon 1/W 8390 1/AV	9390 m/W	9009 1/(A·m)	1/proud 0009 1/A	1009 m/A	1718 Ω/m	el. odpor Ω 2718 V/A	rezistivita $1/\gamma$ 3718 Ωm
7290 1/(Wms)	1/energie,… 1/J 8290 1/(Ws)	1/síla 1/N 9290 m/(Ws)	9909 1/(Ams)	0909 1/(A·s)	1909 m/(As)	1618 Ω/(ms)	1/kapacita $1/C$ 1/F 2618 Ω/s	konst. pro C. zákon $1/(4\pi\varepsilon)$ 3618 Ωm/s

Tab. 4: Tabulka UILT

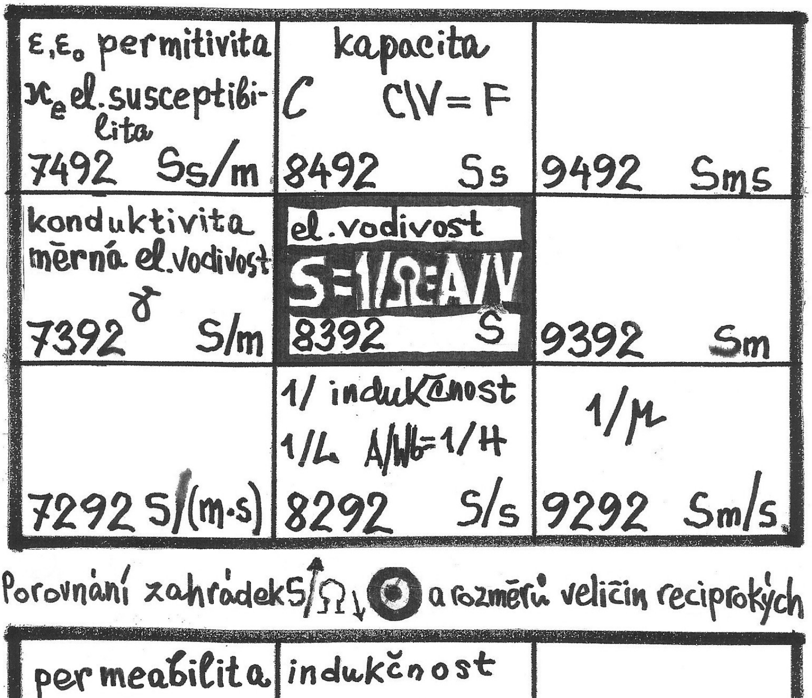


ϱ objemová hust. náboje $\mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho$ 7101 As/m³ 3MD	σ plošná hust. náboje $\vec{D}$ el. indukce $=\varepsilon\vec{E}$ $\vec{P}$ polarizace 8101 As/m²	τ liniová hust. náboje 9101 As/m	q, Q náboj C $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \Psi$ $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$ 0101 As 3MI
7001 A/m³	$\vec{J}$ hustota el. proudu $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ 8001 A/m² 1MD	$\vec{H}$ intenzita mag. pole $= \vec{B}/\mu$ $\vec{M}$ vektor magnetizace 9001 A/m	I el. proud A oběhové mag. napětí $\oint_{C(S)} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I + \frac{d}{dt}\Psi$ posuvný proud 0001 A 1MI

Porovnání zahrádek A↑, V↓.

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ 9819 Vs/m³ 4MD	$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ magnetická indukce T 0819 Vs/m²	$\vec{A}$ vektorový mag. potenciál 1819 Vs/m	Φ mag. indukční tok Wb $\Phi = \oint_S \vec{B}$ $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ 2819 Vs 4MI
9719 V/m³	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ 0719 V/m² 2MD	$\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon = -\mathrm{grad}\,\varphi$ intenzita el. pole 1719 V/m	U el. napětí V φ el. potenciál $\oint_{C(S)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi$ 2719 V 2MI

Tab. 5: Části tabulky UILT-1



$\varepsilon, \varepsilon_0$ permitivita $\varkappa_e$ el. susceptibilita 7492 Ss/m	kapacita C C/V = F 8492 Ss	9492 Sms
konduktivita měrná el. vodivost γ 7392 S/m	el. vodivost S = 1/Ω = A/V 8392 S	9392 Sm
7292 S/(m·s)	1/ indukčnost 1/L A/Wb = 1/H 8292 S/s	1/μ 9292 Sm/s

Porovnání zahrádek S↑/Ω↓ ◉ a rozměrů veličin reciprokých

permeabilita μ 1818 Ωs/m	indukčnost L Wb/A = H 2818 Ωs	3818 Ωms
1718 Ω/m	el. odpor Ω = 1/S = V/A 2718 Ω	rezistivita měrný el. odpor 1/γ 3718 Ωm
1618 Ω/(ms)	1/kapacita 1/C, V/C = 1/F 2618 Ω/s	konstanta pro Coulombův zákon 1/($\varepsilon \cdot 4\pi$) 3618 Ωm/s

Tab. 6: Části tabulky UILT-2

Srovnatelnost testů

Eva Řídká, Cermat, Praha [1]

Abstrakt. *Výpovědní hodnota testů je závislá mj. i na typech používaných úloh a způsobu bodování. Některé typy úloh jsou vhodné pro posuzování celých skupin, jiné jsou vhodné pro porovnávání jednotlivců a další pro vyčlenění špičkových jedinců např. v matematických soutěžích. Správná interpretace výsledků testu je podmíněna znalostí konstrukce testu. V článku jsou uvedeny i některé statistické souvislosti ze soutěže Matematický klokan na jedné z pražských škol.*

Úvodní otázka

Může být výsledek testu ovlivněn výběrem typů úloh? Odpověď na tuto otázku je velmi důležitá nejen pro každého, kdo se pokouší výsledky testů interpretovat, ale v prvé řadě pro tvůrce testu. Rozebereme si proto některé typy uzavřených úloh.

Klasifikace typů úloh

Z hlediska hodnocení testových úloh se používá základní dělení na úlohy otevřené a uzavřené.

V úzce otevřených úlohách se hodnotí jen odpověď (slovní vyjádření, upravený vzorec, číselný výsledek, bod grafu, úsečka apod.). V široce otevřených úlohách se hodnotí i postup.

Zaměřme se pouze na tři nejčastěji užívané typy uzavřených úloh. Nejužívanějším typem uzavřené úlohy je *úloha s výběrem odpovědi*, tzv. *multiple choice*, kde se vybírá jediná správná odpověď z nabídky několika (čtyř, pěti apod.) odpovědí. Výběr správné odpovědi se hodnotí plným počtem bodů.

Příklad: Ivan měl včera narozeniny. Zítra je čtvrtek. Ve který den měl Ivan narozeniny?
(A) v pondělí (B) v úterý (C) ve středu (D) ve čtvrtek

Dalším typem uzavřené úlohy je *úloha přiřazovací.* K několika úlohám se přiřazují správné odpovědi ze společné nabídky (počet odpovědí zpravidla převyšuje počet nabídek). Plným počtem bodů se hodnotí jen

---

[1] e-mail: ridka@cermat.cz

správné vyřešení všech částí úlohy. Je možné přidělit dílčí body i za částečně správné řešení.

Příklad: V následujících posloupnostech (a_n) je $a_{n+1} = a_n + 3$ pro všechna přirozená čísla n. Ke každé takové posloupnosti dodefinované jedním jejím členem(v A–C) přiřaďte první člen (vybírejte v 1–5):

(A) $a_{100} = 299$	(1) $a_1 = 1$
(B) $a_{50} = 152$	(2) $a_1 = 2$
(C) $a_{99} = 295$	(3) $a_1 = 3$
	(4) $a_1 = 4$
	(5) jiná možnost

Ve *svazku dichotomických úloh* se zpravidla hodnotí pravdivost (ANO) či nepravdivost (NE) několika výroků. Opět se plným počtem bodů hodnotí jen správné vyřešení všech částí úlohy.

Příklad: O každém tvrzení (1) až (4) rozhodněte, je-li pravdivé (ANO), nebo nepravdivé (NE):
Součin dvou přirozených čísel je 18.

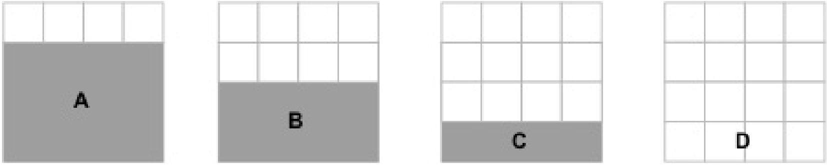
(1)	Jejich součet je číslo sudé.	(ANO–NE)
(2)	Jejich součet může být prvočíslem.	(ANO–NE)
(3)	Jejich součet je větší než 8.	(ANO–NE)
(4)	Jejich rozdíl může být nula.	(ANO–NE)

Spolehlivost úloh v testu

Problém nastává při posuzování obtížnosti a spolehlivosti testu. Změna typu úlohy může oba tyto parametry významně ovlivnit.

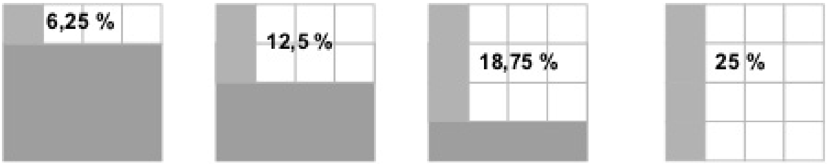
V testech CERMATU bylo opakovaně ověřeno, že korelace RIR (korelace úlohy se zbytkem testu) je významně nižší u uzavřených úloh oproti úlohám otevřeným. Mezi korelacemi dvojic uzavřených úloh různých typů bývá pak výrazně nejnižší mezi uzavřenými úlohami typu multiple choice. Nabízí se tedy tvrzení, že uzavřené úlohy jsou mj. méně spolehlivé než úlohy otevřené. Situaci si objasníme na následujícím zjednodušeném příkladu.

Představme si test s 16 úlohami typu multiple choice. V každé úloze se nabízejí čtyři odpovědi, právě jedna je správná. Dále předpokládejme čtyři ideální skupiny řešitelů: každý člen ve skupině A umí správně vyřešit 75 % úloh, zbytek hádá, ve skupině B 50 %, ve skupině C 25 % a ve skupině D si s žádnou úlohou nikdo neporadí, jen hádá (obr. 1). Jakou úspěšnost v jednotlivých skupinách naměříme?



Obr. 1

V první skupině A má každý řešitel možnost hádat ze čtyř úloh. Pravděpodobnost uhodnutí správné odpovědi je jedna čtvrtina, při dostatečně velikém počtu řešitelů tedy v průměru uhodnou jednu úlohu navíc. Ve druhé skupině B se hádá z dvojnásobného počtu úloh, v průměru se tedy uhádnou dvě, ve skupině C tři a ve skupině D čtyři (obr. 2).



Obr. 2

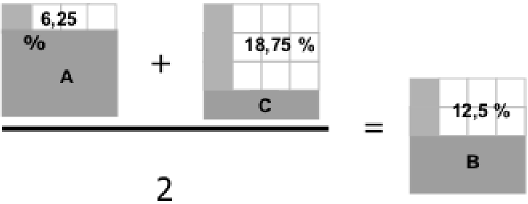
V nejlepší skupině tedy naměříme hodnotu úspěšnosti 81,25 % místo 75 %, v nejslabší skupině 25 % místo 0 %. Z ukázky je patrné, že navýšení úspěšnosti klesá s růstem úrovně skupiny, a to lineárně od hodnoty pravděpodobnosti uhodnutí správné odpovědi (o 25 %) až k 0 %, pokud by existovala skupina, která vyřeší všechny úlohy testu bezchybně.

Samozřejmě ve skutečnosti neexistují předvedené homogenní skupiny. Co můžeme očekávat u skupiny, v níž jsou jedinci různé úrovně? Předpokládejme opět ve zjednodušeném případě např. skupinu s průměrnou úspěšností 50 %, v níž jsou mj. zastoupeni jedinci úrovně A a C. Jakou úspěšnost naměříme?

Pokud je průměrná (skutečná) úspěšnost 50 %, můžeme předpokládat, že v průměru je polovina otázek řešena a polovina otázek se hádá, tedy naměřená úspěšnost je opět navýšena o 12,5 % (obr. 3).

Jak je možné snížit nechtěný přírůstek úspěšnosti testu způsobený hádáním? Problém se zpravidla řeší třemi možnými způsoby. Náhodný úspěch v úloze je možné částečně snížit *větším počtem nabízených od-*

povědí, dále je možné upravit bodování *zavedením trestných bodů* za chybnou odpověď a nakonec je možné *změnit typ úlohy.*



Obr. 3

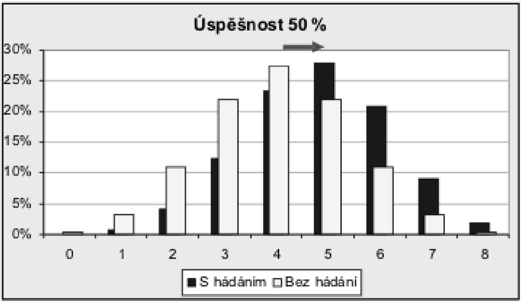
Pokud se počet odpovědí v nabídce zvětší ze čtyř ($p = 25$ %) na pět ($p = 20$ %) nebo dokonce na deset ($p = 10$ %), můžeme očekávat jen drobné zlepšení situace (tab. 1).

p	0 %	5 %	10 %	15 %	20 %	25 %	30 %	35 %	40 %	45 %	50 %	u
$\frac{u-p}{1-p}$	25 %	21 %	17 %	12 %	6 %	0 %						25 %
	30 %	26 %	22 %	18 %	13 %	7 %	0 %					30 %
	35 %	32 %	28 %	24 %	19 %	13 %	7 %	0 %				35 %
	40 %	37 %	33 %	29 %	25 %	20 %	14 %	8 %	0 %			40 %
	45 %	42 %	39 %	35 %	31 %	27 %	21 %	15 %	8 %	0 %		45 %
	50 %	47 %	44 %	41 %	38 %	33 %	29 %	23 %	17 %	9 %	0 %	50 %
	55 %	53 %	50 %	47 %	44 %	40 %	36 %	31 %	25 %	18 %	10 %	55 %
	60 %	58 %	56 %	53 %	50 %	47 %	43 %	38 %	33 %	27 %	20 %	60 %
	65 %	63 %	61 %	59 %	56 %	53 %	50 %	46 %	42 %	36 %	30 %	65 %
	70 %	68 %	67 %	65 %	63 %	60 %	57 %	54 %	50 %	45 %	40 %	70 %
	75 %	74 %	72 %	71 %	69 %	67 %	64 %	62 %	58 %	55 %	50 %	75 %
	80 %	79 %	78 %	76 %	75 %	73 %	71 %	69 %	67 %	64 %	60 %	80 %
	85 %	84 %	83 %	82 %	81 %	80 %	79 %	77 %	75 %	73 %	70 %	85 %

Tab. 1: Úspěšnost u naměřená v testu v závislosti na počtu nabídek v uzavřených úlohách.

Symbolem p je označena pravděpodobnost uhodnutí libovolné úlohy, ($p = \frac{1}{n}$, kde n je počet nabízených odpovědí). Z tabulky je patrné, že např. při naměření 50% úspěšnosti v testu bylo ve skutečnosti vyřešeno jen 33 % úloh s nabídkou čtyř odpovědí, případně 38 % úloh s nabídkou pěti odpovědí apod.

Kromě průměrné úspěšnosti testu se mění vlivem náhodných odpovědí i rozložení úspěšnosti ve skupině. V grafu 1 je simulováno normální rozložení úspěšnosti souboru s průměrnou úspěšností 50 z pěti nabízených odpovědí u každé z nevyřešených úloh (tmavé sloupce).



Graf 1

Pokud by byla průměrná úspěšnost testu nižší, byl by posun způsobený hádáním ještě větší. Navíc každý jednotlivec v testované skupině může mít jinou „míru štěstí“, individuální výsledky jsou částečně zkreslené a porovnávání uvnitř skupiny je obtížné.

Objektivita výsledků v soutěži Matematický klokan

Dalším způsobem, jak zmírnit následky hádání, je zavedení „trestných“ bodů za chybné úlohy. Mohlo by se zdát, že takové bodování sníží riziko hádání a objektivita testu se zlepší. Např. stanovením záporných bodů za nesprávnou odpověď je možné snížit posun průměrné hodnoty úspěšnosti v souboru až k nule, přestože řešitelé i nadále hádají. V soutěži, v níž se žádá a oceňuje nejlepší výkon a kde se slabší výkony neoceňují ani netrestají, se vyplácí hádat i přes riziko záporných bodů.

Optimální je nastavení hodnoty c za chybnou odpověď podle vzorce $c = b\frac{p}{p-1}$, kde p je pravděpodobnost uhodnutí správného výsledku a b je počet bodů za správnou odpověď. Např. v soutěži Matematický klokan se v každé úloze nabízí 5 odpovědí, tedy $p = 0{,}2$. Za správné odpovědi se přidělují 3, 4 nebo 5 bodů. Pro čtyřbodové úlohy je tedy vhodná hodnota $c = -1$, ale pro pětibodové úlohy by bylo vhodnější zvolit $c = -\frac{5}{4}$ a pro tříbodové $c = -\frac{3}{4}$.

Aby se zamezilo zápornému výsledku, k výslednému skóre se přičítá 24 bodů, což je i počet otázek v testu, tedy maximální možný počet přidělených záporných bodů za chybné odpovědi.

Jakým způsobem můžeme porovnávat jedince mezi sebou, jestliže někteří hádají a jiní ne? Nejprve se zamysleme nad situací, kdy se hádá správná odpověď např. u osmi otázek s pěti nabídkami u každé z nich. V grafu 2 znázorněme rozložení pravděpodobnosti uhodnutí určitého počtu (0 až 8) správných odpovědí v 8 úlohách. Na vodorovné ose je počet správných odpovědí.

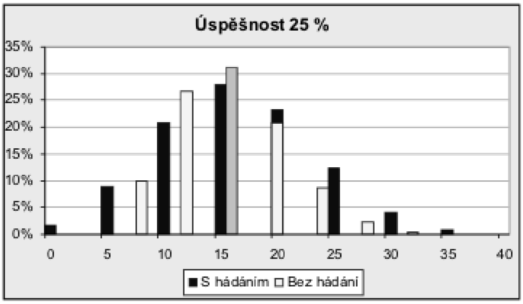
Graf 2

Nejčastější je uhodnutí jediné správné odpovědi (každý třetí řešitel), téměř stejně časté je uhodnutí dvou správných řešení v osmi úlohách. Velmi blízkou hodnotu pravděpodobnosti mají uhodnutí 4 správných odpovědí a náhodný výběr samých chybných odpovědí. Z grafu je zřejmé, že ne každý řešitel bude mít stejný díl štěstí.

V soutěži Matematický klokan jsou tři sady po osmi úlohách. V první sadě jsou nejlehčí tříbodové úlohy, ve druhé čtyřbodové a v nejtěžší pětibodové. Za chybnou odpověď se odečítá jeden bod, proto se k výsledku připočítává bonus 24 bodů, tedy ke každé sadě je 8 bodů k dobru. V soutěžním testu je možné získat 0 až 120 bodů s výjimkou 1, 2, 3 a 7 bodů.

Většinu tříbodových úloh dokáží dobří žáci vyřešit. Zastavme se u druhé sady čtyřbodových úloh. Předpokládejme několik různých skupin řešitelů. V první skupině dokáží žáci vyřešit zhruba 25 % úloh, ve druhé 50 %, ve třetí 75 % a ve čtvrté 90 %. Někteří žáci uvádějí odpovědi jen u vyřešených úloh, jiní se pokoušejí uhodnout i zbytek.

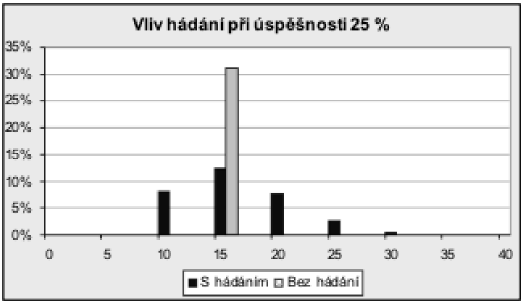
V grafu 3 jsou znázorněny obě krajní situace. Světlé sloupce označují výsledky bez hádání (řešitelé na některé úlohy neodpovídají, zaškrtnuté odpovědi jsou správné), tmavé sloupce označují výsledky, kdy je u každé úlohy označena odpověď (vyřešená či uhádnutá). Na vodorovné ose je počet bodů, které mohou žáci získat za vyřešení této sady, včetně bonusu.



Graf 3

Celková úspěšnost souboru se ani díky hádání nezmění. Pokud bychom k úlohám nepřičítali osmibodový bonus, byla by průměrná úspěšnost u obou skupin 25 %, s připočteným bonusem je průměrné skóre v obou situacích 40 %. Výsledky těch, kteří dosáhli i bez hádání právě průměrné úspěšnosti skupiny, jsou zobrazeny v nejvyšším sloupci odlišným vzorem.

Jakým způsobem se však mění postavení jednotlivců, kteří se rozhodnou riskovat a hádají? V grafu 4 jsou ukázány změny jednoho z výsledků ve skupině (průměrného výsledku) při náhodném označení neřešených úloh.

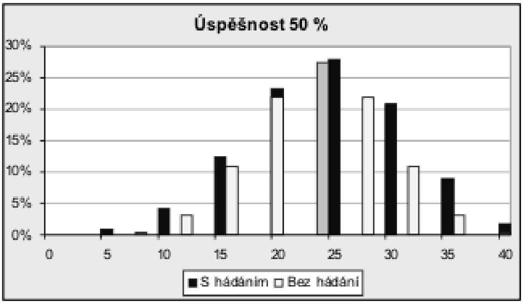


Graf 4

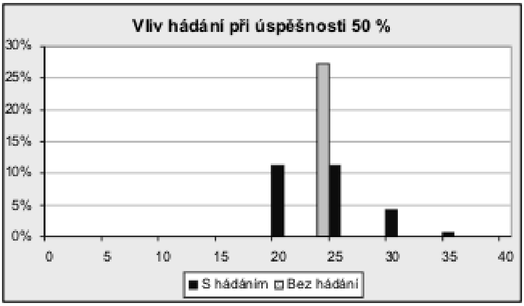
Žádný z hádajících řešitelů nezíská původní počet bodů. Velká část z nich si pohorší o 1 bod. Zhruba stejný počet si buď pohorší o 6 bodů nebo si polepší o 4 body. Nezanedbatelná část si polepší dokonce o 9 bodů a zcela ojediněle i o 14 bodů. Rozdíl mezi původně stejně úspěšnými jedinci je nyní od 0 až do 20 bodů.

Podobné výkyvy v úspěšnosti dosahují i zbývající řešitelé ve skupině, pokud hádají. Čím méně úloh vyřešili a více výsledků hádali, tím větší rozdíly se vytvoří mezi nimi. Průměrná úspěšnost v početné skupině přitom zůstane zhruba stejná.

Podobnou situaci můžeme znázornit i v dalších skupinách (grafy 5 až 10).



Graf 5

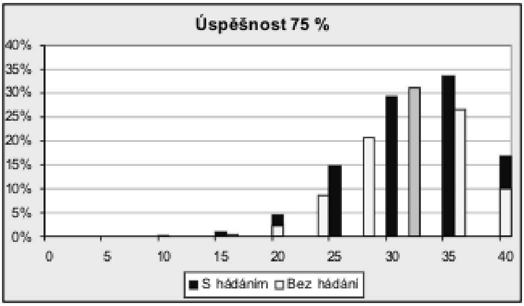


Graf 6

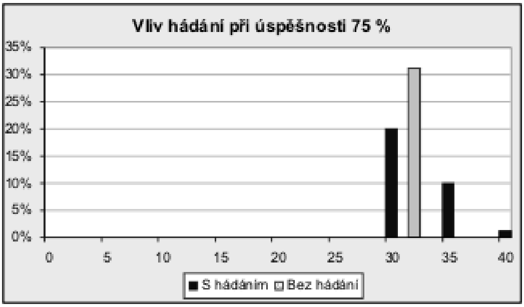
Při polovičním počtu správně vyřešených úloh v sadě mohou vzniknout případným hádáním zbývajících neřešených úloh poměrně veliké rozdíly mezi některými stejně zdatnými jedinci, výjimečně až o 15 bodů.

