Jednota českých matematiků a fyziků
Pedagogické centrum Hradec Králové
Střední zdravotnická škola Hradec Králové

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 1. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
24.–26.4.2003

Jednota českých matematiků a fyziků
Pedagogické centrum Hradec Králové
Střední zdravotnická škola Hradec Králové

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 1. ročníku konference učitelů matematiky a přírodních oborů na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
24.–26.4.2003

Obsah

Úvodem

Nový typ konference

Jaroslav Zhouf[1]

Abstrakt: Příspěvek se zabývá současnou situací v identifikaci a výchově talentovaných žáků na matematiku a přírodní vědy. Změně tohoto stavu by měla napomoci nově vznikající konference „Ani jeden matematický talent nazmar“.

Abstract: The contribution focuses on the present situation in the identification and education of pupils talented for mathematics and science. The new conference „No mathematical talent is wasted“ should contribute to the improvement of the situation.

Z vlastní zkušenosti vím, že řada učitelů na základních, středních, ale i vysokých školách je málo informována o aktivitách, které se využívají k vyhledávání a výchově talentovaných dětí na matematiku a přírodní vědy. Dokonce ani čerství učitelé opouštějící vysoké školy neodcházejí na svá pracoviště dostatečně vybaveni těmito znalostmi.

Této situaci nahrál i porevoluční vývoj, kdy poklesl zájem talentovaných žáků o uvedené obory a obrátil se k lukrativnějším oborům, jakými jsou obory ekonomické, právnické, lingvistické. Zmenšil se počet škol a tříd zaměřených (hlavně) na matematiku, zmenšil se počet soutěžících žáků v olympiádách a dalších soutěžích, zmenšil se počet studentů připravujících se na povolání učitele matematiky a ostatních přírodovědných oborů a snížil se i zájem učitelů zapojit se do práce s talentovanými žáky.

Abychom na tuto situaci poukázali a pokusili se přispět k jejímu zlepšení, vzniká nový typ konference pro učitele základních, středních a vysokých škol, pro doktorandy, pro studenty vysokých škol a pracovníky zabývající se identifikací a výchovou žáků, kteří jsou talentovaní na matematiku, ale i přírodní vědy a informatiku.

Konference by měla přispět k zapojení většího počtu učitelů, kteří by dále popularizovali matematiku a přírodní vědy, kteří by pořádali mimoškolní aktivity

[1] *PedF UK, Praha, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz*

pro žáky v těchto oborech, a tím je získávali ke studiu na vyšších typech škol a posléze k volbě svého povolání.

Pro konferenci s výše uvedeným obsahem byl zvolen název „Ani jeden matematický talent nazmar“. Obdobné konference probíhají i v jiných zemích, kde jsou, dle zkušeností zahraničních kolegů, vhodným prostředkem pro podněcování učitelů k práci s talentovanými žáky. Existuje i nadnárodní konference Světové federace národních matematických soutěží, jejíž náplní je mapovat dění ve všech mezinárodních i národních matematických soutěžích. V roce 2002 proběhl v australském Melbourne již její 4. ročník. Právě tato konference byla velkou inspirací při přípravě obdobné konference v České republice.

Literatura

[1] *Sborník WFNMC*, the 4th Conference. Melbourne 2002.

Plenární přednáška

Žáci nadaní a talentovaní na matematiku[1]

Jiří Mareš[2]

Abstrakt: Přehledová studie nabízí psychologický pohled na danou problematiku a je členěna do tří částí. Nejprve se diskutují různá pojetí nadání a talentu u lidí, přičemž autor preferuje vícerozměrné pojetí. Diferencuje mezi nadáním jako potencialitou a talentem jako její realizací. Ve druhé části studie se zdůrazňuje, že talent pro matematiku není determinován jen intelektovými schopnostmi žáka. Referuje se o výzkumech, které studovaly vliv zvláštností žákovy osobnosti (zejména žákova „já"), jeho motivace, emocí, stylu učení, pohlaví, etnického či sociálního původu. Třetí část představuje zájemcům originální typologii osob talentovaných na matematiku (Usiskin, 2000). Studie ukazuje, že psychologický pohled na péči o žáky talentované na matematiku odkrývá zajímavé souvislosti a může být pro učitele i didaktiky matematiky inspirativní.

Abstract: The study presents a psychological view of pupils talented for mathematics. First, some conceptions of talent are given, the author prefers a multidimensional conception. He differentiates between aptitude as a potential and talent as its realisation. The second part of the study emphasises that talent for mathematics is not determined by a pupil's intellectual abilities only. Some research is mentioned which focuses on the features of the pupil's personality (mainly of the pupil's "self"), his/her motivation, emotions, learning style, gender and ethnic and social origins. The last part presents an original typology of people talented for mathematics (Usiskin, 2000). The study shows that the psychological view of the education of talented pupils highlights interesting connections and may be inspirative for mathematics teachers.

Úvod

Čas od času se u nás vrací diskuse o tom, jak pečovat o nadané a talentované jedince. Za minulého režimu bylo období, kdy se bojovalo s elitářskými tendencemi v našem školství, pak zase přišlo období, kdy naopak bylo třeba vyhledávat

[1] Studie vznikla s podporou Grantové agentury ČR, výzkumný projekt č. 406/02/0829.

[2] *Univerzita Karlova v Praze, Lékařská fakulta v Hradci Králové, Ústav sociálního lékařství, mares@lfhk.cuni.cz*

talenty, pečovat o ně a účastnit se domácích a mezinárodních soutěží, neboť péče o talenty byla jednou z „výkladních skříní“ socialismu.

Po roce 1989 vývoj pokračoval spíše spontánně a prosadila se výrazná vnější diferenciace: vznikala víceletá gymnázia, která si kladla za cíl pečovat o vybranou část populace dětí, vznikaly i soukromé střední školy, které lákaly děti na specifické vzdělávací programy. Kromě toho se objevily alternativní školy, které proklamovaly větší volnost žáků, pomalejší postup při učení a spíše varovaly před rychlou specializací.

V Československu a později v České republice bylo navrženo a částečně ověřeno několik projektů inovace základního vzdělávání (Obecná škola, Občanská škola, projekt Idea, Základní škola, Zdravá škola atp.). Souběžně s přípravou Bílé knihy o koncepci českého školství se rozproudila vášnivá diskuse mezi rodičovskou veřejností, mezi novináři i mezi politiky (méně už mezi odborníky) o výhodách a rizicích vnější diferenciace žáků. V pozadí diskusí o zachování či zrušení zvláštních škol, o zachování či zrušení víceletých gymnázií byla vždy určitá představa diskutujících o tom, jak by se měli vzdělávat ti „schopnější“ a ti „méně schopní“.

Jakmile se začneme hlouběji zabývat nadáním a talentem u dětí, zjistíme, že jde o relativně širokou oblast. Setkáváme se s dětmi projevujícími nadání na sportovní discipliny, nebo na umělecké discipliny, či na humanitní obory anebo na obory přírodovědné. Existují i děti s nadáním pro několik oborů najednou.

Většina laiků si představuje, že nadání dítěte je nutně spojeno s vysokou inteligencí dítěte samotného, jakož i s vysokou inteligencí, vyšším vzděláním i sociálním postavením jeho rodičů. Odborné studie ukazují, že tyto předpoklady nejsou vždycky nutné (anebo postačující) pro výskyt skutečného nadání u dětí. Výzkumy např. identifikují specifické nadání také u dětí mentálně postižených i u dětí z málo podnětného sociálního prostředí.

Centrem našeho zájmu jsou děti talentované na matematiku. Počítačová rešerše v zahraničních bibliografických databázích identifikovala za posledních 10 let celkem 233 prací, které se zabývaly dětmi talentovanými na matematiku. Za delší časové období bychom dospěly k řádově tisíců prací na toto téma. Je zřejmé, že problematika nadání a talentu přitahuje laickou veřejnost, učitele různých typů škol i profesionální matematiky.

Cíle této **přehledové studie** jsou: 1. zpřesnit výchozí pojmy nadání a talent, 2. poukázat na další, nejen schopnostní determinanty matematického talentu, 3. zpřístupnit pedagogické veřejnosti zajímavou typologii osob talentovaných na matematiku.

Nadání a talent

V chápání obsahu a rozsahu pojmů **nadání** a **talent** se liší názory laiků a odborníků. v průběhu let se objevily tři rozdílné pohledy na nadání a talent. Seřadíme-li je historicky a vzestupně podle rozsahu, jsou jimi:

1. nadprůměrná úroveň schopností jedince; jedná se o jednorozměrné pojetí nadání s akcentem na elitu; jedinou rozlišující charakteristikou je vysoké IQ (hranice se definovávala v intervalu 120 až 145 bodů, obvykle jako 130 bodů)
2. nadprůměrná úroveň několika vlastností regulujících činnost jedince, souhrn vlastností jedince umožňujících mu vykonávat určitou činnost s nadprůměrnou úspěšností; jedná se o vícerozměrné pojetí nadání s akcentem na elitu
3. souhrn fyzických i psychických vlastností *každého* člověka regulující vykonávání jeho činnosti; jedná se tedy o obecné a vícerozměrné pojetí nadání s rozlišováním podprůměrného, průměrného a nadprůměrného nadání (Dočkal, 1999)

Jednorozměrné pojetí nadání je už dnes opuštěno, preferuje se **vícerozměrné pojetí**. Obvykle se rozlišují tři **konstitutivní složky** nadání: podle J.S. Renzulliho jsou to inteligence, tvořivost, motivace; podle V. Dočkala předpokladová složka (fyzické vlastnosti, schopnosti, dovednosti, znalosti), aktivační složka (aktivita jedince, zájmy, postoje, hodnoty), volní složka (vytrvalost, cílevědomost).

Typologie různých druhů nadání se liší od autora k autorovi. V. Dočkal uvádí čtyři velké skupiny, které pak dále diferencuje:

- pohybové nadání (pro různé druhy sportů, pro tanec apod.)
- umělecké nadání (hudební, výtvarné, literární, dramatické apod.)
- intelektové nadání (jazykové, matematické, technické apod.)
- praktické nadání (pro manuální práci, pro práci s lidmi)

Nepanuje úplná shoda ani v tom, jaký je vzájemný vztah mezi pojmy nadání a talent. Řada autorů je chápe jako synonyma, jiní doporučují mezi nimi rozlišovat. Např. L. Ďurič (1999) navrhuje, abychom je rozlišovali a to podle *úrovně aktualizace* činnosti.

Nadání v tomto pojetí označuje potenciality, možnosti jedince pro úspěšné vykovávání určité činnosti, které ještě neměly čas se naplno projevit. Nadaný jedinec, „nositel“ nadání, nebyl ještě „odhalený“ svým okolím; někdy si ani neuvědomuje své nadání, neodhalil ho sám v sobě. Proto je třeba vyvinout dva typy činností: vnější – vyhledávání, odhalování nadaných jedinců, a vnitřní – jedincovo uvědomění si svého nadání, nalezení vlastní identity, ztotožnění se se svým nadáním.

Talent je pak chápán jako realizace nadání, projevení se, uplatnění původně skrytých možností. Musí však jít o *opakované* prokazování pozoruhodných výsledků v určité oblasti lidské činnosti, které zaregistruje jak společnost, tak jedinec sám. V tomto smyslu představuje talent vyšší, rozvinutější úroveň, než nadání.

Z teoretického i praktického hlediska je tento pohled užitečný.

Nejde jen o intelektové schopnosti

V předchozím výkladu jsme zdůraznili, že současné pojetí talentu akcentuje:

- obecnost (každý jedinec může být nadaný v určité oblasti)
- vícerozměrnost (talent nesouvisí jen s intelektovými schopnostmi jedince)
- hierarchičnost (talent má řadu konstitutivních složek, které se dále člení)
- uplatnitelnost (talent musí mít příležitost se projevit, jinak zůstává skrytou potencialitou)
- identifikovatelnost (sociální okolí si povšimne projevů talentu u jedince, "objeví" jeho talent)
- uvědomělost (s talentem se musí jeho nositel ztotožnit, talent se musí stát součástí jeho identity)
- výkonnost (talentovaný jedinec musí opakovaně prokazovat mimořádné výkony v určité oblasti)
- rozvíjenost (talentovaný jedinec je cíleně zdokonalován a zdokonaluje se, neustrne ve svém vývoji)

Odtud plyne, že u žáků talentovaných na matematiku se nemůžeme zajímat pouze o jejich intelektové schopnosti. Není proto divu, že současné výzkumy u nich studují řadu proměnných. Připomeňme alespoň ty nejčastěji zkoumané.

Schopnosti. v souvislosti s žáky talentovanými na matematiku se mluví o jejich intelektových schopnostech a jedna z klíčových proměnných, která se užívá při identifikaci matematických talentů, jsou právě jejich intelektové schopnosti. Méně se už diskutuje o tom, které pojetí intelektových schopností vzít za základ.

Zajímavý přístup zvolila Rogersová (1998) nyní překládaný jako rozmanité inteligence (Gardner, 1999) a zpracovala systém pro pozorování a identifikování talentovaných žáků. Dodejme, že Gardnerova teorie předpokládá existenci nejméně sedmi typů inteligence: hudební, tělesně-pohybové, logicko-matematické, jazykové, prostorové, interpersonální a intrapersonální.

Kromě obecných intelektových schopností se začínají studovat také **speciální schopnosti**. Výzkum cílený na prostorovou představivost talentovaných žáků obecně, nikoli jen na matematiku, naznačil, že s jejich talentem úzce souvisí.

Autoři dokonce navrhují, aby při vyhledávání talentovaných žáků se diagnostika jejich prostorových schopností stala standardní součástí screeningu (Shea et al., 2001).

Nejde však jenom o schopnosti samy, nýbrž také o jejich skutečné **využívání**. Žák může být nadaný pro určitou oblast (např. pro matematiku), ale jeho nadání se nerozvine v talent, protože žák pracuje pod své možnosti. V tomto smyslu jde o *relativně neúspěšné* žáky, tedy žáky, kteří podávají systematicky *nižší* výkony, než by podle svých schopností mohli. V angličtině se nazývají *underachievers* a můžeme se s nimi setkat i při výuce matematiky. Kanadská studie studovala tento jev u dívek a žen nadaných na matematiku (Lupart, Wilgosh, 1998) a hledala možná řešení.

Kromě vědeckých teorií intelektových schopností, krátce teorií inteligence, existují také subjektivní „teorie". Každý člověk má svou vlastní, privátní představu o tom, co je inteligence, zda se dá zlepšovat a pokud ano, tak jakými postupy. Tyto soukromé „teorie" se také nazývají **implicitní teorie inteligence**. Výzkumy C. Dweckové (1999) ukázaly, že existují dvě základní implicitní teorie inteligence: inteligence fixní (v pozadí je předpoklad, že jde o neměnnou entitu – *entity theory*) a inteligence (v pozadí je předpoklad, že jde o ovlivnitelnou entitu, že ji lze zlepšovat, že jde dosáhnout přírůstků – *incremental theory*). Každá z nich vede k jiným cílům, které si jedinec klade, jinému úsilí, jiné motivaci, jinému výkonu i jinému hledání příčin úspěchu či neúspěchu.

Osobnost, zejména „jáství". Žákovo „já" je klíčovým prvkem v tom, abychom porozuměli, proč žák o něco usiluje či neusiluje, proč vynakládá/nevynakládá úsilí, proč dosahuje určitých výkonů, proč já sám sebe teď hodnotí (aktuální já), co sám se sebou chce udělat (možné já až ideální já).

Patří sem jednak žákovo sebehodnocení a dále obecnější sebepojetí. Velmi důležitá je proměnná, kterou postuloval v sociálně-kognitivní teorii učení A. Bandury, proměnná, pro níž se obtížně hledá český ekvivalent: *self-efficacy*. Navrhli jsme výraz „subjektivně vnímaná způsobilost", tedy jedincův pohled na vlastní kompetentnost v určité oblasti lidské činnosti.

Srovnávací výzkum běžných žáků a žáků talentovaných na matematiku na začátku 2. stupně základní školy ukázal zajímavé rozdíly. Talentovaní žáci mají výrazně lepší sebepojetí v matematice; jejich vnímání vlastní kompetence v matematice je přesnější, adekvátnější realitě oproti běžným žáků, nedochází k přeceňování své zdatnosti (Pajares, Graham, 1999).

Ve schématu 1 je znázorněno žákovo sebepojetí a hierarchické vazby k žákovým aktivitám (modifikovaně podle Boekaerts, 1998, s. 17).

Jsou zde znázorněny čtyři hierarchické úrovně. První úroveň – nejvyšší – tvoří žákovo ideální „já". Druhou úroveň představují principy, které řídí žákovu činnost (mít dobré známky, být dobrý v matematice, být cílevědomým, získat respekt a uznání učitelů, dělat radost rodičům, být populární mezi spolužáky). Ukazuje se, že ne všechny principy jsou navzájem kompatibilní a uspět při realizaci jednoho v praxi znamená oželet některé další.

Schéma 1

Třetí úroveň můžeme označit jako programy činnosti (udělat si rychle své povinnosti, používat hloubkový styl učení atd.). Konečně čtvrtá úroveň reprezentuje to, co psychologové nazývají skript či skripty, tedy scénáře pro realizaci konkrétních činností; tyto scénáře mají obvykle svou pevnou strukturu jak v daném případě jednat.

Motivace. Učitelé i rodiče chápou, že jednou věcí jsou žákovy schopnosti a druhou věcí jejich využití, uplatnění. Důležitým faktorem je žákova motivace učit se, snaha něco se svým nadáním udělat, aby se mohlo naplno projevit.

Výzkumná sonda u žáků 3.–4. třídy základní školy (Vlahovic-Stetic et al., 1999) zjistila, že žáci talentovaní na matematiku se od svých spolužáků liší v těchto motivačních faktorech: vyšší úrovni vnitřní motivace (nepotřebují být zvnějšku pobízeni), v případě svého úspěchu méně často připisují úspěch vnějším faktorům nebo pouhému úsilí, v případě neúspěchu méně často připisují neúspěch vnějším faktorům nebo nedostatku svých schopností, nemají obavy z matematiky jako vyučovacího předmětu.

Citované autorky upozorňují na tento závažný vztah mezi nadáním a jeho skutečným uplatněním. Rozlišují tři typy žáků: žáky talentované na matematiku, kteří podávají vynikající výkony (*gifted hight-achieving*), **žáky talentované** na matematiku, kteří **pracují pod své možnosti** (*gifted underachieving*) a konečně žáky netalentované (Vlahovic-Stetic et al., 1999). Právě druhá skupina žáků je – podle našeho názoru – poměrně málo prostudovaná.

Talentovaní žáci prožívají a dávají najevo větší radost z učení nějakého předmětu, než běžní žáci. To je konstatování z řady výzkumů, např. Changa (1989). Neříká to však nic o tom, co bylo na počátku. Lze uvažovat nejméně o dvou interpretacích:

- Protože je učení bavilo, zabývali se určitým předmětem či skupinou předmětů častěji hlouběji než jejich spolužáci. Tím se naučili více a začali v dané oblasti vynikat.
- Protože byli talentovaní, šlo jim učení snadněji než ostatním spolužákům. Rychle dosáhli vhledu do dané problematiky, byli úspěšní, byli chválení a daný předmět či skupina předmětů je začala bavit.

Emoce. Obecně se mluví o úzkosti jako stavu, který občas zažívá každý člověk. Podle některých autorů má dvě složky. Ta kognitivní se označuje jako obavy (*worry*), zatímco ta afektivní jako emoční či fyziologické rozrušení. Právě obavy sycené kognitivními faktory podle řady výzkumů zhoršují žákovské výkony i v matematice.

Specifickou proměnnou může být přítomnost nebo naopak absence tzv. strachu z matematiky. Jde o strach, který vzniká u dětí vnějším působením, zpravidla ze strany některých učitelů a/nebo rodičů. Vyskytuje se u dětí prospěchově průměrných a podprůměrných, nikoli u dětí talentovaných na matematiku.

Styl učení. Typický způsob, jímž se žák učí v řadě různých situací (tedy styl učení), může ovlivňovat rozsah, v němž se uplatní jeho talent, může ovlivňovat i snahy učitelů rozvíjet jeho talent. Výzkumů na toto téma není mnoho. V našem výzkumu pomocí dotazníku LSI Dunnové, Dunna a Price, jsme jistili, že studenti gymnázia talentovaní na matematiku, se od svých vrstevníků statisticky významně liší tím, že se dokáží lépe koncentrovat na učení, nepotřebují kolem sebe tolik ticha. Jsou zvyklí učit se spíše u pracovního stolu, méně jim vyhovuje povalování se v křeslech, na gaučích apod. Preferují spíše učení s kamarády, neboť složitější úlohy se patrně lépe prodebatovávají a řeší ve skupině. Výrazněji než běžné gymnazisty je ovlivňuje učitel (zřejmě matematiky), který je pro ně autoritou, motivuje je k učení, teší se z jejich úspěchů (Mareš, Skalská,1994).

Výzkumná sonda u žáků 6. a 7. tříd amerických základních škol (Heath, 2001) nezjistila pomocí stejného dotazníku nějaké významné rozdíly mezi talentovanými a netalentovanými žáky v jejich stylu učení.

Vliv pohlaví. Obvykle se konstatuje, že mezi žáky talentovanými na matematiku je méně dívek. Podívejme se proto na některé cílené výzkumy.

Výzkum u žáků na přelomu 1. a 2. stupně základní školy (Olszewski-Kubilius, Turner, 2002) konstatoval, že mezi žáky, kteří dosahovali vynikajících výsledků v matematických testech, byl poměr 2:1 ve prospěch chlapců. Rozdíly byly statisticky významné v 5. a 6. třídě. Vynikající žáci a žákyně preferovali matematiku před ostatními předměty. Zajímavé pro další úvahy je konstatování autorek, že v jejich vzorku většina všech zkoumaných dívek (ne jen těch talentovaných) vidí své přednosti spíše ve verbálních schopnostech a má příznivější postoje k vyučovacím předmětům, které dávají prostor uplatnění těchto schopností. Většina všech chlapců vidí naopak své silnější stránky v matematice a přírodovědných předmětech. Výzkum naznačuje, že v probouzení zájmu o matematiku a rozvíjení nadání dětí mohou být ve hře dva specifické faktory: a) žákovo subjektivní vnímání a hodnocení svých silných i slabých stránek, b) z toho vyplývající žákovy postoje k určité skupině vyučovacích předmětů.

Rozdíly mezi chlapci a dívkami se zabývaly také dvě čínské studie (Dai, 2001). Konstatovaly, že průměrné dívky mají vyšší verbální sebepojetí, zatímco průměrní chlapci vyšší sebepojetí v matematice. Dívky vysoce talentované na matematiku mají shodné matematické sebepojetí jako vysoce talentovaní chlapci, ale mají vyšší sebepojetí, pokud jde o celkové školní sebepojetí. Jsou zřejmě orientovány šířeji, na více předmětů, zatímco vysoce talentovaní chlapci se soustřeďují především na matematiku.

Vliv etnického či sociálního původu. Řada studií konstatuje, že mezi žáky talentovanými na matematiku se vyskytuje relativně málo těch, kteří jsou jiného etnického původu, než majorita v dané zemi, a dále žáci, kteří pocházejí z chudších rodin, jsou tedy sociálně a ekonomicky znevýhodněni.

Retrospektivní studie (Worrell et al., 2001) zkoumala, proč nadaní žáci pocházející z „menšinových“ rodin nevytrvají. I když je jejich talent rozpoznán, i když jsou zapojeni do prázdninových soustředění rozvíjejících jejich talent, nakonec přestanou na tyto akce docházet. Šlo o žáky ve věku 12-17 let a výzkum *neprokázal*, že by přerušení účasti v rozvíjejícím programu statisticky významně souviselo s celkovým prospěchem těchto žáků, výkony v matematických testech, výslednou známkou na konci letní školy pro talentované matematiky, nebo sociálně ekonomickým statusem rodiny. Autoři uzavírají tím, co se dalo čekat: důvody budou spíše v sociálně-psychologických proměnných. Rozvíjení talentu je pouze jednou stránkou života takového jedince a ten by potřeboval sociální oporu v řadě dalších stránek, v celém svém sociálním životě. Takovýto jedinec jde vlastně proti zvykům své komunity, začíná se výrazně „odlišovat“, může se cítit „osamělý“, což pro něj vytváří zátěžové situace. Účast v programu ho směřuje k další akademické kariéře, což může být v rozporu s představami a možnostmi jeho rodičů. Také stávající podoba letních škol nemusí být pro tyto jedince optimální, neboť znamená dlouhodobé vytržení z důvěrně známého prostředí, omezení možnosti přivydělat si. Někteří autoři proto navrhují, aby se těžiště přípravy přesunulo do menších škol, které vytvářejí pocit, že jedinec skutečně někam patří, aby se kursy organizovaly každý týden po kratší dobu než formou dlouhodobých soustředění.

Typologie osob talentovaných na matematiku

Existuje několik pokusů definovat typy osob talentovaných na matematiku. V souladu se současnými psychologickými názory na talentované jednotlivce se můžeme setkat s chápáním talentu jako charakteristiky, která je odstupňovaná, nemá podobu proměnné „vše nebo nic“. Jedním z pokusů o zajímavou typologii je práce Usiskina (2000, s. 153–159). Podrobnosti přináší tabulka níže.

Tato typologie postihuje širokou škálu možností od absence talentu na matematiku až po geniální matematiky, jejichž přínos přesahuje rámec věků a stal se trvalým vkladem do lidského poznání. Pro školské účely jsou nejužitečnější úrovně 0 až 4. Je otázkou, zda pro praxi by nebylo účelné např. 1. až 3. úroveň členit ještě jemněji.

označení úrovně	**prevalence v populaci**	**charakteristika jedince**	**charakteristika výuky**	**uplatnění v životě**	**dosažení dané úrovně**
0. úroveň – nelze mluvit o talentu	běžná u velmi malých dětí; u dospělých závisí na vzdělání, sociokulturních a ekonomických faktorech	nemá hlubší matematické znalosti, pochopil základy aritmetiky, počítá, ale s obtížemi	chybí systematická výuka, jedinec se učí pokusem a omylem, životními zkušenostmi	u malých dětí přechodné stádium; u části dospělých obtíže s uplatněním	u malých dětí je to výchozí stádium pro možný přechod k vyšším úrovním
1. úroveň – základní úroveň talentu	dosahuje ji většina dospělých osob, ale též většina žáků po 6. třídě	absolvoval stovky vyučovacích hodin matematiky, ovládá aritmetické operace	jde o výuku odpovídající svým kurikulem a vyučovacími metodami přibližně 1. stupni naší základní školy	znalosti a dovednosti tvoří jen předpoklad dalšího vzdělávání; v běžném životě by jedinec byl pokládán za člověka, který nemá ukončené ani základní vzdělání a měl by obtíže se sháněním zaměstnání	závisí mj. na historickém období (před 500 lety se pokládaly tyto znalosti za důkaz vysokých schopností, ne-li mimořádného talentu) a vyspělosti dané země; ve vyspělých zemích se dosahuje školní docházkou a životními zkušenostmi

2. úroveň – standardní žák	dosahují ji žáci po absolvování 2. a 3. stupně školy (v USA asi 15 %, v Japonsku přes 50 % populace)	absolvoval tisíce hodin matematiky, ovládá aritmetiku, základy algebry a geometrie; snaží se matematice porozumět, je pilný, píše domácí úkoly	jde o výuku odpovídající svým kurikulem a vyučovacími metodami přibližně 2. stupni naší základní školy a některé ze středních škol zakončených maturitou	ti lepší přecházejí na vysokou školu a mohou se věnovat matematice jako oboru anebo se stávají učiteli matematiky pro ZŠ či SŠ	obvykle jde o žáky, kteří mají předpoklady úspěšně složit přijímací zkoušku na střední školu i ji úspěšně absolvovat
3. úroveň – vynikající student	dosahuje ji asi 1– 2 % z příslušného populačního ročníku (v USA asi 40 000 – 80 000 studentů ročně)	baví je matematika a fyzika, prokazuje vhled do problémů, přichází s nestandardními řešeními; nestačí mu úlohy, které se probírají ve škole, shání si odborné publikace, zajímá se o programování	nestačí jim běžná výuka matematiky; snaží se dostat do matematických tříd; věnují se matematice i ve volném čase, vzdělávají se v rámci matematických kroužků, klubů	volí si matematiku jako hlavní obor vysokoškolského studia a někteří pokračují v doktorském studiu matematiky	dosažení této úrovně je dáno jednak jejich talentem, jednak mimoškolními aktivitami; sami se snaží prohloubit si znalosti a dovednosti z matematiky

4. úroveň – mimořádně talentovaný student	rekrutují se z nejlepších studentů na středních školách, tvoří 0,5–1 % z těch, kteří dosáhli úrovně 3 (v USA asi 200–400 studentů ročně)	milují matematiku a zabývají se jí i ve svém volném čase; kupují si odborné publikace a časopisy; mívají i jiné zájmy, ale prioritou je matematika; rádi debatují s matematiky	ačkoliv to vypadá, že se narodili s nadáním pro matematiku, jejich talent je třeba systematicky rozvíjet; školy specializované na výuku matematiky, letní školy a letní matematické tábory	jde o studenty, kteří se cítí být matematiky; studují matematiku na vysoké škole jako hlavní obor, většina obvykle pokračuje v doktorském studiu matematiky	úroveň je dána jejich talentem, ale především systematickým školním i rozsáhlým mimoškolním vzděláváním v matematice
5. úroveň – produktivní matematik	desítky až stovky osob ročně rekrutující se z nejlepších absolventů vysokoškolského studia matematiky	jde o studenty, kteří po absolvování vysoké školy pokračují v doktorském studiu matematiky	doktorské studium pod vedením výborných matematiků, účast na tvořivé práci, v „dílně“ školitele či výzkumného týmu	doktorandi publikují své první kratší články, učí se výzkumné práci; časem se z nich stanou produktivní matematici	úrovně dosahují díky výraznému talentu, ale i hlubokou postgraduální přípravou; vyhraňuje se u nich zájem o konkrétní oblast matematiky; snaží se konzultovat specialisty a pracovat u zkušených matematiků

6. úroveň – vynikající, špičkový matematik	jedinci rekrutující se z absolventů nejprestižnějších univerzit	jde o špičky ve své věkové skupině v dané zemi; posouvají poznání v daném oboru, přicházejí s originálními řešeními	na základní škole nebývají úplně rozhodnuti se věnovat právě matematice, ale baví je přicházet věcem na kloub, řešit problémy; mají širší zájmy; pro matematiku se rozhodují až na střední škole; jakmile se rozhodnou, věnují se oboru naplno	uplatňují se jako vůdčí osobnosti svého oboru	této úrovně dosahují nejen díky mimořádnému talentu, ale především mimořádným nasazením během vysokoškolského a postgraduálního studia; žijí vědou, objevováním
7. úroveň – geniální matematik	několik jedinců v celé historii lidstva, uznávaní velikáni	Eukleides, Archimedes, Pascal, Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange, Gauss, Rieman atd.	–	–	–

Závěr

Jak pečovat o žáky talentované na matematiku? Známe dosavadní snahy, ale bylo by vhodné si položit obecnější otázky. Inspirací mohou být provokativní dotazy, které ohledně dosavadní podoby péče o talentované žáky naléhavě kladl J. A. Plucker (1998). Svůj článek nazval *Je vzdělávání talentovaných žáků ještě životaschopné?* Jeho odpověď na situaci v USA zní podmíněně: ano, ale. . . Upozorňuje, že dosavadní programy se omezují na ty děti a dospívající, kteří se vyznačují mimořádným talentem, ale ten je poměřován primárně školskými kritérii. Mezi účastníky programů pro talentované žáky je jen minimum dětí z etnických aj. minorit, minimum dětí z chudých rodin. Také podoba samotné výuky pro talentované žáky není podle autora v pořádku: dominují tradiční vyučovací metody založené na výkladu a diskusi. Samo rozvíjení talentů je podle autora v USA chápáno příliš zúženě a staví na mimoškolních aktivitách (identifikace talentů, samostudium, víkendová soustředění, letní školy apod.).

J. A. Plucker nezůstává jen u kritiky a navrhuje možná řešení. Předkládá sedm doporučení jak dál:

1. stavět výzvy před každého žáka a dávat šanci všem žákům
2. rozšířit paletu vyučovacích metod, diagnostických a examinačních postupů
3. snažit se o flexibilitu v administrativních i pedagogických otázkách péče o talenty
4. zaměřovat tvořivost žáků na závažné problémy ze života
5. hodnotit i známkovat žáky realisticky, tedy tak, aby hodnocení motivovalo žáky k rozvíjení schopností
6. nepřehlížet specifické potřeby velmi talentovaných žáků
7. snažit se udržet na škole ty učitele, kteří chtějí a umějí pracovat s talentovanými žáky (modifikovaně podle Pluckera, 1998)

Zdá se, že podobný směr uvažování může být inspirativní i pro naše české podmínky. V každém případě jde o „běh na dlouhou trať“, který má, použijeme-li atletické metafory, spíše charakter „překážkového běhu“. V něm ovšem překážky nejsou pevně dány a vyskytují se v obtížně předvídatelných intervalech a v měnící se podobě.

Literatura

[1] Boekaerts, M., Boosting Students' Capacity to Promote Their Own Learning: A Goal Theory Perspective. *Research Dialogue in Learning and Instruction*, 1, 1998, 1, s. 13–22, ISSN 1461-8222.

[2] Dai, D. Y., A Comparison of Gender Differences in Academic Self-Concept and Motivation Between High-Ability and Average Chinese Adolescents. *Journal of Secondary Gifted Education*, 13, 2001, 1, s. 22–32, ISSN 1077-4610.

[3] Dočkal, Vl., Nadanie. In: Ďurič, L., Bratská, M. et al., *Pedagogická psychológia. Terminologický a výkladový slovník.* SPN, Bratislava 1999, s. 190–193, ISBN 80-08-02498-4.

[4] Dweck, C. S., *Self-Theories: Their Role in Motivation, Personality, and Development.* Psychology Press, Philadelphia 1999, s. 195, ISBN 0-86377-570-5.

[5] Ďurič, L., Nadanie a talent. In: Ďurič, L., Bratská, M. et al., *Pedagogická psychológia. Terminologický a výkladový slovník.* SPN, Bratislava 1999, s. 193–194, ISBN 80-08-02498-4.

[6] Gardner, H., *Dimenze myšlení. Teorie rozmanitých inteligencí.* Portál, Praha 1999, ISBN 80-7178-279-3.

[7] Heath, W. J., Learning Style Differences Between Gifted and Nongifted Sixth and Seventh Grade Students on Texas Assessment of Academic Skills Test. *Dissertation Abstracts International*, 61 (7-A), 2001, s. 2591, ISSN 9500-1095.

[8] Chang, A. S., Do Students' Motives in Learning a Subject Affect Their Choice of Leartning Strategies? Referát přednesený na *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education.* Adelaide, December 1989.

[9] Lupart, J., Wilgosh, L., Undoing Underachievement and Promoting Societal Advancement of Women and Girls. *Gifted Educational International*, 12, 1998, 3, s. 159–169, ISSN 0261-4294.

[10] Mareš, J., Skalská, H., LSI – dotazník stylů učení pro žáky základních a středních škol. *Psychológia a patopsychológia dieťaťa*, 29, 1994, č.3, s. 248–264, ISSN 0555-5574.

[11] Olszewski-Kubilius, P., Turber, D., Gender Differences Among Elementary School-Aged Gifted Students in Achievement, Perceptions of Ability, and Subject Preference. *Journal of the Education of the Gifted*, 25, 2002, 3, s. 233–268, ISSN 0162-3532.

[12] Pajares, F., Graham, L., Self-Efficacy, Motivation Construct, and Mathematics Performance of Entering Middle School Students. *Contemporary Educational Psychology*, 24, 1999, 2, s. 124–139, ISSN 0361-476X.

[13] Rogers, J. A., Refocusing the Lens: Using Observation To Assess and Identify Gifted Learners. *Gifted Education International*, 12, 1998, 3, s. 129–144, ISSN 0261-4294.

[14] Shea, D. L., Lubinski, D., Benbow, C. P., Importance of Assessing Spatial Ability in Intellectually Talented Young Adolescent. A 20-year Longitudinal Study. *Journal of Educational Psychology*. 93, 2001, 3, s. 604–614, ISSN 0022-0663.

[15] Usiskin, Z., The Development Into the Matematically Talented. *Journal of Secondary Gifted Education*, 11, 2000, 3, s. 152–162, ISSN 1077-4610.

[16] Vlahovic-Stetic, V., Vidovic, V. V., Arambasic, L., Motivational Characteristics in Mathematical Achievement: A Study of Gifted High-Achieving, Gifted Underachieving and Non-Gifted Pupils. *High Abilities Studies*, 10, 1999, 1, s. 37–49.

[17] Worrell, F. C., Szarko, J. E., Gabelko, N. H., Multi-Year Persistence of Nontraditional Students in an Academic Talent Development Program. *Journal of Secondary Gifted Education*, 12, 2001, 2, s. 80–89, ISSN 1077-4610.

Krátké příspěvky

Jak jsem kdysi dávno učil v matematických třídách

Emil Calda[1]

Abstrakt: Příspěvek s nadhledem pouze mírným přibližuje atmosféru na středních školách v šedesátých letech a popisuje některé problémy učitele matematiky vyučujícího v matematických třídách v době jejich vzniku.

Abstract: The contribution sketches the atmoshpere at the secondary schools in the sixtieth and describes some problems of a mathematics teacher teaching in mathematical classes at the time of their origin.

Vzpomínám na to rád – bylo mi o čtyřicet let méně a stříbrný vítr jsem slýchával skoro denně. Ne že bych jeho závany dnes ještě alespoň občas nepocítil, ale už to není tak časté a intenzivní jako dříve. Nepochybuji o tom, že s tímto váním máte sami své zkušenosti – jinak byste na konferenci o matematických talentech nejspíše neseděli – takže nemusím vysvětlovat, že se tím myslí jakási radost a mírné okouzlení z toho, že učíte matematiku a že vás to baví.

V době, kdy jsem učil na gymnáziu na Vinohradech (pozdější gymnázium W. Piecka), stříbrný vítr se na školách příliš nevyskytoval, neboť se dávalo přednost tomu, aby učitel hořel. „Učitel musí hořet!“ byl oblíbený bonmot jedné kolegyně, která ho ve funkci zástupkyně ředitele často používala k povzbuzení členů učitelského sboru, kteří podle jejího názoru pláli nedostatečně. Když jsem si časem založil KUPEDAMIS, tj. Kufřík pedagogického mistra, nezapomněl jsem – v reakci na tento slogan – do něj vložit i pevný podpalovač PEPO, který měl sloužit k uvedení pedagoga (různého ode mne) do žádoucího stavu. v rámci tehdejší módy vítání státníků spřátelených zemí prostřednictvím žáků všech typů škol bylo součástí kufříku i mávátko a pro případ, že by šlo o státníka nespřáteleného, měl jsem v něm i atrapu ručního granátu. Možná že vám to připadá dětinské, ale jak jinak si měl tehdy člověk zachovat aspoň trochu zdravého rozumu?

Taky si vzpomínám, jak mě v pohospitačním pohovoru přesvědčovala jiná kolegyně (zástupkyně ředitelky), že bych neměl užívat slovo „nekonečno“ a místo „limita pro n jdoucí do nekonečna“ že bych měl říkat „limita pro n rostoucí nade

[1]*MFF UK, Praha, ecalda@volny.cz, calda@karlin.mff.cuni.cz*

všechny meze“. Nekonečno by prý mohlo vzbuzovat dojem čehosi nepoznatelného, nějakých tajemných končin, kde by – nedej bože – mohl sídlit Bůh; že by mohl sídlit i nade všemi mezemi, to ji jaksi nenapadlo.

Smyslem dosud uvedeného bylo přiblížit mladším kolegům školní atmosféru tehdejší doby, ale zdá se mi, že bych se měl spíše věnovat vyučování matematice v matematických třídách.

První pokus dát matematickým talentům možnost hlouběji se seznámit se středoškolskou matematikou spadá – mám dojem – do roku 1964, kdy byly na výše zmíněném gymnáziu v Praze 2 – tehdy patrně jako jediném v republice – zřízeny „Speciální třídy pro žáky zvláště nadané v matematice a fyzice“. Výuce matematiky v nich bylo věnováno pět, možná šest hodin týdně; zpočátku nebyly žádné speciální osnovy a očekávalo se, že vyučující podle potřeby rozšíří a prohloubí některá témata podle vlastního uvážení. Také se očekávalo, že tito studenti budou v hojné míře řešit úlohy matematické i fyzikální olympiády a že v krajském i celostátním kole zaujmou přední místa. Mám dojem, že tato očekávání byla naplněna - stačí si prohlédnout výsledky tehdejších ročníků MO i FO.

Protože pro studenty těchto tříd nebyly žádné učebnice, o nějakých sbírkách příkladů nemluvě, strávil jsem spoustu času hledáním úloh, jejichž obtížnost měla být asi tak uprostřed mezi úlohami olympijskými a tradičními úlohami středoškolskými. Dokonce jsem začal odebírat i sovětskou Matěmatiku v škole, kde bylo úlohám tohoto typu věnováno několik stran a kde se občas našel i zajímavý článek, který nepojednával o nějaké slavné události dějinného významu a nerozebíral myšlenky N. Krupské o výuce matematiky. Některé z těchto příkladů používám dodnes, a to v rámci semináře Metody řešení matematických úloh. Pro zajímavost uvedu alespoň tři.

1. Dokažte, že šachovnici 7x7, ze které je odstraněno jedno ze čtyř rohových políček, nelze pokrýt dvaceti čtyřmi obdélníčky 2x1 tak, aby na této šachovnici jich bylo dvanáct ve vodorovné a dvanáct ve svislé poloze.
2. Ve čtverci $ABCD$, jehož délku strany neznáme, je dán bod P tak, že jeho vzdálenosti od vrcholů A, B a D jsou po řadě 2, 3 a 1. Určete velikost úhlu APD. (Že takový čtverec vůbec existuje není vůbec zřejmé, ale vyřešením této úlohy se zjistí, že je právě jeden.)
3. Ve čtverci $ABCD$ jsou dány body K, L tak, že bod K leží na straně BC, bod L na straně CD a úhel LAK je $45°$; označme M a N průsečíky úhlopříčky BD s úsečkami AL a AK. Dokažte, že body N, K, C, L, M leží na jedné kružnici.

Snad bych ještě mohl uvést, že díky svému středoškolskému působení jsem odhalil a formuloval celou řadu poznatků, které byly do té doby pociťovány pouze intuitivně. Jeden z nich zdůrazňuje význam zdravého rozumu při řešení příkladů:

Zdravý rozum je vnitřní hlas, který vám při řešení obtížné matematické úlohy neustále naznačuje, že už je nejvyšší čas toho nechat.

Já se touto poučkou často řídím i tehdy, když – jako například nyní – žádnou úlohu neřeším.

Literatura

[1] Calda, E., K vyučování matematice na střední škole. *Pokroky MFA* 1989, roč. 34, č. 3, s. 178–180.

[2] Calda, E., Zkušenosti z vyučování v matematicko-fyzikální třídě s vybranými žáky. *Fyzika ve škole*, roč. 5, č. 5.

[3] Calda, E., O prospěšnosti a smyslu matematického vzdělávání. *MFI* 1999, roč. 8, č. 7, s. 392–395, ISSN 1210-1761.

[4] Calda, E., Stručný přehled nejdůležitějších pedagogických zásad. *Učitel MFI* 1992, č. 6, s. 43–49, ISSN 1210-9037.

[5] Calda, E., Stručný přehled termínů matematických, pedagogických a některých dalších. *Učitel matematiky* 1997, roč. 6., č. 1 (25), s. 60–64, ISSN 1210-9037.

[6] Calda, E., Základy patamatematické didaktiky. *Rozhledy MF* 2000, roč. 77, č. 4, obálka, ISSN 0035-9343.

[7] Calda, E., *Úvod do obecné teorie prostoru.* Karolinum, Praha 2003. ISBN 80-246-0617-8.

Matematické modely skutečnosti – nerovnice

Jan Fiala[1]

Abstrakt: Matematické modelování je náročnou metodou práce v matematice, která je vhodná především pro matematické talenty. Nerovnice je jedním z teoretických matematických modelů skutečnosti, obecným matematickým popisem reálné problémové situace. Zde uvedené matematické modely jsou několika konkretizacemi nerovnice, která vyjadřuje výhodnost čerpání benzínu u různých čerpacích stanic za různou cenu.

[1] *Katedra matematiky PdF UP v Olomouci, fialab5@pdfnw.upol.cz*

Abstract: Mathematical modelling is a demanding method of work in mathematics, suitable mostly for talented students. Inequalities are one of the theoretical mathematical models of reality, a mathematical description of a real problem situation. Some mathematical modeals are given which are concretizations of the inequality which expresses advantages of filling a tank with petrol at different filling stations for different prices.

Tzv. matematické modelování[2] představuje jeden z nejobecnějších způsobů zobrazení vnějšího světa, který nám umožňuje vědecké zkoumání v něm existujících objektivních zákonitostí a jevů. Matematické modelování považujeme v nejobecnější rovině za řízený dynamický experimentální informační proces poznávání a popisu reality prostředky matematiky, který zkoumanému originálu jednoznačně přiřazuje podle určitých kritérií tzv. matematický model. Aby žáci mohli úspěšně tvořit modely teorií, je důležité, aby porozuměli podstatě tvorby modelů skutečnosti. V následujícím textu se pokusíme o formální zápis procesu matematického modelování při řešení problémové situace. Zadáme tuto úlohu:

Zjistěte, zda se při různých cenách pohonných hmot (dále jen PH) vyplatí dojet z místa bydliště (místo A) pro PH k jiné čerpací stanici (místo B), či je levnější načerpat v místě bydliště.

Sestavení mat. modelu, popř. podmodelů, dílčích podsystémů

1. Identifikace problému: Úloha se opírá o skutečnost, že řidič se snaží při čerpání PH ušetřit.
2. Úvodní charakteristika modelové úlohy: Čerpací stanice prodávají PH za různou cenu.[3] Je zřejmé, že cesta do B zvyšuje náklady. „Jádro“ problému tkví v nerovnosti nákladů na pořízení PH v A a B.
3. Originál (prototyp): Např. náklady na koupi PH v A byly 500 Kč, v B 400 Kč, jízda do B a zpět stála 50 Kč. Jízda do B se vyplatila.
4. Charakteristika vstupních dat – deklarace proměnných, parametrů: c_1 (Kč), c_2 (Kč) . . . . . . cena za 1 l PH v místě A, v B; s (km) . . . vzdálenost z A do B; V (l/km) . . . spotřeba vozidla; t (l) . . . množství natankované PH v A, v B; N_1 (Kč) . . . náklady na jízdu vozidla z A do B; N_2 (Kč) . . . náklady na jízdu vozidla z B zpět do A; N_3 (Kč) . . . náklady na pořízení množství t v A; N_4 (Kč) . . . náklady na pořízení množství t v B.

[2] Zavedení pojmu matematického modelování a popis jeho fází není předmětem tohoto příspěvku.

[3] Lépe vyjádříme matematickou řečí: Existují alespoň dvě čerpací stanice, které nabízí PH za různou cenu. Bez tohoto předpokladu nemá smysl úlohu řešit, stejně tak v případě, že cena PH bude u ostatních čerpacích stanic vždy vyšší než v místě A.

5. Specifikace problémové úlohy: Protože úloha vykazuje mnoho parametrů, je potřebné ji specifikovat. Kolik musí řidič načerpat PH v B, aby se mu jízda vyplatila? Hodnoty c_1, c_2, s, V, N_1 , N_2 , N_3 , N_4 jsou konstanty. Proměnnou se stalo množství t načerpaných PH. Hledáme jeho konkrétní hodnotu.
6. Tvorba hypotéz: Pro řidiče bude jízda do B výhodná, jestliže náklady na cestu z A do B a zpět s náklady na pořízení PH v B budou menší než náklady na pořízení PH v A.
7. Volba vhodných metod modelování: Experimentálně sestavujeme konkrétní modely, které popisují danou situaci. Zde je výhodné využít tabulky, resp. tabulkového procesoru.
8. Hledání obecné matematické struktury (teoretického modelu): Zvolíme nerovnici, která nejlépe matematicky vystihuje uvedenou reálnou situaci.
9. Sestavení teoretického modelu: Nerovnici užijeme v této podobě:[4]

$$t \cdot c_2 + s \cdot V \cdot c_1 + s \cdot V \cdot c_2 < t \cdot c_1 \tag{1}$$

Z nerovnice pro t plyne:

$$\frac{s \cdot V \cdot (c_1 + c_2)}{c_1 - c_2} < t \tag{2}$$

Levá strana nerovnice obsahuje jen konstanty. Jízda se vyplatí, bude-li množství načerpaných PH větší než podíl nákladů vynaložených na cestu z A do B a zpět a rozdílu cen PH v A a B. Uvedená nerovnost nemá smysl v případě, že ceny PH u čerpacích stanic v místě A a B jsou stejné.

Analýza matematického modelu

1. Volba metodiky řešení: Pro výpočet hodnoty na levé straně nerovnice (2) použijeme tabulkový kalkulátor MS Excel. Řešení matematického modelu – užití matematických dovedností: Žák snadno sestaví tabulku a pro pevně zvolené konstanty vypočte, zda bude jízda do B výhodná ($s = 8$ km, $V = 0,06$ l/km, $c_1 = 24,90$ Kč/l, $c_2 = 23,60$ Kč/l).

   Model představující ztrátu při čerpání PH:

[4] Na rozdíl od autorů příkladu v ([1];165) předpokládáme, že jede-li vozidlo z místa B do A, spotřebovává PH načerpané v místě B. Zřejmá je konstantní spotřeba PH.

vzdálenost k místu B: s (km)	8	náklady na jízdu do B: $N_1 = sVc_1$
spotřeba PH: V (l/km)	0,06	11,95 Kč
cena PH v místě A: c_1 (Kč)	24,9	náklady na jízdu z B do A: $N_2 = sVc_2$
cena PH v místě B: c_2 (Kč)	23,6	11,33 Kč
množství PH čerpaných v místě A nebo B: t (l)	2,5	náklady na pořízení PH v A: $N_3 = c_1 t$
		62,25 Kč
		náklady na pořízení PH v B: $N_4 = c_2 t$
		59,00 Kč
součet nákladů vynaložených na jízdu z A do B a zpět a nákladů potřebných na pořízení PH v místě B: $N_1 + N_2 + N_4$		82,28 Kč
náklady vynaložené na pořízení PH v místě A:		62,25 Kč
zisk $+$; ztráta $-$		$-20,03$ Kč

Model představující zisk při čerpání PH:

vzdálenost k místu B: s (km)	8	náklady na jízdu do B: $N_1 = sVc_1$
spotřeba PH: V (l/km)	0,06	11,95 Kč
cena PH v místě A: c_1 (Kč)	24,9	náklady na jízdu z B do A: $N_2 = sVc_2$
cena PH v místě B: c_2 (Kč)	23,6	11,33 Kč
množství PH čerpaných v místě A nebo B: t (l)	60	náklady na pořízení PH v A: $N_3 = c_1 t$
		1 494,00 Kč
		náklady na pořízení PH v B: $N_4 = c_2 t$
		1 416,00 Kč
součet nákladů vynaložených na jízdu z A do B a zpět a nákladů potřebných na pořízení PH v místě B: $N_1 + N_2 + N_4$		1 439,28 Kč
náklady vynaložené na pořízení PH v místě A:		1 494,00 Kč
zisk $+$; ztráta $-$		54,72 Kč

2. Charakteristika výstupních dat (žádoucí podoba konkrétních modelů): Hledáme pouze takové situace, při kterých se řidiči jízda pro levnější benzín vyplatí. Zde,

přestože je rozdíl cen PH pouze 1,30 Kč, vyplatí se řidiči dojet již pro 17,91 l PH.

3. Verifikace (kvalitativní hodnocení správnosti) modelu: t nabývá zvláštního významu v takové číselné hodnotě, jež popisuje onen „bod výhodnosti“. Nerovnice se změní v rovnost a bude vyjadřovat skutečnost, že čerpá-li řidič právě t l PH, je mu lhostejné, zda načerpá v A, nebo B. Čím více PH řidič načerpá, tím se mu jízda do B více vyplácí a naopak.

   Model představující rovnost nákladů na pořízení PH:

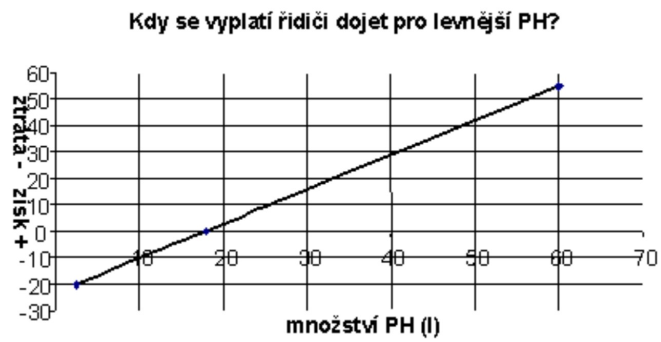
vzdálenost k místu B: s (km)	8	náklady na jízdu do B: $N_1 = sVc_1$
spotřeba PH: V (l/km)	0,06	11,95 Kč
cena PH v místě A: c_1 (Kč)	24,9	náklady na jízdu z B do A: $N_2 = sVc_2$
cena PH v místě B: c_2 (Kč)	23,6	11,33 Kč
množství PH čerpaných v místě A nebo B: t (l)	17,91	náklady na pořízení PH v A: $N_3 = c_1 t$
		445,96 Kč
		náklady na pořízení PH v B: $N_4 = c_2 t$
		422,68 Kč
součet nákladů vynaložených na jízdu z A do B a zpět a nákladů potřebných na pořízení PH v místě B: $N_1 + N_2 + N_4$		445,96 Kč
náklady vynaložené na pořízení PH v místě A:		445,96 Kč
zisk $+$; ztráta $-$		0,00 Kč

4. Určení oboru platnosti nově vzniklého modelu a jeho adekvátnosti: Žáci sestavují konkrétní matematické modely čerpání PH příslušné k teoretickému modelu nerovnice. Obor platnosti je zde určen velikostí nádrže auta.

Ověření sestaveného modelu v realitě

Bez obav můžeme zkonstatovat, že řešení je smysluplné a odpovídá výsledkům řešení úlohy v realitě, což žáci snadno experimentálně ověří. Model tak splní svůj praktický účel. Podstatné je, abychom žákům zdůraznili, že řešení libovolného problému reality užitím metody matematického modelování je pouze přibližné, vykazuje chyby a slouží tedy především k získání vhledu do abstraktní problémové reálné situace.

Sledujme nyní závislost načerpaného množství t PH na finančním zisku či ztrátě při nákupu PH. Uvedený graf je grafem přímé úměrnosti: čím větší množství t PH řidič načerpá, tím se mu cesta do místa B více vyplatí.



Pro přesnost doplňme, že sestrojený teoretický model vykazuje jisté nepřesnosti: v celé úloze se neuvažuje amortizace vozidla, způsob jízdy řidiče.

Je potřeba dořešit např. ještě tyto problémy: Za jakou cenu nakoupil řidič benzín, který zbyl v nádrži vozidla před jízdou do B? Jaké jsou pak přesné náklady na jízdu do B? Při tankování PH v B mohly v nádrži ještě PH zbýt. Jaké jsou přesné náklady na cestu zpět do A? (N_2 nahradíme váženým průměrem nákladů N_1 a N_2. Je-li x zbytkové množství benzínu po příjezdu do B, pak (1) má tvar

$$t \cdot c_2 + s \cdot v \ \cdot c_1 + s\left(\frac{x \cdot v \ \cdot c_1 + t \cdot v \ \cdot c_2}{x+t}\right) < t \cdot c_1.)$$

Zanedbána byla i skutečnost, že při čerpání v A vykoná řidič z místa bydliště jistou jízdu.

Variace parametrů umožňují další modifikace úlohy. Chce-li řidič načerpat plnou nádrž, stává se t konstantou (např. 50 l). Ptejme se např. na vzdálenost, při které se jízda do B vyplatí. Pak (1) má tvar

$$\frac{t(c_1 - c_2)}{V(c_1 + c_2)} > s.$$

Dále se můžeme ptát na cenu c_2 PH v místě B, při které se už vyplatí řidiči dojet pro levnější PH. Výpočtem a srovnáním modelů mohou žáci ověřit tyto zákonitosti: S rostoucí vzdáleností roste i množství načerpaných PH, aby se nákup vyplatil. S rostoucím rozdílem cen PH v A a B bude nehledě ke vzdálenosti obou míst klesat množství potřebného množství PH.