Někteří jedinci, kteří správně řeší 75 % úloh, mohou díky hádání zbývající čtvrtiny úloh získat až maximální počet bodů v sadě, tedy o 8 bodů více. Nemalá část řešitelů si polepší o 3 body, největší počet se však o 2 body zhorší. Teprve ve skupině s velmi dobrými řešiteli jsou rozdíly způsobené tipováním úloh relativně nižší, nejvýše 5 bodů.

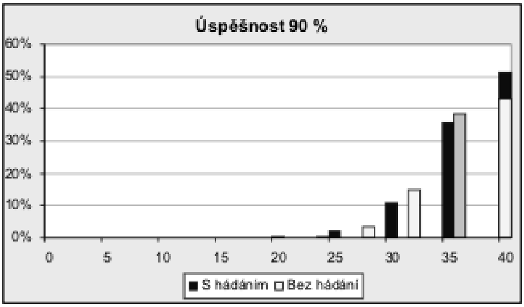
Pokud bychom sledovali výsledky řešitelů v poslední sadě s osmi pětibodovými úlohami, byly by rozdíly mezi jednotlivci způsobené hádáním největší. Úlohy jsou obtížné a úspěšnost v sadě bývá nízká. Hádání se začíná mírně vyplácet i vzhledem k průměrnému výsledku skupiny. Pokud má skupina bez hádání průměrnou úspěšnost 25 % a s připočteným osmibodovým bonusem je průměrné skóre skupiny 37,5 %, pak při náhodném označení výsledků se průměrné hodnoty zvednou na 28 %, resp. 40 %. Naopak u nejlehčích tříbodových úloh se hádání skupině jako celku mírně nevyplácí.



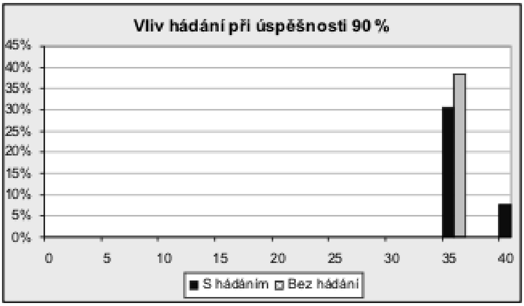
Graf 7



Graf 8



Graf 9



Graf 10

Závěrem lze říci, že užitím záporných bodů se hádání téměř neprojeví na průměrném výkonu skupiny. Můžeme proto např. zjišťovat, která třída nebo která škola je lepší. Naopak jedince, ať hádají či nehádají, není možné objektivně srovnávat. Minimální chyby se dopouštíme jen u nejlepších řešitelů, kteří v podstatě nemají prostor k hádání.

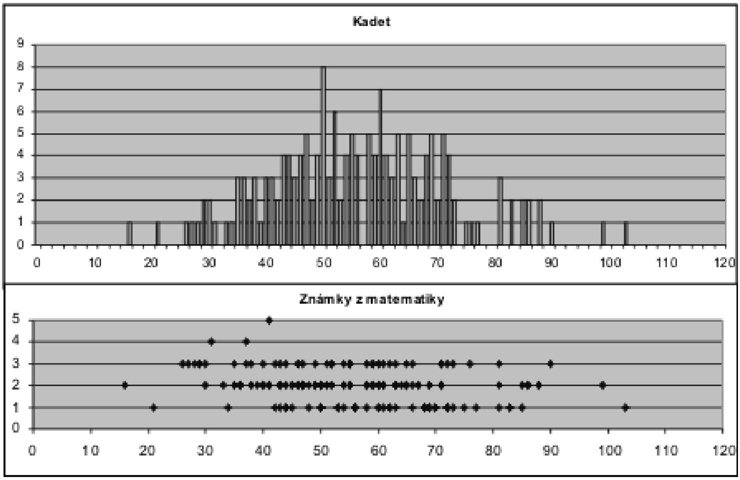
Korelace výsledků testu a známek ve škole

Pro demonstraci uvedených okolností uvádíme výsledky žáků jednoho pražského víceletého gymnázia v soutěži Matematický klokan v souvislosti s jejich známkami z matematiky na pololetním vysvědčení.

U 160 žáků byla korelace mezi výsledkem v soutěži a známkou 0,26. Žáci měli průměrnou známku z matematiky na vysvědčení 2,02 a průměrný výsledek v soutěži (55,9 bodů) odpovídá 47 % z maximálního skóre v testu.

V grafu 11 je histogram skóre v kategorii Kadet soutěže Matematický klokan a úspěšnost v soutěži ve vztahu ke známkám z matematiky na vysvědčení. Na vodorovné ose je úspěšnost v soutěži Matematický klokan. Na svislé ose prvního grafu je uveden počet řešitelů, ve druhém grafu známka z matematiky na vysvědčení.

Tři nejúspěšnější soutěžící mají známky z matematiky na vysvědčení 1, 2 a 3. Z grafů je možné vyčíst, že průměrné výsledky v soutěži jsou u jedničkářů jen o něco málo lepší než u dvojkařů a trojkařů. Soutěžní test je pro většinu žáků obtížný, pravděpodobně velké procento z nich se uchyluje k tipování odpovědí. Porovnávání úrovně jednotlivých studentů na základě výsledků získaných v soutěži není rozhodně objektivní.



Graf 11

Závěr

Pokud bychom v rámci celé republiky hodnotili výsledky v soutěži, mohli bychom s jistotou říci, že vítězové patří opravdu k nejlepším. K tomuto účelu jsou testy vytvářeny. Rovněž je možné na základě získaných výsledků porovnávat úroveň škol. V žádném případě však nemohou učitelé na školách porovnávat individuální výkony jednotlivých studentů s výjimkou těch výtečných. K výsledkům by měli přistupovat velmi obezřetně.

Literatura

[1] Horenský, R., Rys, P., Zhouf, J., Molnár, J.: *Počítejte s Klokanem 1995–1999, kategorie Junior.* Prodos, Olomouc, 2001.

[2] Calda, E., Dupač, V.: *Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Prometheus, Praha, 1993.

Jsou v matematických třídách matematicky nadaní žáci?

Vladimír Vaněk, PřF UP Olomouc[1]

ABSTRAKT. *Práce s talenty ve speciálních třídách má v ČR dlouholetou tradici. Kritérium pro zařazení žáků do těchto tříd se v současnosti omezuje především na úspěšné vyřešení písemného didaktického testu z matematiky. V krátkém článku jsme se pokusili zjistit úroveň matematického nadání (hodnotu matematického kvocientu) studentů prvních ročníku speciálních tříd gymnázií zaměřených na matematiku a porovnat výsledky se studenty běžných gymnaziálních tříd. Za nástroj pro zjištění matematického kvocientu byl vybrán test KALKULIE IV vzhledem k možnosti jeho aplikace na populaci patnáctiletých až šestnáctiletých.*

Matematické nadání se v posledních letech dostává do pozornosti odborníků. V praxi se pak objevuje především otázka, jak nadané studenty identifikovat a poté s nimi pracovat. Jednou z nejrozšířenější forem péče o matematicky talentované studenty středních škol je jejich separace do speciálních tříd, kde se ve větší míře zabývají studiem problematiky z oblasti jejich nadání. Proto i naše výzkumné šetření bylo zaměřeno na studenty matematických tříd gymnázií.

V rámci našeho výzkumného šetření byli osloveni ředitelé čtyř gymnázií, které poskytují možnost studia v matematických třídách, a jejich studenti prvních ročníků byli požádáni o spolupráci. Pro ověření úrovně matematického nadání byl vybrán ojedinělý test KALKULIE IV.

Test KALKULIE IV byl administrován populaci studentů prvních ročníků čtyřletých gymnázií a ekvivalentních ročníků víceletých gymnázií „skupinovou formou“. Vzorek respondentů byl vybrán zcela účelně a testu se podrobili téměř všichni studenti prvních ročníků matematických tříd na všech čtyřech gymnáziích v České republice, celkem tedy 100 studentů. Jako kontrolní skupina byly vybrány dvě třídy všeobecné větve čtyřletých gymnázií (55 studentů)[2].

Věk studentů se pohyboval od 15 let 3 měsíců do 16 let 5 měsíců. Výběrem studentů pouze prvních ročníků byla zajištěna věková hranice pro

---

[1] e-mail: vladimir.vanek@upol.cz

[2] Jedna třída z Gymnázia M. Koperníka v Bílovci (27 studentů), v níž matematiku učí týž pedagog jako v matematické třídě, a druhá třída všeobecné větve z Gymnázia B. Němcové v Hradci Králové (28 studentů). Obě gymnázia jsou ve svých krajích považována za výborná. Celkový počet testovaných činil 155 osob. Vybrané informace o respondentech uvádíme pro přehlednost v tab. 1.

použití testů KALKULIE IV. V současných podmínkách v České republice totiž neexistuje jiný standardizovaný test na zjištění matematického kvocientu starších studentů.

Studenti	počet	pohlaví		věk		známka z M		
		muž	žena	< 16	> 16	1	2	3
Bílovec	25	15	10	12	13	24	1	0
Brno	29	21	8	13	16	20	9	0
Hradec Králové	23	19	4	13	10	13	8	2
Plzeň	23	15	8	18	5	10	10	3
kontrolní BC	27	9	18	11	16	nezjišťováno		
kontrolní HK	28	3	25	11	17			

Tab.1: Charakteristika zkoumaného vzorku

Test KALKULIE IV (test matematických schopností) Paedr. Josefa Nováka navazuje na linii testů KALKULIE I, II a III prof. Ladislava Košče. Vychází z poslední verze KALKULIE III, která byla standardizována v roce 1978 na slovenské populaci dětí od 8,6 do 16,5 let. Jde v něm v podstatě o sčítání variovaného počtu černých kuliček, strukturovaně rozložených podle schématu 4 × 25. Test je sestaven z 75 úloh a délka trvání je přesně 35 minut. Tímto testem lze hodnotit:

- narušení v orientaci vpravo-vlevo, nahoře-dole
- narušení prostorové orientace v širším smyslu
- úroveň numerické složky struktury matematických schopností
- grafickou složku
- úroveň složky usuzovaní

Na základě testu lze určit matematický kvocient (MQ) jedince, a to obdobným způsobem jako při stanovení inteligenčního kvocientu (IQ), tj. lineárně podle následujícího vzorce:

$$MQ = \frac{\text{matematický věk}}{\text{chronologický věk}} \cdot 100$$

Stejně jako u IQ i u MQ jsou stanoveny úrovně hodnot:

- nad 121 (příp. 126) – vysoce nadprůměrná úroveň
- od 111 do 120 – nadprůměrná úroveň

- od 90 do 110 – průměrná úroveň
- od 70–75 do 89 – podprůměrná úroveň
- nižší než 74 – defektní úroveň matematických schopností

KALKULIE IV narozdíl od předchozích nástrojů pro konstrukci MQ používá metodu distribuce hrubých skórů (HS), a proto výstižněji charakterizuje úroveň matematických schopností respondentů.

Vzhledem k odlišné metodě konstrukce matematického kvocientu došlo k posunu v kvalitativních a kvantitativních úrovních MQ:

- pod 70 – velmi nízká (defektní) úroveň
- 71–84 – podprůměrná úroveň
- 85–115 – průměrná úroveň
- 116–130 – nadprůměrná úroveň
- nad 130 – velmi vysoká úroveň matematických schopností

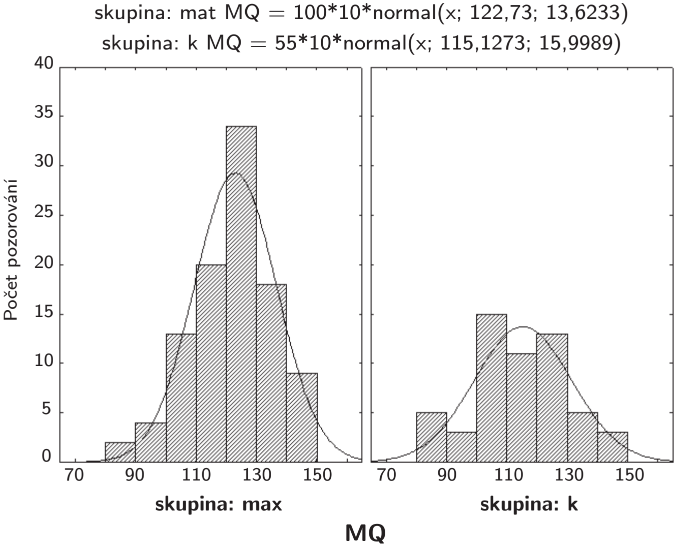
Test je složen z 36 úloh, jejichž náročnost postupně narůstá. „Smyslem řešení testu není stanovení celkového počtu barevných kruhů, nýbrž součet všech čísel v barevných kruzích vepsaných. Strukturu testu tvoří podnětové pole obdobné testu Barevná kalkulie. Test není koncipován jako strukturální test matematických schopností, nýbrž jako jednofaktorový, a proto není sestaven ze škály odlišných typů příkladů (Novák, 2002).“

Měření matematického kvocientu však má své nedostatky obdobně jako měření inteligenčního kvocientu a je nezbytné jej chápat pouze jako ukazatele určitých schopností. Pro hlubší poznání jedince je nezbytné tento test doplnit o další metody.

Na základě vyhodnocení byl určen MQ všech zúčastněných studentů. Graf 1 názorně ukazuje rozložení dosahovaných hodnot MQ v matematických třídách spolu s kontrolní skupinou studentů 1. ročníků „všeobecných“ tříd gymnázií.

Z výsledků výzkumného šetření pomocí testu KALKULIE IV vyplývá, že do tříd se zaměřením 01-Matematika se selektují žáci s nadprůměrným MQ. Hranice, která odlišuje nadprůměr od průměru, byla stanovena v souladu s autorem standardizovaného testu KALKULIE IV na hodnotu bodů. Většina studentů se pohybuje v dimenzích nadprůměru (průměrná hodnota MQ činí 123, nejčastěji se objevuje hodnota 130) oproti kontrolní skupině, kde průměrná hodnota MQ je asi 115 (nejčastěji 106). Opět zdůrazňujeme, že i žáci kontrolních skupin byli vybráni z gymnázií, které jsou ve svých regionech považovány za „výběrové“.

Výzkum absolvovalo i několik studentů, jejichž výsledky lze označit jako vynikající (MQ kolem 147). Někteří z nich zvládli test ještě před časovým limitem.



Graf. 1: Četnosti pozorovaných hodnot MQ u studentů matematických a nematematických tříd

Na sebraná data jsme aplikovali t-test, jehož výsledky potvrdily, že existuje závislost mezi hodnotami hrubých skóre studentů matematických a všeobecných tříd. Pomocí dvouvýběrového t-testu hrubých skóre je $t = 2{,}95$, odpovídající pravděpodobnost je $p = 0{,}0036$. Můžeme tedy tvrdit, že studenti matematických tříd mají obecně více správně vyřešených úloh, kdežto v počtu chybných řešení nebyl obdobný vztah prokázán ($t = 0{,}79$, $p = 0{,}4311$). Tedy počty chybných řešení nezávisí na tom, z které třídy student pochází. Naše výsledky tak potvrdily poznatky J. Nováka (Novák, 2002). Vzhledem k nevelkému počtu respondentů kontrolní skupiny nemůžeme naše výsledky zobecňovat, resp. rozšířit na celou populaci.

Výsledky našeho výzkumu tak ukazují, že v matematických třídách jsou skutečně sdružováni studenti s vyšším MQ než v běžných třídách. Přesto se i zde nacházejí studenti, jejichž MQ se pohybuje na úrovni průměrných hodnot. Tento jev může být způsoben neustále klesajícími počty zájemců o studium v těchto třídách a snahou vedení získat dostatek finančních prostředků, a tedy přijmout dostatečný počet studentů, aby třídu bylo možné i nadále zachovat.

Literatura

[1] Košč, L.: *Psychológia matematických schopností.* SPN, Bratislava, 1972.

[2] Novák, J.: *KALKULIE IV.* Psychodiagnostika, s.r.o., Brno, 2002 (příručka).

[3] Prídavková, A.: Identifikácia a výchova žiakov nadaných na matematiku. *Acta paedagogicae*, PedF PU, Prešov, Annus II (2002), 34–42.

[4] Vaněk, V.: Péče o talenty v matematice. *Doktorská disertační práce*, PdF UP Olomouc, 2006, 237 s.

◆

MO-Z – pozitivní motivace: Tvorba úloh

Marta Volfová, PdF, Univerzita Hradec Králové[1]

Abstrakt. *Úlohy MO i dalších soutěží se mohou stát motivačním prvkem k získávání zájmu o matematiku, jak částečně prokazuje výzkum z diplomové práce. Vhodné je zařazovat i úlohy, které nevyžadují konkrétní vstupní matematické znalosti. Uvádíme několik takových příkladů (logických úloh, kalendářových, úloh se sportovní tématikou, jazykovou hádanku, vytvoření řecko-latinského čtverce).*

Podle posledních výzkumů se zdá, že naši žáci 2. stupně základní školy mají k matematice negativní vztah, dokonce při zkoumání PISA se ČR umístila až na posledním místě mezi všemi prověřovanými státy.

Mám však radostnější zprávu. Naše studentka v rámci zpracovávání diplomové práce došla k značně jiným výsledkům, a to u žáků, kteří se zúčastnili aspoň jedné z matematických soutěží (MO, Matematický klokan, Pythagoriáda, Korespondenční seminář, školní matematická soutěž). V jejím dotazníkovém šetření odpovídalo 182 žáků. Měli bodově ohodnotit oblibu školních předmětů a ukázalo se, že matematika se u nich celkově umístila na neuvěřitelném 1. místě! (Sice u chlapců – při rozdělení odpovědí na chlapecké a dívčí – zvítězil tělocvik, který matematiku odsunul na místo druhé, přesto je výsledek velmi milý a působivý.)

---

[1] e-mail: marta.volfova@uhk.cz

Nabízí se hypotéza, že se projevuje pozitivní motivace matematickou soutěží. Domnívám se, že velký vliv tu má právě přitažlivost soutěžních úloh. Ve velké většině (zvláště u MO) se liší od obvyklých školních úloh, neboť v nich nejde o trénink ve známých algoritmech, v dosazování do vzorců apod., ale předkládají nějaký problém, který často vyžaduje zprvu zkoušet, experimentovat, promýšlet situace, třeba odložit na nějakou dobu, pak znovu se vrátit a nalézat řešení. Vyžadují i delší čas od zadání k řešení, což právě MO umožňuje.

Vytvářet podobné úlohy není jednoduché. Pracuji (již 20 let) v úlohové komisi pro kategorii MO-Z a v ní každoročně je třeba připravit asi 50 nových úloh (někdy je možné zadat stejnou úlohu např. v 8. i v 9. ročníku, tím je pak počet menší). Úlohy mají být přitažlivé, přiměřené věku i dosud nabytým znalostem. Neměly by být řešitelné snadným uplatněním známého postupu, ale měly by podněcovat k experimentování, prověřování nápadů, k prvkům badatelského přístupu. U menších dětí se snažíme pro větší přitažlivost využívat i pohádkových prvků – v úlohách vystupují draci, čarodějové, trpaslíci apod.

Známý a často využívaný zdroj tvořivých, ne úplně jednoduchých úloh je teorie čísel. Vlastnosti hledaných čísel se kvůli motivaci často vyjadřují opisem – děti pak hledají čísla „mazaná“, „veselá“, „vlnitá“, „šťastná“ či „nešťastná“ atp.

První příklad z 57. MO-Z7: Číslo je „trochu nešťastné“, je-li násobkem čísla 13, a „trochu usměvavé“, je-li násobkem čísla 17. Kolik je v prvním milionu přirozených čísel, která nekončí nulou ani pětkou a jsou přitom zároveň trochu nešťastná i trochu usměvavá?

Druhý příklad z 57. MO-Z7: Číslo se nazývá „mazané“, jestliže od jeho třetí číslice (počítané zleva) platí, že každá jeho číslice je součtem všech číslic ležící nalevo od něho. (a) Napište dvě největší mazaná čísla. (b) Kolik je všech čtyřmístných mazaných čísel?

I malé děti chápou, že „mazaná“ či „veselá“ čísla jsou jen zábavnou nadsázkou, že se tři zelení draci mohou proměnit ve dva modré při setkání jen v říši pohádek.

U každé úlohy by mělo být možné naprosto nepochybné rozlišení, zda jde o zábavnou hříčku nebo o úlohu z reality. Ani v úlohách MO by se neměly vyskytovat takové, které vypadají jako reálné či aplikační, ale pro realitu jsou zavádějící až absurdní. Taková byla úloha z 55. MO-Z7, kde se upravovala silnice tak, že se válec pohyboval vždy 10 m vpřed a 7 m zpátky. Matematicky byla úloha docela zajímavá, ale první 3 metry silnice tak byly válcovány jen jednou, další 3 metry třikrát, následující

3 metry pětkrát a pak se střídaly metrové úseky válcované sedmkrát s dvoumetrovými válcovanými pětkrát. (Tedy výroba silniční rolety?) Snažili jsme se sice dětem naznačit, že nejde o reálnou úlohu tím, že práci prováděli „mistři“ Pat a Mat, ale ani tak nejsou takovéto úlohy zrovna vhodné.

Naopak považuji za velmi dobré zařazovat úlohy, které nejsou zatíženy požadavkem vstupních konkrétních matematických znalostí. Bývají to úlohy logické, někdy „kalendářové“, mnohdy z oblasti sportu, úlohy na vážení a přelévání apod. Připomeňme některé z nich. Vhodným příkladem logických úloh, které nevyžadují matematické předběžné znalosti a jsou zároveň pro starší děti hodně přitažlivé, jsou tzv. „zebry“. Vyžadují vzájemně správně k sobě přiřadit prvky několika různých množin na základě informace o možných a neslučitelných spojeních. Lze je vytvářet opravdu „ze života“ – někdy se stačí rozhlédnout po vlastním paneláku, po sousedech, škole, po zvířatech z okolí.

Třetí příklad ze semináře Metody řešení – autorka M. Kostihová: Ve škole je pět různě barevných lavic, v každé se řeší jiný typ slovní úlohy, v každé sedí chlapec s dívkou. Popište situaci, víte-li, že

- Martin počítá úlohy na společnou práci,
- Petr a ne Tomáš sedí v první lavici,
- Katka sedí ve žluté lavici,
- před Jarkou se řeší úlohy na pohyb,
- za Petrem je oranžová lavice,
- Nikola počítá úlohy na směsi,
- Věra sedí v modré lavici s Martinem,
- David nesedí s Nikolou,
- za Katkou se počítají logické úlohy,
- zelená lavice je před modrou,
- úlohy na vážení a přelévání se počítají v předposlední lavici,
- za Nikolou se počítají úlohy na vážení a přelévání,
- Mirek sedí s Janou.

Čtvrtý příklad z „kalendářových“ úloh 47. MO-Z6: Zjistěte, zda se může stát, aby v některém roce nebyl ani jeden pátek 13.

Pátý příklad z „kalendářových“ úloh 53. MO-Z9: Pořadové číslo dne bylo „smutné“, že nebylo ani jednou v roce nedělí. Které to bylo?

Šestý příklad z „kalendářových“ úloh MO-Z6 v r. 1996: V jednom měsíci připadly tři středy na lichý den. Který den připadl na 28. v tomto měsíci?

Sedmý příklad z r. 1993 (objevil se v několika variantách pro 6. až 8. třídu): Doplňte cifry místo $*$, aby tvrzení byla pravdivá:

V této tabulce je napsáno $*$ číslic 1
V této tabulce je napsáno $*$ číslic 2
V této tabulce je napsáno $*$ číslic 3
V této tabulce je napsáno $*$ číslic 4
V této tabulce je napsáno $*$ číslic 5

Řešení: Celkem bude zapsáno 10 číslic, tj. součet cifer doplněných za $*$ musí být 10. Zapíšeme 10 jako součet pěti sčítanců z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$5 + 2 + 1 + 1 + 1$ – nevyhovuje; byly by 4 jedničky a 4 se v součtu nevyskytuje
$4 + 3 + 1 + 1 + 1$ – nevyhovuje; čtyřky i trojky by byly v tabulce dvě a 2 se v součtu nevyskytuje
$4 + 2 + 2 + 1 + 1$ – nevyhovuje; jedničky by byly 3 a 3 se v součtu nevyskytuje
$3 + 3 + 2 + 1 + 1$ – vyhovuje

V této tabulce jsou skutečně zapsány tři číslice 1, dvě číslice 2, tři číslice 3, jedna číslice 4 a jedna číslice 5.