Uvedený příklad matematického modelu skutečnosti je velmi jednoduchý, nenáročný na úroveň potřebných matematických znalostí a při vhodné motivaci je určitě možné ho zařadit již do hodin matematiky vyšších tříd prvního stupně základní školy. Talentovaní žáci v matematice, kteří mají blízko k výpočetní technice, jistě snadno sestaví tabulku, která jim řešení konkrétních modelů usnadní.

Literatura

[1] Hennig, H., Keune, M., Modellbildung und Tabellenkalkulation. *Mathematik in der Schule*, Nr. 3, 38. Jahrgang, Pädagogischer Zeitschriftenverlag, Berlin 2000, s. 160–168.

[2] Vyšín, J., *Štyri kapitoly o problémovom vyučovaní matematiky.* Vyd. 1. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1978.

[3] Šedivý, J., *O modernizaci školské matematiky.* SPN, Praha 1973.

Ukaž, co umíš[1]

Jakub Fischer[2]

Abstrakt: Matematická soutěž pro nadané žáky 5. tříd má v Praze již patnáctiletou tradici a každoročně se jí účastní několik stovek žáků z desítek pražských základních škol. Žáci během 45 minut řeší 10 úloh, nejlepším z nich je nabídnuto studium na pořádající škole ve třídě se zaměřením na matematiku a informatiku. V posledních letech soutěž určená k vyhledávání nejmladších talentovaných žáků trpí odlivem účastníků. Důvodem je jak demografický vývoj, tak i neochota kmenových škol žáky o soutěži informovat z obav o pokles státní dotace v důsledku jejich možného odlivu. V článku je uvedeno zadání úloh 16. ročníku 2003.

Abstract: A mathematical competition for talented pupils from the fifth grades has a fifteen year tradition in Prague and each year several hundred of pupils from dozens of Prague basic schools take part in it. Pupils solve 10 problems during 45 minutes and the best of them are offered an opportunity to study at the organising school in a class with the extended teaching of mathematics and computer science.

[1] Autor příspěvku děkuje PaedDr. Daniele Řebíčkové, emeritní ředitelce ZŠ Uhelný trh Praha, za poskytnutí historických materiálů a dalších cenných podkladů.

[2] *ZŠ Uhelný trh, Praha, fischerj@vse.cz*

The competition has suffered the diminishing number of participants in the past years. The reason is both the demographic development and the reluctance of basic schools to inform pupils about the competition because they fear that they would leave the school and it would lose the financial subsidy from the state. The problems from the 16th round from 2003 are given in the article.

Úvod

Vyhledávání mladých matematických talentů formou soutěže pro nadané žáky začalo v Praze před 15 lety v souvislosti s otevřením první české třídy se zaměřením na matematiku[3] v základní škole na Uhelném trhu v historickém centru české metropole. Pod patronátem tehdejšího Výzkumného ústavu pedagogického, k němuž byla ZŠ Uhelný trh coby tzv. experimentální škola přičleněna, proběhl v březnu roku 1988 první ročník matematické soutěže **Ukaž, co umíš** určené nadaným pražským žákům 4. tříd základních škol (připomeňme, že v té době byly základní školy osmileté a druhý stupeň začínal 5. ročníkem; se znovuzavedením devítiletých základních škol se o rok posunul i ročník žáků, jimž je soutěž určena).

Organizace soutěže

Organizace soutěže prošla během patnácti let určitým vývojem. V prvních letech byla realizována na spolupracujících školách po celé Praze. Učitelé z Uhelného trhu přivezli na školy zadání a za spolupráce místních kolegů žákům soutěžní úlohy zadali. Po odevzdání úloh, na jejichž řešení žáci měli 45 minut čistého času, práce žáků odvezli a soutěž byla vyhodnocena centrálně. V současné době, v důsledku snížení zájmu pražských škol o spolupráci (z důvodu, jenž bude předmětem našeho zájmu v další části textu), se soutěž koná pouze v budově ZŠ Uhelný trh. Úspěšní řešitelé jsou pozváni na slavnostní vyhodnocení, kde získají netradiční diplom ve formě sítě jehlanu. Nejlepším účastníkům je nabídnuto studium na pořádající škole ve třídě se zaměřením na matematiku a informatiku (ve vazbě na přijímací zkoušku z matematiky, obsahující úlohy typově podobné úlohám soutěžním).

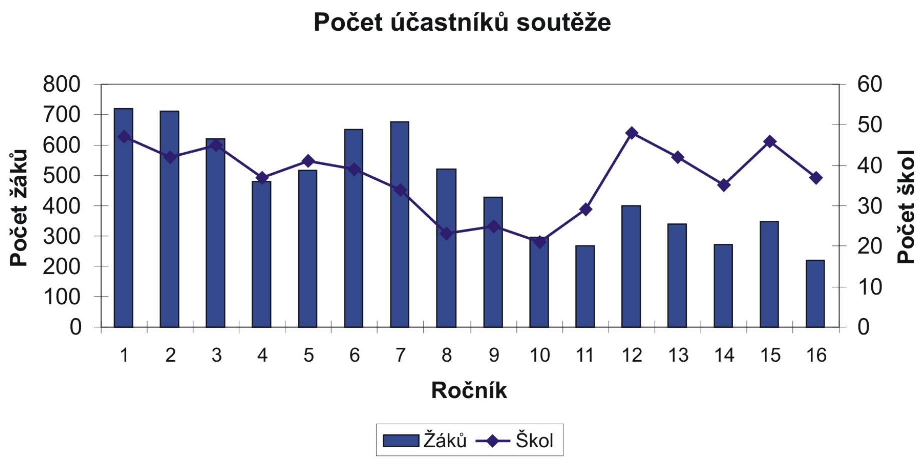
Historický přehled

Přiložený graf zobrazuje počet soutěžících a počet kmenových škol, z nichž soutěžící v jednotlivých letech pocházeli. Historicky nejvyšší účast byla zaznamenána v prvním ročníku - mezi 721 účastníkem byl tehdy i autor tohoto příspěvku (s plným počtem bodů se s pozdějším spolužákem, dnešním absolventem MFF

[3]Ostatní třídy podobného typu byly zaměřené na matematiku a přírodovědné předměty.

UK Tomášem Ostatnickým, dělil o první místo).

Jestliže pokles počtu soutěžících v prvních osmi letech lze vysvětlit demografickým vývojem, pokles v dalších letech je ovlivněn jak dalšími soutěžemi určenými téže cílové skupině, tak bohužel i malým zájmem pražských škol informovat své žáky o soutěži z důvodu obav o odliv talentů z kmenové školy (a tím i o odliv části finančních prostředků v podobě z normativu odvozené státní dotace). Soutěž je proto v dnešní době propagována zejména formou inzerce v regionálním tisku.



Typy úloh

Třičtvrtěhodinová soutěž obsahuje 10 úloh, které žáci řeší bez dalších pomůcek přímo do dvoustránkového zadání. Úlohy se sestavují se snahou o vyváženost – najdeme zde tedy jak úlohy čistě aritmetické (v letošním zadání, jehož plná verze je v závěru příspěvku, má číslo 9), jednodušší (1) i obtížnější slovní úlohy zaměřené jak na počítání s „většími“ čísly (6), tak na drobné „chytáky“ spočívající v potřebě žákovy úvahy o smyslu číselného řešení (5,7). Doplněny jsou úlohou, v níž je vhodné si k řešení nakreslit jednoduché schéma (3), dále úlohou pracující s veličinou času (4) a konečně úlohou logickou (2). Chybět nesmějí úlohy geometrické (8,10). Jednotlivé příklady mají v závislosti na obtížnosti nestejné bodové hodnocení.

Letošní ročník soutěže

Soutěž, jejíž šestnáctý ročník zdárně proběhl před několika týdny, nepochybně prokázala svoji životaschopnost a jako jednu z možností vyhledávání nejmladších matematických talentů ji lze například do větších měst doporučit.

Zadání úloh 16. ročníku (březen 2003)

1. Čokoláda stojí 8 Kč a polovinu ceny čokolády. Kolik Kč stojí dvě čokolády?

2. Dva kamarádi měli jednu bílou a jednu černou kuličku. Dohodli se, že ten, kdo bude mít bílou, bude vždy mluvit pravdu, a ten, kdo bude mít černou, bude vždy lhát. Každý si vzal do kapsy jednu. Alenka se jednoho zeptala, jakou kuličku má. Odpověděl, že bílou. Co odpověděl na stejnou otázku druhý?

   a) bílou b) černou c) nemůžeme rozhodnout

3. Petr šel na nákup do obchodu vzdáleného 141 m. Když byl 32 m od obchodu, zjistil, že zapomněl peníze, a vrátil se pro ně. Kolik metrů celkem ušel po návratu s nákupem?

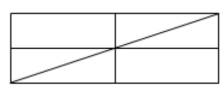
4. Petr přišel na hřiště v 17.20, Jirka o 20 minut později, Tomáš v půl šesté a Vojta o 13 minut dříve než Jirka. Které děti byly už na hřišti, když přišel Vojta?

5. Máme provázek dlouhý 1 m. Přesně uprostřed vystřihneme kousek dlouhý 1 cm. Kolik nejvíce provázků o délce 1 cm můžeme ze zbytků nastříhat?

6. Do prázdného skladu obchodníka Jirky Šikuly přivezli 456 kg jablek, 283 kg mrkve, 235 kg hrušek a 98 kg švestek. Za celý den prodali pouze 40 kg jablek. Kolik kg ovoce jim zůstalo ve skladu?

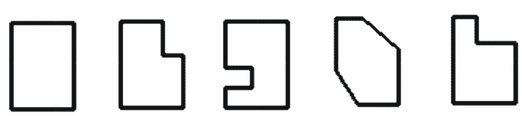
7. Za jeden zlatý se dá koupit 30 m lana. Kolik zlatých musíme mít, když chceme koupit 155 m lana?

8. Kolik obdélníků a kolik trojúhelníků je na obrázku?



9. Vypočítej: $(6 - 23)(500 - 525 + 15 - 255) =$

10. Která zahrada má nejkratší plot a která nejdelší?



Literatura

[1] Frýzek, M., Müllerová, J., *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy.* Fortuna, Praha 1992, ISBN 80-85298-51-1.

[2] Hejný, M., Stehlíková, N., *Číselné představy dětí. Kapitoly z didaktiky matematiky.* Pedagogická fakulta UK, Praha 1999, ISBN 80-86039-98-6.

[3] Novák, B. a kol., *Počítejte s Klokanem. Kategorie Klokánek. Sbírka úloh s řešením pro 4. a 5. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995-1999.* Prodos, Olomouc 2000, ISBN 80-7230-058-X.

[4] Odvárko, O., *Matematika pro každý den. Sbírka úloh nejen pro žáky 5. až 9. ročníků základních škol.* Prospektrum, Praha 1995, ISBN 80-85431-31-9.

[5] Růžičková, B., Kopecký, M., Molnár, J., *Počítejte s Klokanem. Kategorie Benjamín. Sbírka úloh s řešením pro 6. a 7. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 1995-1999.* Prodos, Olomouc 2000, ISBN 80-7230-068-7.

[6] Trejbal, J., *Sbírka zajímavých úloh z matematiky.* Prometheus, Praha 1995, ISBN 80-7196-072-1.

[7] Varga, T., *Hrajeme si s matematikou.* Albatros, Praha 1988.

[8] Zhouf, J., *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy s rozšířenou výukou matematiky.* Prometheus, Praha 1993, ISBN 80-901619-5-5.

Vstupní test z matematiky pro žáky 1. ročníku na SPŠ v Novém Městě nad Metují

Jiří Houser[1]

Abstrakt: Příspěvek se zabývá problematikou znalostí, či spíše neznalostí žáků hlásících se na SOŠ z 9. tříd různých ZŠ a 3. ročníků SOU. Oblast základních znalostí a triviálních dovedností je dosti často opomíjena v závěru studia na ZŠ,

[1] *SPŠ, Nové Město nad Metují, houser@spsnome.cz*

SŠ a snad i VŠ. Žáci jsou připravováni na „bojiště“ vyšších ročníků místo toho, aby precizně, pohodlně, sebejistě, až automaticky zvládali určité konkrétní učivo z „cvičišť“ ročníků nižších.

Abstract: The contribution deals with knowledge or rather the lack of knowledge of pupils enrolling to secondary vocational schools from the 9th grade of the primary school and the third grade of the secondary training institutions. There is a lack of work on basic knowledge and skills at the lower grades which means that it must be practiced later in higher grades.

Přijímací zkoušky včera a dnes

Mnozí z nás si pamatují na systém přijímacích zkoušek na SŠ řízený centrálně. V určitý den a čas zasedli k radiopřijímačům (a pro jistotu i tranzistorům) členové přijímací komise, aby si zaznamenali čísla úloh, jejich řešení a způsob hodnocení z učebnic Matematika pro 8. a 9. třídu, z Přípravy žáků a ze Sbírky úloh F. Bělouna. Mělo to něco do sebe. Žáci i učitelé tušili, co je asi čeká. Nebylo nic tajného a školy si nemohly hrát na svém písečku. Žáci se mohli připravovat sami i s předstihem; typy úloh byly každoročně sice dosti podobné, ale dle mého názoru dobře vybírané a prověřující.

Proč zase nějaký test?!

Po několikaletém opravování úloh z těchto zkoušek jsem si povšiml tak často opakujících se nedostatků v základních matematických znalostech. Proto jsem v roce 1985 vytvořil první test, kterým jsem si chtěl ověřit, zda jde u žáků o skutečnou neznalost, nervozitu, netrénovanost. Nebo že by snad šlo o nezkušenost některých učitelů na konkrétních ZŠ? Potvrdila se mi poslední alternativa, ale k mému potěšení v opačném slova smyslu - na některých školách to naopak jde!

Přestože doba pokročila („nové“ učebnice, kalkulátory, experimenty aj.), podstatu, formu i vyhodnocení testu jsem mohl zachovat a jeho validita a účelnost používání s lety pro mě dokonce vzrostla. I méně ostřílený učitel matematiky pozná, co jsem kterou úlohou u žáka ověřoval.

Test A

1. Doplňte na rovnost: $(a-b)^2$
2. Vypočtěte: $12,3-0,86$
3. Vypočtěte: $30y^4 : 6y$
4. Vypočtěte: $\sqrt{81}$
5. Jak je definována v pravoúhlém trojúhelníku goniometrická funkce *tangens*?
6. Vypočtěte: -2^2
7. Vypočtěte: $48,6 : 0,2$
8. Kolik je 15^2?
9. Napište vzorec pro výpočet povrchu kvádru s hranami r, s, t.
10. Vypočtěte: $10,4 \cdot 0,8$
11. Vypočtěte: $89-333$
12. Napište vzorec pro výpočet obsahu kruhu.
13. Sečtěte a výsledek vyjádřete zlomkem i desetinným číslem: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}$
14. Vyjádřete v tunách: 48 q 6 kg
15. Vypočtěte: $\sqrt{1\,600}$

Test B

16. Vyjádřete ze vzorce neznámou a: $M=\frac{1}{3}ar^2v$
17. Funkce f je dána předpisem $f: y=2x+3$. Určete funkční hodnoty $f(-6)$ a $f(1,4)$.
18. Vypočtěte: $0,08^2$
19. Vypočtěte: $6x^2 \cdot 3x^5$
20. Rozložte na součin: a^2+b^2
21. Převeďte: 56,4 cm^3 na m^3
22. Vyjádřete výsledek zlomkem i desetinným číslem: $\frac{3}{4} : \frac{5}{2}$
23. Co je těžnice v trojúhelníku?
24. Popište v rovině zobrazování v osové souměrnosti.
25. Převeďte na litry: 21,1 hl
26. Vypočtěte: $300c^4 : 4c^4$
27. Kolik je 10^{-2}?
28. Kolik je $\sin 90°$?
29. Vypočtěte 15 % z 500 Kč.
30. Rozhodněte, zda trojúhelník ABC je pravoúhlý, jestliže velikosti jeho stran jsou: $a=3$ m, $b=5$ m, $c=4$ m.

A pro mě podstatné charakteristiky testu?

1. Více úloh z různých oblastí matematiky ZŠ
2. Triviálnost úloh
3. Nutnost soustředit se na podstatu úlohy
4. Učit se rozumět abecedě matematiky a matematickému jazyku
5. Motivovat žáky ke spolupráci s matematikou a učitelem

Test nazývaný „Vstupní“ zadávám při hodině matematiky v 1. ročníku nejpozději druhý týden v září. Žáci o něm nejsou informováni, ale navazuje na celkové stručné opakování učiva ZŠ v 1. týdnu školního roku podle sylabu učebnic Matematika pro 8. a 9. třídu.

Žáci mají k dispozici pouze psací pomůcky, všechny úlohy se číslují, stačí napsat výsledek úlohy.

Úlohy pomalu diktuji pro oddělení A, B (téměř stejné úlohy s minimálními obměnami a změnou pořadí).

Zadání zásadně neopakuji.

Žáci mají cca 1 minutu na výpočet a asi 3 minuty na konci testu.

Bodování je 1 – 2 body.

Test motivačně klasifikuji stupněm 1 až 5: 0 – 14, 15 – 19, 20 – 25, 26 – 30, 31 – 38 bodů. (Zdá se vám škála nerovnoměrná? Zkuste test ve vaší třídě! A nemusí to být v 1. ročníku. . .)

Obměna testu pro skupiny či příští rok je velmi jednoduchá.

V domácím cvičení by žádné chyby nebyly a nikdo by úkol nepotřeboval opisovat. Po oznámkování test rodiče podepisují a dítko to většinou doma „schytá“: „Ty jsi ale. . . , takovou zbytečnou chybu!“ A káraný žáček tuší, že to měl zvládnout, že se něco na té matematice dá naučit, nabiflovat.Vím, že tato známka působí kladně motivačně.

Potvrzuje se mi stabilní hodnota průměrné známky ve třídách dle oborů (technické lyceum 2,4 – 2,9, výpočetní technika 2,6 – 3,5, strojaři 2,6 – 3,7, technická administrativa 2,7 – 3,8, nástavbové studium 3,4 – 4,3 !).

Lovit talenty lze dle úloh 16, 17, 20, 24, 27, 28, 30. Obtížnější úlohy neovlivní získání známky „1“.

Porovnávám testováním nejen to, jak stejnou úlohu různé „generace“ žáků řeší, ale pozoruhodnější jsou poznatky při jednoduché obměně v daném typu úlohy. Seřadím např. tuto dle obtížnosti – lépe řečeno – dle úspěšnosti řešení: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(x \pm y)^2$, $(m \pm 3)^2$, $\dots$, $(b+1)^2$, $\dots$, $(2-t)^2$ atd. Žáci se např. právě zde nedopouštěli tolika chyb, pokud provedli (třeba jako kontrolní výpočet) roznásobení dvojčlenných závorek; někteří toto dokonce považovali za výsledný tvar bez další úpravy. Jistě máte s obdobnými obměnami v některých typických úlohách stejné zkušenosti a vyvozujete stejné závěry ze stejných příčin těchto chyb. Obdobně tedy u úloh 5, 6, 26, 30. Velký rozdíl jsem pozoroval u úlohy 17 při zadání: Doplňte tabulku pro funkci f ...

A vyjadřovací schopnosti?

př. 5: „tangenc je a/b“; „tangens je protilehlá ku přilehlá“ (přiléhá vlastně i přepona)

př. 23: „těžnice *jde* z vrcholu na stranu“ (dosti dvojsmyslné) ; „těžnice je, když spojíme bod a stranu“; „těžnice je přímka z bodu do prostřed strany“

př. 24: „uděláme kolmice a pravítkem (kružítkem) přeneseme na druhou stranu“

př. 30: „není, protože c není (nejdelší) přepona“; „není, protože nevychází pitagorova věta“; „není, protože to nejde spočítat pomocí Pythagorovy věty“; „není, protože $4^2 \neq 5^2 + 3^2$“; „není (je)“ – opakovaně přepisováno

Jsou úlohy, které vyhovují všem žákům a naopak (to na tvářích žáků poznám hned při zadávání, ale i potom).

Občas vyzkouším tento test zadat rozmnožený každému žákovi. Celkový průměr u takové třídy bývá až o stupeň lepší. Proč asi? Žák si může vybrat lehčí úlohu, vidí podobnost úloh navzájem, čte si zadání a často úlohu řeší *vizuálně* (už to někdy viděl), má víc času a přehled o testu jako celku.

Kupodivu se objevují častější chyby v triviálních numerických výpočtech (př. 2, 4, 7, 10, 11, 18). Zhoršuje se správná formulace slovního řešení úloh i zdůvodnění správnosti výsledku (5, 18, 21, 23, 30). Chybí matematická zběhlost, obratnost, preciznost a přesnost (2, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 18, 22, 27, 29).

Někdy zadám test v maturitním ročníku. Diktuji pochopitelně rychleji. Výsledky jsou jen o málo lepší než v ročníku prvém. Čtvrťáci úlohu snadněji „zařadí “, ale numerickou ani vyjadřovacími schopnostmi neoslňují.

Takže hledám zase chybu v učiteli – musím se prostě asi více učit, abych ještě lépe učil!

Závěr

Výběr a počet úloh pro tento test, stejně jako jeho celkové hodnocení je jistě subjektivní. Přesto – vyzkoušejte ho několikrát a velmi mě potěší a zaujme váš názor, návrhy, připomínky i případné výsledky tohoto testu na vaší škole.

A dívejte se kolem sebe po matematických talentech nejen ve školní budově.

Před Fotolabem zaparkují mladí novomanželé kočárek. Tatínek vezme polospící dítko do náruče a všichni vstoupí do obchodu. Ochotný pán za pultem se ukloní: „Co si budete přát?“ Mladá maminka otevře kabelku, po chvilce hledání mezi šminkami vyloví film a praví: „Mohl byste nám ho vyvolat?“

„Ano, jistě! A ***9 x 13****?“ Oba manželé se na sebe nerozhodně podívají. Batole však nezaváhá, vezme otce kolem krku a šeptem napovídá: „To je přece* ***117****, tatínku!!“*

Literatura

[1] Polák, J., *Přehled středoškolské matematiky*. SPN, Praha 1991, a Prometheus, Praha 1995, ISBN 80-04-22885-2.

[2] Fuchs, E. a kol., *Návrh evaluačních standardů z matematiky pro základní a střední školy.* Prometheus, Praha 1996.

[3] Polák, J., *Středoškolská matematika v úlohách I.* Prometheus, Praha 1996, ISBN 80-7196-021-7.

[4] Fuchs, E., Hrubý, D. a kol., *Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Prometheus, Praha 2000, ISBN 80-7196-169-8.

[5] Kubát, J., *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy.* Prometheus, Praha 1998, ISBN 80-7196-101-9.

Logická matematická soutěž pro žáky SPŠ v Novém Městě nad Metují

Jiří Houser[1]

Abstrakt: Matematické soutěže jsou dlouhodobě uskutečňovanou a specifickou záležitostí na všech typech škol a úrovních na celém světě. Svojí rozmanitostí a četností se jim na školách mohou rovnat snad jen klání sportovní, ale patrioticky můžeme říci, že už i samotná účast v té matematické, natož pak „vítězný“ výsledek, má mnohem větší osobní i osobnostní ohodnocení. Tak jako se rodí nadaní umělci, vědci, sportovci, vyrůstají mezi mladými i matematičtí talentové. Je pochopitelné a správné, že jsou přijímáni na školy s matematickým zaměřením.

[1]*SPŠ, Nové Město nad Metují, houser@spsnome.cz*

Abstract: Mathematical competitions of all levels have a long tradition in all types of schools. Only sport activities can equal them, however, as patriots we can say that even a mere participation in a mathematical competition, let alone winning it has much bigger personal and personality value. Similarly to the birth of talented artists, scientists, sportsmen, mathematically talented students are born. It is understandable and correct that they are accepted to schools with the extended teaching of mathematics.

Ve školách, jakou naše průmyslovka je, se občas také nějaký talent vyklube a námi je hýčkán, dokud nám jej jiný kolega „nepřelanaří“ na méně náročný předmět.

V dobách, kdy dobrovolná a prospěšná činnost byla společensky i finančně ohodnocována a ředitelé základních i středních škol se předháněli v zavádění velkého počtu nepovinných kroužků a klubů s nejrůznějšími zaměřeními, patřily i kroužky matematické k těm nejuznávanějším. Myslím si, že nebylo důležité, zda měly profesionální úroveň a vedení, ale určitě splňovaly svoje poslání a jejich existenci byli učitelé matematiky na každé škole nakloněni. Avšak časem přicházely vymoženosti moderní doby – videa, kalkulátory, počítače a snahu vyniknout vystřídala šeď průměrnosti a soutěživost kolektivů i jednotlivců nahradilo pohodlné přežívání a užívání si demokratické nenáročnosti.

Úroveň matematiky na naší škole pozvedlo zavedení nového studijního oboru do středních škol před deseti lety – technického lycea. Příchod žáků ze základní školy do tohoto oboru s výborným prospěchem, zvýšená dotace vyučovacích hodin matematiky a povinná maturitní zkouška formou písemné i ústní části nám dávaly prostor k častějšímu kontaktu a spolupráci se žáky. V komisi matematiky jsme se shodli na tom, že student-strojař, ne tolik hloubavý jako gymnazista, ztrácí svoji image technického a zručného praktika s logaritmickým pravítkem, později s kalkulátorem. S nástupem PC jsme směrovali matematický kroužek k logickým úlohám se zábavným obsahem. Na matematické nástěnce jsme vyvěšovali zajímavé úlohy s rostoucí obtížností. S řešením přicházeli jednotlivci, skupiny i třídy dle typu úlohy. Dohodli jsme se, že u úspěšných řešitelů budeme při klasifikaci z matematiky k jejich aktivitě přihlížet. A protože pochválených a odměněných žáků přibývalo, pozvali jsme nejúspěšnější řešitele i ostatní výborné studenty na besedu o matematice a plánované soutěži. Výsledkem diskuse bylo uspořádání jednoměsíčních hodinových schůzek se zábavným matematickým obsahem, kde bychom občas řešili i úlohy školní nebo z jiných soutěží či matematické olympiády. Veselé, zajímavé a historické matematické pozoruhodnosti zpestřovaly tyto schůzky a přilákaly třídu nadšenců ze všech ročníků. To nás pak přivedlo na myšlenku ponechat instruktážní úlohy na matematické nástěnce a navíc pořádat přímo soutěž každé čtvrtletí pro dobrovolné účastníky. Počty žáků na těchto soutěžích sice dosti kolísaly, ale nadále splňovaly náš záměr. Výsledky u těch nejlepších jsme nejen vyvěšovali na matematické nástěnce, ale kromě pomocných známek do předmětu jsme nejúspěšnější žáky za čtyři série ve školním roce odměňovali věcnými cenami.

Bylo důležité a podstatné vybírat do testů takové úlohy, které byli schopni řešit žáci všech věkových kategorií na škole. A to bylo navíc pro všechny současné i budoucí žáky motivující, že pořadí úspěšných řešitelů nemělo prakticky nikdy zákonité pořadí podle ročníků. Někteří přicházeli na soutěž jen občas, ale každým rokem se krystalizovaly skupinky studentů obsazujících pravidelně přední příčky našeho pomyslného logického soutěžního žebříčku.

Vzhledem k vytíženosti učitelů a nemalým obměnám na seznamu účastníků během roku (pro celkové pořadí žáků) jsme tuto soutěž začali pořádat pouze dvakrát ročně, a to v méně hektických obdobích školního roku – vánočních a velikonočních termínech. Soutěž probíhala buď před výukou nebo po ní v délce 60 minut nebo o sportovních či ředitelských dnech na 90 minut. Samozřejmě, že podle délky soutěže byly vybírány i typové úlohy. Některé byly čistě na postřeh, jiné na důvtip, ale protože jsme se nechtěli záměrně vyhnout ryze matematickým úlohám, mívali žáci vyšších ročníků pro lepší znalosti rychlejší a správnější řešení (např. řešení více početných soustav lineárních rovnic, znalosti posloupností, kombinatoriky apod.), obratnější byli v řešení úloh eliminačními metodami atd. Bylo tedy nutné přihlížet při vyhodnocování i k věku soutěžících, např. různým počtem bodů za správné řešení nebo časovým handicapem pro vypracování.

V testu se objevují vždy úlohy velmi rozdílné obtížnosti a od každého „druhu“ jedna typická triviální úloha. Podstatné však je, že úlohy jsou uspořádávány nahodile, a tedy jeden z logických úkolů pro soutěžícího je najít si ten nejlehčí. Systém se podobá matematické soutěži KLOKAN (3 série úloh dle obtížnosti hodnocené 3-4-5-ti body) nebo i sondám Maturant z let nedávných i navrhované části státní maturity. Avšak tady jde pouze o uzavřené úlohy s alternativní odpovědí a to pro naši logickou soutěž nebylo vhodné. I když jsme občas použili pro zpestření nějakou takovou úlohu, přece jen právě náhodně dosáhnout správného výsledku „střelbou od boku“ bychom porušili charakter naší soutěže, její podstatu a účel – logické a matematické řešení příkladu. Žáci pracují překvapivě samostatněji a sobečtěji než např. při čtvrtletních písemných prověrkách!

Zdroje pro výběr úloh skutečně rozmanitých do našeho stylu logické soutěže jsou snad nevyčerpatelné a navíc v podstatě snadno cyklovatelné. Tato skutečnost mi posloužila i ze statistického hlediska jako možnost dlouhodobého sledování a porovnávání, popřípadě i upozornění na vhodnost zařadit některé úlohy jako vzorové do běžné výuky matematiky v konkrétním ročníku. Úlohy čistě početní řeší žáci na volné papíry, používají tabulky, kalkulátory, jiné úlohy umožňují nebo si přímo vyžadují pracovat do testového formuláře (obrázkové postřehovky apod.).

Povšimněme si tedy několika charakteristik soutěžních úloh, z nichž některé jsou uvedeny na konci příspěvku:

a) úlohy se stejnou obtížností pro všechny věkové kategorie – Rozbitý walkman, Číslicové schéma, Číselný logik, Autodrom, Kostky, Číslicové rovnosti, Mince, Zlomky ze sirek, Klobouky, Kapky, Domeček, Cyklisté

b) úlohy preferující početní zběhlost v matematických operacích – Magický obrazec, Katalog, Cena zboží, Podílová křížovka, Zajímavá matematika, Operační rovnice s hvězdičkou

c) příklady vyžadující něco navíc, třeba z fyziky – Cyklista, kombinatoriky – Vysoký hotel, posloupností – Logické řady atd.

d) úlohy typu Vysvědčení, Známky, Správné číslo, Cena zboží, Katalog řeší průměrný středoškolák lehce, někdy cestou logickou, jindy pokusem a omylem, sestavením rovnice jako pro obvyklou slovní úlohu, anebo vyčerpávajícím způsobem – výpisem všech různých možností a výběrem té správné; ve výuce matematiky by to byl výraz $(1+\mathrm{i})^{10}$ vyčíslený buď Moivreovou větou, nebo binomickou větou, nebo algebraickým součinem deseti dvojčlenných závorek

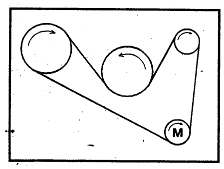
Výběr příkladů, které jsou obdobné a v testech se pravidelně opakují (Číslicový logik, Magické obrazce, Úlohy se zápalkami), je motivující pro aktivní individuální trénink ze školní matematické nástěnky a k účasti na větším počtu soutěžních kol. Po každém soutěžním dnu jsou výsledky účastníků zveřejňovány (takticky bez těch neúspěšných – uvádíme bez konkretizace počtu dosažených bodů jen abecední pořadí žáků), k dispozici je vzorové řešení úloh a nejlepší řešitelé jsou v rámci školy morálně a věcně odměňováni. Úspěšným se může stát každý soutěžící. Je málo pravděpodobné, že by některý student vyřešil všechny úlohy. Naopak je obvyklé, že některé úlohy řeší i mají správně všichni žáci. Ale jistě se mnou souhlasíte, že to pro naši soutěž, její záměr a bodové vyhodnocení není podstatné. Jsem si jist, že pro naši školu je významná existence soutěže jako takové, účast postavená na dobrovolnosti každého jedince, možnost ohodnocení pochvalou, cenou i klasifikací za aktivní činnost a výsledky studenta mimo povinnou výuku a domácí úkoly, pozdvižení úrovně a důležitosti matematiky do povědomí ostatních žáků, rodičů, pedagogů i vedení školy, zvýšení sebevědomí u těchto žáků a pochopitelně cílový úkol – vyhledávání matematických talentů pro odborný i všeobecný růst jejich osobnosti.

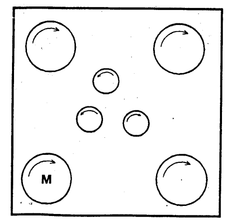
Hledejme matematické talenty i tam, kde sami výrazně nevyčnívají, nebo i tam, kde bychom je ani neočekávali. Pracujme s nimi a nenechme se odradit, i když z nich pravděpodobně nevyrostou matematičtí odborníci, ani úspěšní řešitelé hned té příští matematické olympiády.

Několik soutěžních úloh

Rozbitý walkman

Pokazil se mi walkman, tak jsem ho rozebral s tím, že si ho opravím. Zjistil jsem, že je tam spousta koleček, mezi kterými byla natažena gumička, nyní prasklá. Sehnal jsem novou gumičku a zkusil jsem ji mezi kolečky protáhnout. Zjistil jsem, že není jedno, kterým směrem se mají kolečka otáčet. Několika pokusy jsem našel správný směr otáčení. Ten máte na plánku vyznačený (písmenem M je označen motorek). Dále jsem zjistil, že se gumička nesmí nikde křížit, jinak by o sebe drhla. Nakonec se mi ji podařilo správně natáhnout. Podaří se to i vám? Na přiloženém obrázku je uveden příklad.

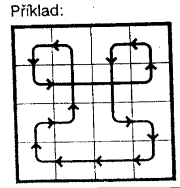




Autodrom

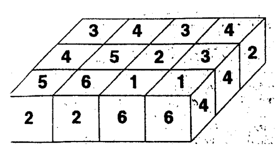
Nalezněte okružní trasy autodromu. Trasa musí procházet všemi políčky, každým právě jednou s výjimkou vyznačených křižovatek (další křižovatky nesmíte vytvářet). Celý okruh je jednosměrný, směr je udán šipkami.

Příklad:



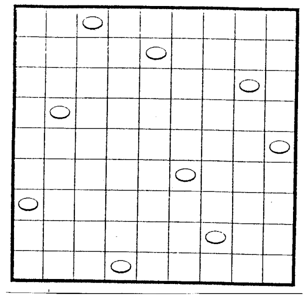
Kostky

Na obrázku je dvanáct identických kostek. Určete součet ok na spodních stěnách kostek za předpokladu, že na sedmi obvodových stěnách, které na obrázku vidět nejsou, je vždy lichý počet ok. Pro větší přehlednost jsou na obrázku uvedena čísla místo ok.



Mince

V obrazci je umístěno devět mincí tak, že v žádném řádku, sloupci, ani šikmé řadě nejsou nikdy dvě. Přesuňte tři mince o jedno pole svisle, vodorovně nebo šikmo tak, aby opět platila původní podmínka.



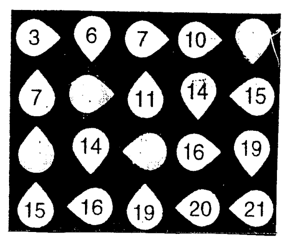
Klobouky

Pod fotografiemi šesti mužů A, B, C, D, E, F leží šest klobouků a, b, c, d, e, f. Komu klobouky patří, když Karel, Libor a Milan hádali takto:

Karel (A, e), (B, f), (C, d), (D, b), (E, c), (F, a)
Libor (A, c), (B, e), (C, d), (D, f), (E, a), (F, b)
Milan (A, f), (B, a), (C, e), (D, d), (E, c), (F, b)
a každý z nich měl právě polovinu tipů správných?

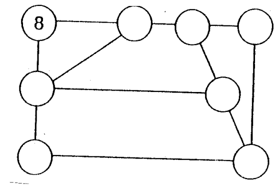
Kapky

Doplňte čtyři chybějící čísla do prázdných kapek celé sestavy při dodržení zavedeného systému.



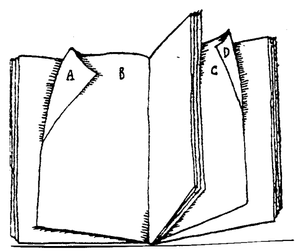
Magický obrazec

Doplňte čísla 1–8 tak, aby součet čísel na vrcholech každého ze čtyř útvarů byl 15.



Katalog

Katalog je sešit z dvojlistů, které jsou vpůli přehnuté a vkládané do sebe. Vnější list katalogu má tedy vedle sebe první a poslední stránku a dále druhou a předposlední stránku. Dokážete z jediného vnitřního dvojlistu, do něhož je ještě vložen blíže neurčený počet dalších dvojlistů, určit počet stran katalogu? Tento rozložený dvojlist má na našem obrázku označení stran A, B, C, D. Víte, že číslo strany D je dvojnásobkem čísla strany A a číslo strany C je o 5 větší než číslo strany B.



Zajímavá matematika

Najděte dvě trojice čísel (mezi 1 a 9) takové, že součet čísel v obou trojicích je stejný a také součet druhých mocnin v obou trojicích je stejný.

Vysoký hotel

V Americe postavili hotel, který má 1 313 pater. Protože Američané jsou pověrčiví, byla čísla pater, která obsahují třináctku (např. 13, 136, 513, 1 138), vynechána. Po patře 129 tedy hned následuje patro 140. Jaké číslo mám nejvyšší patro?

Vysvědčení

Za každou jedničku nebo dvojku na vysvědčení dostane chlapec od otce 10 Kč, za každou trojku musí vrátit 15 Kč. Při vyúčtování 15 známek dostal Honzík 25 Kč.

Kolik měl trojek?

Známky

Za 100 Kč koupil autor několik známek po 2 Kč, desetkrát tolik známek po 1 Kč a za zbytek známky po 5 Kč. Kolik bylo kterých?

Správné číslo

Když od trojmístného čísla odečteme 104, bude výsledek dělitelný třinácti. Jestliže k témuž číslu přičteme 105, bude výsledek dělitelný sedmi. A jestliže od téhož čísla odečteme 108, bude výsledek dělitelný devíti. Jaké je to číslo?

Literatura

[1] *IQ Mensa*, č. 9, ročník 2001. Delfín, Praha, ISSN 1212-8236.

[2] *IQ Mensa*, ročník 2000, 2001. Ostravské tiskárny, Ostrava, ISSN 1212-6659.

[3] Fořtík, V. a kol., *Skvělá kniha her a testů.* Ivo Železný, Praha 2002, ISBN 80-237-3722-8.

[4] Fořtík, V. a kol., *Hry a testy na volný čas.* Ivo Železný, Praha 2002, ISBN 80-237-3736-8.

[5] Burjan, V., Burjanová, Ľ., *Matematické hry.* Pythagoras, Bratislava 1991, ISBN 80-85409-00-3.

[6] Křížovka a hádanka. *NOVUM*, ISSN 0862-9048.

[7] Panoráma křížovek. *NOVUM*, ISSN 1210-5309.

[8] Pěnčík, J., Pěnčíková, J., *Lámejte si hlavu.* Prometheus, Praha 1995, ISBN 80-7190-01-X.

[9] Cvik, P. a kol., *Záujmový útvar matematiky pre žiakov 1. a 2. ročníka stredných škol.* SNP, Bratislava 1985.

[10] Trejbal, J., *Sbírka zajímavých úloh z matematiky – 1.díl.* Prometheus, Praha 1995, ISBN 80-7196-072-1.

[11] Trejbal, J., *Sbírka zajímavých úloh z matematiky – 2. díl.* Prometheus, Praha 1996, ISBN 80-7196-084-5.

Jak pečovat o matematické talenty

Libuše Hozová[1]

Abstrakt: v příspěvku jsou uvedeny formy péče o matematické talenty, a to v rámci vyučování a mimo vyučování. Je též uvedeno jak motivovat učitele a studenty učitelství pro tuto práci.

Abstract: The contribution focuses on ways of educating talented pupils both at school and outside school and of motivating teachers and student teachers for this work.

Talent neroste sám od sebe, je třeba o něj pečovat.

Podnětné rodinné prostředí je sice výborné pro rozvoj talentu, ale větší sílu má škola. Nadaného jedince lze poznat už na základní škole. Není tolik složité nadání vystopovat, složité a obtížné je talent rozvíjet. K tomu je třeba ze strany učitele zájem, snaha, systém a odpovědnost v péči o rozvoj individuality.

Jak tedy lze pečovat o matematické talenty?

1. V rámci vyučování – přímo v hodinách matematiky:
   (a) pravidelné zadávání motivačních úloh, problémových úkolů a zajímavých matematických hádanek
   (b) práce ve třídách s rozšířeným vyučováním matematice
   (c) motivace žáků k účasti v matematických olympiádách a soutěžích (Pythagoriáda, Matematický klokan, korespondenční semináře)
2. Mimo vyučování:
   (a) Klub mladých matematiků (kroužek pro zájemce o matematiku v rámci celého okresu)
   (b) matematické kroužky na škole
   (c) matematická odpoledne (matematické hry, matematické křížovky)
   (d) semináře k řešení úloh matematické olympiády
   (e) soutěže čtyřčlenných družstev matematických tříd „Dejte hlavy dohromady“
   (f) matematická soustředění žáků
3. Motivace učitelů matematiky:

[1]*MÚ Slezské univerzity, Opava, libusehozova@email.cz*

(a) pravidelné semináře nebo přednášky v rámci okresu (v Opavě jsem uspořádala sedmiletý cyklus pro učitele „Matematika vesele i vážně“)

(b) pořádání celostátních seminářů, konferencí a setkání učitelů matematiky

4. Práce se studenty vysokých škol s pedagogickým zaměřením:

   (a) účast studentů na okresních a regionálních kolech matematické olympiády

   (b) účast studentů na matematických soustředěních žáků ZŠ

   (c) oprava žákovských prací v korespondenčních soutěžích

   (d) seznámení s formami péče o matematické talenty v rámci didaktiky matematiky

Literatura

[1] Konforovič, A. G., *Významné matematické úlohy.* SPN, Praha 1981.

[2] Volfová, M., Didaktická hra ve vyučování matematiky. *MaFy*, Hradec Králové 1992, č. 1, ISBN 80-7041-492-8.

[3] Novotná, J. a kol., *Matematické křížovky.* Prometheus, Praha 1996.

[4] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava 1990, ISBN 80-08-01344-3.

Komunikace a talent[1]

Michaela Kaslová[2]

Abstrakt: Problém identifikace nadprůměrných žáků na prvním stupni a komunikace s nimi tkví mimo jiné i v osobnosti třídního učitele. Analýza vychází z více než 12-tileté práce v Klubu přátel matematiky a z dlouhodobého pozorování různých situací v hodinách matematiky na prvním stupni fakultních škol během posledních dvaceti let.

[1] Příspěvek byl podpořen výzkumným záměrem J13/98:114100004.

[2] *KMDM, PedF UK, Praha, kaslova@pedf.cuni.cz*

Abstract: The problem of the identification of talented elementary pupils and communication with them lies, among others, in the personality of a class teacher. The analysis given in the article is based on more than 12-year work in the Club of Friends of Mathematics and on a long-term observation of various situations in mathematics classes in elementary schools during the last twenty years.

Úvod

První ročník ZŠ, listopad 1989, hodina matematiky. Učitelka zadává úkol.

U: *Děti, řekněte mi nějaký těžký nebo zajímavý příklad. Andulko!*

A: $3 + 4$

U kýve hlavou na souhlas. *Martin!*

M: $2 + 4$

U: *Ano. Honzík!*

H: $3 + 0$, $5 + 0$, $6+$

U: *Dost. Řekla jsem jeden a zajímavý. Další, Tomášku!*

T: $5 - 2$

H se současně otočil na nás dozadu a nahlas pronesl: *Je ... á, vůbec nepochopila, že jsem chtěl říct, že tak je to s nulou vždycky.*

Od té doby Honzu neoslovila křestním jménem, ale říkala jako jedinému příjmením. Také od té doby se mu snažila dokázat, že je hloupý. Honza přestal ve třídě v hodinách komunikovat. Plnil jen nezbytně nutné, občas předstíral, že neví, zejména když byla úloha pro něho primitivní.

O rok a tři čtvrti později – v hodině, kde učila naše studentka, zapomněl na předchozí zkušenost. Na tabuli byla čísla – možné výsledky a zadání úloh na sčítání, odčítání, násobení a dělení. Byl vyvolán na součet 37 a 36. Ihned řekl 73.

S: *Jak jsi na to tak rychle přišel?*

H: *72 to nebude, je tam 8 a 9 a jiný sedmdesát tam není.*

U zezadu: *To ne, musí přece říct, jak to vypočítal. Hádat se nemá.*

Jenže Honza uvažoval. Honza se vždycky projevoval verbálně. Pokud přišel i později na nový postup, zobecnění, nikdy necítil potřebu tomu dát písemnou podobu.

Co preferují nadprůměrní a co ne?

Josef (1993) odmítl psát písemnou práci z přírodovědy. Od učitelky dostal pětku. V rozhovoru se mnou uvedl, že *přece nebude odpovídat na nejednoznačné, nepřesné a „b. . . é" otázky*. Jeho znalosti z přírodovědy byly značně nad rámec školního učiva.

Petr (1998) nenapsal ani čárku v testu z geometrie. Zdůvodnil to tak, že *neví, k čemu mu to je*.

Sára (2002) se během testu z matematiky přihlásila pětkrát s různými dotazy, kde naznačovala, že není zřejmé, co přesně má dělat, protože je dvojí možná interpretace (*mohu si to vyložit i tak, . . .*).

Toník (2002) přišel za mnou s tím, že má z písemné práce na písemné násobení dvojku. Když jsem chtěla vědět proč, odpověděl, že *tam měl chyby, že ho to nebavilo* (násobení trojciferného dvojciferným činitelem). Co by ho bavilo? *Kdyby to bylo dvanáctimístné krát devítimístné číslo. Ale to nejde na kalkulačce.* Výpočet předvedl bez jediné chyby.

Martin (1980) na dotaz učitele, jak to že se hlásí a odpovídá bez chyby na tak těžké slovní úlohy, reagoval nepříliš slušně s tím, že *teď ho to konečně baví*.

Hodnocení na prvním stupni

Ve slohu, na téma „Co bych hodnotil(a) a co bych nehodnotil(a) na prvním stupni v matematice a proč", napsal jeden žák šesté třídy, že by nehodnotil jen *. . . písemné práce, protože je přece cennější odpovědět ústně. Taky by se mělo hodnotit, jak se to řekne (formulace), jestli popsal postup a taky šikovný (ekonomické), hezky krátký*. Podobné výpovědi se objevily u všech nadprůměrných žáků s poznámkami k zohlednění nových nápadů, tvořivosti, zdůvodnění, nalezení dalšího postupu, více nebo všech možností, všech možných řešení, interpretací ap.

Představy nadprůměrných žáků o práci učitele

Smysluplnost, přiměřená náročnost, úroveň formulací zadání, forma postupu, forma odpovědi, úroveň odpovědi, nápady, tvořivost – to jsou **hnací motory** většiny nadprůměrných žáků.

A co **spravedlnost**? Ve slohu šestých tříd se objevilo od

(a) průměrné žákyně: *V první a druhé třídě mi vadilo, že jsem měla furt jedničky. Teď mám trojku a zasloužila jsem si to. To se mi líbí.*

(b) nadprůměrného žáka: *Na prvním stupni to nebylo spravedlivý, lehké otázky a skoro mě nevyvolávali. Taky se paní učitelka ptala víc holek než kluků a musel jsem to psát, když jsem to věděl, i když jsem to uměl říct.*

Vadí, nebo nevadí nadprůměrným diferencovaný přístup, obtížnější varianta testu nebo vyšší přísnost hodnocení testu? Nevadí, pokud to vědí předem. Dokáží učitelé reagovat na nadprůměrného žáka? Posuďte z výroků:

- Nebudu přece dělat dvojí práci.
- Má to mít dřív.
- Neodpustím mu jediný detail (formální stránka, přesnost).
- Musí to udělat všechno, i doplňkovou úlohu.

Jak je to s domácími úkoly?

Používá se strategie diferencovaného nebo nabídkového domácího úkolu, domácího úkolu pro heterogenní skupiny, dvojice? Zde jsou některé reakce učitelů na tuto otázku:

- Co to je?
- Kdo by to opravoval?
- Co by tomu řekli rodiče?
- Dalo by se to vyzkoušet.
- Jak bych to známkovala?
- Kde bych takové úlohy hledala? To je mám vymýšlet?
- Musejí mít vůbec úkoly? Stejně je píšou až ve škole.

Jak se má zachovat učitel?

To je citlivá otázka a učitel ji nemůže řešit odtržitě od osobnosti nadprůměrného žáka, od jeho rodinného zázemí, ani od kolektivu třídy a kontextu školy.

Opomíjení či přezírání nadprůměrného žáka ovšem není řešením. V systematickém dodržování stereotypů chování ke třídě jako k čistě průměrné (zprůměrované) může vést i k tomu, že se nadprůměrný žák začne chovat jako průměr, či podprůměr, případně budou narůstat jeho projevy nekázně. Stereotypní chování učitelů m.j. může vést podle pozorování i k tomu, zejména pokud učitel učí transmisivním způsobem s hlavním akcentem na rychlost reakcí, formální stránku a přesnost výpočtů, že řada nadprůměrných žáků zůstane neidentifikována a případné nestandardní reakce budou interpretovány jako kázeňský přestupek.

Jaký druh komunikace preferují opravdu nadprůměrní?

Je nebo není v preferenci komunikace rozdíl?

Podívejme se nejdříve na to, jaký způsob komunikace na prvním stupni převažuje. Je to **smíšená komunikace**, kde ovšem ani jeden způsob komunikace v převážné většině případů nepřináší plné informace. Gesta, obrázky, písmo (hláskové, symbolické, obrázkové), řeč, modely – jedno doprovází, doplňuje, vysvětluje druhé. Významnou roli hraje **kontext**. A tak jeden typ sdělení vytržený z kontextu, oddělený od toho ostatního, je nepřesný, náznakový. Speciální roli hraje takzvaný třídní jazyk, který vznikl na základě didaktické úmluvy (Brousseau) s učitelem a který nemusí být žákům jiné třídy srozumitelný, nebo může umožňovat jinou interpretaci. Tato skutečnost často nadprůměrným vadí, mají tendenci hledat „nadlokální“, přesný jazyk, nebo dané situace do jisté míry zneužívají a komunikují ještě náznakověji než sám učitel, a to ve smyslu „však ty víš, jak to myslím“. **Pokud na takovou hru učitel nepřistoupí, rychle přecházejí ke kvalitativně vyšší úrovni komunikace v té oblasti, formě, která jim je bližší.** Učitel, který se spokojí s vciťováním, domýšlením, blokuje nadprůměrného v komunikaci do té míry, že se přestává snažit o přesnější formulace a v závislosti na tom se otupuje jeho cit pro jazyk zadání. U slabších žáků je postoj k takové situaci odlišný. Takový žák cítí od učitele pomoc, je si často vědom svého nedostatku formulovat celou větou. Významný rozdíl se ukázal ve třídě, kde byli dva žáci, jejichž rodným jazykem není čeština. Učitelkou tolerovaná náznakovost odpovědí či popisů řešení byla interpretována jako odstupňovaná pomoc cizincům, avšak oba se brzy vypracovali na úroveň nadprůměrné analýzy textu. Naučili se totiž při každé jazykové nejasnosti ptát se (učitelky, žáků). Opatrněji vyvářeli představy.

Co vyhovuje nadprůměrným?

Nadprůměrní žáci mají tendenci dávat přednost jednomu z jazyků – symbolickému písmu, nebo mluvené řeči, v rámci kterého jsou schopni dělat pokroky v úplnosti i jednoznačnosti. Pokud se vyjadřují ústně, zpravidla odmítají vyslovené zapsat a symbolický zápis komentovat, či vysvětlovat. Roli zde zřejmě hraje i druh a kvalita paměti.

V řadě případů mají tendenci podceňovat obrázky, a tak někteří z nich je odmítají používat, vytvářet a později i z obrázků získat, vyčíst informace. Tato schopnost jim může na druhém stupni ve složitějších úlohách chybět.

Čemu se vyhýbají?

Obecně se vyhýbají tomu, **co je zdržuje, nebo co nepovažují za důležité**:

Daniel (2000): *Proč si to mám psát? Tohle je. . . , tohle. . .*

U: *Nejde o to řešit každou úlohu zvlášť. Vy tři máte za úkol pak popsat nejlepší strategii pro řešení takových úloh. Možná, že najdete víc takových strategií. Tak mě bude zajímat, proč si myslíš, že ta tvá je nejlepší.*

D: *Tak to jo.*

Řešení ve skupině až na výjimky je pro ně obtíží, poněvadž skupina pracuje v drobných krocích, se zpětnými kroky, pomalu, nahodile, někdy pro ně až chaoticky, neekonomicky, komunikuje jinak, než jim vyhovuje. Řešení vhledem se navíc těžko popisuje, vysvětluje. To znamená, že nadprůměrný žák řeší takovou úlohu někdy dvakrát, jednou vhledem, podruhé jak by ji asi mohli řešit další. V úloze vyžadující experimentování, práci s trojrozměrným modelem je někdy na překážku samotná **grafomotorika, koordinace myšlení a psaní**.

Pozorování nadprůměrných žáků při skupinovém vyučování, a to i v matematické soutěži tříd pracujících ve skupinách (Rallye Mathématique Transalpin 1996 – 2003), vedlo k závěru, že většina z nich **se nepodílí na organizaci práce** skupiny. Důvodů je více, nejen otázka komunikace nebo neschopnost práci řídit, organizovat, ale někdy je to i přezírání, podceňování ostatních. Pokud je jim tato role zadána, přidělena učitelem, vede často k narušení atmosféry práce ve skupině. Pokud se vedení ujímá někdo spontánně, je to spíše žák mírně nadprůměrný.

Samotářské řešení je ještě prohlubováno **prací na počítači** v domácím prostředí nebo klubu. U tří sledovaných žáků (Toník, Emil, Tom) se projevil po třech letech práce na PC zvláštní efekt, který by stálo za to zkoumat i u dalších. Oslabila se u nich schopnost najít po sobě chybu, respektive se změnila strategie hledání chyb. Dříve **hledali chybu** od konce, v klíčových místech, odhadem a pod., tedy efektivně. Dnes musí začít od začátku. Strategie práce s chybou zaznamenala u těchto tří regresi. Nezřídka je musí na chybu upozornit učitelka podobně jako PC. Oslabila se **autokontrola**, a to i průběžná.

Pokud mají nadprůměrní dobrou představivost a úloha není přiměřeně obtížná, vidí v obrázku, modelu přítěž, formalismus. Obrázek, je-li požadován, chápou někdy jako degradaci, pro malé. Někdy ovšem takovými výkřiky zastírají to, že by jim obrázek, model dal práci, že by nevypadal tak dobře ap. Jsou ochotni vynaložit více duševního než fyzického úsilí. Je-li úloha opravdu primitivní, mají **tendenci se jí vyhnout** vykřikováním výsledku, vynecháním, jinou činností, dělají zpravidla zbytečné **chyby z nepozornosti**. U obtížných úloh vykazují naopak nadprůměrně dlouhé soustředění.

Mnoho z nich se nesetkalo na prvním stupni s **neúspěchem**. Pokud ke zlomu dojde v období puberty, nesou to velmi těžce (na přednášce Honza a Jožko). Tato skutečnost by mluvila pro to, aby byli nadprůměrní alespoň občas postaveni před takový úkol, který nevyřeší, nebo ho vyřeší někdo (v jejich očích slabší) rychleji a primitivnějším způsobem. Pro navození takové situace je třeba dobře hledat didaktickou situaci se zvažováním schopností nejen zmíněného žáka, ale i potencionální konkurence, třídy. V žádném případě nejde o to nadprůměrného srážet, nebo oslabovat jeho pozici. Jde o to naučit se vyrovnávat s obtížemi i v poli, které se mu zdá lehké i pro to, aby je nepodceňoval. V jedné třídě jsme vyzkoušeli **matematické návštěvy**: dva nebo tři žáci z každé třídy se na jednu hodinu vymění. Je nutná dobrá spolupráce učitelů.

Nadprůměrní a soutěže a motivace

Pro nadprůměrné žáky je ve většině případů charakteristická **primární motivace**. Mají radost z procesu řešení, z nalézání, problém berou jako hozenou rukavici, překážku, která je výzvou, a to pak nehraje roli prostředí, kde se jím zabývají. V řadě případů v takové úloze pokračují i o přestávce, v jiné hodině, doma, nikoho k tomu nepotřebují (řešitel poustevník). Jazyk musí vyhovovat především jemu. Takový žák dává zpravidla přednost psané komunikaci.