Promýšlení a zkoumání nesou i mnohé úlohy se sportovní tématikou. Často text začíná sdělením, že se nezachovala celá tabulka výsledků zápasů a je třeba ji doplnit.

Osmý příklad z MO-Z v r. 2001: Doplňte tabulku, znáte-li údaje pro družstva Zelených (Z), Červených (Č), Modrých (M) a Hnědých (H).

	Z	Č	M	H	
Z	×	3 : 0			7 : 1
Č	0 : 3	×			2 : 3
M			×		3 : 3
H				×	1 : 6

3 výhry
1 výhra, 1 prohra, 1 remíza
1 výhra, 1 prohra, 1 remíza
3 prohry

Řešení: Tabulka má tvar:

	Z	Č	M	H	skóre
Z	×	3 : 0	2 : 1	2 : 0	7 : 1
Č	0 : 3	×	0 : 0	2 : 0	2 : 3
M	1 : 2	0 : 0	×	2 : 1	3 : 3
H	0 : 2	0 : 2	1 : 2	×	1 : 6

Devátý příklad (jednodušší varianta předchozí úlohy): Některé výsledky zápasů mezi družstvy A, B, C, D byly 2 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 1 a 5 : 3 a víme, že družstvo A získalo 6 bodů, B dalo 2 góly, C dostalo 8 gólů a D hrálo s B 1 : 0. Vyplňte tabulku vzájemných zápasů.

Do oblasti přitažlivých úloh, které nevyžadují speciální matematické znalosti patří úlohy na pomezí matematických a jazykových hádanek.

Desátý příklad z 57. MO-Z6: Řekne-li mimozemšťan v rozhovoru o Vánocích „haf quin lina“, znamená to „velké zlaté hvězdy“; když „kari lina mejk“, znamená to „blikavá zlatá kolečka“; když „esca haf kari“, znamená to „červená velká kolečka“. Jak se řekne „blikavé hvězdy“?

Také starobylé úlohy o tvorbě zajímavých čtverců (magických, latinských, řecko-latinských, proškrtávaných aj.) mohou žákovské řešitele oslovit.

Jedenáctý příklad z 57. MO-Z7 na sestavení řecko-latinského čtverce 4 × 4: Políčka na šachovnici 4 × 4 vybarvěte 4 barvami a vepište do nich 4 písmena J, A, R, O tak, aby v každém řádku i každém sloupci byly zastoupeny všechny barvy i všechna písmena. (Každé políčko bude obsahovat právě jedno písmeno a bude vybarveno jednou barvou. Každé písmeno musí být vybarveno postupně všemi barvami a také každá barva musí vystřídat všechna písmena.) Najdi jedno řešení.

Lze tedy vytvářet mnohé úlohy, které budou řešitelné a přitažlivé i pro žáky, kteří nemají rádi vzorečky a odmítají se učit zpaměti vzorce i „osvědčené postupy“ (což bývají často právě ti talentovaní), ale které zaujme hledání řešení tajuplných, nejasných či téměř „nemožných“ problémů. A takové by právě v MO neměly chybět, neboť přitahují zájem i rozvíjejí badatelské přístupy a tím i matematické talenty.

Literatura

[1] Loužecká (Svobodová), I.: *Péče o matematické talenty.* UHK, 2006 (diplomová práce).

[2] Volfová, M.: *Metody řešení matematických úloh.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2000.

Matematicky nadaní problémoví žáci

Eva Vondráková, Společnost pro talent a nadání, Praha[1]

ABSTRAKT. *Matematicky nadaní žáci často citlivě reagují na kvalitu výuky. Není-li pro ně dostatečně náročná a zajímavá, jsou frustrováni. Stejně citliví jsou na přístup učitele a jeho porozumění osobnosti žáků. Často se cítí osamoceni a „jiní“ uprostřed třídy plné spolužáků. Někdy jsou skutečně nápadně jiní, jindy jde „jen“ o jejich vnitřní prožívání, o kterém okolí nemá tušení. V tomto článku upozorníme především na případy, kdy jsou žáci výrazně intelekově nadaní, ale osobnostně „problémoví“, a své projevy nemají zcela pod kontrolou. Práce s nimi je pro většinu učitelů velmi obtížná. Úspěšná realizace jejich matematického nadání je obvykle provázena i zlepšením jejich dalších problémů. Na základě kazuistik a odborné literatury uvedeme, za jakých podmínek tyto děti „fungují lépe“, a čemu by se tedy měla věnovat pozornost, aby ani jejich matematický talent nepřišel nazmar.*

Vymezení rámce článku

Matematicky nadaní problémoví žáci tvoří velmi pestrou skupinu. Většinou se „nevejdou“ do možností, které nadaným skýtá nová školská legislativa a rámcové i školní vzdělávací programy. V tomto sdělení se budeme věnovat především těm intelektově nadaným žákům, kteří mají výrazné osobnostní zvláštnosti a nemají své chování zcela pod kontrolou. Tím představují problém pro své okolí. Jejich přítomnost komplikuje práci s ostatními žáky ve třídě. Některé tyto nadané problémové (rizikové) žáky nelze pustit ze zřetele ani o přestávce. Z těchto důvodů bývají vyloučeni z účasti na výletech a školách v přírodě.

Je velmi obtížné najít takový způsob vzdělávání a výchovy, který by umožnil co nejúplnější intelektový rozvoj těchto dětí a některé z nich zároveň vybavil pro úspěšné přežívání ve společnosti ostatních. Pokud se nám vůbec podaří najít účinná opatření, nastává problém s jejich organizačním, finančním a personálním zabezpečením. Řešením nebo alespoň vydatnou pomocí by například mohla být přítomnost asistenta. V současných podmínkách je ale získání asistenta pro dítě, které nemá zjevný zdravotní handicap a jehož inteligence dokonce výrazně převyšuje prů-

---

[1] e-mail: eva.vondrakova@email.cz

měr, prakticky nemožné. Nejjednodušší pro školu tedy je takového žáka se zbavit, případně jej nepřijmout, bez ohledu na jeho, v tomto případě matematický, talent. A tak často přijde nazmar … Lze tomu nějak zabránit?

Materiály o velmi problémově nadaných

O výchově a vzdělávání nadaných existuje obrovské množství kvalitních odborných titulů, zejména v angličtině. Hledáme-li však zdroje informací k péči o velmi problémové nadané, je nabídka mnohem menší. Jednou z mála takových publikací je „Rizikové děti a mládež v Kanadě a Rusku – mezikulturní výměna zkušeností v zájmu rozvoje nadání“. Týká se kanadsko-ruského projektu, který se snaží pomoci ohroženým dětem realizovat jejich potenciál na úrovni odpovídající jejich nadání a překonat problémy, které jim v realizaci brání. Jedná se především o děti ohrožené „sociálně“, ale ty jsou i u nás, byť ne v takové míře. Publikace je užitečná i pro práci s dalšími problémovými dětmi.

Termín „rizikové děti“, případně „děti v ohrožení“, se začal používat i v souvislosti s nadanými. Většinou patří do skupiny „skrytých nadaných“. Víme, že se uvádí, že nadaných jsou 2 % – 3 %, ale že existuje daleko větší skupina těch, kteří zůstávají neidentifikováni a nejsou dostatečně rozvíjeni. Tyto děti představují problém pro školu a často i potenciálně pro společnost. Zájem o řešení této problematiky stoupá, ale pohotová řešení a osvědčené postupy po ruce zatím nejsou.

V knize je mimo jiné uvedeno třídění zdrojů, ze kterých vycházejí příčiny problémů. Velmi zhruba rozčleněno jde o tři kategorie (doplněné příklady), které se samozřejmě mohou prolínat:

1) obtížné životní podmínky, včetně války, teroristických útoků, přírodních a průmyslových katastrof; nemoc nebo úmrtí člena rodiny, rozvod, sourozenecká rivalita nebo problémy ve vztahu k učiteli;

2) absence pečujícího rodinného prostředí – sirotci, opuštěné děti, děti ulice, členové gangů, děti opomíjené, žijící v chudobě, nedostatku rodičovské péče, izolované od společnosti;

3) zdravotní problémy fyzické či duševní, včetně nemocí, vývojových opoždění, hyperaktivity nebo poruch učení.

Některé příklady jsou nám naštěstí vzdáleny, mnoho dalších bychom mohli doplnit.

Vliv na problémy nadaných v našich podmínkách

Problémy těchto dětí *nemusí být způsobeny výchovnou neschopností rodičů*, jak okolí, včetně školy, často usuzuje. Na druhou stranu je třeba si uvědomit, že zatímco učitel by měl mít *patřičné vzdělání a osobnostní vlastnosti* pro výkon svého povolání (což bohužel neznamená, že tomu tak vždy je), kategorie rodičů je v tomto ohledu mnohem pestřejší. Rodiči mohou být i lidé vážně nemocní, „fyzicky“ či „duševně“, patologické osobnosti nebo „jen“ velmi citlivé a snadno zranitelné osoby.

Charakteristickým rysem nadaných je *přecitlivělost.* Zejména ti mimořádně nadaní jsou často *perfekcionisté* a také bývají velmi *sebekritičtí.* Velmi dobře si uvědomují, jak by věci měly fungovat a jak je tomu ve skutečnosti. Tedy například jak by měla fungovat společnost a jaký je rozpor mezi teorií nebo proklamovanými zásadami a realitou. Stejně tak jsou nároční sami na sebe. Uvědomují si rozpor mezi tím, jak by měl vypadat výsledek jejich činnosti a jaký opravdu (podle jejich hodnocení) je. Typickým příkladem u mladších dětí je, že např. nakreslí nejlepší obrázek ve třídě, ale nejsou s ním vůbec spokojeny a v afektu ho zničí.

V odborné literatuře se uvádí, že v celé populaci převažují na škále „extraverze–introverze“ extraverti. Mezi nadanými je tomu opačně – *převažují introverti* (např. Silvermanová, Poradenství pro nadané a talentované, Denver 1993), tedy jedinci, kteří nesdělují své pocity, méně komunikují, a nejsou pro své okolí tak dobře „čitelní“, jako extraverti. Výhodou introverze je schopnost nenechat se rozptylovat okolím a dlouhodobě se soustředit na intelektovou činnost. Nevýhodou pak je *sklon k depresím* a riziko, že si okolí nevšimne, že dotyčný má problémy. Nebo podcení jejich závažnost a nedokáže mu včas a adekvátně pomoci. Důsledkem pak mohou být pokusy o sebevraždu, v případě inteligentních introvertů častěji dobře promyšlené, a tedy „úspěšné“. Výjimečně se může stát, že žák, který je dlouhodobě v tenzi, nevztáhne ruku na sebe, ale na osobu, kterou vnímá jako zdroj frustrace, ze které nemá úniku.

Nepříznivé podmínky také usnadňují u disponovaných jedinců propuknutí psychiatrických onemocnění a závažnost jejich průběhu. Mírnější variantou důsledků nepříznivých okolností na vývoj této rizikové skupiny nadaných je nemožnost realizovat intelektový potenciál. Může se také stát, že ho budou do určité míry realizovat, ale jeho uplatnění bude ke škodě společnosti i jich samých.

Společnost pro talent a nadání

Na Společnost pro talent a nadání se během dosavadních 18 let její existence obrátily stovky rodičů se žádostí o radu, případně pomoc při řešení problémů, se kterými se setkávají při výchově a vzdělávání svých dětí. Některé z těchto dětí jsou dnes již dospělé. Řada příběhů má podobný průběh a daly by se třídit do kategorií. Díky tomu můžeme některé rodiče upozornit na konkrétní rizika a možné další varianty vývoje. Mnohé z nich můžeme povzbudit a dodat jim naději na dobrou perspektivu vývoje jejich dětí, vzdor dosavadním těžkostem. Samozřejmě se to netýká všech případů a i nadále se setkáváme i s problémy, pro které doposud nemáme vhodný model řešení po ruce. Hledáme pak pomoc u svých kolegů u nás i v zahraničí a pátráme po informacích v odborné literatuře, ale ani tam je pokaždé nenajdeme.

Autismus

Jedné skupině těchto dětí je poslední dobou věnováno více pozornosti a rodiče i škola mají možnost spolupracovat s odborníky. Mají diagnózu autismus či Aspergerův syndrom. Více k této problematice se dozvíte např. na `www.apla.cz`. K nim jenom drobnou poznámku: tyto děti mají často v předškolním věku zájem o uspořádání věcí, systémy, jízdní řády apod. Kolegové z klinické praxe obvykle považují výše uvedené za symptomy a diagnostikují. V některých případech (zejména u Aspergerova syndromu) se pacient během vývoje uzdraví. Podle našich zkušeností s kazuistikami řady nadprůměrně nebo i mimořádně nadaných dětí, nyní už dospělých, byly projevy a zájmy mnohých z nich v předškolním věku velmi podobné. Vzdor tomu jen u některých vývoj pokračoval patologickým směrem. Je pravděpodobné, že mezi těmi „uzdravenými“ jsou nadané děti, které „jen“ měly pro ně charakteristický druh zájmů.

Existují ale i další intelektově nadané děti, které mají *problémy přizpůsobit se běžným požadavkům školy a zařadit se mezi vrstevníky.* Společnost pro talent a nadání má za dlouhou dobu své činnosti popsánu řadu takovýchto případů. Rodiče těchto dětí jsou většinou vysokoškolsky vzdělaní a „pečující“. Některé starší případy zřejmě spadají do kategorie poruch autistického spektra a vyskytly se v době, kdy ještě nebyla tato porucha dostatečně známá. Další lze přičíst na vrub poruchám typu AD/HD apod. (dříve LMD). Tyto děti si díky své inteligenci dokáží poradit a učivo nějak zvládnou. Ne ale na takové úrovni, které ve skutečnosti odpovídá jejich intelektový potenciál. Mohou proto působit dojmem dětí průměrných i slabších, bez poruch učení. Patří sem také děti, které dokážou řešit velmi složité úlohy, pokud je vidí napsané, ale zpaměti nespočítají ani velmi jednoduchý příklad.

Setkáváme se i s dětmi, u kterých nebyla žádná z těchto poruch prokázána, a přesto mají výrazné problémy a jejich vzdělávání a výchova je oříškem pro rodiče i pro školu.

Ideál péče o nadané

Ideální stav by byl, kdyby u každého žáka mohly být *zmapovány jeho silné i slabé stránky* a mohl by být *vzděláván podle individuálního plánu, odpovídajícího jeho schopnostem a zájmům*. To je patrně v současné době nereálné. Je ale v zájmu dětí, učitelů i rodičů rozpoznat alespoň u případů, kterým je věnováno toto sdělení, jejich potenciál a ve *spolupráci s odborníky, kteří jsou informováni nejen o poruchách učení a patologii, ale i o vzdělávání a výchově nadaných*, těmto dětem pomoci.

U řady dětí se jejich problémy s věkem mírní, jsou-li k tomu příznivé podmínky. Na změně k lepšímu má velký podíl schopnost rodiny *poskytnout dítěti dostatečnou citovou oporu a zorganizovat přiměřený program pro jeho osobnostní a intelektový rozvoj* a pro zvládnutí či zmírnění problémů, které jeho vývoj provázejí. Zároveň je důležité, aby si *rodina udržela duševní rovnováhu*, což vůbec není jednoduché. Pokud má ke svému dítěti blízký vztah, prožívá s ním nebo za ně jeho strasti, protože ne vždy si dítě všechny problémy uvědomuje, zatímco rodiče už mají oprávněné obavy o jeho budoucnost. Uvědomují si, jak je dítě vnímáno okolím, a těžce nesou jeho nepříznivé hodnocení, ať už je dáváno najevo otevřeně, nebo v náznacích. Zvládnout takovou situaci není jednoduché ani pro odolné jedince, kteří mají sami dobré zázemí a podporu svých blízkých. Bohužel stabilní rodiny nejsou zcela běžným jevem. Žije-li dítě v neúplné nebo nefungující rodině, je situace vždy mnohem těžší, zvláště s tímto typem dětí.

Příklad dvou hochů

Dva intelektově nadaní bratři, mezi nimiž je věkový rozdíl 6 let, prošli velmi podobným vývojem. Na prvním stupni měli mimořádně velké problémy s přizpůsobením se „kolektivu“. Mezi spolužáky nezapadli, měli jiné zájmy a několikrát změnili školu. Po přestupu na víceleté gymnázium se jejich problémy výrazně snížily a stali se z nich téměř nenápadní, solidně pracující a osobnostně aspoň navenek neproblémoví studenti.

Mladší z nich, poznamenán dlouhodobým stresem a negativně prožívaným pocitem vlastní odlišnosti, hodnotil sám sebe velmi kriticky. *Uvažoval o smyslu života a pochyboval o něm.* Až na konci čtvrté třídy se dostal do školy, která mu nabídla *dostatečně náročný a zajímavý program* a citlivá paní učitelka dokázala *tolerovat jeho zvláštnosti.* Sama měla pocit neúspěšnosti, neboť depresivní úvahy tohoto dítěte přetrvávaly ještě dlouho po změně školy. Chlapec sám ale až tady, za celou dosavadní dobu jeho školní docházky, chodil do školy rád. Zmíněná paní učitelka se svou osobností, přístupem k dětem a způsobem práce podstatně lišila od těch, které učily tohoto chlapce před ní. I pro ni byla práce s tímto dítětem velmi náročná.

Diskuze StaN

Vždy záleží na tom, jakého dítě potká učitele. Mám dvanáctiletého syna, IQ v 10 letech přes 130, na jedné straně výborný v matematice, fyzice a přírodovědných oborech, na druhé straně problémy s neustálým zapomínáním a ztrácením věcí. Své učitele uváděl do zoufalství svými neustálými dotazy (boural jim hodiny), s každým se chtěl přátelit, když nemohl prosadit svou, byl i vzteklý (doma ho bez problémů zvládáme, mantinely jsou jasné). Na výchovné komisi mně i jemu vysvětlili, že s učiteli nemůže být kamarád a třídní učitelka mu dovolila jeden dotaz týdně. Píši to jen pro ilustraci, syn už se snad ve škole na nic neptá a já na jeho dotazy trpělivě odpovídám.

Příklad Matyáše

Matyáš je mimořádně intelektově nadaný chlapec, který měl kvůli zdravotním problémům téměř domácí vzdělávání. Jeho zájmy a znalosti se v mnoha směrech velmi lišily od toho, co nabízel vzdělávací program školy. Tato velmi dobrá základní škola mu tedy nepřipadala dost podnětná. Projevoval se jako dítě s velkými problémy v sociální přizpůsobivosti. Někteří odborníci měli podezření na poruchy autistického spektra. S věkem se postupně problémy chování mírnily. K výraznému zlepšení došlo po nástupu na OGB (gymnázium Buďánka, neboli „Mensa“ gymnázium), kde našel spolužáky s podobnými zájmy a způsobem myšlení a také kamarády, se kterými si opravdu rozumí. Mimo školu spolupracuje na rozvoji svých znalostí v oblasti elektrotechniky s „mentorem“. Se svými novými spolužáky a mentorem komunikuje Matyáš bez problémů. K takovému zlepšení by patrně bez vhodného gymnázia a vlivu mimořádně příznivého rodinného prostředí nedošlo.

Příklad aktuální a neřešený

Jedním z velmi problémových dětí je Honzík. Jeho široká škála kvalitních zájmů, způsob vyjadřování, pozoruhodné znalosti historie, geologie a chápavost v matematice, fyzice a informatice vzbuzují obdiv. Vzdělaní dospělí s ním hovoří rádi a s potěšením. V jejich společnosti si má s kým a o čem povídat. Stejnou odezvu však nenachází u svých vrstevníků. Honzík svými projevy odpovídá v literatuře popsaným mimořádně nadaným dětem, jak uvádí jeho maminka v dopise, psaném ve druhém pololetí Honzíkovy 5. třídy:

... Honzík se projevuje jinak než ostatní děti už od narození. Hlavně tím, že byl a je zvídavý. Všechny knihy, články, v kterých se popisují nadané děti, vše u Honzíka stoprocentně souhlasí: neustálá zvídavost, velká slovní zásoba. Od 4 let umí číst s porozuměním, jeho největší láska jsou knihy. Od 1. třídy ho zajímá anatomie, archeologie, dějiny, Egypt, pravěk, středověk, mineralogie, numismatika atd. Samozřejmě se mu věnuji na 100 %, protože to Honzík vyžaduje. Chodíme spolu do muzeí, na poznávací zájezdy, hrady, zámky atd. V prosinci 2005, v rámci dne otevřených dveří v Gymnáziu Budánka, dělal Honzík IQ testy s výsledkem 132, a tím byl přijat do dětské Mensy ČR.

Teď bych měla napsat něco o jeho negativech. To, čím si škodí nejvíc, je jeho velký smysl pro HUMOR. Bohužel, dělá vše pro to, aby se ostatní smáli. Je schopný mluvit celý den, rád na sebe poutá pozornost a škola je pro to dobré místo. Protože je jedináček a kamarády nemá, vynahrazuje si to ve škole. Ve škole ze sebe rád dělá kašpara, ale děti jeho přehnané vtipy nemají rády, vyjadřují se o něm, že je blázen. Ve škole je kolem něj vždy velký rozruch, protože Honzík rád vypravuje vtipy, všemu se směje, mluví stále a nahlas. Je plný energie a nápadů, je bystrý a nic mu neunikne, je schopný vnímat několik věcí najednou. Kvůli jeho chování ho děti ani učitelé nemají moc rádi, ale on si to nenechá vymluvit, aby se choval jinak.

První půlrok první třídy jsme přetrpěli ve škole, kde vyrušoval a denně si na něj někdo stěžoval. Učitelka doporučovala, aby přestoupil o ročník výš. Od druhého pololetí první třídy jsme ho dali do jiné školy, protože *tam slibovali přístup s porozuměním pro všechny děti, i pro ty výjimečně nadané. Učili se tam experimentálně, úplně jinak, ale ve 4. třídě jsem začala mít obavy, že tímto stylem výuky nemá šanci udělat zkoušky na gymnázium. Proto jsme se rozhodli v pololetí 4. třídy změnit tuto školu, za běžnou, kde se zkouší, známkuje, kde funguje obvyklý řád a režim. Narazili jsme zase na problémy, které jsme nečekali, a to byla šikana a nepochopení učitelky k jeho zájmům. Říká tomu „mimoškolní zájmy“ a nezajímá ji to. Na písemném výstupním hodnocení, které potřebuje k přijímacím zkouškám na gymnázium, mu paní učitelka napsala hodnocení co možná nejhorší. Je dost možné, že Honzíka na zvolené gymnázium nepřijmou, protože zrovna o tuto školu je velký zájem. Hlásí se na ni asi pětkrát více dětí, než berou. Takže když se nám to nepovede, rádi bychom našli školu, která zvládne Honzíkův zvláštní smysl pro humor a jeho osobnost.*

Honzík nakonec nemohl dělat přijímací zkoušky na gymnázium v řádném termínu, protože pobýval delší dobu v nemocnici. Nejvhodnější školou by pro něj nejspíš bylo OGB. Našel by tam patrně (podobně jako Matyáš, viz výše) jak vrstevníky s podobnými zájmy, tak větší toleranci a odolnost okolí vůči svým osobnostním zvláštnostem. Výuka by pro něj mohla být přiměřeně náročná a individualizovaná. Bohužel je toto gymnázium dopravně příliš vzdáleno od místa Honzíkova bydliště. Vypadalo to tedy, že Honzík zůstane na „klasické“ ZŠ, pro něj zcela nevyhovující (kde byl mimo jiné šikanován). V dalším dopise maminka uvádí:

Honzík dělá všechno pro to, abych si o něm myslela pravý opak: nechce se učit, jeho samé dvojky na vysvědčení mu nevadí, jeho úžasné zájmy, které měl v 1., 2. a ve 3. třídě opustil, … a na gymnázium se nedostal (zkoušky dělal v náhradním termínu). Ano, IQ má vysoké, ale nechce ho využívat ve škole, ale jen na zábavu. Proto už ani neuvažuji, že by přešel do jiné školy, když sám nechce. Možná má pravdu učitelka, která o Honzíkovi na třídní schůzce řekla: „Má tolik znalostí, že by si člověk mohl myslet, že je geniální, … ale on to je průměrný žák!“

Nakonec Honzík přešel do výběrové ZŠ, kde byl pedagogický sbor připraven spolupracovat na jeho vzdělávacím programu i na začlenění mezi ostatní děti. Výukové problémy prakticky neměl, místo nich se však záhy ukázaly problémy spojené s jeho impulsivitou a snahou realizovat „úžasné nápady“, kterými oplýval. Ty spočívaly zejména v provokování ostatních dětí během přestávek. Starší žáci byli vedeni k tomu, aby tyto Honzíkovy pokusy ignorovali. Mladší děti hledaly pomoc u dospělých. Některé paní učitelky si stěžovaly i na jeho chování v hodinách. Žádné problémy s ním neměli vyučující matematiky, fyziky a informatiky, shodou okolností všichni muži, kteří byli naopak velmi spokojeni s úrovní jeho práce.

Zvládnout potřebu provokovat bylo nad Honzíkovy síly. Bylo zřejmé, že problémy nejsou, má-li Honzík pro něj dostatečně zajímavý a náročný program, případně může-li komunikovat s někým dospělým. Po určitou dobu se mu tedy věnoval někdo z vyučujících i během přestávek. Taková situace ale byla dlouhodobě neúnosná vzhledem k vytíženosti učitelů a jejich dalším povinnostem. Po roce se tedy Honzík vrátil do školy poblíž svého bydliště, kterou už navštěvoval dříve. Rozdíl je v tom, že už je na druhém stupni, kde má víc vyučujících a nevrací se k paní učitelce, se kterou si nerozuměli.

Měli jsme obavy, jak se škole podaří poskytnout mu dostatečně náročný program a pomoci jeho začlenění mezi ostatní žáky. Ukázalo se, že Honzíkovo začlenění mezi bývalé spolužáky proběhlo „úspěšně“. V současné době kamarádí s těmi, kteří ho dříve šikanovali. Není tedy osobně ohrožen. V přístupu k učení se zhoršil. Obávám se ale, že toto není příslib budoucího úspěšného vývoje.

Jedním z asi mála nových pozitivních prvků je doučování, které mu maminka zařídila. Občas má možnost pracovat na své úrovni pod vedením středoškolského studenta.

Honzík by určitě vzhledem ke svému nadání, znalostem, zájmům i osobnostním zvláštnostem potřeboval individuální vzdělávací plán. Ten je, v případě intelektového nadání žáků, podmíněn výsledkem psychologického vyšetření ze státního poradenského zařízení. V Honzíkově případě ale vůbec nebylo jisté, že by v poradně spolupracoval, uvažoval a choval se tak konformně, aby ve výsledku překročil hranici, odpovídající výsledku IQ 130 nebo vyššímu. Vzhledem ke své impulzivitě a zvláštnostem osobnosti by potřeboval, aby mu byla téměř neustále nablízku dospělá osoba. Takže by bylo vhodné mít ve škole/třídě asistenta, který by mu pomáhal zvládat přestávky, případně v některých předmětech pracovat na náročnější úrovni než ostatní žáci. I z těchto důvodů by bylo zapotřebí mít doporučení od specialistů. Honzíkova maminka je ale velmi vážně nemocná a nemůže s ním požadovaná vyšetření absolvovat. Tatínek zase není přesvědčen o potřebnosti návštěvy těchto zařízení.

Takže problém zůstává zatím neřešen. Vzdor tomu, že odborná posouzení (ať už s jakýmkoli výsledkem) chybí, je Honzík žák se specifickými vzdělávacími potřebami. V jeho případě jde o dítě „dvakrát výjimečně“, což znamená, že se liší od většiny svých vrstevníků dvěma směry. Jedním z nich je jeho intelektové nadání, druhým – daleko nápadnějším – je jeho impulzivita a svérázné chování, ze kterého plynou další problémy. Z nich hlavní je jeho problém s přizpůsobením. Škola není povinna bez zmíněných potvrzení problém řešit. Ale musí si s ním nějak poradit, prostě proto, že takovéhoto žáka má.

V současné době nelze očekávat, že rodina bude schopna problém Honzíkova adekvátního vzdělávání řešit. Ač nepodceňují vzdělávání, mají teď aktuálnější problémy:

Milá paní Vondráková,

omlouvám se, že nemohu přijít ani na 84. Klub rodičů, i když mě tato problematika velmi zajímá, protože s jedním takto problémovým dítětem žiji a jak jistě víte, dává mi dost zabrat a každá rada rodičů, kteří prožívají něco podobného, mi pomáhá. Já jsem ted ležela 14 dní v nemocnici, ted mě na 4 dny pustili domů. V pondělí ráno nastupuji zase do nemocnice a v úterý mě budou operovat. Nevím, jak se budu uzdravovat, ale až to půjde, zase budu ráda chodit na vaše setkání Klubu rodičů.

Bohužel Honzík nemá žádnou babičku, dědečka, žádnou tetu, strýce, žádného bratrance, … je sám, a proto jsem se já snažila mu vynahradit vše, co mu chybí. Teď se jen obávám, kam by Honzík šel, kdyby se táta zhroutil. Možná, že chvíle bez milující mámy budou i pro Honzíka přínosem, možná, že se tátovi podaří Honzíka převychovat, protože on je přísný, nedovolí mu zdaleka to co já, … a já budu dlouho nemocná, nebo určitě dlouho nebudu mít dřívější energii, nebo i když budu už fit, určitě už nebudu tolik energie věnovat tomu co dřív, manželovi ráda přenechám hodně povinností s dítětem, možná vážně svojí přísností se mu ho podaří převychovat. Uvidíme. S Honzíkem si můžete kdykoliv popovídat, on bude rád, on je velmi komunikativní k milým lidem.

Zdraví Vás X.Y. – maminka Honzíka

Honzík by tedy potřeboval:

1) možnost setkávat se s podobně motivovanými vrstevníky (kluby, sobotní „kroužky“, jako mají v Anglii, apod.)
2) IVP
3) mentora – někoho, kdo by se věnoval rozvíjení jeho osobnosti a zájmů
4) školu, která by uměla pracovat s jeho „dvojí výjimečností“
5) pedagogy, kteří by s ním dokázali bez problémů vyjít i pracovat (to bylo ale v jiné škole)

Především by samozřejmě potřeboval nemít problémy uvedené mezi „obtížnými životními podmínkami“. Jeho současná škola není nastavena na práci s nadanými a už vůbec ne zároveň problémovými dětmi. Umíme v tomto případě pomoci?

Literatura

[1] Polyzoi, E., Bergsgaard, M., McCluskey, K.W., Olifirovych, O. A.: *At-Risk Children and Youth in Canada and Russia.* UCGF, Calgary, Alberta, 2005.

[2] Silverman, K. L. (ed.): *Counseling the Gifted and Talented.* Love Publishing Company, Denver, Colorado, 1993.

[3] `www.apla.cz`

[4] `www.joanfreeman.com`

[5] `www.talent-nadani.cz`

[6] `www.worldgifted2007.com`

◆

Peniaze naše každodenné (banky, poisťovne a iné)

Ján Žabka, 1. súkromné gymnázium, Bratislava[1]

Abstrakt. *Jedna časť matematiky, o dôležitosti ktorej určite ani spomedzi žiakov nikto nepochybuje, je finančná matematika. Finančná matematika je pomerne bohatá oblasť aplikovanej matematiky, s ktorou sa môžu zoznámiť žiaci a študenti ľubovolného ročníka. Dôležité je, aby čo najviac poznatkov mali šancu objaviť samostatne. Vo finančnej matematike sa objavujú úlohy na prácu s percentami, riešenie rovníc, prípadne nerovníc (lineárnych, exponenciálnych), súčet geometrického radu, logaritmy. V tomto materiály sa nachádza námet na prácu so žiakmi 8. alebo 9. ročníka ZŠ, resp. kvarty osemročných gymnázií. Čo sa týka matematiky, ktorá sa v tomto projekte objavuje, tak ide najmä o prácu so zloženým úrokovaním, zložitejšie úlohy s percentami a propedeutiku súčtu geometrického radu.*

O projekte

Cieľom tohto projektu je *prvé zoznámenie* sa s niektorými finančnými produktmi (bežný, termínovaný vklad, hypotéka, leasing, dôchodkové

---

[1] e-mail: zabco@centrum.sk

sporenie, pôžičky, . . .) podľa výberu a záujmu detí. Projekt sme realizovali v druhom polroku kvarty, teda po prebratí učiva o percentách (preberali v tercii) a po zopakovaní a rozšírení tohto učiva o jednoduché a zložené úrokovanie na začiatku kvarty. Na zopakovanie je možné použiť napr. učebnice [1, s. 9–11]. Po tomto zopakovaní by mali žiaci byť schopní vyriešiť úlohy na takej úrovni náročnosti, ako napríklad:

Úloha: Vypočítajte, akú sumu budete mať na účte po dvoch rokoch od vloženia 100 000 Sk, ak banka ponúka 4% ročný úrok.

Otázka: Aké sú ešte iné možnosti (okrem banky), kam sa dajú peniaze uložiť tak, aby sa zhodnocovali? (Poisťovne, nákup podielových listov, . . .)

Otázka: Potrebujete si súrne požičať 100 000 Sk. Aké máte možnosti?

Úloha: Nájdite na internete aspoň tri rôzne ponuky od rôznych inštitúcií, ktoré ponúkajú požičanie peňazí.

Po krátkej príprave dostali na začiatku marca žiaci kvarty – 26 žiakov – zadanie projektu s presnými termínmi. Ukážka celého projektu nasleduje:

„Peniaze naše každodenné“ – triedy Friends a Innovators
marec 2006 a február 2007

Trieda sa rozdelí na 4 až 5 členné skupiny (skupín by malo byť 5 až 6).

Každá skupina si vyberie, či bude ponúkať pôžičky (banka, splátková spoločnosť, „rýchle pôžičky“, . . .) alebo bude ponúkať uloženie peňazí a ich úročenie, poistenie, prípadne iný finančný produkt.

Každá skupina *do 3. 3. nahlási* zloženie tímu a vybratú tému Žabčovi.

Úlohou každého tímu *bude osobne navštíviť* aspoň jednu inštitúciu (banku, poisťovňu, splátkovú spoločnosť, leasingovú spoločnosť, . . .), *zistiť čo najviac informácií* o tejto spoločnosti a produktoch, ktoré ponúka, napríklad na internete, a:

- 1. *Pripraviť reklamný leták* vlastnej vymyslenej spoločnosti aj s ponukou,
- 2. *Pripraviť reklamný šot* (živý alebo natočený), z ktorého bude zrejmé, prečo je výhodné si vybrať práve ich ponuku, bude v ňom vysvetlené úročenie, *ukážka výpočtov*, . . .

- 3. Na „Trhu finančných spoločností“, ktorý sa bude konať cca 27. 3. *prezentovať svoje výtvory* (leták, ponukový list, reklamu, prezentáciu v PP, . . .), vysvetliť princíp úročenia, pôžičiek, . . . Na otázky musia vedieť reagovať *všetci* členovia tímu!!!

Po skončení „Trhu finančných spoločností“ bude každý tím *písať* krátku *hodnotiacu správu* (cca pol strany A4) o zvyšných 4–5 spoločnostiach.

Ako študijný materiál určený na samoštúdium odporůčame publikaciu [1].

Hodnotenie členov tímu

Spolu za celú aktivitu môže každý získať 10 % koncoročnej známky, každý člen tímu získava max. 2 % za prípravu letáku, jeho informačnú hodnotu, vzhľad, . . .

Každý člen tímu získava max. 2 % za prípravu šotu, jeho informačnú hodnotu, obsah, úroveň spracovania, . . .

Každý člen tímu získava max. 3 % za prezentáciu výtvorov na „Trhu finančných spoločností“, úroveň vystupovania, porozumenie matematike v pozadí, . . .

Každý člen tímu získava max. 1 % za prípravu hodnotiacej správy, jej úroveň, kritiku (najmä pozitívnu), objektivitu, . . .

Tieto percentá získavajú všetci členovia rovnako.

Okrem týchto 8 % môže každý člen *individuálne* získať max. 2 % za tímovú spoluprácu.

Tieto pokyny sme si na jednej vyučovacej hodine vysvetlili. Najčastejšia otázka bola, či skutočne majú navštíviť nejakú konkrétnu finančnú inštitúciu (áno, musia), či nestačí komunikovať s rodičmi (nie, nestačí, dôležité je komunikovať s človekom, ktorého nepoznajú a na ktorého nie sú zvyknutí . . .), či stačí, keď tam pôjde len jeden z tímu (nie, nestačí), či stačí využiť internet (nie, nestačí), kto bude prideľovať percentá (učiteľ) a pod. Žiaci sa začali rozdeľovať do skupín (väčšinou podľa toho, kto je s kým kamarát). Viac sme na tejto hodine nestihli.

Všetci dodržali termín na rozdelenie do tímov. Pravdepodobne pomohlo aj to, že pri nedodržaní termínu za nich rozhodujem ja (napríklad ich môžem rozdeliť do tímov, prideliť im tému a podobne). Takže je pre nich výhodné dodržiavať termíny.

Na ďalších dvoch hodinách študenti referovali o svojej návšteve a ujasňovali si, čomu presne sa majú venovať, pripravovali si prezentáciu.

Na ďalšej hodine sme konzultovali problémy, ktoré mali jednotlivé skupiny – od zásadných („Čo máme hovoriť?“) po menej zásadné („Čo máme robiť, keď sme natočili video šot dole hlavou?“). Po tejto hodine nasledoval víkend, počas ktorého sa všetky skupinky chystali prácu na projekte dokončiť.

V pondelok 27. 3. (podľa harmonogramu) nasledovala jedna vyučovacia hodina ako príprava na prezentácie (spolupracoval som s kolegom informatikárom a kolegyňou slovenčinárkou). Potom prebiehali cca 60 minút prezentácie a ďalších cca 30 minút hodnotenie. Niektoré výsledky práce 13 až 14 ročných študentov si môžete pozrieť na webovej stránke `www.ucmeradi.sk`. Pripomínam, že sú to ich vlastné výtvory a teda obsahujú primerané množstvo nepresností, gramatických chýb a pod. Na hodnotenie študentov a prideľovanie percent som používal počas prezentácií hodnotiacu tabuľku.

Študenti písali svoje krátke hodnotiace správy do pripravenej šablóny, ktorú som mal taktiež pripravenú a je ju tiež možné nájsť na `www.ucmeradi.sk`. Cieľom nebolo prideliť ostatným percentá, ale napísať (opäť tímovo) kritické hodnotenie.

Celkovo mali prezentácie veľmi podobný priebeh: každý tím rozumel dobre svojej téme, bolo však veľmi náročné ju vysvetliť ostatným.

Taktiež bolo vidieť, že pomerne veľa úsilia deti vložili do toho, čo ich najviac bavilo – prípravy reklamných šotov. Všetky skupinky sa stretli cez víkend a spoločne ich pripravovali. Teší ma predstava, že sa 5 spolužiakov stretne cez víkend kvôli projektu z matematiky, pracujú spoločne, dobre sa pri tom zabavia a ešte sa aj zoznámia s prvými pojmami a súvislosťami vo finančnej matematike.

Som presvedčený, že takáto forma práce stojí za to. Ukazuje matematiku v inom svetle, deti v nej vidia užitočnú vec. Pracujú s počítačom, prezentáciami, hľadajú na internete, komunikujú s rodičmi, s odborníkmi. A ešte k tomu všetkému majú z toho všetkého dobrý pocit. Aj ja ako učiteľ som sa dozvedel všeličo nové. Myslím, že to bolo užitočných 5 vyučovacích hodín.

Na spomenutom portáli `www.ucmeradi.sk` si môžete niektoré pôvodné (neupravené) práce študentov a niekoľko fotografií z prezentácie.

Literatura

[1] Repáš, V., Černek, P. a kol.: *Učebnica matematiky pre 8. ročník ZŠ, 1. diel.* Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2001.

[2] `www.ucmeradi.sk`

PRACOVNÍ DÍLNY

Kombinatorické úlohy řešené nalezením rekurentního vztahu

Emil Calda, MFF UK Praha[1]

Abstrakt. *V článku jsou pomocí odvozených rekurentních vzorců vyřešeny tři kombinatorické úlohy a ukázány způsoby řešení lineárních rekurentních rovnic 1. a 2. řádu s konstantními koeficienty. Na závěr je odvozen (a aplikován) vzorec pro počet disjunktních částí rovinné konvexní oblasti, kterou prochází daný počet přímek protínajících se uvnitř této oblasti v daném počtu bodů.*

Na střední škole se kombinatorické úlohy obvykle řeší užitím vzorců pro počty variací, permutací a kombinací a způsob jejich řešení pomocí nalezeného rekurentního vztahu se téměř nepoužívá. Domnívám se, že by mohlo být užitečné, kdyby se studenti aspoň na několika příkladech mohli s touto metodou seznámit. Ukážeme si ji v následujících úlohách.

Příklad 1. Podél chodníku, tj. rovnoběžně s ním, je šest stejně velkých parkovacích míst, na kterých mohou parkovat autobusy, osobní a nákladní auta. Určete, kolika způsoby se na těchto šest míst mohou tato vozidla seřadit, zabere-li osobní auto jedno místo, nákladní auto dvě místa a autobus také dvě místa. (Osobní auta mezi sebou nerozlišujeme, nerozlišujeme ani mezi auty nákladními ani mezi autobusy.)

Řešení. Úlohu nejprve vyřešíme výčtem všech možností, které pro umístění daných vozidel mohou nastat; pro počet těchto možností můžeme využít vzorec pro počet permutací s opakováním, pokud ho studenti znají.

Rozmístíme	Počet možností
6 aut osobních, žádné nákladní a žádný autobus	1
4 auta osobní, 1 nákladní a žádný autobus	5
4 auta osobní, žádné nákladní a 1 autobus	5
2 auta osobní, 2 nákladní a žádný autobus	6
2 auta osobní, žádné nákladní a 2 autobusy	6

---

[1] e-mail: ecalda@volny.cz

2 auta osobní, 1 nákladní a 1 autobus	12
žádné osobní, 3 nákladní a žádný autobus	1
žádné osobní, 2 nákladní a 1 autobus	3
žádné osobní, 1 nákladní a 2 autobusy	3
žádné osobní, žádné nákladní a 3 autobusy	1
Všech možností rozmístění vozidel daných tří druhů je	43

Ukážeme si nyní řešení pomocí rekurentního vztahu. Budeme předpokládat, že na parkovišti podél chodníku je n stejně dlouhých parkovacích míst, kde $n > 2$, a označíme $p(n)$ počet způsobů, kterými mohou daná vozidla všechna tato místa zaplnit. Všechny tyto způsoby rozložíme do tří disjunktních tříd podle toho, které vozidlo stojí první zleva:

Je-li to osobní auto, zbývá $n-1$ míst, která lze obsadit $p(n-1)$ způsoby, je-li to autobus nebo nákladní auto, zbývá $n-2$ míst, jež lze obsadit $p(n-2)$ způsoby.

Zjistíme-li ještě, že $p(1) = 1$ a $p(2) = 3$, dostáváme rekurentní vzorec

$$p(n) = p(n-1) + 2p(n-2), \quad p(1) = 1,\ p(2) = 3.$$

Postupným výpočtem hodnot $p(3) = 5$, $p(4) = 11$ a $p(5) = 21$ dostaneme výsledek

$$p(6) = p(5) + 2p(4) = 21 + 2 \cdot 11 = 43.$$

Výhoda tohoto postupu je zřejmá: Z odvozeného rekurentního vzorce můžeme postupně určovat počet způsobů zaparkování vozidel daných tří druhů pro libovolná přirozená čísla n. I když tento postup je pro velká n poněkud zdlouhavý, je jistě rychlejší, než kdybychom tento počet určovali výčtem. Další výhodou je to, že v některých případech lze rekurentní vzorec posloupnosti $(p(n))$ převést na vzorec pro její n-tý člen, s jehož pomocí můžeme počet způsobů zaparkování pro libovolné n určit přímo.

Připomeňme si, jakým způsobem se dá právě odvozený rekurentní vzorec převést na vzorec pro n-tý člen.[2] Jak známo, jde o řešení lineární rekurentní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, tj. o řešení rovnice

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0, \quad a_2 \neq 0.$$

Její obecné řešení je

$$\begin{aligned} f(n) &= c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1} \quad \text{pro } x_1 \neq x_2, \\ f(n) &= (c_1 + c_2 n) x_1^{n-1} \quad \text{pro } x_1 = x_2, \end{aligned}$$

---

[2] Studentům tento postup sdělovat nemusíme – někteří se s ním seznámí na vysoké škole, a to i s odvozením, které zde vynecháme.

kde x_1 a x_2 jsou kořeny tzv. charakteristické rovnice (příslušné dané rovnici rekurentní), tj. rovnice

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

V případě „našeho“ rekurentního vzorce, který napíšeme ve tvaru

$$p(n+2) - p(n+1) - 2p(n) = 0,$$

jsou kořeny charakteristické rovnice

$$x^2 - x - 2 = 0$$

čísla $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, takže obecné řešení této rekurentní rovnice je

$$p(n) = c_1 \cdot 2^{n-1} + c_2 \cdot (-1)^{n-1}.$$

Konstanty c_1 a c_2 určíme z počátečních podmínek $p(1) = 1$, $p(2) = 3$ dosazením $n = 1$ a $n = 2$ do tohoto obecného řešení:

$$\begin{aligned} p(1) &= c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot (-1)^0 = 1 \\ p(2) &= c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot (-1)^1 = 3 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme $c_1 = 4/3$ a $c_2 = -1/3$. Tím je hledaný vzorec pro počet způsobů zaparkování daných vozidel na n parkovacích míst určen:

$$p(n) = [4 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1}] \cdot 1/3.$$

Po dosazení $n = 6$ snadno ověříme, že je vskutku $p(6) = 43$.

Příklad 2. V rovině je dáno n přímek, kde $n > 1$, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Určete, na kolik disjunktních částí je rovina těmito přímkami rozdělena.

Řešení. Označíme $p(n-1)$ počet disjunktních částí, na něž je rovina rozdělena $n-1$ přímkami, a určíme, kolik částí přibude, zvětší-li se počet těchto přímek o jednu. Protože přidaná přímka protne $n-1$ přímek původních v $n-1$ průsečících, je jimi rozdělena na n úseků, z nichž každý rozdělí původní část roviny na dvě. Znamená to, že přibude n nových částí roviny, takže pro všechna $n > 1$ platí rekurentní vztah

$$p(n) = p(n-1) + n, \quad p(1) = 2.$$

Z tohoto rekurentního vztahu vyjádříme vzorec pro $p(n)$ tak, že sečteme všech n následujících rovností:

$$\begin{aligned}
p(n) &= p(n-1) + n \\
p(n-1) &= p(n-2) + (n-1) \\
&\vdots \\
p(2) &= p(1) + 2 \\
p(1) &= 2
\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme hledaný vzorec:

$$p(n) = (n^2 + n + 2) \cdot 1/2$$

Příklad 3. Na každé straně trojúhelníku ABC zvolíme libovolně n vnitřních bodů, kde $n > 1$, a sestrojíme všechny úsečky spojující každý vrchol trojúhelníku se zvolenými n body protější strany. Určete, na kolik disjunktních částí je těmito úsečkami trojúhelník ABC rozdělen za předpokladu, že žádné tři z těchto úseček neprocházejí týmž bodem.

Řešení. Označíme $p(n-1)$ počet disjunktních částí, na něž je trojúhelník ABC rozdělen všemi úsečkami, které spojují každý jeho vrchol s $n-1$ body protější strany, a na každé straně postupně zvolme další vnitřní bod. Počet úseček vycházejících z každého vrcholu vzroste o jednu a počet disjunktních částí se tímto způsobem zvětší na $p(n)$.