U některých žáků, jako jsou Honza R., Dan, Emil, Tomas, je vedle řešení důležitý výkon **prezentovat se před ostatními**. Pokud tuto možnost nemají, není promýšlení úlohy do takové hloubky, do detailů. Tato prezentace však nebere ohled na úroveň posluchačů, častěji se blíží typu komunikace s dospělým (řešitel matematik).

Speciální nepočetnou skupinu (Michal, Sára, Tonda, Josef, Helenka, Matyáš, . . .) tvoří ti, kteří rádi o úloze diskutují, zvažují různé možnosti, hodnotí je, zkoušejí, co kdyby. . . a co kdyby ne, zajímají je podmínky, mají rádi parametrické úlohy a tyto diskuse rádi vedou s učitelem jak veřejně, tak soukromě, mají tendenci takové úlohy obměňovat, vymýšlet, vyhledávat analogické problémy, rádi čtou v populárně naučné literatuře (řešitel vědec).

U jiných, jako je Tereza, Valerie, Petr, Daniel, Jana, jde o to úlohu vyřešit a **vysvětlit dalšímu**. Ve vysvětlovaní ještě vylepšují řešení. Jde o jakési „znovuřešení“, které je na jedné straně elegantnější, na straně druhé prezentované v drobnějších krocích, dětštějším jazykem než to první (řešitel samaritán).

Všichni ji řeší pro úlohu samu a ostatní je nezajímá kromě toho, zda je řešení (postup i výstup) správně. Málokteří jsou soutěživými typy. Pokud mají soutěžit, první, co je zajímá, je úroveň soupeře. Jsou takoví, které slabý **soupeř** nemotivuje (Honza R.: *S tím ne, ten by prohrál.*).

Podobně musí takového žáka motivovat i **obsah toho, v čem se soutěží**.

Všichni jsou velmi citliví na **pravidla soutěže** a nezřídka odkrývají mezery v pravidlech k nelibosti učitelů. Již v 1. r. jsou schopni popsat, koho, v čem a jak soutěž z(ne)výhodňuje.

Martin P. (1990) měl problémy v prvním ročníku, protože odmítal soutěžit ve sčítání a odčítání do 10. O rok později měl třídní důtku za to, že trávil přestávky s žáky druhého stupně, nejčastěji na toaletách. Nikdo již nepátral po tom proč. Psal tam za úplatu žákům šestého ročníku domácí úkoly z matematiky. Dnes studuje v USA dvě vysoké školy a je o dva roky mladší, než jeho nejmladší spolužáci.

Komunikační typy úloh – převažující komunikace ve škole při zadávání úloh a učitelem požadovaný typ komunikace při odpovědi, případně při řešení úlohy

Preferovaná komunikace souvisí také s typy úloh, které jsou významné pro hodnocení žáka. V tabulce vedle tohoto typu úloh jsou vyznačeny i typy komunikace, kterým dávají sledovaní nadprůměrní žáci přednost. V rozdílu je vidět, jak je posunuté hodnocení těchto žáků z hlediska podmínek pro hodnocení. V hodnocení žáka převažuje hodnocení úloh určitého komunikačního typu.

ZADÁNÍ: ODPOVĚĎ:	**ÚSTNÍ**	**PÍSEMNÉ** HLÁSK.	SYMBOL.	OBR.	**MODELEM 3D** NEŽIVÝ	ŽIVÝ
ÚSTNÍ (A, G, SL.U)	T	T	T	(T)	T	
PÍSMO Hláskové	S				S	
Matem. symbolika	(T)	T	(S)			
M.obrázky Ilustrace		S			(T)	
MODEL Neživý	(S)			(S)		
Živý (dramatizace)	(S)					

Šedá – převažující typ úloh zahrnutých do hodnocení žáka učitelem
T – preference úloh talentovanými
S – preference úloh slabšími (závisí hodně na vytvoření stereotypu a typu obtíží)

Závěr

Zjednodušme situaci a podívejme se na to, **jak komunikuje učitel s většinou třídy**. Je zjevné, že jeho komunikace sleduje jednak tradici naší školy, jednak průměr třídy a didaktický materiál, který má k dispozici. Komunikace je tedy zákonitě zaměřena na většinu po většinu vyučování (někde dokonce po celé vyučování). Význam je m.j. v tom, že se hledají podmínky pro to, aby se mezi sebou domluvily všechny podskupiny třídy.

Pro hodnocení a motivaci je zde zátěž, a to nejen pro nadprůměrného, ale i podprůměrného žáka Slabší žák je ovšem tradičně zohledňován jak v domácí přípravě, tak v expozici nové látky, procvičení i testech a jsou mu věnovány i hodiny navíc (doučování). Jeho potřeba jiné komunikace je tedy zčásti nasycena. U nadprůměrných žáků takové **strategie** ve vyučování často používány nejsou, a to z nejrůznějších důvodů (například nedostatek materiálu, pohled inspekce). Otevřeně přiznejme, že ovšem nadprůměrní žáci prvního stupně dokáží velmi dobře odhadnout, co je nezbytně nutné pro to, aby splnili požadované minimum. Pak záleží na osobnosti žáka a učitele, kam se další vývoj ubere, zda nevytížený žák si vymýšlí aktivity s daným vyučovacím předmětem související, či nesouvisející, nebo dokonce bude zcela pasivní.

Ten, který je jako nadprůměrný identifikován, se může **dobře rozvíjet** za dobré spolupráce školy a rodiny i ve zcela běžné třídě, avšak je možné, že bude hledat nejrůznější cesty k tomu, aby se vyhnul tomu, co nerad dělá, nebo co mu dá více práce a lze řešit jinak, z jeho pohledu úsporněji.

Nezapomínejme, že **na prvním stupni by měl být rozvoj žáka všestranný** a že omlouvání žáka jeho nadprůměrností a odpouštění mu neúčasti na některých typech aktivit může vést k tomu, že mu dané zkušenosti, schopnosti budou dříve či později i v jeho oblíbeném předmětu chybět.

Které schopnosti to jsou? Udělat si poznámky, znázornit obrázkem situaci, podrobně vysvětlit slabšímu. Úroveň koordinace a rozvoj jemné motoriky bývají slabinou řady nadprůměrných žáků prvního stupně, což se později projevuje například tak, že se vyhýbají rýsování, modelování, reprezentaci školy (záleží m.j. na estetické prezentaci výsledků), ale i dalším aktivitám, které by jim usnadnily rozvoj představ důležitých např. pro řešení slovních úloh. Zde by se dalo diskutovat o tom, do jaké míry má jít všestranný rozvoj, v jakém rozsahu může být učitel tolerantní. Bylo by dobré pokusit se mapovat dlouhodobě rozvoj talentovaných žáků, abychom mohli zodpovědněji hovořit o důsledcích zvolených strategií. Vedle relativně tradičních obtíží se ovšem mohou vynořovat i nové, nebo takové, o kterých se dosud příliš nehovoří.

Specifickým problémem talentovaných žáků, podle mé zkušenosti, může být i **schopnost pochybovat o vlastním řešení**, kontrolovat po sobě práci, najít po sobě chybu. Proč? Na prvním stupni řeší zpravidla bez chyb, bez váhání. Na druhém stupni pak změnu postoje k řešení může ovlivnit nejen volba didaktické situace, ale řada dalších faktorů: puberta, změna učitele, i osobnost žáka a vliv rodiny apod.

Literatura

[1] Brousseau, G., *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Didactique des mathématiques 1970 – 1990 přeloženo z francouzštiny a vydáno N. Balasheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. Dotrecht: Kluwer Academic Publisher 1997.

[2] D'Amore, B., *Problemi*. Franco Angeli, Milano 1993, ISBN 88-204-7926-5.

[3] Fischbein, E., Tirosh, D., Melamed, U., It is possible to mesure the intuitive acceptance of a mathematical statememnt? *Educational Studies in Mathematics.* N.12, 1981, s. 491 – 512.

[4] Gardner, H., *Dimenze myšlení*. Portál, Praha 1999, ISBN 80-7178-279-3.

[5] Goleman, D., *Práce s emoční inteligencí*. Columbus, Praha 2000, ISBN 80-7249-01-6.

[6] Koukolík, F., *Mozek a jeho duše*. Makropulos, Praha 1995, ISBN 80-901776-1-1.

[7] Nakonečný, M., *Motivace lidského chování*. Akademia, Praha 1996, ISBN 80-200-0592-7.

[8] Pellerey, M., Controllo e autocontrollo nell'aprendimento scolastico. *Orientamenti Pedagogici*, N. 3, 1990, s. 473 – 491.

[9] Piaget, J., *Psychologie inteligence*. Portál, Praha 1999, ISBN 80-7178-309-9.

[10] Pokorná, V., *Teorie, diagnostika a náprava specifických poruch učení*. Portál, Praha 1997, ISBN 80-7179-135-8.

[11] Slavík, J., *Hodnocení v současné škole*. Portál, Praha 1999, ISBN 80-7178-262-9.

[12] Vágnerová, M., *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*, UK, Praha 2001, ISBN 80-246-0181-8.

[13] Vergnaud, G., La théorie des champs conceptuels. In *Recherche en Didactique des Mathématiques.* N. 2–3, 10, 1990, s. 133 – 170.

[14] *Sborníky mezinárodních konferencí SEMT, PME, CIEAEM, ICME* od roku 1990.

Matematický kroužek na vyšším gymnáziu

Michaela Koblížková[1]

Abstrakt: Příspěvek se týká náplně a organizace matematického kroužku na vyšším gymnáziu, včetně jeho návaznosti na přípravu na matematickou olympiádu. Součástí jsou ukázky autentických materiálů pro schůzky kroužku, který autorka vedla v prvním pololetí školního roku 2002/2003.

Abstract: The contribution focuses on the content and organisation of a mathematical club at the secondary grammar school including its connection to the preparation for the Mathematical Olympiad. It includes illustrations of materials for the club meetings which were organised by the author in the first term of the school year 2002/03.

Úvod

Na vyšším gymnáziu vedu matematický kroužek od školního roku 1973/1974. Mám tedy dostatek zkušeností s jeho fungováním a náplní, přesto se však opakovaně setkávám s následujícími problémy:

1. problém: Vyhledání a získání členů, včetně udržení jejich jistého minimálního počtu
2. problém: Náplň kroužku umožňující společnou práci studentů čtyř různých ročníků, každoroční začleňování studentů prvních ročníků
3. problém: Sladění práce kroužku s přípravou na matematickou olympiádu

Tyto problémy spolu úzce souvisejí. Úplně na začátku jsem v kroužku mívala jen vlastní studenty, tedy studenty jen několika málo tříd. V dnešní době však obvykle sama učím matematiku jen v jedné třídě, takže kroužek každoročně doplňuji za pomoci kolegů, kteří to však chápou hlavně jako vyhledávání adeptů pro matematickou olympiádu a ode mne tedy očekávají především zajištění přípravy pro kategorie A, B i C. Také samotné vyhledávání nových adeptů je hlavně podle jejich předchozí účasti v matematické olympiádě kategorií Z.

Na začátku každého školního roku hledám okénko v rozvrhu, kdy mohu já, všichni staří členové kroužku a pokud možno všechny tři první ročníky. Obvykle vyjde jediná možnost v hodně nepopulárním čase, která část zájemců odradí. Začleňování prváků a příprava na matematickou olympiádu, kde právě kategorie A spěchá nejvíc, jsou vlastně neslučitelné, takže do poloviny listopadu musím s kategorií A pracovat odděleně od ostatních. Nejstarší pak obvykle už v tomto období

[1] *Gymnázium, Jindřichův Hradec*

nechodí na oficiální schůzky kroužku a tak snižují účast na prvních schůzkách (tím i popularitu kroužku). Také mi nemohou jakkoli pomoci s novými zájemci. Přílišné zaměření na olympiádu též omezuje výběr témat a v některých letech vede k tomu, že se po školním, respektive krajském kole, kdy by teprve mohl pracovat zajímavěji a systematičtěji, kroužek rozpadne.

V posledních letech se pokouším přípravu na určitou úlohu domácí části matematické olympiády kategorií B a C pojmout ve větší šíři, zdůraznit obecnější pohledy na řešení matematických úloh, a tak studenty připravovat i na další „neškolské“ matematické úlohy, se kterými se mohou setkat v budoucnu. Přitom se obvykle v této době objeví i otázky k dalšímu zkoumání pro schůzky kroužku po skončení olympiády v příslušném roce.

Talentovaného studenta většinou neodradí exkurze do matematických oblastí, které ještě ve škole neprobíral, stačí pomalejší tempo. Tato témata také umožňují starším se před mladšími blýsknout.

Nyní se seznamme s ukázkami materiálů, které jsem připravila pro členy našeho matematického kroužku na jeho schůzky v tomto školním roce.

Komentář k materiálům

1. a 2. ukázka (1.–3. a 10. schůzka) – úlohy o číslech – spojuje obdobný problém v úlohách kategorií B a C. Lze dokonce říci, že 1.–3. schůzka je předběžnou přípravou na 10. schůzku.

3. až 5. ukázka (4.–8. schůzka) – planimetrie – předvádějí vhodnost výběru planimetrických úloh letošní matematické olympiády kategorie C. Komentář k nim umožnil shrnout velkou část planimetrie.

6. ukázka (13. a 14. schůzka) – funkce – ukazuje schůzky, které byly pro členy kroužku nejobtížnější, protože vyžadovaly doplnění největšího množství učiva pro prváky.

7. ukázka (17. schůzka) znamenala přechod od schůzek zabývajících se matematickou olympiádou ke schůzkám s volnými tématy.

1.-3. schůzka: Dekadická poziční soustava, kombinatorika, dělitelnost přirozených čísel, prvočísla a složená čísla, existenční úlohy

Příprava na

C-I-1 Z pěti jedniček, pěti dvojek, pěti trojek, pěti čtyřek a pěti pětek sestavte pět navzájem různých pětimístných čísel tak, aby jejich součet byl co největší.

C-I-5 K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli čtyřmístné přirozené číslo n. Získali jsme čtyřmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m, n.

Úvodní úlohy

Úloha 1 Určete cifru k tak, aby číslo $1k31k4$ bylo dělitelné dvanácti, ale nebylo dělitelné devíti.

Řešení: Odzkoušíme možnosti (je jich málo), nebo použijeme kritéria dělitelnosti (tj. řešíme obecně). Oba postupy lze vhodně kombinovat.

Úloha 2 Kolik je uspořádaných dvojic přirozených čísel, jejichž součin je čtyřmístné číslo zapsané stejnými číslicemi?

Řešení: Hledáme různé rozklady v součin čísel $S_c = c \cdot 1111$. Rozlišíme nejprve 9 možností. Pak určíme ... typů čísel S_c.

Úloha 3 Najděte všechna přirozená čísla, která není možno vyjádřit jako součet dvou složených čísel.

Řešení: Rozlišíme sudá a lichá čísla.

Pomocné úlohy k úloze C-I-1

Úloha 1 Zjistěte všechny možné součty trojic dvojmístných čísel sestavených pouze z cifer 1, 1, 1, 2, 2 a 2.

Úloha 2 Ze tří jedniček, tří dvojek a tří trojek sestavte tři navzájem různá pětimístná čísla tak, aby jejich součet byl co největší.

Úloha 3 V daném pětimístném čísle N zmenšíme první cifru o jedna a druhou cifru o jedna zvětšíme. Jak se číslo změní?

Pomocné úlohy k úloze C-I-5

Úloha 1 Rozhodněte, zda existují přirozená čísla m, n s následujícími vlastnostmi:

(a) v zápise čísla m jsou jen stejné číslice,

(b) n je dvojmístné,

(c) $m + n$ je dvojmístné přirozené číslo, které získáme ze zápisu čísla n obrácením pořadí cifer.

Řešení: Jde o existenční úlohu. Proto hledáme „příklad“!

Úloha 2 Kolik různých dvojic čísel m, n vyhovuje úloze 1?

Lemma 1: Součet dvou jednomístných čísel je menší než 19.

Lemma 2: Přičteme-li k přirozenému číslu N n-místné přirozené číslo, dostaneme číslo menší než $N + 10^n$.

Úloha 3 K přirozenému číslu m zapsanému stejnými číslicemi jsme přičetli trojmístné přirozené číslo n. Získali jsme trojmístné číslo s opačným pořadím číslic, než má číslo n. Určete všechny takové dvojice čísel m, n.

Složitější úlohy

Úloha 4 Najděte všechna pětimístná přirozená čísla sestavená z pěti za sebou jdoucích číslic různých od nuly, jejichž čtverec je zapsán všemi ciframi 1 až 9 bez opakování.

10. schůzka: Hledání čísel dané vlastnosti, dekadická poziční soustava, kombinatorika, dělitelnost přirozených čísel, zápis čísla dané vlastnosti, odhady

Příprava na

B-I-1 Palindromem rozumíme přirozené číslo, které se čte zepředu i zezadu stejně, např. 16261. Najděte největší čtyřmístný palindrom, jehož druhá mocnina je taky palindrom.

Úvodní úlohy

Úloha 1 Napište alespoň tři trojmístné / čtyřmístné / pětimístné / šestimístné palindromy.

Úloha 2 Vyjádřete vhodným zápisem, že trojmístné / čtyřmístné / pětimístné / šestimístné číslo je palindrom.

Úloha 3 Zjistěte, kolik je čtyřmístných palindromů.

Řešení: Zápisem čtyřmístného palindromu je $abba$, kde a může nabýt . . . hodnot a b . . . hodnot. Celkový počet čtyřmístných palindromů je tedy . . .

Poznámka: Celkový počet čtyřmístných palindromů je tedy natolik nízký, že nejrychlejší způsob řešení úlohy B-I-1 (za pomoci kalkulačky cca 10 minut) je postupným odzkušováním jednotlivých čtyřmístných palindromů seřazených sestupně.

Návodné úlohy na řešení B-I-1 úsudkem

Úloha 1 Dokažte: Každý palindrom se sudým počtem míst je dělitelný jedenácti.

Úloha 2 Určete nejmenší a největší pětimístný palindrom, který je dělitelný jedenácti.

Řešení: Zapíšeme pětimístný palindrom. Odhadujeme hledané palindromy: $p \leq \ldots, P \geq \ldots$ Nalezneme p a P odzkoušením zbývajících možností.

Úloha 3 Najděte všechny čtyřmístné palindromy, jejichž čtverce jsou sedmimístné palindromy.

Řešení: Odhad: $p^2 < 10\,000\,000$ dává $p < \ldots$ Možnosti rozdělíme podle první cifry a postupně prověříme.

Úloha 4 Ukažte, že palindrom hledaný v B-I-1 není lichý.

Řešení: Z předchozího plyne: Je-li hledaný palindrom P lichý, pak je větší než 3113 a jeho čtverec musí být osmimístný. Možnosti rozdělíme podle poslední cifry a postupně jednotlivé typy prověřujeme.

4. a 5. schůzka: Planimetrie, konstrukční úlohy polohové, užití shodných zobrazení v úlohách „na přemístění"

Příprava na

C-I-6 V rovině je dána přímka p a kružnice k. Sestrojte takový trojúhelník ABC, že k je kružnice jemu vepsaná a její střed leží v jedné čtvrtině těžnice t_c trojúhelníku ABC blíže straně AB. Proveďte diskusi o počtu řešení v závislosti na vzájemné poloze přímky p a kružnice k.

Úvodní úlohy

Úlohy rozdělíme na polohové a nepolohové. Rozdíl je především v určování počtu řešení.

Úloha 1 Porovnejte řešení úloh a) a b):

(a) Jsou dány body A, B ($|AB| = 4$ cm). Sestrojte bod C tak, aby trojúhelník ABC měl $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 5$ cm.

(b) Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby $|AB| = 4$ cm, $|AC| = 6$ cm,

$|BC| = 5$ cm.

Pomocné úlohy k úloze C-I-6

Nepolohové úlohy:

Úloha 1 Může v nějakém trojúhelníku ABC procházet těžnice AA'

(a) středem kružnice trojúhelníku opsané,

(b) středem kružnice trojúhelníku vepsané,

a jaký je to trojúhelník?

Polohové úlohy:

Úloha 2 Je dána kružnice k a její bod M. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby k byla kružnice trojúhelníku vepsaná, její střed O byl těžištěm trojúhelníka a M byl střed strany AB.

Úloha 3 Je dána kružnice $k(O, r)$ a přímka p. Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby mu k byla vepsána a M ležel na p. Proveďte diskusi řešitelnosti.

Poznámka: V obou úlohách lze „záměnou popisu“ získat další řešení.

Další úlohy na přemístění

Úloha 2 Sestrojte kružnici k, známe-li dvě její navzájem rovnoběžné tečny a jeden její bod ležící uvnitř pásu určeného tečnami.

Složitější úlohy

Porovnáme obtížnosti polohových a nepolohových úloh. Jak si pomoci, je-li polohová úloha příliš těžká?

Úloha 3 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno umístění těžnice BB' (její délka je 5 cm) tak, aby $b = 6$ cm, $\beta = 30°$.

Řešení: Převedeme na polohovou úlohu, kterou řešíme umístěním strany AC.

Jinak: Nalézt střed S kružnice k trojúhelníku ABC opsané, známe-li
$r = 3 : \sin 30°$ a délku $|B'S| = 3 \operatorname{cotg} 30°$.

Úloha 4 (Matematická olympiáda 2001/2002, C-I-5)

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC dané délky a, je-li dán střed P strany AB a bod Q (Q různé od P), který je patou výšky z vrcholu B.

6. a 7. schůzka: Planimetrie, konstrukční úlohy nepolohové, užití dílčího trojúhelníka

Příprava na

C-I-4 Sestrojte lichoběžník ABC s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro který platí: Na základně AB existuje takový bod E, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.

Úvodní úlohy

Postupy při řešení nepolohových úloh:

1. Umístění vhodné úsečky a užití geometrických míst (množin bodů dané vlastnosti)
2. Konstrukce dílčího trojúhelníka
3. Užití zobrazení (zvláště podobnosti)
4. „Finty“

Úloha 1 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a, c, t_c.

Řešení: Rozbor: Těžnice délky t_c spojuje bod C se středem C' úsečky AB.

Konstrukce: 1. způsob: Umístíme například AB a hledáme C pomocí geometrických míst. Vyloučíme nadbytečné řešení, případně provedeme diskusi.

2. způsob: Sestrojíme „dílčí“ trojúhelník $AC'C$ podle věty *sss* (jediný). Dohledáme B.

Diskuse: Diskutujeme existenci trojúhelníka $AC'C$ (splnění trojúhelníkové nerovnosti).

Poznámka: Řešení pomocí dílčího trojúhelníka ulehčuje určování počtu řešení i případnou diskusi.

Úloha 2 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno a, c, v_c.

Řešení: Užijeme dílčí trojúhelník APC, kde P je pata kolmice v_c.

Poznámka: Je-li zadána výška a strana nebo těžnice jdoucí z téhož vrcholu, lze vždy užít dílčí pravoúhlý trojúhelník.

Pozor: Výška může ležet nejen uvnitř, ale i vně hledaného trojúhelníka.

Úloha 3 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno v_c, t_c, r, kde r je poloměr kružnice opsané.

Pomocné úlohy k úloze C-I-4

Nepolohové úlohy:

Úloha 1 Sestrojte lichoběžník, pokud znáte délky všech jeho stran.

Úloha 2 Sestrojte lichoběžník $ABCD$ tak, že $a = b = c = 4$ cm a navíc $d = e = f$.

Polohové úlohy:

Úloha 3 Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s rameny AB a CD. Do lichoběžníka vepište obdélník, jehož jedna strana splývá s kratší základnou a protější strana leží na delší základně. Popište polohu středu obdélníka.

Úloha 4 Je dána přímka o a bod A, který je od o vzdálen 2,5 cm. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (AB, CD jsou základny) s výškou 3 cm a osou o tak, aby jeho úhlopříčka měla délku 5 cm.

8. schůzka: Planimetrie, důkaz přímý a nepřímý, důkazové úlohy na přímý důkaz

Příprava na

C-I-2 Je dán trojúhelník ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu komice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k PC takový, že $|PR| = |CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B.

Potřebné poznatky pro řešení úlohy C-I-2

Věta o středních příčkách trojúhelníka.

Důsledek: Ke dvěma navzájem rovnoběžným úsečkám AB a KL, z nichž KL má poloviční délku, lze najít bod C tak, aby KL byla střední příčkou trojúhelníka ABC. Pokud $\rightarrow KL$ a $\rightarrow AB$ jsou stejně orientovány, je bod C průsečíkem přímek $\leftrightarrow AK$ a $\leftrightarrow BL$. (Nepřímo dokážeme, že průsečík C existuje, tj. že $\leftrightarrow AK$ a $\leftrightarrow BL$ nejsou rovnoběžné. Potom dokážeme přímo, že K je střed AC a L je střed BC.)

Věty o rovnoběžníku.

Pomocné úlohy k úloze C-I-2

Úloha 1 Je dána úsečka AB o délce c. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby těžnice t_a měla délku $0,75c$ a výška v_c měla délku $0,5c$.

Úloha 2 Trojúhelníky ASC a SBD takové, že S je střed úsečky AB, mají společnou střední příčku KL. Dokažte, že jsou rovnoploché.

Jiné úlohy na přímý důkaz

Přímé důkazy se v matematice užívají většinou pro důkazy jednoduchých tvrzení. Úspěch totiž závisí na vhodné volbě známých tvrzení, ze kterých chceme nové tvrzení odvodit (cesta k dokazovanému tvrzení nemůže být příliš dlouhá).

Úloha 1 Dokažte, že v každém čtyřúhelníku středy stran určují rovnoběžník.

Úloha 2 Dokažte, že pro každý bod M rovnostranného trojúhelníka ABC platí, že součet jeho vzdáleností od stran trojúhelníka je konstantní.

Řešení: Důkaz typu *pyramida*.

Úloha 3 Předchozí tvrzení dokažte jen pro vnitřní body rovnostranného trojúhelníka.

Řešení: Vyjádříme obsah trojúhelníka ABC jako součet obsahů trojúhelníků ABM, BCM, CAM.

13. a 14. schůzka: Grafy funkcí, grafické řešení rovnic, diskuse rovnic s parametry

Příprava na

B-I-6 V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x právě tři různá řešení.

Úvodní úlohy

Úloha 1 Řešte graficky rovnici $|x| - x = t$ s reálným parametrem t.

Úloha 2 V kartézské soustavě souřadnic Ouv znázorněte množinu všech bodů $[u, v]$, kde $u > 0$, pro něž má rovnice $|u - |x|| = vx + u$ s neznámou x

(a) nekonečně mnoho řešení,

(b) právě jedno řešení.

Pomocné úlohy

Úloha 1 Nakreslete graf funkce $y = |x^2 - ux|$ pro $u = -1, 1, -4, 4$.

Úloha 2 Určete hodnotu parametru v v rovnici $x|x - u| = v$ s neznámou x a kladným parametrem u tak, aby rovnice měla právě dva kořeny. Vyjádřete graficky vztah v na u.

Úloha 3 Určete hodnotu parametru v v rovnici $|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$ s neznámou x při

(a) $u = 4$,

(b) $u = 2$,

(c) $u = 1$,

tak, aby rovnice měla právě tři různé kořeny.

17. schůzka: Obecné principy řešení úloh

1. Hledání zákonitostí, tj. experimentování
2. Grafické znázornění (kdekoli je to možné, znázornit problém graficky pomocí obrázku, diagramu nebo grafu)
3. Výběr efektivního označení
4. Formulování ekvivalentních problémů, Modifikace problému (práce nad problémem A vede ke zkoumání problému B, např. matematizace slovní úlohy)
5. Využití symetrie (princip nedostatečného důvodu: „Kde není dostatečný důvod na rozlišení, tam nemůže být žádný rozdíl.“)
6. Rozdělení problému na několik speciálních případů (rozdělit zadaný problém na menší počet podproblémů a každý z nich řešit zvlášť způsobem, který se případ od případu mění, respektive postupem zvaným *pyramida*)
7. Zpětný postup (z hledaného vyvodit známý nebo snadno dokazatelný poznatek a potom postup obrátit)
8. Nepřímý postup (nejčastěji důkaz sporem)
9. Zobecňování (obecnější přístup umožňuje širší pohled a zbavuje nepodstatných podrobností)
10. Sledování parity (resp. dělitelnosti číslem d)
11. Zkoumání extrémních případů (zkoumat, jak se situace mění od jedné krajní hodnoty k druhé)

Různé úlohy

Úloha 1 Na tabuli je napsáno několik po sobě jdoucích přirozených čísel. Spočítejte jejich součet s, víte-li

– umažeme-li první a poslední číslo, zmenší se s o 21,

– jestliže mazání ještě jednou zopakujeme, bude součet poloviční.