Připojme nejprve vnitřní bod X k $n-1$ vnitřním bodům strany BC. Úsečka AX protne všechny úsečky vycházející z vrcholů B, C ve $2n-2$ bodech, které ji rozdělí na $2n-1$ úseků, takže přibude $2n-1$ nových částí.

V dalším kroku připojíme vnitřní bod Y k $n-1$ vnitřním bodům strany CA. Úsečka BY protne všechny úsečky vycházející z vrcholů A, C ve $2n-1$ bodech, neboť z vrcholu A po předchozím připojení úsečky AX vychází nyní n úseček. Těchto $2n-1$ průsečíků rozdělí úsečku BY na $2n$ úseků, takže nových částí přibude také $2n$.

Nakonec připojíme vnitřní bod Z k $n-1$ vnitřním bodům strany AB. Úsečka CZ protne všechny úsečky vycházející z vrcholů A, B ve $2n$ bodech, které ji rozdělí na $2n$ úseků. V trojúhelníku ABC tak přibude $2n+1$ nových částí.

Zjistíme-li ještě, že je $p(1) = 7$, dostáváme vzorec, který umožňuje určit počet disjunktních částí daného trojúhelníku pro každé přirozené číslo n:

$$p(n) = p(n-1) + (2n-1) + 2n + (2n+1) = p(n-1) + 6n, \quad p(1) = 7$$

Z tohoto rekurentního vztahu vyjádříme vzorec pro $p(n)$ postupným dosazením čísel $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 3, 2 za n podobně jako v předchozím příkladu a sečtením všech takto získaných $n-1$ rovností

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + 6n, \\ p(n-1) &= p(n-2) + 6(n-1), \\ &\vdots \\ p(2) &= p(1) + 6 \cdot 2, \\ p(1) &= 7 \end{aligned}$$

dostaneme po úpravě $p(n) = 3n^2 + 3n + 1$.

Ukážeme si ještě jiné řešení posledních dvou příkladů, a to pomocí následující věty: *Prochází-li libovolnou konvexní oblastí v rovině p přímek, které se uvnitř této oblasti protínají v b bodech (žádné tři v jednom), pak pro počet d disjunktních částí, na něž tyto přímky danou oblast rozdělují, platí $d = p + b + 1$.*

Větu dokážeme indukcí podle počtu přímek.

Pro $p = 1$ je $b = 0$ a $d = 2$, takže věta platí. Předpokládejme dále, že věta platí pro p přímek, a připojme jednu další, která těchto p přímek protne uvnitř dané oblasti v r průsečících. Těchto r průsečíků rozdělí připojenou přímku na $r+1$ úseků, které rozdělí každou původní část oblasti, kterou procházejí, na dvě. Původní počet d disjunktních částí se tak zvětší o $r+1$. Máme dokázat, že platí

$$d + (r+1) = (p+1) + (b+r) + 1.$$

Tato rovnost však ihned vyplývá z indukčního předpokladu přičtením $r+1$ k oběma stranám rovnosti $d = p + b + 1$.

Užitím této věty vyřešíme druhý i třetí příklad velice snadno:

V příkladu 2, kde konvexní oblastí je celá rovina, je $p = n$ a $b = \binom{n}{2}$, takže pro počet disjunktních částí, na něž je rovina n přímkami daných vlastností rozdělena, je

$$d = n + \binom{n}{2} + 1 = (n^2 + n + 2) \cdot 1/2$$

v souladu s výsledkem získaným z rekurentního vztahu.

V příkladu 3, kde konvexní oblastí je trojúhelník ABC, je $p = 3n$ a $b = 3n^2$ (úsečky vycházející z vrcholů A, B mají n^2 průsečíků, stejný počet průsečíků mají i úsečky z vrcholů B, C a z vrcholů C, A), takže počet disjunktních částí, na něž je trojúhelník ABC rozdělen, je

$$d = 3n^2 + 3n + 1,$$

což souhlasí s výsledkem odvozeným výše.

Literatura

[1] Calda, E.: *Sbírka řešených úloh – Středoškolská matematika pod mikroskopem.* VUT, Brno, 1992.

[2] Calda, E.: Řešení kombinatorických úloh nalezením rekurentního vzorce. *MFI* **12**, 6 (2003).

[3] Calda, E.: *Kombinatorika pro učitelské studium.* Matfyzpress, Praha, 1996.

Sestrojme si kružnici o poloměru 500 km

Pavel Leischner, PF JU, České Budějovice[1]

ABSTRAKT. *Princip sestrojení kružnice velkého poloměru spočívá v tom, že některý její bod zvolíme pevně a střed kružnice neomezeně vzdalujeme ve zvoleném směru. Článek ukazuje využití dynamického zvětšování poloměrů kružnic ke studiu limitních přechodů v některých geometrických situacích. Je popsána realizace „vzdalování“ středu kružnice dvěma způsoby: Nanášením délky na polopřímku a posouváním o vektor zvětšený stejnolehlostí. Je též ukázáno využití takového posouvání při konstrukci ovladačů, které umožňují skrývání a zpětné zviditelnění sestrojených objektů, bez užití nabídky* Skrýt/Zobrazit.

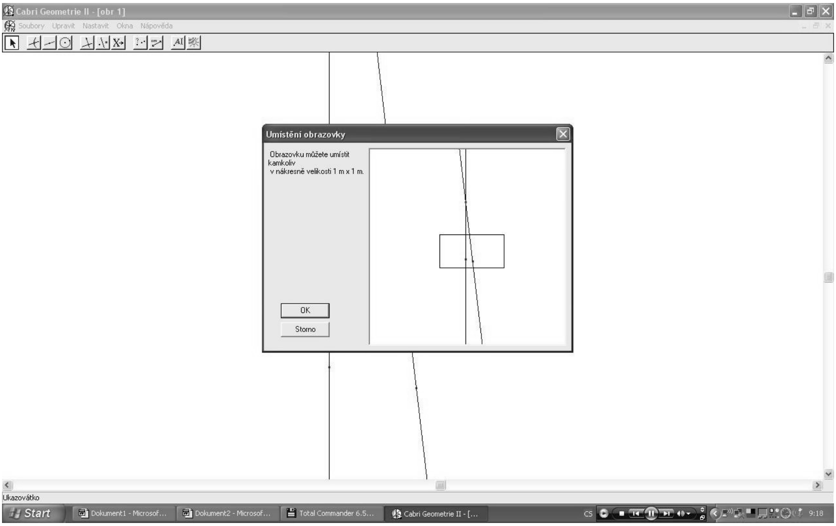
Úvodem

Existuje několik možností práce s objekty vytvořenými v Cabri geometrii vzhledem k jejich umístění na pracovní ploše. Nejjednodušší je pracovat jen s těmi útvary, které zobrazuje monitor. Zkušený uživatel však ví, že monitor zobrazuje jen část celé pracovní plochy velikosti

---

[1] e-mail: leischne@pf.jcu.cz

1 m × 1 m. Chceme-li pracovat s objekty sestrojenými na této ploše, ale umístěnými mimo záběr monitoru, použijeme příkaz *Soubory/Umístit obrazovku* k přemístění té části pracovní plochy, kterou monitor zobrazuje.[2] Příkazem zobrazíme okno znázorněné na obr. 1. Rámeček na obrázku, který představuje část zobrazovanou monitorem, úchopem za horní stranu pomocí myši přemístíme do té části pracovní plochy, kterou chceme zobrazit, a to například tak, aby rámeček obsahoval průsečík přímek na obr. 1. Klepnutím na symbol OK potvrdíme volbu. Přejdeme tím zpět do režimu kreslení a můžeme vytvářet objekty vázané na průsečík, např. kružnici se středem v tomto průsečíku.



Obrazovku můžete umístit kamkoliv v nákresně velikosti 1 m x 1 m.

Obr. 1

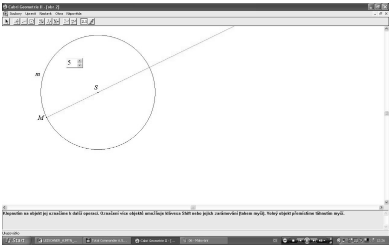
Třetí možností jsou operace s objekty umístěnými mimo pracovní plochu. To je opravdu možné, protože program Cabri vytváří modely matematických objektů pomocí analytické geometrie.[3] Proto můžeme praco-

---

[2] Obrazovku můžeme posouvat po nákresně i v normálním režimu pomocí „jezdců“ na pravém a dolním okraji obrazovky. Můžeme také posunovat nákresnu myší při současně stisknutém tlačítku myši a `Ctrl`. To je výhodné zejména při menších úpravách, kdy nepotřebujeme mít celkový přehled o situaci v nákresně.

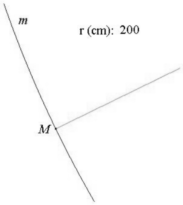
[3] Cabri tyto modely určuje s přesností 10^{-12} m, což představuje přibližně setinu velikosti atomu. V reálném světě s tak velkou přesností nelze nic nakreslit. Na obrazovce počítače vidíme jen velmi nedokonalé pokusy o zobrazení vypočítaných objektů.

vat i s těmi „vypočítanými“ objekty, jejichž obrazy se již na pracovní ploše nenachází. Jako příklad sestrojíme dvěma způsoby kružnici m, která prochází daným bodem M a má libovolně velký poloměr.



Klepnutím na objekt jej označíme k další operaci. Označení více objektů umožňuje klávesa Shift nebo jejich zarámování (tahem myši). Volný objekt přemístíme táhnutím myši.

Obr. 2



Obr. 3

První způsob sestrojení

Máme sestrojen bod M. Vytvoříme ještě libovolnou polopřímku s počátkem v M a pomocí nabídky *Čísla* (v druhém sloupci ikon zprava) napíšeme jednociferné číslo, např. číslo 5. Dále zvolíme nabídku *Nanést délku* v pátém sloupci ikon zleva a naneseme délku 5 cm tak, že pomocí myši klikneme na číslo a pak na polopřímku. Bod, který na polopřímce vznikne, nazveme S a příkazem *Kružnice* (čtvrtý sloupec ikon zleva) sestrojíme kružnici $m(S, r = |SM|)$. K číslu můžeme přidat doplňkový text, např. „r(cm)“ (nabídka *Komentáře* v druhém sloupci ikon zprava). Když nyní v režimu *Ukazovátko* provedeme dvojitý poklep na číslo 5, můžeme je přepsat nebo měnit, zvětšovat či zmenšovat po jedné, pomocí šipek, které se u čísla objevily (obr. 2). Výsledek, část oblouku kružnice m s volbou $r = 200$ cm, představuje obr. 3. Úchopem za vnitřní bod polopřímky můžeme měnit směr umístění středu kružnice S. Poloměr kružnice měníme výše popsaným způsobem. Můžeme zvolit i $r = 500$ km, jak je slíbeno v názvu článku. Zakřivení kružnice bude ovšem tak malé, že oblouk od úsečky nerozlišíme.

Vnímavý čtenář si jistě uvědomil, že se dají podobné konstrukce využít při zkoumání limitních situací. Zvolte $r = 2$ cm, pak v režimu *Ukazovátko* aktivujte dvojpoklepem zvolené číslo, umístěte kurzor na horní ze dvou šipek, které se objevily napravo od čísla a podržte stisknuté levé tlačítko myši. Poloměr kružnice se bude zvyšovat po jedné a na

---

Obraz se totiž v digitální rastrové grafice vytváří pomocí nejmenších jednotek, tzv. pixelů, které představují body obrazovky o velikosti asi 10^{-4} m.

obrazovce vidíme, jak se oblouk kružnice napřimuje. Při nastavení víceciferných hodnot poloměru r lze nejprve kurzorem označit skupinu těch cifer, které chceme po jedné zvětšovat (resp. zmenšovat, když použijeme dolní šipku místo horní).

Druhý způsob sestrojení

Tento způsob umožňuje pohodlnější manipulaci nastavování různých hodnot poloměru kružnice. Nejprve si vytvoříme pomocný ovladač (smysl konstrukce se ozřejmí později): Sestrojíme polopřímku typu „*Bs*“[4] s počátkem P. Na ní zvolíme asi 1 cm od P bod O a potom bod B tak, aby O ležel mezi body P, B. Dále sestrojíme polopřímku OB, na níž zvolíme vnitřní bod X. Dále pomocí nabídky *Čísla* zvolíme jednociferné číslo (např. 5), jež budeme označovat k. Pomocí funkce *Stejnolehlost* (šestý sloupec ikon zleva) sestrojíme obraz X' bodu X ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem k. Dále sestrojíme vektory OX' a PX. Poslední vektor zvýrazníme středně silnou čarou, pro polopřímku PX zvolíme nevýraznou barvu, například žlutou nebo světle zelenou. Dále někde zvolíme bod M, jímž má procházet kružnice m, a určíme jeho obraz S v posunutí o vektor OX' (nabídka *Posunutí* – šestý sloupec ikon zleva). Nakonec sestrojíme kružnici $m(S, r = |SM|)$ a skryjeme polopřímku OB, vektor OX a body B, O, X. V prostředí *Vzdálenost a délka* (třetí sloupec ikon zprava) určíme vzdálenost bodů M a S a příkazem *Komentáře* (druhý sloupec ikon zprava), k ní zleva připíšeme „$r =$ “. Příkaz nemusíme volit, pokud napíšeme text bezprostředně po zobrazení čísla, jež vyjadřuje vzdálenost SM. Celý obrázek doplníme o tečny z předem zvoleného vnějšího bodu A, které ke kružnici m sestrojíme známým způsobem. Body dotyku tečen s kružnicí označíme T, U.

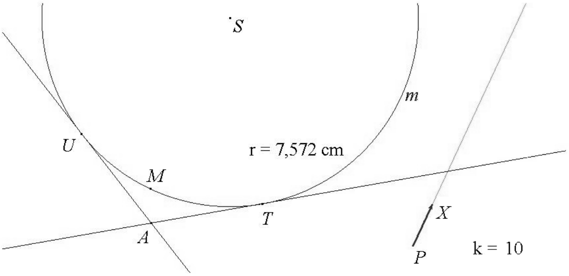
Obr. 4 znázorňuje výsledek s nastavenou hodnotou $r \doteq 7{,}6$ cm a $k = 10$ cm. Poloměr kružnice můžeme „plynule“ měnit jednak pohybováním koncového bodu vektoru ovladače, jednak změnami hodnoty k. Otáčením polopřímky ovladače úchopem za její vnitřní bod různý od bodu X měníme polohu středu kružnice, přičemž bod M je na místě a poloměr kružnice se nemění.

Následující tři obrázky ukazují, jak se mění tečny, jestliže v daném směru vzdalujeme střed S od bodu M.

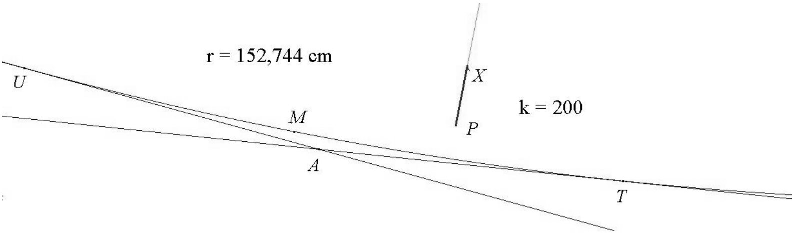
---

[4] Tím rozumíme polopřímku danou počátečním bodem a směrem (tzv. nevlastním bodem): Prvním kliknutím zvolíme počátek P, druhé kliknutí (volba směru) umístíme do takového místa, kde není vytvořen žádný objekt.

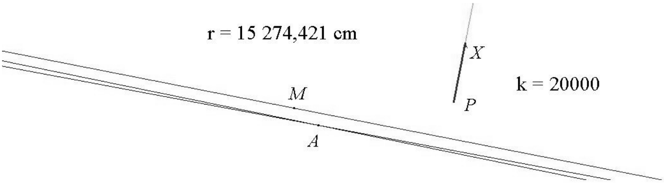
Na obr. 5 je poloměr kružnice přibližně 1,5 m, což bychom již běžným kružítkem nedokázali na papír narýsovat. Při hodnotě $r \doteq 153$ m již oblouk kružnice vypadá jako úsečka (obr. 6). Třebaže pouhým okem (ani přiložením pravítka) nezjistíme jeho zakřivení, tečny z bodu A se stále jeví jako různoběžky.



Obr. 4

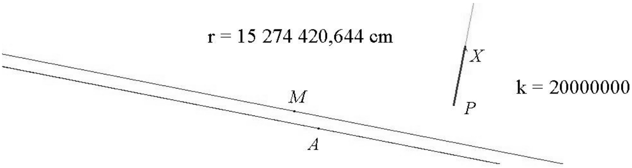


Obr. 5



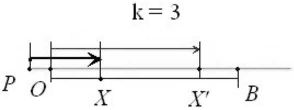
Obr. 6

Na obr. 7 je nastaveno $r \doteq 153$ km. Tečny ke kružnici prakticky splývají v jedinou přímku rovnoběžnou s „přímým“ obloukem kružnice.



Obr. 7

Viděli jsme, že druhý způsob umožňuje snadnější manipulaci, dosud sestrojený ovladač však neumožňuje volit přesné hodnoty čísel. (Pohyb koncového bodu X vektoru ovladače se děje po skocích z jednoho pixelu na druhý.) Tento nedostatek můžeme odstranit, když v původní konstrukci body O a B sestrojíme nanesením délek 1 a 11 (na původní polopřímku s počátkem P v daném pořadí) a místo polopřímky OB zvolíme úsečku OB, na niž vážeme bod X. Schéma ovladače představuje obr. 8. Posunutím bodu X do krajní pravé polohy v obr. 8 docílíme, že délka vektoru OX bude přesně 10 cm a délka vektoru OX' bude $10k$ cm.[5] Chceme-li mít $r = 235$ cm (tak přesně, jak to umožňuje program Cabri), nastavíme $k = 23{,}5$, apod.



Obr. 8

Obě verze ovladače můžeme využívat ke skrývání a zpětnému zviditelňování sestrojených objektů bez užití nabídky *Skrýt/Zobrazit.* Abychom to objasnili, sestrojme jeden z popsaných ovladačů, dále pak libovolnou kružnici a její obraz m v posunutí o vektor OX'. který po sestrojení obrazu skryjeme spolu s původní kružnicí. Na ovladači nyní zvolíme vysokou hodnotu k, např. $k = 1\,000\,000$. Při posunutí koncového bodu X ovládacího vektoru do levé krajní polohy má vektor OX' posunutí nulovou délku a kružnici m vidíme na místě původní kružnice. Při nepatrném pohybu bodu X doprava se kružnice skryje. Přesněji řečeno ji odsuneme

---

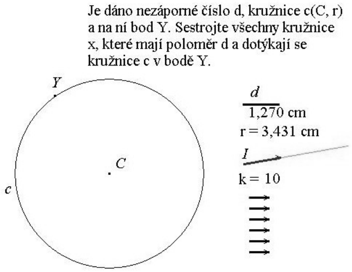
[5] Bod X je vázán na úsečku OB, proto v krajní poloze splyne s bodem B.

pryč z pracovní plochy, neboť pro $k = 1\,000\,000$ se posunutím bodu X o jeden pixel posune kružnice m řádově o tisíc metrů.

Okolnost, že je poněkud nelogické zviditelňovat objekt „zkracováním“ vektoru PX (přesněji pohybem bodu X proti směru orientace vektoru PX), snadno napravíme, když sestrojíme ovladač podle schématu na obr. 8, přitom však vektor OX' nahradíme vektorem BX'. Navíc doporučuji zvolit malou délku úsečky OB, třeba jen 1 mm. Pak se objekt objeví při pohybu koncového bodu vektoru PX ve směru šipky a při opačném pohybu zmizí.

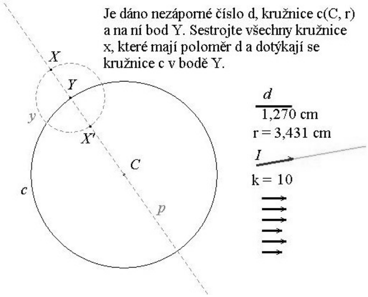
Soubory několika takto upravených ovladačů jsou výhodné k vytváření pomůcek pro demonstrace řešení složitějších konstrukčních úloh. Jestliže má úloha více řešení, můžeme některá z nich zviditelňovat a skrývat v libovolném pořadí, i s podstatnými kroky jejich sestrojení. To představuje výhodu oproti užití příkazu *Upravit/Historie krok za krokem* v Cabri II, resp. *Upravit/Krokovat konstrukci* v Cabri II+, který neumožňuje měnit pořadí jednotlivých kroků konstrukce. Pro lepší představu možností využití uvedeme několik příkladů.

První pomůcka je úloha, v níž se mají sestrojit všechny kružnice x s daným poloměrem $d \geq 0$ tak, aby se dotýkaly dané kružnice $c(C, r)$ v jejím daném bodě Y (obr. 9). Kružnice c je sestrojena 2. způsobem popsaným v první části článku. Můžeme ji přemisťovat pomocí myši úchopem za bod v blízkosti písmena c. Prostředním ovladačem I nastavujeme poloměr kružnice. Pro nastavování velmi velkých nebo naopak velmi malých poloměrů opět změníme hodnotu čísla k. Velikost daného čísla d volíme horním ovladačem. Skupina šesti pod sebou umístěných vektorů tvoří ovladač zobrazení a skrytí potřebných objektů. Všechny ovladače se dají snadno přemisťovat.



Je dáno nezáporné číslo d, kružnice c(C, r) a na ní bod Y. Sestrojte všechny kružnice x, které mají poloměr d a dotýkají se kružnice c v bodě Y.

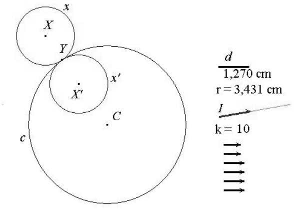
Obr. 9



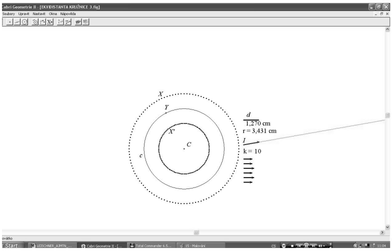
Je dáno nezáporné číslo d, kružnice c(C, r) a na ní bod Y. Sestrojte všechny kružnice x, které mají poloměr d a dotýkají se kružnice c v bodě Y.

Obr. 10

Žáci by si nejprve měli uvědomit, že střed X hledané kružnice $x(X, d)$ leží na přímce $p = CY$ a současně na kružnici $y(Y, d)$. Je tedy bodem průniku obou čar. Přímku p zobrazíme posunutím koncového bodu horního vektoru ovladače zobrazování ve směru šipky. Podobně pomocí druhého vektoru shora zobrazíme kružnici y, pomocí třetího a čtvrtého průsečíky X a X' (obr. 10). Pomocí zbývajících dvou vektorů zobrazujeme kružnice x a x', které jsou řešením úlohy. Vidíme je na obr. 11, kde jsou všechny pomocné čáry včetně textu úlohy skryty).



Obr. 11

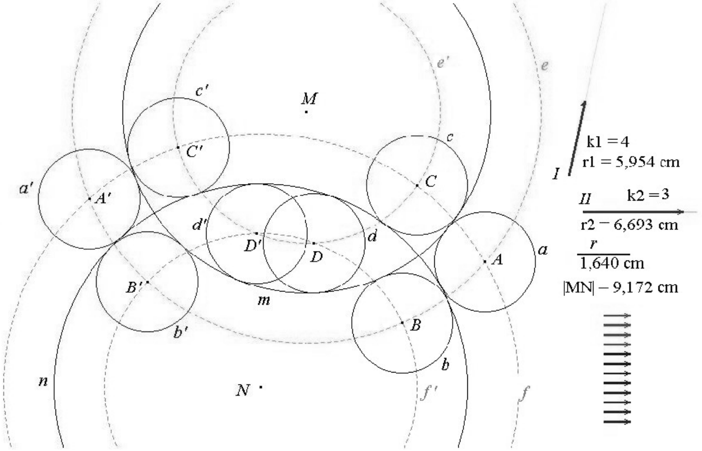


Obr. 12

Obr. 12 představuje využití pomůcky k zobrazení množiny středů všech kružnic, které mají poloměr d a dotýkají se kružnice c: Pomocí ovladače jsme skryli pomocné čáry i kružnice x, x', ponechali jsme jen jejich středy X, X'. Ty jsme zaktivovali příkazem *Stopa ano/ne* (druhý sloupec ikon zprava), a pak jsme uvedli do pohybu bod Y (natažením pružinky v prostředí *Pohyb objektu*, druhý sloupec ikon zprava). Tím jsme uvedli do pohybu i body X, X', které vykreslily kružnice se společným středem C a poloměry $r + d$ a $|r - d|$. Sjednocení obou kružnic tvoří hledanou množinu, tzv. *ekvidistantu kružnice c*.