Řešení: Šikovné označení a zapsání umožní nalezení zákonitosti, která umožní snadné řešení úsudkem.

Jinak (složitěji) řešení soustavy rovnic je při použití znalostí o aritmetické posloupnosti.

Úloha 2 Dokažte, že číslo $N = 2^{2^n} + 1$ končí číslicí 7 pro každé $n \geq 2$.

Řešení: Rekurentní předpis pro $N(k+1)$.

Modifikování tvrzení (mocnina končí číslicí 6) a jeho důkaz úsudkem nebo matematickou indukcí.

Úloha 3 Dokažte, že zlomek $(4n+3)/(3n+2)$ nelze krátit pro žádné přirozené číslo n.

Řešení: Užijeme nepřímý postup.

Dirichletův princip

Úloha 4 Uvnitř čtverce s délkou strany 5 cm leží 130 bodů. Dokažte, že existuje jednotkový čtverec, ve kterém leží alespoň 6 z uvažovaných bodů.

Úloha 5 (a) Dokažte, že mezi 101 náhodně zvolenými trojcifernými čísly lze najít (alespoň) 12 čísel, které začínají stejnou číslicí, a 11 čísel, která stejnou číslicí končí.

(b) Kolik mezi těmito zvolenými čísly najdeme nejméně, respektive nejvíce takových, že se shodují v první číslici (např. a) i v poslední číslici (např. b)?

Literatura

[1] Kuřina, F., *Deset pohledů na geometrii*. MÚ AV ČR, Praha 1996, ISBN 80-85823-21-7.

[2] Kuřina, F., *Umění vidět v matematice*. 9. kapitola. SPN, Praha 1989, ISBN 80-04-23753-3.

[3] Larson, L. C., *Metódy riešenia matematických problémov*. Alfa, Bratislava 1990, 1.–3. kapitola, ISBN 80-05-00627-6.

[4] *Jihočeský matematický korespondenční seminář, zadání a vzorová řešení*. Pedagogická fakulta JU, České Budějovice 1989–2002.

[5] *Matematická olympiáda na středních školách, 52. ročník*, 2002/2003 (leták).

Informace o přípravě společné části maturity

Eva Lesáková, Jana Kolínská[1]

Abstrakt: V rámci přípravy reformy maturitní zkoušky zahájil CERMAT cyklus programů „Krok za krokem k nové maturitě“. Cílem tohoto cyklu je pomoci školám připravit se co nejlépe na změny, které vzniknou zavedením nové maturitní zkoušky. V rámci tohoto cyklu se v roce 2001 uskutečnil program „Seznamte se: Nová maturita“, v roce 2002 „Maturita po internetu“ a v roce 2003 „Maturita nanečisto“.

Abstract: CERMAT has started a series of programmes called "Step by step to the new school leaving examination" within the preparation of the reform of this examination. The goal of the programme is to help schools to prepare as best as possible for the changes which are to come about after introducing the new school leaving examination. In 2001, also the programme "Meet the new school leaving examination", in 2002 "School leaving examination on the internet" and in 2003 "School leaving examination in sketch" took place.

CERMAT připravuje reformu maturitní zkoušky od roku 1999. V roce 2000 byly vytvořeny po rozsáhlé diskusi odborné i pedagogické veřejnosti **Katalogy požadavků ke společné části maturitní zkoušky**. V současné době existují Katalogy z následujících předmětů: český jazyk a literatura, polský jazyk a literatura, anglický jazyk, německý jazyk, francouzský jazyk, ruský jazyk, italský jazyk, španělský jazyk, matematika, občanský a společenskovědní základ, biologie, chemie, fyzika, dějepis, zeměpis. Katalogy byly rozeslány na všechny střední školy zakončené maturitou. Katalogy platné pro příslušný školní rok budou schvalovány

[1] *CERMAT, Praha, lesakova@cermat.cz, kolinska@cermat.cz*

a zveřejňovány vždy 24 měsíců před řádným termínem společné části maturitní zkoušky.

Bude-li schválen školský zákon o počátečním vzdělávání, měli by žáci přijímaní ke studiu na středních školách v nejbližším následujícím období maturovat jako první podle nové koncepce.

V roce 2001 byl zahájen programový cyklus „Krok za krokem k nové maturitě“. V rámci tohoto programového cyklu CERMAT poskytuje školám soubory testových úloh a pro případné zájemce z řad škol také centrální vyhodnocení výsledků. Získává tím nezbytné zkušenosti organizačního i odborného charakteru (sběr a zpracování dat, prezentace výsledků, práce s hodnotiteli, způsob zadávání testů atd.). Školám se nabízí možnost ověřit si úroveň znalostí svých maturantů v kontextu ostatních středních škol a škol stejného typu.

Ve všech povinných předmětech jsou připravovány soubory testových úloh na úrovni společného základu a pro profilovou část zkoušky, současně je testována i jejich podoba pro „Maturitu bez handicapu“.

V souborech testových úloh se používají především uzavřené úlohy a otevřené úlohy se stručnou odpovědí. Pouze v souborech úloh z matematiky jsou zastoupeny široce otevřené úlohy. Nabízí se tím příležitost precizovat metodiku hodnocení otevřených úloh se širokou odpovědí.

V letošním roce proběhl třetí krok programového cyklu „Maturita nanečisto“. Přihlásilo se 744 středních škol, tzn. že aktivně se do programového cyklu zapojila zhruba polovina středních škol v republice. Zpracování výsledků této akce v současné době vrcholí. Zatím jsou k dispozici pouze neoficiální výsledky. Pro zajímavost tedy uvedeme alespoň průměrné dosažené skóre žáků podle typu škol v obou souborech z matematiky a z fyziky v loňském roce.

Maturita po internetu 2002

Průměrné skóre – **matematika – základní úroveň obtížnosti** (maximální možné skóre 22 bodů)

Typ školy	**Počet žáků**	**v %**	**Průměrné skóre**	**v %**
Gymnázia	446	8,70	10,65	48,39
SOŠ	3 746	73,05	8,05	36,59
SOU	936	18,25	8,69	39,51
celkem	**5 128**	**100,00**	**8,39**	**38,15**

Průměrné skóre – **matematika – vyšší úroveň obtížnosti** (maximální možné skóre 22 bodů)

Typ školy	Počet žáků	v %	Průměrné skóre	v %
Gymnázia	1 517	38,33	9,30	42,28
SOŠ	2 312	58,41	7,29	33,14
SOU	129	3,26	6,82	31,01
celkem	**3 958**	**100,00**	**8,05**	**36,57**

Průměrné skóre – **fyzika** (maximální možné skóre 26 bodů)

Typ školy	Počet žáků	v %	Průměrné skóre	v %
Gymnázia	596	73,1	12,8	49,0
SOŠ	36	4,4	11,3	43,4
SOU	183	22,5	9,7	37,4
celkem	**815**	**100,00**	**12,0**	**46,2**

Většina pedagogů souhlasí jistě s faktem, že žáci vyšších ročníků neřadí matematiku a fyziku mezi oblíbené předměty. Péče o talentované žáky v obou předmětech je bezesporu velmi důležitá a jednání v Hradci Králové ji pozitivně podporuje.

Současně bychom se však měli zamýšlet také nad obsahem obou předmětů a způsobem jejich vyučování na vyšších stupních škol. Zdá se, jak vyplývalo z informací o matematických soutěžích na nižších stupních škol, že přirozený zájem žáků o tyto předměty existuje. Co dělat, aby se neztrácel?

Literatura

[1] *Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004 – fyzika.* ÚIV, Tauris, Praha 2000.

[2] *Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004 – matematika.* ÚIV, Tauris, Praha 2000.

Dejte hlavy dohromady

Týmová soutěž v matematice pro 6. ročník ZŠ[1]

Milan Koman[2]

Abstrakt: Příspěvek se zabývá soutěží Dejte hlavy dohromady. Jsou uvedeny požadavky na náměty úloh a metody řešení s cílem navodit dělné a tvořivé prostředí soutěžících týmů při řešení zadaných úloh. Vše je doloženo ukázkami úloh. Projevuje se tu aktuálnost hesla „dejte hlavy dohromady“ pro dnešek – podnět pro učitele k uplatňování konstruktivistického stylu učení: „aktiv-entdeckendes und soziales Lernen“.

Abstract: The contribution focuses on the competition "Put our heads together". Requirements for the problems and solving strategies are given in order to bring about a working and creative climate of competing teams. Illustrations of problems are included. The slogan "Put our heads together" is relevant nowadays as an impetus for a teacher to use constructivist style of teaching.

Poslání soutěže a její význam pro dnešek

Soutěž **Dejte hlavy dohromady** vznikla v polovině 80. let minulého století z podnětu několika pražských didaktiků matematiky a učitelů matematiky ZŠ s třídami s rozšířeným vyučováním matematice. Podrobnosti o této soutěži najdou čtenáři v publikaci [1], která je dosud v omezeném množství na skladě v nakladatelství Prometheus, Čestmírova 10, 140 00 Praha 4 (zlevněná cena Kč 10,-).

Pro vznik soutěže byly rozhodující dvě okolnosti:

– Vznik třídy s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů v 5. až 8. ročnících na řadě tehdejších základních škol

– Absence jakékoliv matematické soutěže (např. typu MO) pro žáky 5. a 6. ze tříd s rozšířenou výukou matematiky (MO začínala v tehdejší době v České republice v 7. ročníku, zatímco ve Slovenské republice byla organizována už od 4. ročníku.)

Posláním soutěže Dejte hlavy dohromady bylo na přání učitelů tříd s rozšířenou výukou matematice i jejich žáků překlenout aspoň částečně tuto asymetrii. Soutěž v Praze a v bývalém Středočeském kraji úspěšně probíhala celkem deset let. Její mladší „opavská sestra“ organizovaná *L. Hozovou* tuto soutěž ještě o nějaký rok přežila. (Znění úloh pražské i opavské soutěže lze najít v přílohách Ročenek MO na ZŠ, roč. 37 a další v [2].)

[1] Vypracováno za podpory VZ – J13/98:114100004.

[2] *UK PedF, Praha, milan.koman@pedf.cuni.cz*

Ačkoliv soutěž Dejte hlavy dohromady dnes již neprobíhá, její myšlenky jsou aktuální i dnes a možná ještě více než v minulosti. Je rannou ukázkou toho, co se nazývá v německy mluvících zemích *aktiv-entdeckendes und soziales Lernen* (viz např. [3] a [4]), u nás a v anglicky mluvících zemích konstruktivismus. V tom, jak byla soutěž koncipována a v jakém klimatu probíhala, můžeme identifikovat rysy „desatera konstruktivismu“, které uvádějí ve své knize M. Hejný a F. Kuřina [5].

Jestliže byla soutěž Dejte hlavy dohromady na přelomu 90. let minulého století především výzvou pro (soutěžící) žáky, může být v dnešní době výzvou pro učitele k zamyšlení jak vytvářet pro žáky podmínky k uskutečňování aktivního, otevřeného a sociálního učení.

To je důvod, proč se v dalším uvádíme hlavní atributy soutěže a ukázky úloh.

Proč týmová soutěž

Soutěž Dejte hlavy dohromady jsme pojali jako soutěž čtyřčlenných družstev složených ze žáků 6. ročníků z tříd s rozšířeným vyučováním matematice. Každé družstvo řešilo úlohy společně. Žáci se mohli radit, doplňovat se, ale mohli si úkoly i rozdělit. Tuto skutečnost charakterizuje i sám název soutěže.

Naše představa byla, že právě týmová forma soutěže může **vytvořit příznivé podmínky**

1. pro vznik dělného prostředí uvnitř relativně malých skupin řešitelů,
2. pro vynořování otázek, jejich upřesňování a obměňování a následné hledání odpovědí,
3. pro evokaci a uplatňování vlastních nápadů jednotlivých členů družstev, pro třídění těchto nápadů a zhodnocování, zda vedou či nevedou k cíli,
4. pro vzájemné posilování sebedůvěry – ve čtyřech se nám to „musí“ podařit, což v případě úspěšného řešení přináší s sebou i čtyřnásobný pocit radosti.

Zároveň jsme si uvědomovali, že ke vzniku takového klimatu musíme volit i jiné typy úloh, než jaké se běžně vyskytují v soutěžích, jako je matematická olympiáda. Měly by to být úlohy, které přirozeným způsobem navozují situace, ve kterých se vyplatí **spojit síly ke společnému řešení úkolů.** Snažili jsme se proto vybírat do soutěže

1. netradiční úlohy, při jejichž řešení se nevystačí s běžnými postupy, ale které na druhé straně přirozeným způsobem otevírají vrátka pro aritmetické a geometrické experimentování a modelování,
2. úlohy neobvyklé svými náměty, formulacemi, překvapujícím nebo neočekávaným postupem či výsledkem,

3. úlohy kombinatorického charakteru (z aritmetiky i geometrie), jejichž řešení nevyžaduje znalost vzorců, ale kde hrají rozhodující roli úsudek a systematické zkoumání (například výčet všech možností).

Všem úlohám jsme se snažili dávat takové názvy, aby vzbuzovaly zvědavost nebo zájem žáků a motivovaly je pokusit se o jejich řešení. Naše zkušenosti ukázaly, že samotný název úlohy může vzbudit po soutěži i zájem dalších žáků a přispět k širší popularitě a rozšíření těchto úloh.

Úlohy jsme vybírali i s ohledem na **metody a postupy jejich řešení** tak, aby s sebou přinášely i všestranně užitečnou matematickou hravost. Cílem bylo získání lepšího vhledu do dané úlohy, pozorování souvislostí, krystalizace prvních domněnek, jejích ověřování a postupné přibližování přes dílčí výsledky k úplnému řešení. Mezi takové metody a postupy patřily zejména experimentování založené na metodě pokusu a omylu, kreslení a rýsování, manipulace s modely (stavebnice, vystřihování, skládání a lepení modelů) apod.

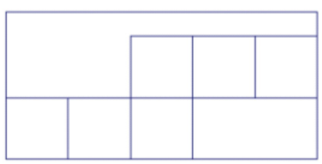
Ukázky úloh

Na první úloze chceme ukázat, že v některých případech dovedou žáci k danému úkolu přistupovat otevřeněji, než samotní autoři úloh. Výsledkem bylo pro autory zcela nečekané řešení. Dále uvedené žákovské řešení tak dokumentuje jejich tvůrčí přístup k úloze a ukazuje, že poloha sítě vůči danému obdélníku nebyla pro žáky barierou.

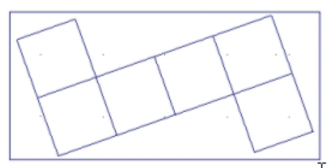
Ukázka 1. Slepte co největší krychli (1987)

(a) Z obdélníku s rozměry 25 cm a 12 cm vystřihněte síť co největší krychle, jejíž hrana má celočíselnou délku. (Síť musí být z jednoho kusu papíru.)
(b) Krychli slepte.
c) Nakreslete, jak jste síť vystřihli.

Autorské řešení je na obrázku 1a. Zmíněné překvapující originální žákovské řešení ukazuje obrázek 1b. Připomeňme jen, že tvar sítě krychle z autorského řešení nebyl žákům neznámý.



Obr. 1a



Obr. 1b

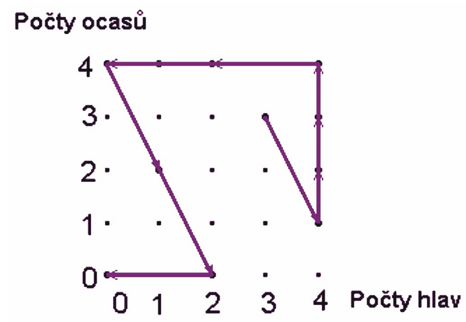
Následující druhá ukázka je zajímavá z jiného pohledu. Žáci ji pochopitelně řešili experimentálně. Po jejím vyřešení je možné žákům položit otázku, zda by mohli úlohu obměnit a pak řešit i pro jiné počty hlav a ocasů. Při narůstajícím počtu hlav a ocasů se stává situace nepřehledná. Takto zobecněná úloha může vést žáky ke snaze najít přehlednější postup, než poskytuje tabulka s žákovským řešením původní úlohy (obr. 2a). Takový přehlednější záznam poskytuje záznam ve čtvercové síti (obr. 2b). Úlohu lze pak formulovat v zásadě ve dvou stupních obtížnosti, pro konkrétní parametry (např. pro 7 hlav a 7 ocasů) a pro obecné zadaní (n hlav a m ocasů).

Ukázka 2. Zabije Honza nesmrtelného draka? (1991)

Honza se chystá na souboj s drakem, který má 3 hlavy a 3 ocasy. Na jedno máchnutí mečem dokáže Honza useknout jednu nebo dvě hlavy a jeden nebo dva ocasy. Ale pozor: Usekne-li drakovi jeden ocas, narostou mu dva nové. Usekne-li dva ocasy, naroste mu nová hlava. Usekne-li jednu hlavu, naroste mu hned nová hlava. Pouze v případě, že usekne dvě hlavy, nic nového drakovi nenaroste. Může Honza zvítězit, když má sílu jen na deset máchnutí těžkým mečem a přitom drak je mrtev, když nemá žádnou hlavu ani žádný ocas?

Číslo rány	Usekne	Nový počet	
		hlav	ocasů
-	-	3	3
1	2 ocasy	4	1
2	1 ocas	4	2
3	1 ocas	4	3
4	1 ocas	4	4
5	2 hlavy	2	4
6	2 hlavy	0	4
7	2 ocasy	1	2
8	2 ocasy	2	0
9	2 hlavy	0	0

Obr. 2a

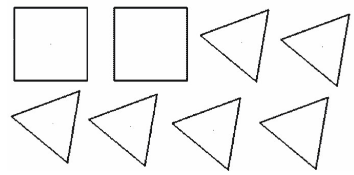


Obr. 2b

Třetí ukázka je příkladem úlohy z prostorové geometrie řešené modelováním.

Ukázka 3. Slepte rozbité těleso (1990)

Tomáš nesl z kabinetu do třídy duté modely těles. Jeden mu upadl na podlahu a rozpadl se na 8 kusů – 2 čtverce a 6 rovnostranných trojúhelníků. Tomáš se pokusil model tělesa znovu slepit. Ke svému překvapení zjistil, že může slepit více různých modelů. Dokážete slepit aspoň jeden model? Nakreslete síť tohoto tělesa a pak ho slepte.



Řešení vyhovují tři tělesa. První lze slepit z pravidelného trojbokého hranolu, jehož boční stěny jsou čtverce a z pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož boční stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Druhá dvě tělesa je možno slepit ze dvou čtyřbokých jehlanů, v prvním případě podél čtvercových stěn, ve zbylých dvou případech podél trojúhelníkových stěn.

Nakonec uvedeme dvě „nové“ úlohy, kterými lze navázat na dosavadní historii soutěže Dejte hlavy dohromady. První z úloh byla úspěšně vyzkoušena se skupinami českých a anglických žáků [6], druhá s německými žáky [7].

Ukázka 4. Hledejte dvojčata (2002)

Máme libovolné dvojmístné číslo, například 35. Vedle napište jeho zrcadlové číslo. Pod první číslo napište jiné dvojciferné číslo, například 61. A vedle opět jeho zrcadlové číslo. Pak obě dvojice čísel sečtěte. V tomto příkladě vyjdou různé součty.

(a) Místo dvojice zrcadlových čísel 61 a 16 najděte nyní jinou dvojici zrcadlových čísel tak, abyste dostali v obou sloupcích stejné součty. Sčítance, které mají tuto vlastnost nazýváme **číselná dvojčata**.

(b) Najděte další čísla, které s číslem 35 tvoří dvojčata.

(c) Najděte pravidlo, které umožní rychle hledat další dvojčata.

Příklad

Zvolená čísla	Zrcadlová čísla
35	53
61	16

Ukázka 5. Kolikrát musíte přivolat výtah? (2001)

Ve skladišti jsou různě velké bedny o celkové hmotnosti 900 kg. Žádná bedna neváží více než 100 kg. Nákladní výtah může odvézt najednou nejvýše 300 kg (při přetížení nejede). Kolikrát musí jet výtah, aby odvezl všechny bedny? (Úloha je v [7] formulována jako odvoz kamenů nákladními auty.)

Úloha má nečekaný výsledek. Jsou případy, kdy výtah musí jet čtyřikrát.

Literatura

[1] Koman, M., Dřízal, V., *Dejte hlavy dohromady a řešte úlohy.* Prometheus, Praha 1995, ISBN 80-7196-060-8.

[2] Koman, M., Repáš, V., *36. ročník MO na základních školách*. SPN, Praha 1989. (Viz též 37. až 40. ročník MO na ZŠ vydané v následujících letech.)

[3] MÏler, G. N., Steinbring, H., Wittmann, E. CH., *10 Jahre "mathe 2000"*, Bilanz und Perspektiven, Klett, Leipzig 1997.

[4] Wittmann, E. CH., MÏler, G. N., *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Bd. 1 und 2., Klett, Stuttgart 1990 und 1992, ISBN 8-12-199091-8, 8-12-199092-6.

[5] Hejný, M., Kuřina, F., *Dítě, škola a matematika*, Portál, Praha 2001, ISBN 80-7178-581-4.

[6] Koman, M., Littler, G. H., Wie die Kinder und die Lehramtsstudenten die additiven und multiplikativen Zahlenzwillinge entdecken. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002.* Franzbecker Verlag, Berlin 2002, s. 279–282, ISBN 3-88120-334-6.

[7] Lorenzen, H., Walther, G., Steine verlanden – Alltagsverstand versus Mathematik, In: *Mathematik lernen und gesunder Menschensverstand.* Klett, Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf 2001, s.112–123, ISBN 3-12-200160-8.

Přehled vybraných zdrojů informací o zdrojích finančních prostředků

Dana Komorová[1]

Abstrakt: Praxe ukazuje potřebu zlepšit informovanost pedagogů, ředitelů škol a dalších pracovníků působících ve školství o možnostech získávání finančních prostředků na podporu nových forem studia, soutěží, seminářů a dalších vzdělávacích aktivit. V příspěvku jsou uvedeny vybrané zdroje finančních prostředků a některé důležité kontakty na organizace z neziskového sektoru i veřejné správy.

Abstract: There is a growing need to inform teachers, head teachers and other school workers what possibilities there are of getting financial means to support new forms of study, competitions, seminars and other educational activities. The contribution lists some sources of financial aids and some important contacts to the organisations from non-profit fields and public administration.

Královéhradecký kraj

Královéhradecký kraj vyhlašuje od roku 2002 grantové řízení na projekty s veřejně prospěšným zaměřením, mimo jiné i na podporu zájmových aktivit dětí a mládeže ve volném čase. V roce 2002 byly na tuto oblast z rozpočtu kraje vyčleněny finance ve výši 750 000,- Kč, v roce 2003 již 1 300 000,- Kč.

V roce 2003 byly v oblasti práce s dětmi a mládeží vyhlášeny tyto grantové programy (u programů, které souvisejí přímo s výchovně vzdělávací prací na školách a žadateli mohou být i příspěvkové organizace, jsou uvedeny podrobnější informace):

1. Táborová činnost
2. Volný čas
3. Talentované děti a mládež

   Cíl: Rozvíjet celoroční práci s talentovanými dětmi a mládeží

   Popis: Do tohoto programu jsou zahrnuty zejména regionální přehlídky, soutěže a případně další doprovodné výchovně vzdělávací akce (workshopy), které mají v Královéhradeckém kraji tradici a nejsou zařazeny mezi soutěže a přehlídky vyhlášené a financované MŠMT.

[1] *OŠMT KÚ Královéhradeckého kraje, Hradec Králové, dkomorova@kr-kralovehradecky.cz*

4. Nadstandardní práce s dětmi a mládeží v procesu vzdělávání

   Cíl: Jednorázově podpořit výchovně vzdělávací instituce v Královéhradeckém kraji, které svou specializací v některé oblasti vysoce překračují normy standardu

   Popis: Jde o podporu subjektů, které se zabývají výchovou a vzděláváním dětí a mládeže na unikátních pracovištích, zlepšení podmínek pro jejich práci, vytvoření předpokladu pro rozšíření působnosti jejich služeb na krajskou úroveň.

Termín pro podání projektů pro rok 2003 již vypršel, možnost požádat na aktivity pro rok 2004 bude pravděpodobně koncem roku 2003 nebo začátkem roku 2004. Veškeré aktuální informace je možné sledovat na stránkách kraje `http://www.kr-kralovehradecky.cz/`.

Souhrnné zdroje

Stránky ostatních krajských úřadů:

`www.kraj-jihocesky.cz`	`www.kr-jihomoravsky.cz`
`www.kr-karlovarsky.cz`	`www.kraj-lbc.cz`
`www.kr-moravskoslezsky.cz`	`www.kr-olomoucky.cz`
`www.pardubickykraj.cz`	`www.kr-plzensky.cz`
`www.praha-město.cz`	`www.kr-stredocesky.cz`
`www.kr-vysocina.cz`	`www.kr-ustecky.cz`
`www.kr-zlinsky.cz`	

Informační centrum neziskových organizací (databáze neziskových organizací, finančních zdrojů a grantový kalendář)

`www.neziskovy.cz`

Nadace partnerství (ekologická výchova)

`www.nadacepartnerstvi.cz`

ECCONNECT (informační servis NNO, fundraising, granty)

`http://new.ecn.cz/index.stm?apc =nF1x1-85703&s =F&f =2&r[1] =x`

Literatura

[1] *Zásady implementace programu rozvoje kraje* schválené Zastupitelstvem Královéhradeckého kraje usnesením č. 16/364/2002 ze dne 12. 12. 2002.

[2] `http://www.kr-kralovehradecky.cz/dokument/granty03/zasady.doc`

Matematické třídy na gymnáziu v Brně, třída kapitána Jaroše

Peter Krupka[1]

Abstrakt: Gymnázium v Brně na tř. kpt. Jaroše otvírá každoročně matematickou třídu v osmiletém studiu a každoročně nabízí zájemcům z devátých tříd studium v matematické třídě na poslední čtyři roky osmiletého studia. Tématem příspěvku je stručný popis organizace tohoto studia a popis výuky v matematické třídě.

Abstract: Secondary Grammar School in Brno, tř. kpt. Jaroše Street, opens every year a mathematical class both in the eight-year study and in the four-year study for pupils of Grade 9 of the basic school. The contribution briefly describes the organisation of the study and teaching in the mathematical class.

V posledních letech je o studium v matematických třídách gymnázií malý zájem. Situace dospěla tak daleko, že některé tradiční matematické třídy byly zrušeny. V tomto příspěvku bych chtěl okomentovat situaci v Brně.

V Brně je tradičně – od roku 1982 – otvírána matematická třída (zaměření 01 – matematika) na gymnáziu na třídě kapitána Jaroše 14. O studium v této třídě byl vždy zájem, protože nabízelo náročnější výuku pro talentované studenty – talentované nejen matematicky, ale i všeobecně. S obnovením víceletých gymnázií však zájem výrazně poklesl, protože talentovaní žáci již byli přijati na tato gymnázia.

Proto naše gymnázium změnilo strategii studia v matematických třídách a začalo otvírat matematickou třídu již pro studenty nižších gymnázií. Tento způsob hledání matematických talentů má i své nevýhody, výhody ovšem podle nás převažují.

Žáci 5. tříd, kteří se na gymnázium Brno, tř. kpt. Jaroše, hlásí k víceletému studiu, musí na přihlášce uvést, o jaký typ studia mají zájem – zda o studium ve všeobecné nebo v matematické třídě. Přijímací řízení je vedeno odděleně a zkoušky jsou rozdílné. Žáci jsou zkoušeni z českého jazyka, matematiky a obecných studijních předpokladů (OSP), všechny zkoušky jsou písemné. Rozdíl spočívá jednak ve zkoušce z matematiky, jednak ve významu jednotlivých částí zkoušky pro celkový bodový zisk, který je rozhodující pro přijetí. Zkouška pro uchazeče o studium v matematické třídě je delší – trvá 60 minut – a je sestavena většinou z netypových úloh. Zkouška bývá obtížná a žáci, kteří ji napíší z 75 %, většinou bývají přijati. Bodová hodnocení jednotlivých částí přijímací zkoušky jsou tato:

[1] *Gymnázium, Brno, krupka@jaroska.cz*

	všeobecná třída	**matematická třída**
Prospěch na ZŠ, výsledky olympiád	max. 5 bodů	max. 15 bodů
Matematika	max. 20 bodů	max. 25 bodů
Český jazyk	max. 20 bodů	max. 10 bodů
test OSP	max. 25 bodů	max. 25 bodů
Celkem	**max. 70 bodů**	**max. 75 bodů**

Obě třídy mají v prvních čtyřech ročnících studia v osmiletém gymnáziu mírně odlišné studijní plány – matematická třída má posílenu výuku matematiky a fyziky. (Studijní plány lze nalézt na `www.jaroska.cz`.)

Odlišnosti v hodinových dotacích jsou malé, liší se však práce se studenty, zejména v matematice. Podstatný rozdíl je v nárocích na jejich domácí práci: každý týden dostávají týdenní domácí úkoly – samozřejmě kromě běžných domácích úkolů vyplývajících z výuky. Tyto týdenní domácí úkoly jsou většinou sestaveny ze tří úloh nestandardního charakteru – z Klokana, nižších kategorií MO, někdy i z příslušné kategorie MO, dále jsou zadávány různé hádanky, nestandardní úlohy z knih jako např. Matematické prostocviky [1] a další, např. [2], [3], [4]. Po žácích je požadováno, aby řešení zpracovali na zvláštní listy papíru s komentářem a s patřičnými nároky i na zpracování – písmo, tabulky, rýsování atp.

Učebnice jsou používány běžné – sada nakladatelství Prometheus – př. [5].

Po čtvrtém ročníku osmiletého studia – tedy pro mnohé jiné žáky po deváté třídě – přichází druhý výběr. Matematická třída nepokračuje v dalších čtyřech ročnících beze změny, ale přijímáme další zájemce. Tentokrát, vzhledem k věku, je již možné očekávat, že budou mít zájem i talentovaní žáci ze škol z okolí Brna. Noví uchazeči o studium a stávající studenti matematické třídy skládají talentovou zkoušku a podle jejich pořadí je sestavena matematická třída pro další studium. Neúspěšní studenti naší kvarty, nebo ti, kteří nemají zájem v matematické třídě dále pokračovat, jsou zařazeni do všeobecné třídy.

Tento způsob přijímání studentů zachovává dostatečný zájem o matematickou třídu – po 5. třídě není problém třídu otevřít, eliminuje nevýhodu výběru specializace již v brzkém věku dětí a zachovává funkci třídy s širším záběrem, než je pouze město Brno.

Během studia na vyšším gymnáziu je učební plán matematické třídy také odlišný od plánů třídy všeobecné, odlišnosti jsou již výraznější. Není totiž potřeba dodržovat prostupnost mezi třídami všeobecnými a matematickou, jak to vzhledem k novému vybírání studentů bylo nutné v nižších ročnících osmiletého studia. Do výuky také výrazněji zasahují externí učitelé z PřF MU – z kateder matematiky a z Matematického ústavu AV. Věnují se vybraným studentům, kteří mají o tuto péči zájem, v rámci nepovinných cvičení z matematiky a vyučují v posledních ročnících výběrové předměty – Aplikace matematiky a fyziky.

V běžných hodinách matematiky v matematických třídách používáme učebnice pro gymnázia nakladatelství Prometheus a skripta, která máme ve skladu učebnic ještě z dob, kdy matematické třídy vznikaly a učební texty byly psány ve spolupráci s vysokými školami. Pro prohloubení jsou často užívány brožurky kdysi vydávané ÚV MO – př. [6]. Jednotlivá témata jsou probírána více do hloubky a způsob výuky je blízký vysokoškolskému – v podstatě všechna tvrzení jsou dokazována, pojmy jsou definovány, vlastnosti jsou formulovány pomocí vět. Příkladový materiál je čerpán z rozličných sbírek úloh užívaných na vysokých školách nebo z [7].

Domníváme se, že díky tomuto způsobu výběru studentů a díky tomuto způsobu výuky se nám daří udržet studium v matematických třídách stále na vysoké úrovni – svědčí o tom výsledky našich studentů v soutěžích MO.

Literatura

[1] Korděmskij, B. A., *Matematické prostocviky.* Mladá fronta, Praha 1957.

[2] Močalov, L. P., *Hlavolamy.* Mladá fronta, Praha 1987, ISBN 23-074-87.

[3] Mrázek, J., *Taje matematiky.* Práce, Praha 1986, ISBN 24-025-86.

[4] Krupka, P., *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií,* 1. díl, 2. díl, Prometheus, Praha 2000 (2. díl), 2002 (1. díl), ISBN 80-7196-189-2 (1. díl), 80-7196-188-4 (2. díl).

[5] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., Šimša, J., *Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií, Výrazy 2.* Prometheus, Praha 1997, ISBN 80-7196-064-0.

[6] Korec, I., *Úlohy o veľkých číslach.* Mladá fronta, Praha 1988.

[7] Vejsada, F., Talafous, F., *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* SPN, Praha 1969.

Plzeňský korespondenční seminář

Josef Kubeš[1]

Abstrakt: V příspěvku jsou shrnuty zkušenosti s pořádáním korespondenčního semináře pro žáky pátých tříd. Seminář se využívá pro výběr žáků, kteří rádi řeší úlohy. Podchycuje je a nabízí jim možnost studia ve třídě s rozšířenou výukou matematiky. V závěru je uvedena tabulka, která dokumentuje úspěšnost vyhledávání matematicky nadaných žáku.

Abstract: The contribution summarises experience with the organisation of a correspondence seminar for pupils from Grade 5. The seminar is used for the selection of pupils who like problem solving. It offers them a study in a class with the extended teaching of mathematics. Finally, a table which shows how successful the seminar is in finding talented pupils is given.

Úvod

Naše gymnázium, Mikulášské náměstí 23, Plzeň, má dlouholetou tradici s výchovou matematicky nadaných studentů ve čtyřleté i víceleté formě studia ve třídách zaměřených na matematiku, nebo na matematiku a fyziku. S nástupem víceleté formy studia schopní žáci postoupili na gymnázia již po páté třídě. Mezi nimi byli také žáci, u kterých se postupně projevil matematický talent. Počet nadaných žáků, kteří přicházeli ke zkouškám do matematické třídy čtyřleté formy studia, klesl pod únosnou mez. Proto jsme se rozhodli jednu ze tříd víceleté formy studia zaměřit na matematiku.

Výběr matematicky nadaných žáku ve věkové skupině 11 let je velmi komplikovaný. Nelze přihlédnout k přírodovědným předmětům. Nemůžeme sledovat žáka ani v soutěžích, neboť pro páté ročníky nejsou organizovány vůbec, nebo jsou organizována pouze první kola - např. matematická olympiáda Z5, ve které je v posledních letech velmi málo úspěšných řešitelů, tedy v rozhodování moc nepomůže. Rozhodli jsme se proto o navázání kontaktu se žáky, kteří chtějí dělat něco navíc, formou korespondenčního semináře.

Organizace

Kontakty začínáme navazovat již během září. Rozesíláme vyučujícím v pátých třídách dopisy, ve kterých je žádáme o pomoc při výběru žáků, kteří jsou šikovní na matematiku a mají o ni zájem. Tím se žákům dostane první série úloh, jejichž

[1] *Gymnázium, Plzeň, josef.kubes@gymik.inpuls.cz*

řešení zasílají přímo k nám do školy. My je vyhodnotíme a připravíme další sérii úloh pro druhé kolo, kterou spolu s řešením prvního kola zašleme přímo žákům.

Závěrečné kolo probíhá u nás ve škole. Vybereme nejúspěšnější žáky z prvních dvou kol a pozveme je do budovy naší školy ještě před podáním přihlášky ke studiu. I zde řeší tři úlohy, které jsou okamžitě vyhodnoceny. V průběhu opravování k soutěžícím přicházejí vyučující matematiky a ukáží vzorové řešení a dále s nimi řeší úlohy z oblasti zábavné matematiky. Současně na tento den zveme rodiče žáků. Před nimi probíhá závěr korespondenčního semináře. Každý žák dostane čestné uznání a drobnou pozornost (ceny jsou zakupovány z prostředků JČMF – pobočka Plzeň, která nám se seminářem pomáhá). Závěrem ředitel školy podá informace o studiu ve třídě zaměřené na matematiku.

Úvodní dopis

Zde je plné znění úvodního dopisu, který byl zaslán učitelům v letošním školním roce:

Gymnázium, Plzeň
Mikulášské nám. 23
326 00 Plzeň
a
Jednota českých matematiků a fyziků – pobočka Plzeň

Vážené kolegyně a vážení kolegové,

obracím se na Vás s prosbou, abyste pomohli při propagaci korespondenčního semináře, který je určen pro žáky 5. tříd, kteří mají zájem o matematiku.

Byla bych ráda, kdybyste upozornili žáky na možnost řešení úloh korespondenčního semináře, zadali jim první část úloh a seznámili je s pravidly soutěže. Bylo by jistě dobré, kdybyste naznačili žákům, že byste byli rádi, kdyby se soutěže zúčastnili.

Prosím vás i o případné rozmnožení (popř. nadiktování) textů úloh I. kola tak, aby by1y pokryty potřeby školy.

Všechny ostatní záležitosti jdou zcela mimo vás i vaši školu, nebudete mít žádné další starosti ani povinnosti.

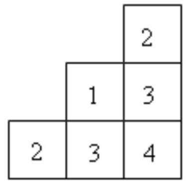
Za pomoc při vyhledávání žáků vám děkuje

V Plzni 18. září 2002 Stanislava Mrvíková, v.r.

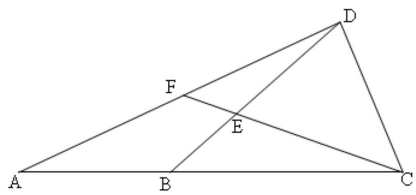
Domácí kolo

Úlohy zadané v domácím kole – 2. série:

1. Vypočítejte povrch stavby sestavené z 15 krychlí stavebnice. Půdorys stavby je na obrázku. Stěny ležící na podlaze se nepočítají. Čísla na obrázku určují počet krychlí postavených na sebe. Délka hrany krychle je 3 cm.



2. Vypište z obrázku všechny trojúhelníky.



3. V sadu roste více než 90 a méně než 100 stromů. Třetina stromů jsou jabloně, čtvrtina švestky a zbytek jsou třešně. Kolik stromů je celkem na zahradě? Kolik je kterých?

4. Trojúhelník má obvod 13 cm. Jedna strana má délku 3 cm. Určete délky zbylých dvou stran tohoto trojúhelníku, víte-li, že všechny strany mají délky vyjádřené pomocí přirozených čísel. Vypište všechny možnosti.

Školní kolo

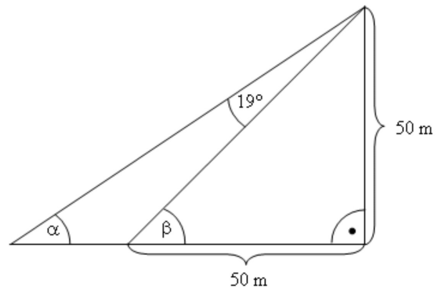
Úlohy zadané ve školním kole:

Úloha č. 1 Na stole byl tác se 48 buchtičkami. Když se Ota s Tomášem najedli, zbylo jich tam ještě 25. Ota snědl o 3 buchtičky více. Kolik buchtiček snědl každý z nich?

Pak přišla Eva a Jana a snědly zbylé buchtičky. Kolik buchtiček každá snědla, když Tomáš dodatečně snědl ještě 3 buchtičky a Jana o 4 buchtičky méně než Eva?

Úloha č. 2 Školní zahrada má tvar obdélníku 60 m dlouhého a 40 m širokého. Vypočti, kolika vědry se zaleje, počítáme-li, že na každých 100 m^2 dáme 96 litrů vody, a vědra jsou dvanáctilitrová.

Úloha č. 3 Vypočtěte velikost úhlů α a β.



Jak se Ti líbila naše soutěž?

Význam soutěže

1. Navázání kontaktu s žáky se zájmem o matematiku

   Podařilo se nám oslovit žáky, kteří se snaží dělat něco navíc, učí se formulovat své myšlenky.

2. Řešení úloh odlišných od úloh zadávaných v hodinách matematiky

   Spíše se orientujeme na úlohy logické, které možná zaměstnají i ostatní členy rodiny. Žák si mnohdy musí uvědomit nové souvislosti. Příklady tohoto typu jsou zadány také v přijímací zkoušce, a tím se žáci částečně připravují k této zkoušce.

3. Seznámení se s prostředím jiné školy

   Přijímací zkoušky budou žáci dělat v jiném prostředí, pod vedením neznámých učitelů. Žáci, kteří jsou obvykle zvyklí na jednu paní učitelku, mají určitě k jinému prostředí nedůvěru a nepodají výkon, který je jejich standardem. Je lhostejné, zda se hlásí k nám na školu nebo někam jinam.

4. Vysvětlení možnosti studia ve třídě s matematickým zaměřením

Přehledná tabulka účasti

Počty účastníků a z nich přijatých studentů

školní rok	**počet účastníků šk. kola**	**počet přijatých**	**počet přijatých do M-třídy**
1993–94	32	10	4
1994–95	41	17	10
1995–96	39	12	5
1997–98	80	14	11
1998–99	72	18	11
1999-00	40	10	6
2000–01	45	17	5
2001-02	42	19	14

(Ze školního roku 1996-97 jsme si nenechali výsledky.)

Závěr

Úspěšnost výběru matematicky nadaných žáků pomocí korespondenčního semináře lze velmi těžko hodnotit. Každopádně se daří získat žáky šikovné s chutí do samostatné práce. Např. i přes uvedené malé počty se ve školním roce 1994–95 podařilo vybrat budoucí účastníky národních kol matematické a fyzikální olympiády.

Literatura

[1] Ausbergerová, M., Suchanová, M., *Sbírka náročnějších úloh z matematiky pro žáky 4. ročníku ZŠ.* Pedagogické centrum, Plzeň 1996.

Elektronická mapa Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové

Michal Kučera, Jan Michálek[1]

Abstrakt: Nejprve jako seminární práce na výtvarnou výchovu s tématem fotografie vznikla dílem dvou studentů tehdy 2. ročníku Gymnázia J. K. Tyla

[1] *Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové, insurgent@seznam.cz, honza.michalek@seznam.cz*

v Hradci Králové jednoduchá „elektronická mapa gymnázia“. Jako reakce na kladné ohlasy byla tato mapa nově pojata, přepracována a umístěna na internetové stránky.

Abstract: A simple “electronic map of the secondary grammar school” was made as a seminar work in arts on photography by two students of the second grade of J. K. Tyl’s Secondary Grammar School. It has been redone and put on the internet.

Naším cílem bylo ukázat budovu našeho gymnázium veřejnosti v elektronické formě. Použili jsme jazyka HTML, díky kterému si může náš projekt prohlédnout opravdu kdokoli, neboť internetový prohlížeč má dnes již každý počítač. Z technického hlediska se elektronická mapa skládá z několika desítek HTML stránek, přičemž každá z nich obsahuje tzv. imagemapu – obrázek, jehož části fungují jako odkazy. Takto se nám podařilo obsáhnout většinu budovy gymnázia. Poté jsme ještě pro lepší orientaci přidali postranní šipky a některé speciální funkce. Nyní je snad již dostatečně zabezpečeno, aby návštěvník nezabloudil, případně neskončil ve slepé uličce.

Jak to všechno vlastně vzniklo? Velice prostě. Byl to projekt na výtvarnou výchovu, kdy nám paní profesorka doporučila, abychom se ku příležitosti výročí našeho gymnázia soustředili především na naši budovu. Nafotografovat celou budovu bylo dílem několika týdnů a byla na světě první verze elektronické mapy. Protože náš projekt sklidil mezi profesory úspěch, bylo nám doporučeno zúčastnit se této konference. Pro tuto příležitost bylo ale nutné projekt upravit, protože první verze byla zaměřena přece jen spíše na výtvarnou výchovu a tedy na fotografii, která tvořila celou webovou stránku. Pro využití širokou veřejností jsme se rozhodli doplnit mapu o webovou grafiku.

Naši finální verzi si můžete prohlédnout na `http://gjkt.wz.cz`. V budoucnu počítáme s tím, že bude umístěna na oficiálních stránkách Gymnázia J. K. Tyla (`http://www.gjkt.cz`), na jejichž správě se již také podílíme.

Literatura

[1] Hlavenka, J., Sedlář, R., Holčík, T., Kučera, M., Schneider, Z., Mach, J., *Vytváříme www stránky.* Computer Press, Praha 2001.

[2] Škultéty R., *JavaScript, programujeme internetové aplikace.* Computer Press, Praha 2001.

Kultura školské matematiky[1]

František Kuřina[2]

Abstrakt: V příspěvku je na příkladech charakterizován pojem „kultura školské matematiky“. Pěstovat tuto kulturu je významný každodenní úkol školy, který lze plnit na různých úrovních. Kultura školské matematiky má tyto složky: 1. Matematika musí mít smysl pro studenty. 2. Matematika musí fungovat. 3. Matematice musí student rozumět. 4. Složkou matematické kultury jsou její jazyky a metody. 5. Matematická kultura spočívá v rozvíjení umění vidět, umění počítat a umění dokazovat. Matematickou kulturu může úspěšně pěstovat v praxi jen takový učitel, který je na dobré matematické a kulturní úrovni.

Abstract: A notion of "culture of school mathematics" is illustrated on examples. Cultivating this culture is an important everyday task of school which can be fulfilled on several levels. The culture of school mathematics consists of the following aspects: 1. Mathematics must be meaningful for students. 2. Mathematics must work. 3. Students must understand mathematics. 4. A part of mathematical culture is its language and methods. 5. Mathematical culture lies in the development of the ability to see, to count and to prove. Mathematical culture can only be developed by a teacher who has good mathematical and cultural knowledge.

Úvod

Jinou matematickou kulturu má matematik, jinou technik, který matematiku používá pro své výpočty, jinou vědec lékař, biolog, ekonom, sociolog,. . . Jisté zvláštní rysy matematické kultury by měl vykazovat učitel matematiky. Určitou matematickou kulturu, spíše než objem vědomostí, by si měl osvojit i absolvent základní školy, který odchází do přípravy na praktické povolání. Nám zde půjde zejména o problematiku rozvíjení matematické kultury žáka základní a studenta střední školy, kteří se připravují pro další studium, tedy o kulturu školské matematiky. Tak jako nelze vymezit co je kultura, nebudeme definovat ani pojem matematická kultura. Ukážeme však na několika příkladech její rysy, které ve svém celku přispějí k představě, jak tento pojem chápeme. Chceme přitom podnítit promýšlení otázek pěstování matematické kultury na našich školách. Pozoruhodné je, že zmínky o matematické kultuře nenajdeme obvykle v didaktické literatuře, ani v didaktických dokumentech. V aktuálních publikacích o současné školské politice, v *Bílé knize* [1] a v *Rámcových vzdělávacích programech* [2] se

[1]Vypracování tohoto příspěvku bylo podpořeno grantem GAČR 406/02/0829.
[2]*Pedagogická fakulta, Univerzita Hradec Králové, frantisek.kurina@uhk.cz*

zavádí termín *kompetencí (závazných výsledků vzdělávání)* jako souboru *znalostí, dovedností, návyků a postojů, které jsou využitelné v učení i v životě a umožňují žákům efektivně a odpovídajícím způsobem jednat v různých činnostech a situacích* ([2], str. 5). Takováto matematika, která má smysl pro člověka, je podle mého názoru součástí jeho kultury. Dílčí pohledy na studovanou problematiku budeme ilustrovat v dalších odstavcích.

Matematická gramotnost

Albert Schweitzer (1875 – 1965), významný filozof, teolog, hudebník, lékař a nositel Nobelovy ceny kdysi napsal: *Kultura nezačíná čtením a psaním, ale řemeslem* ([3], str. 207). Šlo mu přitom o šíření kultury mezi domorodým obyvatelstvem v Africe, kde patrně čtení nemělo tak velký význam jako pro praxi potřebné řemeslo. Dovoluji si parafrázovat Schweitzerovu myšlenku: *Matematická kultura nezačíná znalostí definic a vzorců, ale matematickým řemeslem, dobrým zvládnutím základních matematických dovedností*. Mezi tyto dovednosti přitom patří i dovednosti kalkulativní, přirozeně s využitím dostupné techniky. Matematické dovednosti by si měli žáci a studenti osvojit na dobré úrovni, měli by ovšem přitom poznávat i jejich smysl a význam.

V praxi učitele pedagogické fakulty se občas setkávám se studenty, kteří absolvovali střední školu, vykonali přijímací zkoušky na studium učitelství matematiky pro základní školu, ale jsou matematicky negramotní. Doložme to několika smutnými příklady.

Příklad 1 Studentka počítá velikost vektoru $\overrightarrow{u} = (\frac{13}{11}, \frac{25}{11}, \frac{28}{11})$ takto:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{(\overrightarrow{u})^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{11}, \frac{25}{11}, \frac{28}{11}\right)^2} = \sqrt{\left(1\frac{2}{11}, 2\frac{3}{11}, 2\frac{6}{11}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1\frac{4}{121} + 4\frac{9}{121} + 4\frac{36}{121}} = \sqrt{9\frac{49}{121}} = 3\frac{7}{11}.$$

Snad by ani „zastřený“ součet ve tvaru smíšeného čísla, které ovšem do výpočtu studentka sama zavedla, neměl být důvodem nerespektování základní vlastnosti umocňování součtu, ...

Příklad 2 Jiný student „řeší“ soustavu rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

$$x + xy + y = 2$$

tak, že dělí „levé i pravé strany“ s výsledkem $x + 1 + y = 2$.

Počítání je přirozeně spjato i s osvojením si základních otázek logického charakteru a s porozuměním jazyku matematiky.

Příklad 3 Při hledání samodružných bodů afinity

$$x' = -x - y + 4$$

$$y' = y$$

řeší studentka soustavu

$$x = -x - y + 4$$

$$y = y.$$

Z druhé rovnice usoudí, že $y = 0$, a afinita má tedy jediný samodružný bod $[2, 0]$.

Příklad 4 Při řešení známé úlohy o vlastnostech čísel tvaru n^2+n+41 dojdou studenti k závěru, že $n^2 + n + 41$ je pro každé přirozené číslo n prvočíslem.

Uveďme zde originální znění „důkazu“ této hypotézy.

Předpokládejme, že $n^2 + n + 41$ je číslo složené. Pak existují přirozená čísla n_1, n_2 tak, že platí

$$(n - n_1)(n - n_2) = n^2 + n + 41.$$

Výraz $n^2 + n + 41$ má tedy celočíselné kořeny n_1, n_2. Ale kořeny rovnice

$$n^2 + n + 41 = 0$$

jsou $n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 41}}{2}$ a nejsou tedy reálné. Číslo $n^2 + n + 41$ musí být prvočíslem.

Tento příklad je dokladem formálního zvládnutí matematických pojmů, hypotetický rozklad je falešným signálem pro řešení rovnice, která nemá s úlohou nic společného.

Příběh má ovšem dohru. Když už se našel student, který objevil, že číslo $41^2+41+41$ je dělitelné číslem 41, „vytasilo“ se několik studentů s kalkulačkami, aby ověřilo, že skutečně

$$41^2 + 41 + 41 = 1681 + 41 + 41 = 1763 = 41 \cdot 43!$$

Zdá se, že na negramotnost studentů si už zvykáme. Jak jinak lze zdůvodnit výskyt takovéto úlohy „z praxe“ v přijímacích zkouškách na jedno naše čtyřleté gymnázium?

Příklad 5 Odveze auto s nosností 15 t písek, který je složen na hromadě tvaru rotačního kužele? Obvod podstavy je 1 256 cm. Délka strany kužele je 2,5 m. Hustota písku je 1 600 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Pomocný údaj: $\sqrt{2,25} = 1,5$ ([4], str. 62).

Nemám k dispozici žádnou studii, která by objektivně informovala o úrovni kultury numerického počítání u našich maturantů. Příklady, s nimiž se v praxi setkávám, jsou však varující. Uvědomíme-li si tendence dokumentů [1] a [2], podle nichž se zodpovědnost za vzdělávací programy přesouvá na jednotlivé školy, při omezení vstupních (přijímacích) zkoušek, při hodnocení založeném na všestranné diagnóze vývoje žáka ([1], str. 40), musím vyslovit obavu, že na rozdíl od Bílé knihy (str. 38) se domnívám, že připravovaná reforma otevírá prostor i pro nižší efektivitu vzdělávání.

Více matematiky – méně matematické kultury?

V šetření TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) byly před několika léty zadány čtyři stejné úlohy na konci základní a na konci střední školy. Jsme jedinou zemí světa, která má celkovou úspěšnost středoškoláků nižší než úspěšnost žáků osmých ročníků ([6]).

Uveďme zde informace aspoň o jedné z porovnávaných úloh.

Příklad 6 Úlohu *Kolik kalorií je ve 30 gramové porci jídla, je-li ve 100 g tohoto jídla 300 kalorií* vyřešilo správně 78% žáků základní školy, ale pouze 61% žáků střední školy. K řešení úlohy stačí „zdravý selský rozum“, matematická kultura „muže z ulice“. Není dobrou vizitkou naší školy, že studiem matematiky se orientace studentů v základních otázkách porozumění kvantitativním vztahům, s nimiž se setkávají v realitě, snižuje.

Růst objemu matematických poznatků nemusí znamenat růst úrovně matematické kultury. Naopak: přemíra poznatků může vést v praxi k formálnímu poznání, k vědomostem snad reprodukovatelným u zkoušek, ne však použitelných při řešení úloh nebo dokonce problémů ze života.

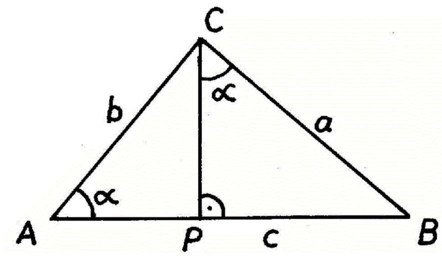
Umění řešit úlohy

Umění řešit úlohy patří sice mezi nejdůležitější složky matematické kultury, neexistuje však žádný návod jak úlohy, pokud to nejsou úlohy rutinní, triviální nebo typové, naučit řešit. Že je řešení problémů charakteristické pro matematiku je všeobecně známé. Přitom přirozeně nejde jen o „velké“ matematické problémy typu *Fermatovy věty* nebo *konstrukce pravidelných mnohoúhelníků pravítkem a kružítkem*, ale i o problémy techniky, vědy a společnosti. Když se Čapkovi mloci naučili „užívat strojů a čísel, ukázalo se, že to stačí, aby se stali pány světa“ ([7], str. 241). Podstatnou složkou umění řešit problémy je umění vidět souvislosti, a to i mezi jevy, které spolu zdánlivě nesouvisejí.

Umění vidět je důležitá složka matematické kultury. Protože jsem v minulosti věnoval této problematice knihu [8] a článek [9], připomenu zde pouze příhodu, která se mi stala před několika dny. V Plzni jsem přednášel pro učitele a zažil jsem spolu s nimi prožitek umění vidět na následujícím příkladu.

Příklad 7 Na základě myšlenek z Polyovy knihy [10] jsem uvedl tento důkaz *Pythagorovy věty*:

V označení podle obr. 1 platí pro trojúhelníky a jejich obsahy



Obr. 1

$$\triangle ABC = \triangle BPC \cup \triangle APC, \tag{1}$$

$$S_{ABC} = S_{BPC} + S_{APC}. \tag{2}$$

Sestrojíme-li „nad stranami“ a, b, c trojúhelníku ABC čtverce podle obr. 2, je zřejmé, že platí

$$S_{ABC} = kc^2,\ S_{BPC} = ka^2, S_{APC} = kb^2. \tag{3}$$

To ovšem znamená, v důsledku rovnosti (2), že

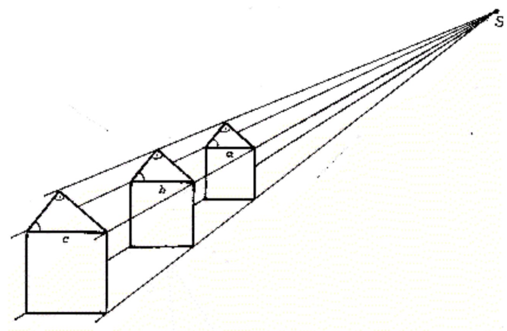
$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{4}$$

Číslo k lze rovněž snadno vypočítat ($k = \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha$), jeho existence je však z obr. 2 vidět.