Celý soubor lze snadno překreslit tak. aby se místo kružnic x, x' zobrazovaly kružnice tvořící ekvidistantu. Pomocí ovladačů d a I pak zjišťujeme, jak vypadá ekvidistanta pro různé vztahy mezi d a r: Pro $d = 0$ jsou všechny tři kružnice totožné, pro $0 < d < r$ jsou kružnice x, x' stejně vzdáleny od c, pro $d = r$ má menší kružnice nulový poloměr a pro $d > r$ mají kružnice x, x' konstantní vzdálenost (rozdíl jejich poloměrů je $2r$). Přitom pro $r < d < 2r$ leží kružnice x, x' na opačných stranách od c, pro $d = 2r$ je menší z kružnic totožná s kružnicí c, a pro `Chyba! Chybné propojení` leží c uvnitř obou kružnic. Zvolíme-li $r = 500$ km, můžeme kružnici c vydávat za přímku. Dvojice x, x' představuje ekvidistantu „přímky“ c. Pro $r = 0$ kružnice x, x' splynou.

Poslední ukázkou (obr. 13) je pomůcka k řešení úlohy, v níž se mají sestrojit všechny kružnice s daným poloměrem r tak, aby se dotýkaly daných kružnic $m(M, r_1)$ a $n(M, r_2)$. Ovladače I a II umožňují měnit poloměry a vzájemnou polohu zadaných kružnic, ovladačem r volíme velikost r. Již dříve popsanými postupy lze kružnice m, n měnit na „přímky“ nastavením hodně velkých poloměrů nebo je naopak změnit na body posunutím koncových bodů ovladačů do levé krajní polohy. Vzdálenost středů M, N se zobrazuje automaticky. Horní čtyři z dvanácti vektorů ovladače zobrazování a skrývání objektů slouží k zobrazování a skrývání kružnic e, e', f, f', z nichž se skládají ekvidistanty kružnic m a n. Prostřední čtyři vektory ovladače umožňují zobrazovat a skrývat kružnice a, b, c, d a dolní čtyři zobrazují a skrývají zbývající čtyři kružnice a', b', c', d' symetrické s kružnicemi a, b, c, d podle přímky MN.



Obr. 13

Závěr

V dílně na konferenci jsem místo posledních tří příkladů demonstroval vznik elipsy a hyperboly na základě experimentů s kružnicí $m(M, r)$ a osovou souměrností. V limitě pro $r \to \infty$ vznikla parabola. V tomto článku jsem se rozhodl tuto část vynechat a zařadit raději zmíněné tři příklady. Doufám totiž, že jsou větší inspirací pro samostatnou práci zájemců o Cabri a školskou planimetrii. Těmto zájemcům doporučuji, aby si popisované pomůcky sami sestrojili. Učebnici práce s programem Cabri najde čtenář na stránkách [2], k bližšímu osvojení problematiky řešení konstrukčních úloh doporučuji [1].

Literatura

[1] Herman, J. a kol.: *Matematika – Geometrické konstrukce.* Prometheus, Praha, 1998.

[2] `http://www.pf.jcu.cz/cabri/`

* * *

Open source software ve výuce matematiky a fyziky

Michal Musílek, SOŠ veřejnosprávní a sociální, Stěžery[1]

ABSTRAKT. *Řada učitelů matematiky absolvovala v uplynulých třech letech kurzy SIPVZ s názvem „ICT ve výuce matematiky“, ve kterých se mimo jiné seznámili s dnes už klasickým dynamickým geometrickým náčrtníkem Cabri Geometrie a se systémem počítačové algebry Derive. Všichni by je rádi ve výuce alespoň občas používali, ale problém právem viděli ve finanční náročnosti licencování uvedeného software jak pro školu, tak pro žáky (pokud by měli s pomocí počítače vypracovávat domácí úkoly). Lépe by na tom mohli být příznivci operačního systému Linux a Open Source Software, kteří by mohli používat programy podobného zaměření, ale takové, jejichž licence je pro školu i žáky zdarma. Konkrétně jde o interaktivní geometrický náčrtník Geonext a systém počítačové algebry Maxima. Na konkrétních příkladech z učiva matematiky a fyziky na úrovni základní a střední školy jsou zde tyto programy prezentovány.*

V uplynulých třech letech jsem jako lektor modulu „ICT ve výuce matematiky“ v rámci kurzů SIPVZ[2] proškolil asi 60 učitelů ve využívání matematického software ve vyučovacích hodinách matematiky, případně fyziky (protože řada frekventantů měla jako druhý aprobační předmět fyziku, volil jsem některé aplikační příklady z učiva školské fyziky). Všichni

---

[1] e-mail: mim3@seznam.cz; Michal.Musilek@seznam.cz

[2] SIPVZ – Státní informační politika ve vzdělávání; vládní program, jehož součástí bylo vzdělávání učitelů v oblasti využití informačních a komunikačních technologií ve výuce

účastníci kurzů byli nadšení zejména interaktivním geometrickým náčrtníkem Cabri Geometrie [1], ale zároveň většina z nich smutně konstatovala, že pořízení neomezené školní multilicence, které je nutnou (nikoliv však postačující) podmínkou pro účelné nasazení prostředí dynamické geometrie do výuky matematiky a fyziky, představuje pro běžnou základní či střední školu příliš velkou finanční zátěž. Podobné to bylo také se systémem počítačové algebry Derive.

Protože jsem příznivcem operačního systému Linux a Open Source Software (tento článek píšu v OpenOffice.org Writeru), rozhodl jsem se vyhledat na Internetu programy podobného zaměření jako Cabri Geometrie a Derive, ale takové, které jsou šířeny pod GNU licencí [4], tedy naprosto svobodně a zdarma. Domnívám se, že tento záměr se mi podařilo realizovat. Programy Geonext [2] a Maxima [3] jsou plnohodnotnou Open Source alternativou ke komerčním programům a potřeby výuky na základní a střední škole nejen zcela naplňují, ale dokonce výrazně převyšují. K oběma programům jsem napsal stručné příručky [5], [6], ve kterých jsou možností programů ukázány na množství jednoduchých řešených úloh. Příručky dávám bezplatně k dispozici všem učitelům a žákům ve smyslu GNU Free Documentation License v. 1.2 a jsou přiloženy na CD-ROM, který je součástí tohoto sborníku.

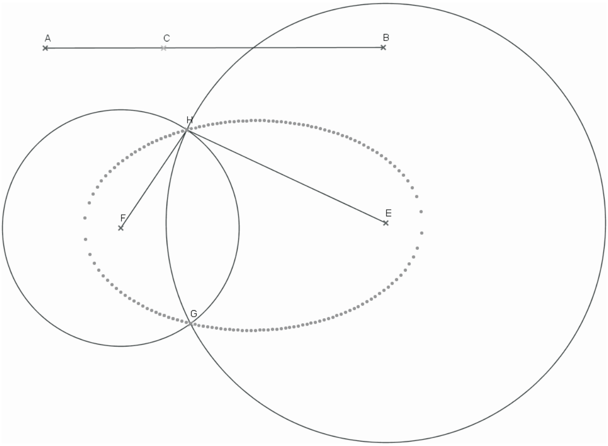
Geonext

Po seznámeni se se základním ovládáním programu Geonext je vhodné provádět některé konstrukce uvedené v příručce [5], jako je kružnice opsaná trojúhelníku, kružnice vepsaná trojúhelníku, konstrukce trojúhelníku, jsou-li číselně dány dvě strany a úhel, stopa objektu – psaní zrcadlovým písmem, zobrazování grafů funkcí a funkcí daných parametricky a na závěr jednoduchá práce s vektory – grafické sčítání sil pomocí rovnoběžníku, vytváření diashow – tečny z bodu ke kružnici, využití stopy objektů a animace při konstrukci kuželoseček, využití v algebře k řešení soustavy rovnic o dvou neznámých, geometrická optika – zobrazení spojnou čočkou, skládání rovnoběžných sil či model kladkostroje. Navíc oproti obsahu příručky si nyní předvedeme dvě konstrukce.

Zahradnická konstrukce elipsy

Spustíme interaktivní geometrický náčrtník Geonext, vytvoříme si novou kreslicí plochu (nový list papíru) a pomocí nástroje `Úsečka` sestrojíme úsečku AB. Tato úsečka bude představovat natažený provázek, který zahradník použije ke konstrukci elipsy. Potom pomocí nástroje `Vázaný bod` umístíme na úsečku AB pohyblivý bod C, který představuje konec hrábí, kterými zahradník rýsuje na zem elipsu. Nyní bychom potřebovali „přivázat“ provázek ke dvěma kolíkům – ohniskům elipsy a sestrojit jednotlivé body elipsy podle odpovídající definice: *Elipsa je množina bodů, které mají od dvou pevně daných bodů (ohnisek) stejný, předem daný součet vzdáleností.*

Vyznačíme pomocí nástroje `Bod` budoucí ohniska elipsy D, E a pomocí nástroje `Přejmenovat` přejmenujeme bod D na F (podle lat. focus = ohnisko). Nyní vybereme z několika nástrojů, které nabízí Geonext pro kreslení kružnic, nástroj `Kružnice (zadat poloměr)`, klikneme na bod F, čímž určíme střed kružnice a do dialogového okénka `Vstup` zapíšeme výraz `Dist(A,C)`, tedy určíme, že poloměr kružnice je roven délce úsečky AC (přesněji řečeno vzdálenosti bodů A a C). Analogicky sestrojíme kružnici se středem E a poloměrem BC. Pokud se vzniklé kružnice neprotínají, upravíme obrázek pomocí nástroje `Pohybovat` tak, aby se protínaly (stačí vhodně pohnout bodem B či E). Průsečíky vyznačíme nástrojem `Průsečík` a postupným kliknutím na obě kružnice. Vyznačí se body G a H. Pokud budeme nyní pohybovat bodem C po úsečce AB, vidíme, že průsečíky G a H se pohybují po elipse.



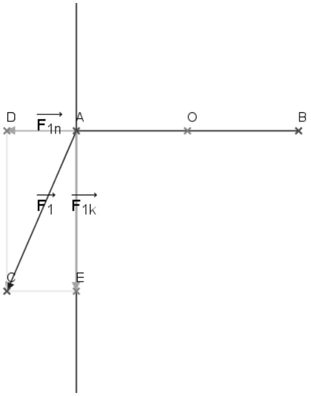
Obr. 1: Zahradnická konstrukce elipsy

Našim cílem je elipsu zviditelnit – vhodně vyznačit. K tomu účelu zvolíme nástroj `Vlastnosti objektu` a v dialogovém okně, které se objeví, zaškrtneme u bodů G a H políčko `Zobrazit stopu objektu`. Pohybujeme-li nyní znovu bodem C po úsečce AB, zanechávají body G a H zřetelnou stopu ve tvaru elipsy. Pohyb bodu C můžeme zautomatizovat a současně učinit pravidelným pomocí animace. Nejprve smažeme stopu nabídkou z menu `Úpravy > Smazat stopu`. Znovu vyvoláme dialog `Vlastnosti objektu`, ale tentokrát vyhledáme pohyblivý bod C a u něj na záložce `Vlastnosti` zaškrtneme `Animovat` a v políčku `Kroky` vyplníme 100 a stiskneme tlačítko `Použít`. Potom dialog zavřeme a spustíme animaci příkazem z menu `Objekty > Animace > Začít animaci`. Alternativně bychom mohli vyznačit odpovídající křivku pomocí nástroje `Křivka stopy` (je třeba kliknout nejprve na bod C, jehož pohyb určuje výsledek, a pak na bod, který kreslí stopu). Výsledek konstrukce doplněný o úsečky FH a EH, které představují natažený provázek, vidíte na obr. 1.

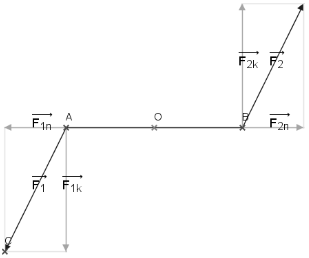
Znázornění dvojice sil

Jde o jednoduché fyzikální schéma, ale lze na něm ukázat několik triků. Spustíme interaktivní geometrický náčrtník Geonext, vytvoříme si novou kreslicí plochu (nový list papíru) a pomocí nástroje `Úsečka` sestrojíme úsečku AB. Dvojici sil tvoří dvě stejně velké síly opačného směru, které působí ve dvou různých bodech tuhého tělesa otáčivého kolem nehybné osy. Uplatňuje se při otáčení volantem, nebo vodovodním kohoutkem, při řezání závitů apod. Působiště síly F_1 bude v bodě A. Zvolíme nástroj `Vektor`, klikneme na bod A a potom někam do kreslicí plochy tak, abychom označili koncový bod vektoru. Bod se ihned označí písmenem C, ale vektor zůstane neoznačený. Ve skutečnosti označení přiděleno má, jen není vidět. Vyvoláme dialog `Vlastnosti objektu` a zvolíme záložku `Popis`, na níž je pro popis zvolena neviditelná barva (proškrtnutí do X). Vybereme vhodnou barvu pro popis, nejlépe černou, v kolonce Jméno vyplníme F_1 a stiskneme tlačítko `Přejmenovat` (podtržítko znamená dolní index). Nakonec dialog zavřeme a u vektoru se objeví požadovaný popis. Tím jsme se naučili trik popisování objektů s indexy.

V další fázi rozložíme sílu F_1 do dvou složek, z nichž jedna leží na přímce AB a druhá je na ni kolmá. Nejprve spustíme kolmici z bodu C k přímce AB. Všimněte si, že to jde, i když přímku AB nemáme vyznačenou. Použijeme nástroj `Kolmá úsečka` a klikneme nejprve na bod C a potom na úsečku AB. Tím získáme úsečku CD s koncovým bodem D. Nyní vyznačíme vektor AD a označíme ho F_{1n}. Při přejmenování musíme zadat `F_1_n` (před n musí být znovu podtržítko). Dále vektor přebarvíme třeba na oranžovou tak, že na záložce `Obrys` zvolíme oranžovou barvu místo implicitní modré. Podobně přebarvíme vynášecí kolmou úsečku na žluto. Pro druhou složku vektoru si nejprve připravíme kolmici k úsečce AB. Zvolíme nástroj `Kolmice` a klikneme nejprve na úsečku AB a pak na bod A. Vrátíme se k nástroji `Kolmá úsečka` a spustíme kolmici k předtím sestrojené kolmici, tím získáme bod E. Nakonec doplníme vektor AE a označíme ho F_{1k}. Výslednou, poněkud nepřehlednou konstrukci vidíme na obr. 2.



Obr. 2



Obr. 3

Pro druhou sílu z dvojice použijeme jiný trik. Sestrojíme střed úsečky AB (střed otáčení tělesa) pomocí nástroje `Střed` (bod F přejmenujeme na O). Pak zvolíme nástroj pro zobrazení bodu ve středové souměrnosti `Bod (středová souměrnost)` a zobrazíme postupně body C, D, E a získáme body F, G, H. Musíme vždy kliknout nejprve na střed souměrnosti (bod O) a teprve potom na bod, který zobrazujeme. Pak už snadno doplníme vektory a jejich označení. Pro zpřehlednění obrázku spustíme dialog `Vlastnosti objektu` a skryjeme body D, E, F, G a H a kolmou přímku a získáme přehledný obr. 3. Bodem C můžeme pohybovat a měnit různě situaci. Tak vyvodíme, že otáčivý účinek na těleso mají pouze kolmé složky F_{1k} a F_{2k} obou sil dvojice.

Geonext versus Cabri Geometrie

Jak je vidět z příkladů uvedených v tomto článku i v příručce [5], zvládá Geonext většinu běžných geometrických konstrukcí stejně dobře jako

Cabri Geometrie. Neznamená to však, že tyto programy mají stejné ovládání a chování. Geonext má ve srovnání s Cabri Geometrií svá slabá i silná místa. Uvedu alespoň pár odlišností.

Nejprve několik slabin. Geonext není, bohužel, plně lokalizovaný. Všechny nabídky a základní nápověda jsou v češtině, ale když klikneme v nápovědě na podrobné heslo, zobrazí se detaily náhle v němčině. Geonext má složitější a těžkopádnější ovládání výpočtů. Zobrazení jsou omezena pouze na osovou souměrnost a středovou souměrnost a zobrazovat můžeme pouze body, nikoliv složitější geometrické objekty. Není možné měřit plochu rovinných obrazců. Hlavní nevýhodou je ovšem absence makrokonstrukcí.

Geonext má však také řadu silných míst, např. širší možnost exportu obrázků, včetně exportu do vektorového formátu, který Cabri vůbec neumí, možnost vytváření diashow pro zveřejnění konstrukce na webu. Mnohem jednodušší než v Cabri je zobrazování funkcí a parametricky zadaných křivek. Pro zobrazování grafů funkcí je mřížka názornější než mřížové body. Rychlost (délku kroku) animací je možné na rozdíl od Cabri přesně nastavit. Barevně se odlišují volné body (červeně), body vázané na křivku (oranžově) a body, které jsou výsledkem konstrukce (šedě); takové rozlišení Cabri nedělá a přitom je to metodicky velmi výhodné. Největší výhodou je ale nulová pořizovací cena pro učitele i žáky.

Systémy počítačové algebry

Druhý program pojmenovaný Maxima, patří mezi programy označované zkratkou CAS z anglického computer algebra system, tedy systém počítačové algebry. K dokonalým programům stejného typu patří např. Mathematica, Maple nebo ze školení SIPVZ známý Derive. Výhodou Maximy je distribuce programu pod GNU licencí, tedy zcela zdarma. Přitom Maxima svými možnostmi několikanásobně převyšuje běžné potřeby střední školy.

Maximu mohu porovnat jedině s programem Derive, jiné CAS systémy neznám. Hlavní výhodou Derive je intuitivnější ovládání, řada funkcí je přístupná přes obrázková tlačítka (ikonky). Tuto nevýhodu částečně odstraňuje nadstavba Maximy nazvaná wxMaxima, kde jsou nejčastější funkce také přístupné přes tlačítka. Jinak jsou možnosti obou programů plně srovnatelné a Maxima má dokonce širší paletu příkazů.

Po seznámení se s možnostmi Maximy uvedenými v příručce [6] je vhodné naučit se např. početní operace s čísly, včetně zlomků či odmocnin, úpravy algebraických výrazů, přesné numerické výpočty (na 1 000 desetinných míst), řešení rovnic a soustav rovnic, rozmanitou práci se standardními i uživatelsky definovanými funkcemi, vykreslování grafů funkcí a 3D grafů funkcí dvou proměnných, derivace funkcí a totální diferenciál, goniometrii, komplexní čísla a maticové operace. Vhodným příkladem výhod tohoto programu může být použití určitého integrálu pro výpočet momentu setrvačnosti válce a koule. Protože téma rotačního pohybu (resp. valení tělesa po nakloněné rovině) se probírá ve fyzice v době, kdy žáci nemají potřebný matematický aparát k dispozici, může být právě zde Maxima výborným pomocníkem pro práci s matematicky či fyzikálně talentovanými žáky.

Výpočet momentu setrvačnosti válce a koule

K výpočtům integrálů v CAS Maxima slouží příkaz `integrate(expr,x);` pro neurčitý, resp. `integrate(expr,x,a,b);` pro určitý integrál. Ukažme si výpočet momentu setrvačnosti válce a koule užitím určitých integrálů. Představme si, že válec s celkovou hmotností m je složen z tenkých prstenců o tloušťce dx, hmotnost každého je d$m = \frac{m \cdot 2\pi x \cdot \mathrm{d}x}{\pi r^2}$, kde proměnný poloměr jednotlivých prstenců je x. Tento poloměr se mění od nuly do r a výsledný moment setrvačnosti zjistíme integrací, kterou žákům prvního ročníku velmi zjednodušeně představíme jako zobecnění sčítání pro velmi malé veličiny dx, momentů setrvačnosti d$m \cdot x^2$ těchto tenkých prstenců:

```
(C1) integrate(2*Pi*x/(Pi*r^2)*m*x^2,x,0,r);
                                                  2
                                               m r
(D1)                                           ---
                                                2
```

Tedy platí:

$$\int_0^r \frac{2\pi x}{\pi r^2} m x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} m r^2$$

Když známe moment setrvačnosti válce, můžeme ho využít k výpočtu momentu setrvačnosti koule. Představme si, že koule je složena z tenkých plátků (jako když krájíme salám) o tloušťce dx. Každý plátek je malý válec o poloměru $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ a výšce dx. Jeho hmotnost je

$$\mathrm{d}m = \frac{\pi y^2}{\frac{4}{3}\pi r^3}\,\mathrm{d}x$$

a moment setrvačnosti

$$\mathrm{d}J = \frac{3}{8}\frac{y^2}{r^3}y^2\,\mathrm{d}x.$$

Pak integrací těchto příspěvků získáme výsledek. Nejprve definujeme funkci vyjadřující závislost y na x a následně ji využijeme přímo v zápisu integrálu. Odpovídající substituci provede Maxima sama. Tím se vlastní příkaz pro integraci formálně velmi zjednoduší:

```
(C2) y(x):=sqrt(r^2-x^2)$
(C3) integrate(2*Pi*x/(Pi*r^2)*m*x^2,x,0,r);
                                                  2
                                             2 m r
(D3)                                         ------
                                               5
```

Tedy

$$J = \int_{-r}^{r} \frac{3}{8}\frac{y^2}{r^3}y^2\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \frac{3}{8}\frac{(r^2-x^2)^2}{r^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}mr^2,$$

což je známý výsledek, který však zpravidla žákům sdělujeme jako hotový fakt. Odvození pomocí Maximy je pro rozvoj jejich analytického myšlení určitě přínosnější.

Literatura

[1] Lávička, M., Leischner, P., Vaníček, J., Vrba, A.: Český výukový portál Cabri Geometrie. [on-line] České Budějovice: 2003–2006 [cit. 2007-05-25] `http://www.pf.jcu.cz/cabri/`

[2] Kolektiv (projektový tým): Geonext. [on-line] Universität Bayreuth: 2001-2007 [cit. 2007-05-25] Dostupné z `http://http://www.gnu.cz/`

[3] Kolektiv (projektový tým): Maxima, a computer algebra system. [on-line] Sourceforge.net: 2000-2007 [cit. 2007-05-25] `http://maxima.sourceforge.net/`

[4] Kolektiv: Stránky o svobodném software. [on-line] 2004 [cit. 2007-05-25] Dostupné z `http://www.gnu.cz/`

[5] Musílek, M.: Open Source Software ve výuce matematiky a fyziky – 1 – Geonext. [on-line] N. Bydžov: 2006. [cit. 2007-05-25] `http://www.musilek.eu/michal/pdf/geonext.pdf`

[6] Musílek, M.: Open Source Software ve výuce matematiky a fyziky – 2 – Maxima. [on-line] N. Bydžov: 2006. [cit. 2007-05-25] `http://www.musilek.eu/michal/pdf/maxima.pdf`

[7] Vaníček, J. a kol.: Modul „ICT ve výuce matematiky“. [on-line] České Budějovice: 2003-2006 [cit. 2007-05-25] Dostupné z `http://www.pf.jcu.cz/p-mat/`

Využití aktivizujících metod ve výuce matematiky

Eva Nováková, Gymnázium Žďár nad Sázavou [1]

Abstrakt. *V článku jsou popsány některé konkrétní činnosti, které autorka používá při vyučování matematice. Tyto postupy vedou k aktivizaci žáků a hlubšímu porozumění učivu.*

Úvodem

Během svého dlouholetého pedagogického působení jsem se setkala se žáky, kteří neměli rádi matematiku, zdála se jim příliš obtížná a nepřístupná. Jiní prokazovali pouze povrchní a formální krátkodobé znalosti. Konzultacemi s kolegy a četbou literatury (např. [1], [2]) jsem zjistila, že je to obecnější problém a že se netýká pouze mých žáků.

Věděla jsem, že některé z těchto problémů by mohly být odstraněny, pokud by žáci při vyučování zažívali radost z práce a mohli nové poznatky důkladně prozkoumat a prodiskutovat. V [3] jsem kromě mnoha zajímavých a pro mě nových myšlenek našla i tuto tabulku:

Dlouhodobě si zapamatujeme
10 % toho, co slyšíme
15 % toho, co vidíme
20 % toho, co současně vidíme i slyšíme
40 % toho, o čem diskutujeme
80 % toho, co přímo zažijeme nebo děláme
90 % toho, co se pokoušíme naučit druhé

Tabulka byla sestavena na základě psychologických výzkumů a poměrně jasně ukazuje, které vyučovací metody jsou z hlediska dlouhodobého zapamatování účinné a které méně.

Ve svém článku bych vám chtěla ukázat některé aktivity, které do hodin přinášejí radost z poznání, vedou k dlouhodobému zapamatování a které jsou snad též prevencí formalismu. Všechny uvedené činnosti jsem několikrát zkoušela se svými žáky, vždy s kladným ohlasem.

---

[1] e-mail: novakova@gymzr.cz

Pro účely příspěvku rozdělím aktivity na dvě skupiny:

1. vytváření dvojic
2. experimentování

Vytváření dvojic

Vytváření dvojic (ale i trojic či čtveřic) je velmi vděčný způsob motivace žáků a dá se použít v kterékoli fázi hodiny. Může to být například velmi jednoduchá zahřívací aktivita jako v **pracovním listu 1**.

Aktivitu 1 lze použít při rozdělování žáků do skupin. V tabulce v řádcích jsou vždy dvě komplexní čísla se stejnou absolutní hodnotou, jednou ve tvaru algebraickém a jednou ve tvaru goniometrickém. Tabulku rozstříháme a použijeme pouze tolik lístečků, kolik je žáků. Žáci dostanou po jednom lístečku s pokynem, aby vytvořili dvojice. Když se jim podaří najít kolegu se stejným komplexním číslem, požádáme je, aby zůstali ve dvojicích a našli k sobě další dvojici. Pokud jsou žáci na podobné aktivity zvyklí, můžeme úkol ztížit tím, že při hledání partnera nesmějí mluvit. Nejobtížnější variantou je ta, při níž jim přilepíme lísteček na čelo nebo na záda a oni nevědí, jaké číslo mají. Ani v tomto případě nesmějí žáci při rozdělování do dvojic mluvit. Je velice zajímavé sledovat chování žáků po zadání takto obtížného úkolu. Poměrně dlouho jenom stojí a snaží se porušovat pravidla tím, že mluví, a teprve až jednoho z nich napadne dát dohromady jinou dvojici, za všeobecné úlevy začnou pomáhat ostatním a doufají, že někdo pomůže také jim. Je vidět, že kromě matematiky zde cvičíme také komunikaci (i neverbální) a spolupráci.

Vytváření dvojic je možné použít i k zašifrování zprávy, jak je tomu v **pracovním listu 2**. V horní části pracovního listu je dvanáct očíslovaných výrazů, v dolní části je dvanáct výrazů, které získáme úpravou výrazů z horní části. Jde tedy o vytváření dvojic výraz z horní části – odpovídající výraz z dolní části. U všech výrazů je také písmeno. A právě správné přiřazení dvojic nám pomůže složit zprávu. Lichá písmena zprávy odpovídají písmenům u výrazů v horní části pracovního listu v očíslovaném pořadí. Sudá písmena získáme z odpovídajících výrazů v dolní části zprávy. Např. výrazu č. 1 (M) v horní části odpovídá výraz označený písmenem A v dolní části a výrazu č. 2 (T) odpovídá výraz označený písmenem E. První čtyři písmena zprávy jsou tedy MATE. Vyluštění celé zprávy nechám na čtenáři. Je samozřejmě na učiteli, jestli tento pracovní list použije pro individuální práci žáka ve škole nebo doma, nebo zda nechá zprávu vyluštit dvojici či čtveřici žáků.

Experimentování

Předkládám tři pracovní listy, které vedou žáky k experimentování a odhalování nových poznatků. Zde je efektivní vytvořit skupiny po zhruba čtyřech žácích, což umožňuje diskusi o problematice, spolupráci a využití synergie skupiny. Vždy znovu jsem překvapena, že žáci touto metodou zvládají i velmi obtížné úkoly.

Pokud zadám žákům podobný problém, snažím se omezit své vměšování do jejich aktivity na nezbytné minimum. Určitou dobu je nechám pracovat zcela samostatně a teprve potom kontroluji činnost skupin. Skupinám, které jsou na správné stopě, nic neříkám, maximálně kývnu hlavou. Některé skupiny jsou zahlceny nápady a neumějí vybrat ten správný. Těm trochu pomohu otázkami, které je upozorní na možná úskalí špatných řešení. V tuto chvíli nezaujímám žádné stanovisko k jejich eventuálním odpovědím a přemístím se k další skupině. Výjimečně se najde i skupina, která zatím nic nevymyslela a neví, co s problémem. Těmto žákům jenom mírně napovím, aby mohli začít pracovat. Nápověda musí být opravdu minimální, aby neměli pocit, že jsem problém vyřešila já, a ne oni.

Velmi důležité je, aby všichni žáci prožili na závěr příjemný pocit z dobře vykonané práce. Proto mám pro rychlejší skupiny nachystanou další činnost a s rozborem pracovního listu počkám, až jsou všechny skupiny hotové. Pak shrneme výsledky, popovídáme si o zajímavých myšlenkách, které žáky v průběhu práce napadly, a o svých pocitech. Samozřejmě je upozorním na fakt, že zobecňovali z velmi malého počtu případů a že o tom, zda jsou jejich závěry správné, lze rozhodnout jedině řádným důkazem tvrzení. Ten si většinou necháme až na další hodinu. V závěru nezapomeneme zhodnotit práci ve skupině.

Poznámka k pracovnímu listu 3. Předcházející hodinu jsme definovali pojem druhá odmocnina nezáporného reálného čísla. Předtím, než žáci začali pracovat ve skupinách, proběhl brainstorming. Každý žák měl napsat, co ví (nebo si myslí, že ví) o odmocninách. Vzpomínali tedy na poznatky ze základní školy. Žákům bylo řečeno, že by za hodinu měli zvládnout úlohy 1–6 a že úlohy 7–9 jsou určeny pro velmi rychlé skupiny.

Poznámka k pracovnímu listu 4. V předchozích hodinách jsme se zabývali variacemi a permutacemi. Na začátku hodiny jsme zopakovali rozdíl mezi uspořádanou a neuspořádanou k-ticí a způsob jejich zápisu.

Poznámka k pracovnímu listu 5. V tomto případě mohou žáci pracovat i ve dvojicích, neboť zápis součtových vzorců jim obvykle nedělá vážnější problémy. Do volných sloupců by měli zvolit vlastní úhly, aby získané výsledky byly o něco průkaznější.

Závěr

Ve svém článku jsem ukázala několik příkladů, jak zvýšit aktivitu žáků během vyučování matematice. Mají sloužit jako inspirace pro ostatní učitele, nikoli jako přesné návody, kterých je třeba se striktně držet. Ze své zkušenosti mohu říci, že žáci mají takovéto aktivity rádi a že se na ně těší. Líbí se jim neformální atmosféra ve skupině vrstevníků, ve které se nebojí položit i zdánlivě banální otázky a udělat chybu. Oceňují možnost diskuse se spolužáky a uvědomují si, že tato často obtížná práce vede k hlubšímu poznání a trvalejšímu zapamatování.

Použití aktivizujících metod klade na učitele vysoké nároky. Nesmí zapomenout na následnou systematizaci poznatků a důkladný rozbor použitých metod a chyb, jichž se žáci dopustili. Nevýhodou takovýchto forem práce je i velká časová náročnost. Přesto se přimlouvám za jejich alespoň občasné používání ve vyučování. Přinášejí totiž zaujetí, aktivitu a radost pro žáky i učitele.

Literatura

[1] Hejný, M., Kuřina, F.: Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. *MFI* **7**, 7 (1998).

[2] Kuřina, F.: Porozumění matematice, matematické řemeslo a tvořivost. *MFI* **12**, 1 (2002).

[3] Kovaliková, S.: *Integrovaná tématická výuka.* Spirála, Kroměříž, 1995.

PRACOVNÍ LIST 1

ODMOCNINY

Z daných čísel vytvořte čtyři trojice a tři dvojice.

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2}$

$\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$ $4\sqrt{3}$

$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{5}+\sqrt{2}$

$2\sqrt{12}$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\sqrt{48}$

$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $2\sqrt{2}$ $3\sqrt[3]{2}$

$\frac{\sqrt{8}}{4}$ $\sqrt[3]{54}$ $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

AKTIVITA 1

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

$\cos 135° + i\,\sin 135°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$
$\cos 240° + i\,\sin 240°$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$
$2(\cos 150° + i\,\sin 150°)$	$-\sqrt{3} + i$
$2(\cos 315° + i\,\sin 315°)$	$\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
$\sqrt{3}(\cos 330° + i\,\sin 330°)$	$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$
$\sqrt{3}(\cos 120° + i\,\sin 120°)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$
$\sqrt{2}(\cos 45° + i\,\sin 45°)$	$1 + i$
$\sqrt{2}(\cos 225° + i\,\sin 225°)$	$-1 - i$
$3(\cos 90° + i\,\sin 90°)$	$3i$
$3(\cos 30° + i\,\sin 30°)$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i$
$\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos 210° + i\,\sin 210°)$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,i$
$\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos 300° + i\,\sin 300°)$	$\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\,i$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 180° + i\,\sin 180°)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 270° + i\,\sin 270°)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

PRACOVNÍ LIST 2

VÝRAZY

1M	$\frac{2}{a} - \frac{1-a}{a^2}$	**7O**	$\frac{2}{a+b} + \frac{2b}{a^2-b^2}$
2T	$\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{2}{a} + \frac{1}{a+b}$	**8Í**	$\left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right) : \frac{2}{a+2}$
3M	$\left(\frac{a}{a-1} - 1\right) \cdot \frac{a^2-1}{a}$	**9A**	$\left(1 + \frac{a^3}{b^3}\right) : \left(1 + \frac{a}{b}\right)$
4T	$\left(\frac{a}{b^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{b}{a^2+ab}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)$	**10Á**	$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1}{\left(\frac{1}{a}\right)^3} + (-b)^3$
11A	$\frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{1}{a^2+2ab+b^2} + \frac{2}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{a-b}{a^3b^3}}$	**5K**	$\frac{\frac{a+2}{a-2} - \frac{a-2}{a+2}}{\frac{8}{4-a^2}}$
6S	$\frac{2a+b}{a^2+ab} - \frac{1}{a}$	**12U**	$(a^3 - b^3) : \left(a + \frac{b^2}{a+b}\right)$

VÝSLEDKY

A	$\frac{3a-1}{a^2}$	**T**	$\frac{1}{a+b}$
I	$\frac{1}{a+b}$	**A**	$-a$
E	$\frac{-3b}{a(a+b)}$	!	$a^2 - b^2$
J	$\frac{2a}{a^2-b^2}$	**M**	$-a^3$
A	$\frac{a+1}{a}$	**H**	$\frac{ab}{a-b}$
Z	$\frac{2}{a-2}$	**N**	$\frac{a^2-ab+b^2}{b^2}$

PRACOVNÍ LIST 3

ODMOCNINY

1. Ve skupině si navzájem přečtěte a prodiskutujte, co zatím víte (nebo si myslíte, že víte) o odmocninách.

2. Zvolte čísla a, b a vyplňte následující tabulku:

a	36		
b	4		
$a \cdot b$			
$\frac{a}{b}$			
$\sqrt{a}$			
$\sqrt{b}$			
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$			
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$			
$\sqrt{ab}$			
$\sqrt{\frac{a}{b}}$			

3. Z tabulky lze odvodit následující závěry:
   1. pro všechna $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ platí:
   2. pro všechna $a \in \mathbb{R}_0^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ platí:

4. Porovnejte to, co jste zatím o odmocninách zjistili, s tím, co jste o nich věděli nebo tušili na začátku hodiny.

5. Užitím závěrů z části 3) převeďte $\sqrt{50}$ na tvar $a \cdot \sqrt{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. (Této činnosti se říká částečné odmocňování.)

6. Částečně odmocněte:
   $\sqrt{675}$, $\sqrt{980}$, $\sqrt{252}$, $\sqrt{432}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{648}$, $\sqrt{150}$, $\sqrt{1859}$

7. Užitím závěrů z části 3) odstraňte odmocninu ze jmenovatele zlomku $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Této činnosti se říká usměrňování zlomku.)

8. Usměrněte zlomky: $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\frac{4}{\sqrt{11}}$

9. Užitím závěrů z části 3) a jednoho známého vzorce usměrněte zlomky:
   $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$, $\frac{4}{2-\sqrt{3}}$

PRACOVNÍ LIST 4

KOMBINACE

1. Vypište všechny trojice, které lze vytvořit z pěti prvků A, B, C, D, E, jestliže se prvky nemohou opakovat a

   a) záleží na pořadí,

   b) nezáleží na pořadí prvků.

2. Kolikrát více je trojic uspořádaných než neuspořádaných? Kolikrát méně je trojic neuspořádaných než uspořádaných? Proč?

3. Pomocí podobných úvah jako v úlohách 1) a 2) určete počet uspořádaných a neuspořádaných čtveřic, které lze vytvořit z deseti prvků.

4. Přečtěte si a společně prodiskutujte následující definici.

   Definice: *Kombinace k-té třídy z n prvků* (k-členná kombinace z n prvků) je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

   Počet těchto kombinací označujeme $K(k, n)$.

5. Čím se liší kombinace od variací? Vytvářeli jste v úlohách 1) nebo 3) nějaké kombinace? Kdy? Pokuste se napsat vzorec pro počet kombinací třetí třídy z pěti prvků a kombinací čtvrté třídy z deseti prvků.

6. Na základě výsledků předchozích úloh odvoďte vzorec pro počet kombinací k-té třídy z n prvků.

PRACOVNÍ LIST 5

Součtové vzorce

x	$60°$	$30°$	$120°$			
y	$30°$	$60°$	$60°$			
$x+y$						
$x-y$						
$\sin x$						
$\sin y$						
$\cos x$						
$\cos y$						
$\sin(x+y)$						
$\sin(x-y)$						
$\cos(x+y)$						
$\cos(x-y)$						
$\sin x \cos y$						
$\cos x \sin y$						
$\sin x \sin y$						
$\cos x \cos y$						

Závěr:

1.

2.

3.

4.

Hrajeme si v matematice (popis zkušeností učitele ZŠ)

Jana Plíšková, ZŠ Josefa Ressla, Pardubice [1]

Abstrakt. *Článek ukazuje, jak je možné zpřístupnit a zpříjemnit matematiku formou hry. Vše je ukázáno na příkladu hry Pexeso, která je předvedena v několika různých obměnách.*

Úvod

Jsem učitelkou matematiky na druhém stupni základní školy. Mojí snahou je zpřístupnit matematiku žákům formami, které jsou pro ně příjemné a které žáci vnímají jako hru a ne učení. Moje zkušenost je taková, že pokud jsou žáci zvyklí pracovat určitým stylem již od nižších ročníků, pak jim nepřipadá forma hry zvláštní ani ve vyšších ročnících, ba naopak ji vítají. Samozřejmě je důležitá vyváženost hodiny a herní formy je nutno volit citlivě, ve vhodnou dobu, je nutné zvážit věkovou skupinu, pro kterou tu, či onu hru volím. Úkolem článku je předat osobní zkušenosti s aktivitami, které při výuce matematiky pomáhají motivovat žáky, podělit se o nápady, jakým způsobem je možné žáky vést k přesvědčení, že matematika je věda krásná a zábavná.

Hra je forma činnosti, při které děti nevnímají proces získávání vědomostí a dovedností jako proces učení. Hra je mnohdy v osvojení poznatků mnohem úspěšnější. Uvedu jako příklad hru Pexeso, při které je malé dítě schopno se rychle naučit jména zvířat, plemena psů, hrady a zámky atd. Jako další přínos her považuji fakt, že se děti učí komunikovat, spolupracovat, brát si příklad z jednání druhého, podřizovat se druhým, rychle se rozhodovat. Hra umožňuje být úspěšnými i dětem, které mají výukové obtíže a naopak učí přijímat porážku dětem příliš sebejistým. V neposlední řadě vnímám hru jako prostředek odbourávání strachu z matematiky, z učitele, který může být při hrách partnerem, z omylu, který se při hře objeví, z neúspěchu.

V tomto článku popíšu několik osvědčených nápadů na činnosti, které žáci vítají.

---

[1] e-mail: pliskova.jana@seznam.cz

Domino

Tato hra je velice známá snad ve všech rodinách, proto není třeba dětem příliš dlouho popisovat její pravidla. Ta je možno pro zatraktivnění hry obměňovat. Jedná se zpočátku o hru motivační, kdy se děti snaží splnit úkol – vyhrát, být první, porazit spolužáka. Při jejím dalším používání však děti začínají vnímat i přínos této hry – učení. Proto si dovoluji tuto hru považovat za didaktickou. Pro žáky není tato hra přínosem jen pro zapamatování si probírané látky. Učí se také komunikovat, podřizovat druhému, vysvětlovat a obhajovat volbu, rychle se rozhodovat. Nesetkala jsem se s odmítnutím této hry, s nevolí hru hrát, přestože obsah kartiček byl žáky považován za obtížné učivo.

Témata, která používám pro hru Domino:

- převody jednotek
- algebraické vzorce
- geometrické vzorce s názvy útvarů, s obrázky útvarů, tělesy, sítěmi těles
- převody zlomků na desetinná čísla, smíšená čísla, základní tvar
- vyjádření částí dne, hodiny, jednotek desetinným číslem a zlomkem

Různá pravidla pro hru Domino:

- klasické Domino
- hra skupin, dvojic – která skupina, dvojice rychle sestaví z kartiček čtverec
- hra dvojic – všechny kartičky otočené lícem, hráči se musí v pokládání střídat a sestavit uzavřený obrazec

Hry s obdobným využitím i pravidly

Magický čtverec

Čtverec rozstříhaný na 9 čtvercových kartiček. Jednotlivé kartičky jsou rozděleny úhlopříčkami na 4 trojúhelníky. Do trojúhelníků jsou vepsány zápisy tak, aby při složení čtverce k sobě přiléhaly strany kartiček stejného významu jako u domina.

Pexeso

Známá hra, u které je možno využít poznatků z domina – obrázky nejsou identické, ale vyjadřují stejný výraz, stejnou vlastnost, mají stejný význam.

Pexeso je možné hrát s obměnami, které urychlí a zatraktivní hru:

- všechny obrázky otočené lícem a dvojice jen vyhledávat
- všichni hledají najednou
- hráči se ve dvojicích střídají do té doby, než se jeden hráč zmýlí
- kartičky rozmístěné po třídě a děti hledají dvojice

Kartičky ANO–NE

Každý žák si vyrobí z jakéhokoli čistého kartonu 2 kartičky velikosti A5. Na jednu napíše A či celé slovo ANO, na druhou N nebo celé slovo NE. Učitel se ptá, celá třída (jednotlivci) po stanoveném limitu odpovídá zvednutím správné kartičky. Učitel vyjmenuje žáky, kteří se zmýlili, a případně vysvětlí chyby. Žáci si chyby počítají. Pro učitele je to přehledná forma zjištění znalostí, děti tuto formu vnímají jako hru, obzvlášť, pokud jsou na závěr pochváleni či ohodnoceni razítkem, známkou. Na žáky, kteří chybovali, nepůsobí tato forma zkoušení negativně. Aby hru hráli všichni do konce, je možné stanovit určitou možnost omylu. Žáci často kartičky vyžadují.

Hru je možné doplnit: Pro otázky mám připravené svoje karty. Obsahují např. vzorce, geometrické symboly, převody jednotek. Zpočátku se ptám, zda je zápis správný, poté přidám slovní komentář, při kterém musí děti skloubit to, co vidí na kartičce a co slyší ode mne. Např. ukazuji správný vzorec na výpočet obsahu čtverce a ptám se, zda je to správný vzorec na výpočet obsahu obdélníka.

Číselná osa

Žáci si přinesou nastříhané čtverečky o stranách 1 cm × 1 cm, učitel má na papírech formátu A4 připravené číselné osy s různými měřítky a s popisem pouze některých bodů. Nejdříve učitel se všemi žáky na jeden čtvereček napíše číslo, které je možné umístit na první číselnou osu, a vysvětlí její správné umístění a polohu rohem k ose. Postupně společně popíší např. 5 čtverečků a umístí. Pak následuje hra: Žáci si vezmou všechny již popsané čtverečky do dlaně, zamíchají a na povel rozmisťují.

Různé obtížnosti hry jsou:

- rozmisťování na jednu osu
- rozmisťování na celý papír
- osy s desetinnými čísly
- osy se zlomky

Šifrování, aneb žáci rádi počítají

Učitel má pro žáky připravené kartičky, na kterých je zaznamenaná šifra. Šifra převádí čísla do písmen. Žáci si pak kartičku se šifrou nosí stále u sebe. Žákům je zadáno asi 5 příkladů, jejichž výsledky tvoří zašifrované slovo. Slovo umožňuje učiteli rychlou kontrolu, a je možné tak sledovat celou třídu.

Použití v jednotlivých ročnících jsou:

- 6. ročník – šifra s desetinnými čísly
- 7. ročník – zlomky a záporná čísla
- 8. ročník – hodnota algebraického výrazu apod.

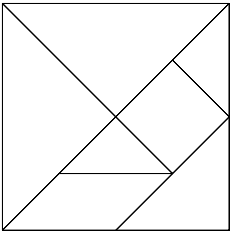
Hru je možné doplnit: Sama mám se šifrováním velice dobré zkušenosti. Abych omezila domýšlení si slov, zadávám nejprve slova, pak slova pozpátku, přesmyčky, či slova, která žáci neznají, a to mi umožňuje v návaznosti na šifru vysvětlovat zajímavou problematiku či touto formou navodit cíl hodiny. Šifrováním je možné diferencovat žáky. Rychlejší musí předvést celé slovo, slabší třeba o dvě písmena méně. I tato forma je žáky dobře akceptována. Příklad šifrovací tabulky je v tab. 1.

A	10,15	CH	10,6	P	8,54
B	8,25	I	7,36	R	8,3
C	5,07	J	8,2	S	7,3
D	15,2	K	4,39	T	12,8
E	12,5	L	5,36	U	11,77
F	38,17	M	7,5	V	27,5
G	24,61	N	10,9	Y	14,8
H	24,1	O	13,45	Z	9,5

Tab. 1

Tangram

Tangram je vhodná hra pro geometrickou představivost (obr. 1). Jedná se o skládání obrazců a obrázků z rozstříhaného čtverce. Jednotlivé díly jsou rovinné útvary – trojúhelníky, rovnoběžník, čtverec. Je tedy možné využít tyto díly k popisování či porovnávání vlastností těchto útvarů.



Obr. 1

Závěr

Mým velkým přáním je, aby všechny děti měly rády matematiku alespoň v takové míře, že na hodiny strávené ve školních lavicích budou vzpomínat v dobrém, přestože hodnocení na vysvědčení, které jim musím udělit, není mnohdy příliš povzbudivé. K dalším nápadům doporučuji následující literaturu. Budu ráda, když mi jako reakci na tento příspěvek kolegové napíší svoje zkušenosti a nápady.

Literatura

[1] Šarounová, A.: *Magické čtverce a další číselná schémata.* Prometheus, Praha, 2005.

[2] Šarounová, A.: *Hvězdice, mozaiky a další hry s čísly.* Prometheus, Praha, 2006.

[3] Novotná, J., Bartoncová, L., Nosková, I., Šebánková, L., Typltová, H.: *Matematické křížovky pro celou rodinu.* Prometheus, Praha, 1996.

[4] Demeterová, V.: *Hlavolamy.* Fragment, Havlíčkův Brod, 2005.

NÁZORY UČITELŮ

Co nás znepokojuje

Již delší dobu můžeme pozorovat klesající úroveň vzdělanosti v našem státě. Přes snahu mnoha našich učitelů zvyšuje se i v našich školách nekázeň, neúcta, neurvalost, neochota se něčemu naučit, roste vulgárnost a řada dalších nešvarů. Je možné tyto negativní tendence, k nimž přispívá i jistá krize společnosti, postavení učitelů a působení rodiny, zastavit?

Chceme se spolu s vámi zamyslet nad naší civilizací a naší kulturou, nejen vědou a technikou, ale i uměním (literaturou, hudbou, výtvarným uměním, architekturou, ...), stylem života a jeho projevy (organizace společnosti, politika, ...). Jako lidé spjatí s matematikou si klademe otázku, jakou roli má hrát tento předmět ve vzdělávání.

Matematika je zdánlivě nepatrnou, avšak nezastupitelnou složkou civilizace, která souvisí s racionálním, tedy rozumovým přístupem k realitě. Tento přístup není jediný. „Člověka ovlivňují báje, stejně jako to, co si ohmatá a ověří, legendy vedle počtů a mýty a legendy souběžně s logikou, a to veliké neznámé probouzí představivost, která se vyrovná vědě nebo ji i předčí (A. Lustig).“ Racionální přístupy ke skutečnosti jsou pro každého více nebo méně významné a potřebné. Matematika totiž přispívá k porozumění světu, pomáhá lidem řešit problémy osobní, společenské i vědecké, studiem matematiky kultivuje člověk sám sebe.

Usilujeme o to, aby matematika nebyla pouze pro vyvolené či nadané, ale aby byla pro každého, neboť může být každému prospěšná, každý v ní může objevit přínos pro sebe samého. Rádi bychom, aby se učitelé snažili pěstovat trvalý zájem o matematiku u celé populace. Chceme však také, aby ti, kteří k matematice tíhnou, kteří cítí, že ji budou potřebovat a chtějí ji poznat, k tomu měli příležitost. Považujeme za potřebné umožnit jim hlubší studium matematiky a dalších předmětů v rámci současné školy.

Učit se používat matematiku, fyziku a ostatní předměty ovšem znamená studovat je. A to je práce a v tom je také především význam vzdělávání pro kultivaci člověka – a patrně také zdroj odporu ke škole u těch, kteří pracovat nechtějí a nechtějí se ani učit pracovat. Škola, která nerozvíjí pracovní návyky, je možná, je pohodlná, a pro mnohé proto přijatelná. Je to však škola, která spolehlivě vede ke společnosti spotřebitelské, závislé, chudé a úpadkové. Přejeme-li si jít touto cestou, dejme úplnou svobodu dětem – ať si vyberou, co se chtějí učit, jak se to chtějí učit a zda se vůbec chtějí něco učit – a nerespektujme skutečnost, že dítě vidí hlavně lákavé bezprostřední cíle a není schopno posoudit svoji budoucí roli ve společnosti.

Naším cílem není škola autoritářská, škola s tvrdě zavedenou disciplínou a přísně vyžadovanými výsledky stejnými u všech studentů. Nechceme ale ani školu bez „společenské a studijní" kázně. Usilujeme o školu, v níž se žáci a studenti budou spolu se svými učiteli, školou a rodinou snažit získat co nejkvalitnější kulturní profil s vyváženými racionálními, emotivními, technickými, pracovními i uměleckými aspekty. Snažme se pro tuto myšlenku získat podporu učitelů, ředitelů i školské správy. Budeme rádi, když naši snahu podpoříte i vy, představitelé ostatních oborů, lidé vědy a kultury i příslušné instituce.

Respektujeme právo umělců a humanitních vědců na jakékoliv názory na matematiku, přírodní vědy a jejich roli ve vzdělávání. Upozorňujeme však na to, že vyvolávání a šíření odporu např. k matematice a přírodovědě je škodlivé pro děti i pro celou společnost. Bez matematiky by nebyly ani mobily ani automobily, filozofie by neměla ani Descarta ani Leibnize, výtvarní umělci by ryli své bizony do stěn jeskyně, hvězdy umění muzického by táhly pěšky od osady k osadě ...

Jindřich Bečvář, Dag Hrubý, František Kuřina, Petr Vopěnka

ZE SPOLEČENSKÉHO VEČERA

O matematických antitalentech

Emil Calda, MFF UK Praha[1]

> *K matematice sice nevede královská cesta,*
> *ale zase vás na ní nepřejede žádnej debil.*

S politováním konstatuji, že neexistuje žádná péče o matematické antitalenty a že o rozvoj jejich matematických neznalostí nikdo nedbá. Přitom je zřejmé, že ve srovnání s talenty je jejich procentuální výskyt v dorůstající generaci podstatně větší a každým rokem se dále zvětšuje. Co dělá na tomto poli Jednota českých matematiků a fyziků a Společnost učitelů matematiky, co dělají čeští didaktici matematiky, pedagogové všeho druhu a v neposlední řadě také organizátoři této konference? Proč je množina všech akcí, které jsou pro matematické antitalenty pořádány, rovna množině všech sudých prvočísel větších než dvě?

My, učitelé matematiky, bychom si měli uvědomit, že matematičtí antitalenti nejsou našimi protivníky. Zatímco u talentů musíme být stále ve střehu a dávat pozor, aby nás nenachytali při nějaké drobné chybičce, které se může dopustit i vědec našeho formátu, u antitalentů se toho obávat nemusíme. Zatímco talenti neustále řeší úlohy různých soutěží, které se nám před nimi nepodařilo zatajit a které musíme opravovat, u antitalentů jsme toho ušetřeni. U antitalentů se také nemusíme snažit o to, aby porozuměli nějaké matematické větě – stejně ji nikdy potřebovat nebudou, a pokud ano, určitě si na ni nevzpomenou. Měli bychom se však pokusit myšlenkovým pochodům antitalentů porozumět – budeme aspoň vědět, co nás čeká, a snáze přežijeme období, ve kterém nějaký antitalent coby významný politik nebo jiná „důležitá“ osoba bude rozhodovat o věcech, kterým nerozumí. Příklad takového myšlenkového pochodu demonstruje následující ukázka, ve které je velmi zajímavým a jednoduchým způsobem odvozen známý vzorec

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx =$$
$$= [\sin(n+1)x/2 \cdot \sin nx/2] / \sin x/2, \quad x \neq 2k\pi.$$

---

[1] e-mail: ecalda@volny.cz

1. Vyjdeme z rovnosti, která platí pro každé reálné x a každé přirozené číslo n:

$$x + 2x + 3x + \cdots + nx = n(n+1)x/2$$

2. Úpravou pravé strany dostaneme rovnost, která platí pro všechna $x \neq 0$:

$$x + 2x + 3x + \cdots + nx = [(n+1)x/2 \cdot nx/2]/(x/2)$$

3. Obě strany vynásobíme nenulovou konstantou, kterou označíme „sin“:

$$\sin \cdot (x + 2x + 3x + \cdots + nx) = \sin \cdot ([(n+1)x/2 \cdot nx/2]/(x/2))$$

tj.:

$$\sin(x + 2x + 3x + \cdots + nx) = \sin([(n+1)x/2 \cdot nx/2]/(x/2))$$

4. Použitím zákonů pro násobení součtu a podílu

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad a(bc/d) = [(ab) \cdot (ac)]/(ad)$$

dostaneme výsledný vzorec

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx = [\sin(n+1)x/2 \cdot \sin nx/2]/\sin x/2,$$

který ještě vzhledem k tomu, že jmenovatel každého zlomku musí být různý od nuly, doplníme podmínkami $2 \neq 0$ a $x \neq 2k\pi$.

Stojí za povšimnutí, že v matematické literatuře se na první z těchto podmínek, tj. na podmínku $2 \neq 0$, zapomíná.

Poznámka. Autor příspěvku se všem účastníkům společenského večera omlouvá a vyjadřuje naději, že nepadne (příspěvek ani autor) do rukou nepovolaných.

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Baláš Josef* e-mail: balassou@centrum.cz
   Pracoviště: SOU, Šenovská 574, Šenov u Nového Jičína
2. *Baráková Miluše* e-mail: barakovam@gymkren.cz
   Pracoviště: G, Křenová 36, Brno
3. *Barnetová Dagmar* e-mail: dasa.barnet@seznam.cz
   Pracoviště: ZŠ, Lesní 575/12, Liberec
4. *Bártek Květoslav* e-mail: k.bartek@centrum.cz
   Pracoviště: PF UP, Žižkovo nám. 5, Olomouc
5. *Bernardová Eva* e-mail: bernardova@vossvetla.cz
   Pracoviště: VOŠ, G a SOŠUP, Sázavská 547, Světlá nad Sázavou
6. *Bulušek Jaroslav* e-mail: bulusek2@seznam.cz
   Pracoviště: ZŠ, Dolní Rokytnice172, Rokytnice nad Jizerou
7. *Cachová Jana* e-mail: jana.cachova@uhk.cz
   Pracoviště: PedF UHK, Hradecká 1227/4, Hradec Králové
8. *Calábek Pavel* e-mail: calabek@aix.upol.cz
   Pracoviště: PřF UP, tř. Svobody 26, Olomouc
9. *Calda Emil* e-mail: ecalda@volny.cz
   Pracoviště: MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8
10. *Carbol František* e-mail: fcarbol@atlas.cz
    Pracoviště: SŠ, Vítkov
11. *Cardová Hana*
    Pracoviště: SUPŠ, Tavírna 109, Český Krumlov
12. *Čiháková Dana* e-mail: d_cihakova@prometheus-nakl.cz
    Pracoviště: Prometheus, s.r.o., Čestmírova 10, Praha 4
13. *Daňková Dana* e-mail: dankova@gymta.cz
    Pracoviště: G, Náměstí Františka Křižíka 860, Tábor
14. *Dostálová Hana* e-mail: hana.leischnerova@email.cz
    Pracoviště: OA, VOŠ, JŠ, SNP 170, Hradec Králové
15. *Dvořáková Věra* e-mail: dvorv@seznam.cz
    Pracoviště: OA, VOŠ, JŠ, SNP 170, Hradec Králové
16. *Fantová Ivana* e-mail: fantova@gbn.cz
    Pracoviště: G, Husova 470, Benešov

17. *Fatrdlová Hana* e-mail: fatrdlova@seznam.cz
    Pracoviště: ZŠ a MŠ, Chalabalova 2, Brno
18. *Fleischerová Zuzana* e-mail: skola@oakostelec.cz
    Pracoviště: OA, Komenského 522, Kostelec nad Orlicí
19. *Fořtová Ilona* e-mail: fortova@prometheus-nakl.cz
    Pracoviště: Prometheus, s.r.o., Čestmírova 10, Praha 4
20. *Gongolová Daniela* e-mail: d.gongolova@seznam.cz
    Pracoviště: ZŠ, T.G. Masaryka 454, Frýdek Místek
21. *Habiballa Hashim* e-mail: hashim.habiballa@osu.cz
    Pracoviště: PřF Ostravské Univerzity, 30. dubna 22, Ostrava
22. *Hajčiar Martin* e-mail: spravce@gymhu.cz
    Pracoviště: G, Komenského 147, Humpolec
23. *Hájková Hana* e-mail: hajkova@jaroska.cz
    Pracoviště: G, Kpt. Jaroše 14, Brno
24. *Havlišová Eva* e-mail: skola@losenice.cz
    Pracoviště: ZŠ a MŠ, Velká Losenice 248
25. *Hazi Josef* e-mail: hazi@gymcheb.cz
    Pracoviště: G, Nerudova 7, Cheb
26. *Haziová Olina* e-mail: haziova@gymcheb.cz
    Pracoviště: G, Nerudova 7, Cheb
27. *Herberová Veronika* e-mail: herberova@jaroska.cz
    Pracoviště: G, Kpt. Jaroše 14, Brno
28. *Holá Renata* e-mail: r.hola@seznam.cz
    Pracoviště: ZŠ, T.G. Masaryka 454, Frýdek Místek
29. *Horáková Jana* e-mail: horakjana@seznam.cz
    Pracoviště: ZŠ, Zeyerova 3354, Kroměříž
30. *Horáková Hana* e-mail: hana_hor@seznam.cz
    Pracoviště: G, Vejrostova 2, Brno
31. *Hotová Eva* e-mail: hotova@email.cz
    Pracoviště: PedF UP, Olomouc
32. *Houser Jiří* e-mail: jiri.houser@seznam.cz
    Pracoviště: SPŠ, ČSA 376, Nové Město nad Metují
33. *Hrabáková Miroslava* e-mail: mhrabakova@centrum.cz
    Pracoviště: G, Jiráskova 617, Hořovice
34. *Hruška Michal* e-mail: michal.hruska@wo.cz
    Pracoviště: G, Brandlova 875, Hradec Králové

35. *Hříbková Lenka* e-mail: lenka.hribkova@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M.D.Rettigové 4, Praha 1
36. *Jacková Jarmila* e-mail: jackovaj@seznam.cz
Pracoviště: SOŠ a SOU, Hradební 1029, Hradec Králové
37. *Jančařík Antonín* e-mail: jancarik@atlas.cz
Pracoviště: PedF UK, M.D.Rettigové 4, Praha 1
38. *Jarešová Miroslava* e-mail: jaresova.m@seznam.cz
Pracoviště: SPŠS a VOŠ, Čáslavská 973, Chrudim
39. *Jedličková Milada* e-mail: jedlickova@stavskola.cz
Pracoviště: SPŠ stavební, Havlíčkův Brod
40. *Ježek Viktor* e-mail: jezek@jaroska.cz
Pracoviště: G, Kpt. Jaroše 14, Brno
41. *Jonová Marie* e-mail: bulusek2@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Dolní Rokytnice 172, Rokytnice nad Jizerou
42. *Judová Marie* e-mail: m.judova@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Polnička 147, Žďár nad Sázavou
43. *Juráňová Růžena* e-mail: r.juranova@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Prušánky 289
44. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M.D. Rettigové 4, Praha 1
45. *Koman Milan* e-mail: milan.koman@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M.D. Rettigové 4, Praha 1
46. *Kommová Helena* e-mail: kommova@gjk.cz
Pracoviště: G, Parléřova 2, Praha 6
47. *Kopal David* e-mail: kopal.david@centrum.cz
Pracoviště: G, Seifertova 13, Blansko
48. *Kopřiva Petr* e-mail: kopr.kopr@post.cz
Pracoviště: ZŠ, Kutnohorská 181, Červené Pečky
49. *Kordová Štěpánka* e-mail: kordova@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Habrmanova 130, Hradec Králové
50. *Kotásková Jana* e-mail: kotasskova@ghrabuvka.cz
Pracoviště: G, Fr. Hajdy 34, Ostrava–Hrabůvka
51. *Krška Michael* e-mail: mkrska@quick.cz
Pracoviště: OA, VOŠ, JŠ, SPN 170, Hradec Králové
52. *Krupová Lenka* e-mail: krupova@telsko.cz
Pracoviště: SŠT, Opavská 1119, Ostrava–Poruba

53. *Kuřina František* e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové
54. *Lašková Kateřina* e-mail: laskova@telsko.cz
Pracoviště: SŠT, Opavská 1119, Ostrava–Poruba
55. *Leischner Pavel* e-mail: leischne@pf.jcu.cz
Pracoviště: PdF JU, Jeronýmova 10, České Budějovice
56. *Lesáková Eva* e-mail: lesakova@cermat.cz
Pracoviště: CERMAT, Jeruzalémská 12, Praha 1
57. *Linkendeserová Zdeňka* e-mail: linkensederova@oabk.cz
Pracoviště: OA a SZŠ, Nad Čertovkou 18, Blansko
58. *Machková Lenka* e-mail: machkova@gjkt.cz
Pracoviště: G JKT, Tylovo nábřeží 682, Hradec Králové
59. *Malec Miloslav* e-mail: malec@gymkyjov.cz
Pracoviště: G, Komenského 549, Kyjov
60. *Maňásková Eva* e-mail: manaskova@gymhol.cz
Pracoviště: G, Palackého 524, Holešov
61. *Mikulášek Petr* e-mail: miki@gymjev.cz
Pracoviště: G, A.K.Vitáka 452, Jevíčko
62. *Molnár Josef* e-mail: josef.molnar@upol.cz
Pracoviště: PřF UP, Tomkova 40, Olomouc
63. *Musílek Michal* e-mail: sosstezery@tiscali.cz
Pracoviště: SOŠ, Lipová 56, Stěžery
64. *Novák Miloslav*
Pracoviště: G, Školní 1251, Chomutov
65. *Nováková Eva* e-mail: novakova@gymzr.cz
Pracoviště: G, Neumannova 2, Žďár nad Sázavou
66. *Novotná Václava* e-mail: novotna@sps-pi.cz
Pracoviště: SPŠ a VOŠ, Karla Čapka 402, Písek
67. *Odstrčilová Jana* e-mail: odstrcilovaj@atlas.cz
Pracoviště: ZŠ, Habrmanova 130, Hradec Králové
68. *Ondráčková Ivana* e-mail: ondrackova@post.cz
Pracoviště: G JKT, Tylovo nábřeží 682, Hradec Králové
69. *Ort Jiří* e-mail: jirka.ort@seznam.cz
Pracoviště: G, Komenského 77, Nový Bydžov
70. *Pavlas Tomáš* e-mail: pavlas@gymrumburk.cz
Pracoviště: G, Komenského 10, Rumburk

71. *Pekárková Dáša* e-mail: dasa.pekarkova@centrum.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Helsinská 2732, Tábor
72. *Petelíková Marie*
Pracoviště: ZŠ, Palackého nám. 45, Kostelec nad Orlicí
73. *Petrovická Alice* e-mail: alicepetrovicka@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Školská 380, Černilov
74. *Pinďurová Zuzana* e-mail: pindurova@zsbouzov.cz
Pracoviště: ZŠ, MŠ, ŠD, ŠJ, Bouzov 48
75. *Plíšková Jana* e-mail: pliskova.jana@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Josefa Ressla 2258, Pardubice
76. *Pokorná Jana* e-mail: ivanbubak@volny.cz
Pracoviště: ZŠ, Štefánikova 448, Pardubice
77. *Popp Karel* e-mail: poppk@post.cz
Pracoviště: Soukromá osoba
78. *Pourová Naďa* e-mail: pour@zshk.cz
Pracoviště: SZŠ a VŠZ, Komenského 234, Hradec Králové
79. *Procházková Milena* e-mail: prochazkova@issltm.cz
Pracoviště: ISŠ, Dlouhá 6, Litoměřice
80. *Průšová Anna* e-mail: a.prusova@gjwprostejov.cz
Pracoviště: G, Kolárova 3, Prostějov
81. *Řezáčová Růžena* e-mail: rezacova@spsdusni.cz
Pracoviště: VOŠ a SPŠ, Dušní 17, Praha 1
82. *Řídká Eva* e-mail: ridka@cermat.cz
Pracoviště: CERMAT, Jeruzalémská 12, Praha1
83. *Safinová Irena*
Pracoviště: G a OA, Komenského 586, Vrchlabí
84. *Sekaninová Libuše*
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Křídlovická 30b, Brno
85. *Semanišinová Ingrid* e-mail: ingrid.semanisinova@upjs.sk
Pracoviště: Univerzita PJŠ, Šrobárova 2, Košice
86. *Smíšková Jaroslava* e-mail: sezam788@vol.cz
Pracoviště: OA, Dušní 7, Praha 1
87. *Smrčková Hana* e-mail: h.smrckova@seznam.cz
Pracoviště: SSŠ, E. Basse 1142/9, Most
88. *Suchomelová Jana* e-mail: jana.suchomelova@gfxs.cz
Pracoviště: G, Partyzánská 530, Liberce

89. *Synková Jana*
Pracoviště: ZŠ, Jičínská 136, Sobotka

90. *Šedivá Alena* e-mail: sediva@gymta.cz
Pracoviště: G, Nám. Fr. Křižíka 860, Tábor

91. *Šedý Miloslav* e-mail: miloslav.sedy@email.cz
Pracoviště: G, Školní ulice 1251, Chomutov

92. *Šimša Jaromír* e-mail: simsa@ipm.cz
Pracoviště: MU, Janáčkovo nám. 2a, Brno

93. *Šišková Jana* e-mail: jana.siskova@seznam.cz
Pracoviště: G, Kollárova 3, Prostějov

94. *Štěpánek Milan* e-mail: stepanek@zdravka-plzen.cz
Pracoviště: SZŠ a VOŠZ, Karlovarská 99, Plzeň

95. *Štěpánková Jiřina* e-mail: stepjirina@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Albrechtická 414, Most

96. *Šváchová Jana* e-mail: svachova@gbn.cz
Pracoviště: G, Husova 470, Benešov

97. *Šveda Dušan* e-mail: dusan.sveda@upjs.sk
Pracoviště: Univerzita PJŠ, Šrobárova 2, Košice

98. *Švrček Jaroslav* e-mail: svrcek@inf.upol.cz
Pracoviště: PřF UP, Tomkova 40, Olomouc

99. *Takáčová Lenka* e-mail: lenka.takacova@centrum.cz
Pracoviště: SOU, Velká 3, Hradec Králové

100. *Tomek Karel* e-mail: tomek.trebic@seznam.cz
Pracoviště: VÚP, Novodvorská 1010/14, Praha 4

101. *Tomešová Vlasta* e-mail: vlasta.tomesova@atlas.cz
Pracoviště: Soukromá osoba

102. *Tomík Martin* e-mail: martin.tomik@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Na Dlouhých 49, Plzeň

103. *Trojanová Lenka* e-mail: lenkatrojanova@email.cz
Pracoviště: ZŠ, Švermova 4, Žďár nad Sázavou

104. *Vaněk Vladimír* e-mail: vladimir.vanek@upol.cz
Pracoviště: PřF UP, U Svobody 26, Olomouc

105. *Vaňková Jana* e-mail: jana.vankova@gfxs.cz
Pracoviště: G, Partyzánská 530, Liberec

106. *Veverka Tomáš*
Pracoviště: ZŠ, Komenského, Nymburk

107. *Vojteková Lenka* e-mail: lenka.vojtekova@gjm.cz
Pracoviště: G, Tererova 17, Praha 4

108. *Volf Ivo* e-mail: ivo.volf@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové

109. *Volfová Marta* e-mail: marta.volfova@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové

110. *Vondráková Eva* e-mail: vondrakova@chello.cz
Pracoviště: Společnost pro talent a nadání, V remízku 926, Praha 5

111. *Vopěnka Petr*
Pracoviště: PřF UJEP, Ústí nad Labem

112. *Voštová Hana* e-mail: vostova@zs.tabor.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ, Helsinská 2732, Tábor

113. *Vybíral Josef* e-mail: bohumil.vybiral@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové

114. *Wagnerová Blanka* e-mail: wg@spsstavhk.cz
Pracoviště: SPŠ stavební, Pospíšilova tř. 787, Hradec Králové

115. *Zavadilová Gabriela* e-mail: g.zavadilova@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ, Zeyerova 3354, Kroměříž

116. *Zelendová Eva* e-mail: zelendovae@seznam.cz
Pracoviště: VÚP, Novodvorská 1010/14, Praha 4

117. *Zhouf Jaroslav* e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M.D.Rettigové 4, Praha 1

118. *Žabka Ján* e-mail: zabco@centrum.sk
Pracoviště: G, Bajkalská 20, Bratislava

Název: Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba systémem LaTeX: Miloslav Závodný
Vydavatel: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Náklad: 160 kusů
Rok vydání: 2007

Text neprošel jazykovou úpravou.

Vydání sborníku bylo podpořeno evropským fondem
„Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP“,
reg. číslo CZ.04.3.07/3.1.01.1/0137.

ISBN 978-80-7290-332-0

ISBN 80-7290-332-0
9 788072 903320