Jeden z účastníků přednášky (S. Zachariáš) uvedl, že tvrzení je patrné z obr. 1 na základě věty, že poměry obsahů dvou podobných útvarů jsou rovny druhým mocninám jejich poměru podobnosti. Platí totiž

$$S_{BPC} = \frac{a^2}{c^2} \cdot S_{ABC},\ S_{APC} = \frac{b^2}{c^2} \cdot S_{ABC}. \tag{5}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnosti (2), dostaneme ihned tvrzení (4).



Obr. 2

Podobně postupuje i *R. Thiele* v knize [11] (str. 128). V označení podle obr. 3 platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv_c,\ S_{BPC} = \frac{1}{2}av_a,\ S_{APC} = \frac{1}{2}bv_b,$$

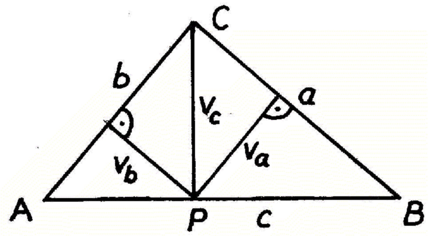
$$\frac{v_a}{v_c} = \frac{a}{c},\ \frac{v_b}{v_c} = \frac{b}{c}.$$

Protože $v_a = v_c \cdot \frac{a}{c},\ v_b = v_c \cdot \frac{b}{c}$, přejde rovnost (2) v rovnost

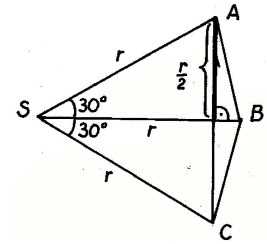
$$cv_c = \frac{a^2 v_c}{c} + \frac{b^2 v_c}{c},$$

která je ekvivalentní s tvrzením (4).

Umění vidět lze přirozeně sledovat a pěstovat i při řešení jednoduchých početních úloh.



Obr. 3

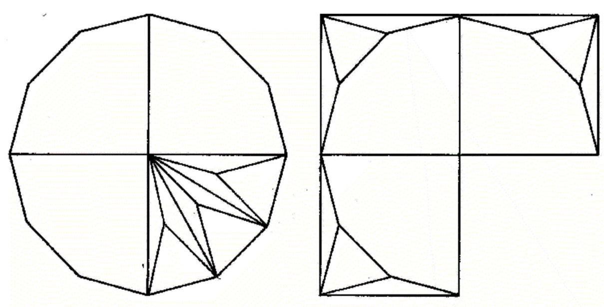


Obr. 4

Příklad 8 Při různých příležitostech jsem zadával úlohu: *Určete obsah pravidelného dvanáctiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru r.* Mnozí studenti počítali základnu rovnoramenného trojúhelníku pomocí kosinové věty, užívali sinovou větu, Heronův vzorec a řadu dalších poznatků, ačkoliv řešení úlohy je ihned vidět podle obr. 4:

$$S = 12S_{ABC} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot r = 3r^2$$

K tomuto výsledku došel neznámý čínský matematik někdy kolem r. 300 n. l. na základě obr. 5.



Obr. 5

Uveďme několik „správných“ výsledků řešení naší úlohy, s nimiž jsem se setkal:

$S = 6r^2 \sin 30^{\circ}$
$S = 12r^2 \sin 15^{\circ} \cdot \cos 15^{\circ}$
$S = 12r^2 \sin 75^{\circ} \cdot \cos 75^{\circ}$
$S = 6r^2 \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sin 75^{\circ}$

$S = \frac{12r^2 \sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ}{2 \sin 75^\circ}$

$S = 12 \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$S = 3r^2 \cdot \frac{1}{\sin 75^\circ} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16 \cdot \sin^2 75^\circ}}$

$S = 12 \cdot \sqrt{\frac{r^4 \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot (2+\sqrt{2+\sqrt{3}})(2-\sqrt{2-\sqrt{3}})}{16}}$

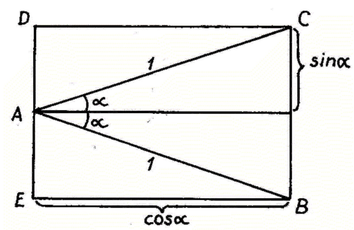
$S = 6r^2 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 30^\circ}{4 \sin^2 75^\circ}}$

Matematik může namítnout, že na „formě“ správného výsledku nezáleží. To ovšem neplatí, pokud máme s výsledkem dále pracovat.

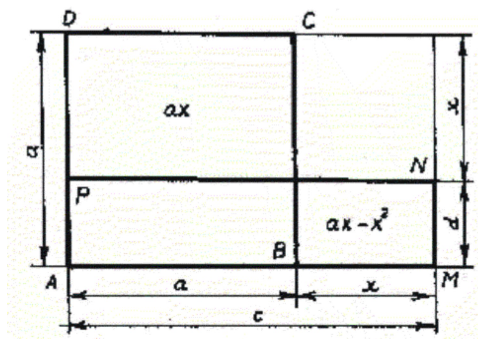
Je znepokující, že řešitelé neviděli nesprávnost výsledků např. ani v těchto případech:

$S = 6 \cdot \sqrt{2r^2 \cos \gamma} \cdot r^2 - \frac{3}{2} \sqrt{2r^2 \cos \gamma} \cdot r^2 \cos \gamma$

$S = 6r^2 \cdot \frac{\sqrt{2} - r\sqrt{3}}{\cos 15^\circ}$



Obr. 6



Obr. 7

Ke kultivaci matematické kultury náleží hledání vhodných cest k řešení úloh, pěstování ekonomie myšlení a nalézání „pěkných“ výsledků.

Umění vidět znamená především vidět souvislosti. Zdá se mi, že tu naše škola rozvíjí málo.

Proč např. neuvést při probírání vzorce

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad (6)$$

jeho geometrickou interpretaci podle obr. 6? Proč nepřipomenout, že vzorec (6) a vzorec (7)

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \qquad (7)$$

vyplývají z Moivreovy věty pro $n = 2$?

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

I některé výsledky, obvykle dokazované pomocí prostředků matematické analýzy, lze názorně ověřit. Uveďme zde aspoň známou ilustraci věty:

Ze všech pravoúhelníků téhož obvodu má čtverec největší obsah.

Má-li mít obdélník stejný obvod jako čtverec, musí mít jednu stranu o x větší, druhou o x menší, než je strana a čtverce. Takovéto dva pravoúhelníky můžeme umístit do polohy podle obr. 7 ($ABCD$ je čtverec se stranou a, $AMNP$ je obdélník se stranami $c = a + x$, $d = a - x$), z něhož je patrné, že obsah obdélníku $AMNP$ je o x^2 menší než obsah čtverce $ABCD$.

Jsem si vědom toho, že ve škole je málo času, přesto však jsem přesvědčen, že zařadit občas úlohy, které poukazují na souvislosti různých oborů, je dobrou příležitostí k pěstování matematické kultury.

Jazyky matematiky

Každý zkušený učitel matematiky patrně potvrdí, že problémy s řešením úloh často začínají při porozumění textu úlohy, případně při jejím převádění do jazyka aritmetiky nebo algebry. Jazyk aritmetiky poznávají děti od první třídy, přitom je to jazyk, který „pracuje“. Transformací jeho znaků dostáváme fakta, která nebyla z původní reality zřejmá. Podobně je tomu i u jazyka algebry. Tyto jazyky je nutno žáky učit. Úpravy algebraických výrazů jsou důležitou složkou matematického vzdělávání, které je nutno věnovat náležitou pozornost. Úlohy „jazykového“ typu mohou být i zajímavé:

Příklad 9 Při různých příležitostech dávám studentům či absolventům střední školy úlohu: *Znázorněte v pravoúhlém systému souřadnic množinu všech dvojice* $[x, y]$ *reálných čísel, pro něž platí:*

$$\sin x \cdot \cos y \geqq 0 \tag{8}$$

Ačkoliv jde při řešení úlohy o odpovědi na snadné otázky typu: *Kdy je součin dvou reálných čísel nezáporný? Pro která x je* $\sin x \geqq 0, \ldots$, jen zřídkakdy dojdou studenti ke správnému výsledku („nekonečné šachovnici“).

Nedostatek v porozumění matematickému textu souvisí patrně s celkovou úrovní jazykové kultury našich škol. Zdá se mi, že její úroveň neustále klesá. Dokumentujeme to několika příklady z přijímacích zkoušek na střední školy.

Příklad 10 V matematice bychom měli vést žáky k pečlivé interpretaci daného textu. V přijímacích zkouškách na osmileté gymnázium byla zadána úloha:

Doplň do prázdného políčka číslo z těchto možností: 8, 10, 12, 14.

3	1	3	12
1	2	2	6
2	2	2	

Každý normální člověk, každý matematik, musí uznat, že úloha má 4 řešení. Do prázdného políčka můžeme doplnit libovolné z čísel 8, 10, 12 a 14. Jak má dítě vytušit, že přijímací komise měla na mysli toto: Čísla v posledním sloupci vznikla z čísel v prvních třech sloupcích téhož řádku podle určitého pravidla. Podle téhož pravidla doplň čísla do prázdného políčka.

Příklad 11 Je důležité pro přijetí žáka ke studiu, aby znal konvence požadované v úloze:

Kterým písmenem se znamená množina čísel

$$\{\cdots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}?$$

Nabídnuté odpovědi: a) $\mathbf{Z}$ b) $\mathbf{N}$ c) $\mathbf{R}$. (Reprodukujeme zde původní znění textu úlohy.)

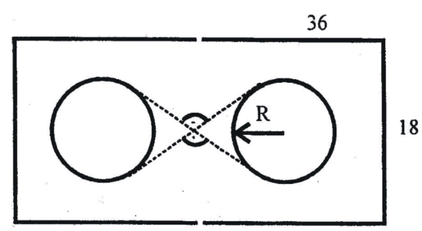
Příklad 12 Vyjadřování v matematice by mělo být přirozené. Za nevhodnou považuji např. formulaci:

Výsledek tohoto výrazu uveď desetinným číslem:

$$\frac{\sqrt{0,09} - 1,2^2}{0,3 \cdot 1,2 - 0,06} =$$

Příklad 13 Text úlohy by měl být jednoznačně srozumitelný, neměl by být matoucí, jako je tomu u úlohy, kterou i s obrázkem přesně reprodukujeme:

Na obrázku (kóty v metrech) je nakreslena dráha („osmička“) pro drezúru koní. Kolik metrů ujde kůň, když tuto dráhu absolvuje desetkrát?



V mnoha matematických publikacích se vyskytují prohřešky proti kultuře geometrického zobrazování stereometrických vztahů. I na úrovni žáků základní školy lze vysvětlit např. zobrazení koule jako kruhu se správně nakresleným rovníkem a póly atp.

Zavádění pojmů

Ačkoliv všichni máme bohaté zkušenosti s tím, jak si postupně osvojujeme mnohé matematické pojmy, jako např. přirozené číslo, zlomek, trojúhelník, ..., v průběhu setkávání se s nimi a při jejich užívání, ačkoliv *Milan Hejný* kategoricky varuje „privčas povedená definícia je nejčastejším zárodkom pojmotvorných deformácií“ ([12], str. 32), zdá se, že někteří autoři učebnic a někteří učitelé jsou přesvědčeni, že pojmy se zavádějí definicemi. Definici chápeme jako vymezení pojmu v jistém jazyku. Poznávací proces není přirozeně bez rozvíjení jazyka disciplíny možný, přesto však se opírá především o zkušenosti s pojmem. Americký učitel *John Holt* vyjadřuje nebezpečí verbalismu velmi výstižně: „My učitelé, možná všechny lidské bytosti, jsme v zajetí pozoruhodné iluze. Myslíme si, že můžeme vzít obrázek, konstrukci, fungující představu čehosi vybudovanou v naší hlavě na základě dlouhé zkušenosti a znalosti a přeměnou této představy do posloupnosti slov ji přenést celou do hlavy někoho jiného.“ ([13], str. 159). Samozřejmě musíme vysvětlit pojem, popsat jeho vlastnosti, ale tímto vymezením zavedení pojmu nekončí, ba ani nezačíná. Formulace typu „vektor je uspořádaná dvojice reálných čísel“, „komplexní číslo je uspořádaná dvojice reálných čísel“, ... představují podle mého názoru deformace obou pojmů, které mohou být definovány jen v rámci příslušné algebraické struktury. Uspořádané dvojice vektor nebo komplexní číslo pouze reprezentují např. při řešení úloh. Přitom podle úrovně studujících je účelné volit odpovídající úroveň přesnosti a přirozenou míru symboliky. Např. v učitelském vzdělání patrně stačí intuitivní zavedení pojmu uspořádané dvojice, místo někdy uváděné definice

$$(a, b) =_{df} \{\{a,\}, \{a, b\}\},$$

která má své teoretické oprávnění. Vektorový prostor je účelné chápat jako strukturu s dvěma operacemi a explicitně formulovanými vlastnostmi a nikoliv formálně jako strukturu

$$[V;\ \oplus;\ R^{+,\cdot};\ \odot],$$

jejíž definice zaujímá téměř celou stránku.

I při zavádění pojmů znamená respekt k matematické kultuře promýšlení smyslu a úrovně přesnosti.

Nemyslím, že by formální definice relace jako libovolné podmnožiny kartézského součinu a funkce jako jednoznačné relace přispívaly k matematické kultuře studentů.

Podobně pokládám za nevhodné např. snahy o definici rovnice, které připomenu dalším, dnes již historickým příkladem.

Příklad 14 V učebnici pro 1. ročník gymnázia z roku 1977 se nejdříve definovala rovnost dvou výrazů a pak pojem rovnice ([14], str. 120, 150):

O dvou výrazech s týmiž proměnnými říkáme, že jsou si rovny v množině M (společném definičním oboru) jedině v případě, kdy a) do obou lze na místa proměnných dosadit symboly všech prvků množiny M, b) oba dávají pro stejné hodnoty proměnných stejné výsledky.

Rovnicí s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ nazýváme každou výrokovou formu $V(x)$, která je zápisem rovnosti dvou výrazů $l(x), p(x)$ ve tvaru

$$l(x) = p(x), \tag{9}$$

výraz $l(x)$ nazýváme levou stranu rovnice, výraz $p(x)$ pravou stranu rovnice.

Řešit v množině $\mathbf{R}$ rovnici $V(x)$ znamená určovat výčtem prvků její obor pravdivosti P v množině $\mathbf{R}$. Prvky množiny P nazýváme kořeny rovnice, proměnnou v rovnici nazýváme neznámá.

Chceme-li dojít k pojmu rovnice tak, jak ho intuitivně chápeme a jak ho potřebujeme zavést, je účelné dodat, že (9) představuje zápis rovnosti dvou výrazů, které se nerovnají. Zdá se mi, že snaha po takovéto precizaci pojmů ve vyučování nepřispívají k zvyšování matematické kultury. Rovněž výklad toho, co znamená *řešit rovnici* asi není formulován nejvhodněji.

Definice ve školské matematice by měly podle mého názoru hrát podobnou roli jako v matematice. Měly by být zavedeny v okamžiku, kdy jsou pro další práci potřebné a na takové úrovni přesnosti, která je nutná. „K pochopení pojmu skrze definici dospějeme hledáním odpovědi na otázku, proč je takto definován. Častěji však porozumíme definici teprve na základě pochopení pojmu“ ([15], str. 62).

Argumenty, dokazování a důkazy

Známý český literát *J. S. Machar* (1864 – 1942) se přiznává: „Při měřictví dovedl jsem všechny důkazy o rovnosti úhlů při dvou rovnoběžkách proťatých přímkou třetí, o shodnosti trojúhelníků a pod. – ale nikdy jsem tomu, co jsem dokázal, v nitru nevěřil. Nevěřil jsem trojčlenkám ani počtu řetězovému, algebře pak nejen že jsem nevěřil, ale vůbec ani nikdy nerozuměl“ ([16], str. 53).

O podobné zkušenosti vyprávěla kdysi známá polská matematička *Z. Krygowská*. Po hodině se ptá žákyň sedmého ročníku co dělali při geometrii. Odpověď zněla: „Dokazovali jsme, že shodné trojúhelníky jsou shodné. Všichni jsme to viděli, jen paní učitelka ne a složitě to dokazovala.“ Otázka důkazů ve vyučování se často řeší bez ohledu na úroveň studentů. V roce 1986 vyšla v Moskvě Pogorelovova učebnice geometrie pro 6. – 10. ročník, která byla důsledně deduktivně koncipovaná ([17]). Měl jsem příležitost navštívit jednu moskevskou školu, kde se podle ní vyučovalo. Vyučující mi s pýchou sdělila, že důkaz *Pachsova axiomu* (*Jestliže přímka, která neprochází žádným vrcholem trojúhelníku, protíná jednu jeho stranu, pak protíná právě jednu ze zbývajících jeho stran* ([17], str. 14)) již znají všichni žáci šesté třídy – až na tři. Znalost reprodukce důkazu prověřovali dva pověření žáci. S formálním přístupem k důkazům se můžeme setkat i na škole vysoké. Jedna má studentka si např. povzdechla: „Na přednáškách z matematiky dokazujeme i nemožné! Ale jak spolu věci souvisejí, to se neučíme.“

Jak chápat důkaz ve vyučování? Podle mého názoru ve smyslu *Šichanovičovy* knihy [18]: *Důkaz je úvaha, která přesvědčuje.* To ovšem znamená, že důkaz nemá jen charakter logický, ale roli zde hrají i aspekty psychologické. Ve školní praxi by mělo jít postupně o hledání argumentů pro potvrzení či vyvrácení tvrzení a o hledání cest od toho, co jsme již uznali za pravdivé, k tomu, o čem máme dosud pochybnosti. Přirozeně jsou zde i další aspekty, např. jak spolu souvisejí jednotlivá fakta atp., nicméně aspekt „přesvědčovací“ se mi jeví jako základní.

Dokazovat všechna tvrzení ve vyučování matematice asi nemůže být kategorickým požadavkem - nevyhnuli bychom se přitom formálním přístupům. Rozehrát však některé důkazy jako hledání a nalézání cest k zdůvodnění tvrzení je obtížný a důležitý úkol na každé úrovni matematického vzdělávání. Učit matematice bez argumentace a bez dokazování přirozeně rovněž nelze.

Nakonec uveďme dva příklady důkazových úloh pro střední školu určené čtenáři, který je nezná.

Příklad 15 *Dokažte, že každé prvočíslo větší než 5 lze psát ve tvaru* $6k+1$ *nebo* $6k+5$*, kde* k *je přirozené číslo.*

Příklad 16 *Dokažte, že existuje 100 (1000, 10 000, ...) za sebou jdoucích přirozených čísel, která jsou všechna prvočísly.*

Závěry

Rozvíjet matematickou kulturu studenta střední školy je důležitější než předávat mu formálně matematické poznatky.

V čem spočívá kultura školské matematiky?

1. Matematika musí mít smysl pro toho, kdo ji studuje.
2. Matematika musí fungovat.
3. Matematice musí student rozumět.
4. Složkou matematické kultury jsou jazyky matematiky.
5. Složkou matematické kultury jsou metody matematiky.
6. Složkou matematické kultury je umění počítat.
7. Složkou matematické kultury je umění vidět (souvislosti).

8. Složkou matematické kultury je umění dokazovat.
9. Složkou matematické kultury je vnímání krásy matematiky.
10. Složkou matematické kultury je tvořivost, zejména při řešení problémů.

Pěstování matematické kultury je významný každodenní úkol školy, který lze plnit na nejrůznějších úrovních. Věnujme mu náležitou pozornost i u nadaných studentů.

„Otázka české vzdělanosti není otázkou osnov, ba ani otázkou prosazení nové didaktiky. Je otázkou českého učitele: jeho výběru, přípravy a trvalého rozvoje“ (Ivo Možný, [19]).

Matematickou kulturu může úspěšně pěstovat v praxi jen takový učitel, který sám je na dobré matematické a kulturní úrovni.

Literatura

[1] *Národní program rozvoje vzdělávání v České republice. Bílá kniha.* Tauris, Praha 2001, ISBN 80-211-0372-8.

[2] *Rámcový vzdělávací program.* VÚP, Praha 2002.

[3] Schweitzer, A., *Život v pralese*. Orbis, Praha 1972.

[4] Havlínová, A., *Testy z matematiky, 2003*. Didaktis, Brno 2002, ISBN 80-86285-51-0.

[5] Šulc, P., *Řešené testy nejlepších gymnázií ČR*. Pierot, Praha 2003, ISBN 80-86272-27-3.

[6] Straková, J., Tomášek, J., Palečková, J., *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání*. Výzkumný ústav pedagogický, Praha 1996.

[7] Čapek, K., *Válka s mloky*. SNKLHU, Praha 1954.

[8] Kuřina, F., *Umění vidět v matematice*. SPN, Praha 1990, ISBN 80-04-23753-3.

[9] Kuřina, F., Příběh jedné úlohy o trojúhelníku. *Matematika, fyzika, informatika*, č. 4, 2002, ISSN 1210-1761.

[10] Polya, G., *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton University Press, 1954.

[11] Thiele, R., *Matematické důkazy.* SNTL, Praha 1985.

[12] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava 1989, ISBN 80-08-00014-7.

[13] Holt, J., *Jak se děti učí.* Strom, Praha 1995, ISBN 80-901662-7-X.

[14] Šedivý, J., *Matematika pro 1. ročník gymnázia.* SPN, Praha 1977.

[15] Neubauer, Z., *Smysl a svět.* Moravia press, Praha 2001, ISBN 80-86181-45-6.

[16] Machar, J. S., *Konfese literáta.* Čs. spisovatel, Praha 1984.

[17] Pogorelov, A. V., *Geometrija.* Prosveščenie, Moskva 1986.

[18] Šichanovič, J. A., *Vvedenije v sovremennuju matematiky.* Nauka, Moskva 1965.

[19] Možný, I., Po jeho boku stojí jen Bůh. *Respekt*, č. 4, 2003, ISSN 0862-6545.

Korespondenční semináře

Hana Lišková[1]

Abstrakt: Matematické korespondenční semináře jsou jednou z podstatných forem práce s matematickými talenty. Příspěvek popisuje základní charakteristiky seminářů a jejich filozofii. Pro ilustraci jsou uvedena i pravidla jednoho z mnoha probíhajících seminářů.

Abstract: Mathematical correspondence seminares are one of the important forms of work with talented pupils. The contribution describes the basic characteristics of seminars and their philosophy. As an illustration, the rules of one of the many on-going seminars are given.

Korespondenční semináře jako jedna z forem systematické práce s talentovanými dětmi má v mnoha místech naší republiky už delší tradici (vznikaly postupně podle slovenského vzoru v 80. letech minulého století). Většinu korespondenčních seminářů vymezují tyto základní charakteristiky:

- Osloven je širší okruh žáků (oproti matematické olympiádě)

[1] *VOŠP a SPgŠ, Litomyšl, liska@lit.cz*

- Soutěž má zpětnou vazbu (soutěžícím se zasílají vzorová řešení)
- Soutěž je dobrovolná s volnou vazbou na školu (tzn. učitel není aktérem soutěže, nehodnotí se škola podle výsledků v soutěži, korespondence se posílá na adresu soutěžícího apod.)
- Soutěž probíhá celoročně, a tak podporuje systematickou práci dětí
- Podporuje se zájem dětí (i veřejnosti, zvláště rodičů) o matematiku
- Využívají se úlohy z rekreační matematiky
- Úlohy se zadávají ve formě příběhů (pro mladší žáky ilustrované)
- Způsob hodnocení zohledňuje věk soutěžících

Na ukázku uvádím pravidla (včetně bodového hodnocení) korespondenčního semináře Matýsek (Litomyšl)[2]:

1. Soutěžit můžeš, pokud jsi žákem nejvýše 5. třídy a písemně se přihlásíš.
2. Během školního roku Ti pošleme čtyři matematické příběhy se čtyřmi úlohami, které vyřešíš (ne nutně všechny) a řešení se zdůvodněním (výsledek nestačí) zašleš na naši adresu.
3. Řešení každé úlohy piš na samostatný list a ten podepiš.
4. Za každou úlohu získáš nejvýše 5 bodů a po sečtení bodů za všechny řešené úlohy Ti ještě připíšeme prémii podle následující tabulky. Tak se zvýhodní mladší žáci.

Prémie	4. třída	5. třída
5	18,5 – 20 b.	19,5 – 20 b.
4	16,5 – 18 b.	18,5 – 19 b.
3	14,5 – 16 b.	17,5 – 18 b.
2	12,5 – 14 b.	16 – 17 b.
1	10,5 – 12 b.	14,5 – 15,5 b.

5. Do obálky s řešením vlož prázdnou ofrankovanou obálku se svou adresou.
6. Po každém kole soutěže Ti zašleme vzorové řešení všech úloh a výsledkovou listinu.
7. Dvacet pět nejlepších řešitelů pozveme po každém kole na odpoledne plné her, hádanek, soutěží a legrace.

Filozofií korespondenčních seminářů (jak jsem je sama poznala) je pracovat s dětmi ve dvou úrovních, a to v rovině individuální (vlastní soutěž jednotlivců)

[2]Každý korespondenční seminář má svá specifická pravidla, která si organizátoři upravují dle svých potřeb.

a v rovině týmové spolupráce (soutěže a další aktivity v rámci soustředění nejúspěšnějších řešitelů). Teprve tak vnímám celou aktivitu jako vyváženou a přínosnou. Obě zmiňované úrovně kladou na soutěžící jisté nároky, například donutit se řešit problémové úlohy a hlavně řešení písemně a zároveň srozumitelně zpracovat, hlídat termín a řešení odeslat, vracet se k úlohám, které jsou pro řešitele „oříškem" atd. Na soustředění se od dětí vyžaduje například nutnost spolupráce s vrstevníky, aktivita sportovní i umělecká, schopnost akceptovat a pak i vyžadovat náročný program, ale i charakterové kvality jako jsou ohleduplnost, smysl pro fair-play, trpělivost a skromnost atd.

Obrovským přínosem dlouhodobého fungování korespondenčních seminářů je vznik nové komunity lidí, kteří mají společné zájmy, jsou naladěni k aktivní práci a učí se kontinuálně jeden od druhého. V naší lokalitě (Litomyšl a okolí) se podařilo pomocí tří korespondenčních seminářů kontinuálně podchytit zájemce o matematiku, a to konkrétně v semináři Matýsek (4.–5. tř.), Mates (6.–7. tř.) a Pikomat (8.–9. tř. a odpovídající ročníky gymnázií). Radostné je, že se někteří absolventi seminářů věnují matematice dodnes. Všem případným organizátorům tento model vřele doporučujeme a přejeme mnoho sil a dobrých nápadů při vedení korespondenčních seminářů. Zájemcům rádi poskytneme bližší informace (liskova@lit.cz).

Literatura

[1] Hejný, M., Hejný, V., *Pracovné materiály školiaceho strediska tábora mladých matematikov.* Pytagoras. Bratislava 1992.

[2] Zhouf, J., Laně, F., Hradečná, J., *10 (+1) let korespondenčního semináře Pikomat v Praze*. Grafia-Gryč, Kutná Hora 1999.

[3] Vaňková, J., *Matematický korespondenční seminář „Filip" školní rok 1994/95.* (metodický materiál).

[4] Márová, J., Odvářková, M., Lišková, H., *Matýskova matematika.* (práce SOČ – 2001).

[5] Bachratý, H., Bachratá, K., Burjan, V., *Odborný program matematických krúžkov na II. stupni ZŠ (2. časť).* Pedagogický ústav, Bratislava 1987.

Efekty očekávání a produkce výborného žáka[1]

Alain Marchive[2]

Abstrakt: Různé teorie ukazují na fakt, že je možné ovlivnit výkon a pohled na žáka již tím, že ho za výborného považujeme, že je tak veřejně označen. Příspěvek se zabývá efektem očekávání, jeho uplatňováním, podmínkami ovlivňování učitelova hodnocení a identifikace talentu, závislostí efektu na věku a informovaností učitele o tomto efektu.

Abstract: Various theores point to the fact that it is possible to influence a pupil's performance only by regarding him/her as excellent and by publically labelling him/her as such. The contribution deals with the effect of expectation, its use, conditions of the influence of a teacher's assessment and identification of a talented student, dependence of the effect on the age and on the fact that the teacher is informed about it.

Nemůžeme popřít, že existují žáci mnohem lepší než ostatní stejně staří. Že tento jev bude více patrný v matematice než v ostatních předmětech, se vysvětluje bezpochyby specifickým charakterem vědomostí, o které jde v matematice. Bylo by velmi těžké měřit s přesností nebo také jistotou převahu toho či onoho žáka v oblasti literární, básnické nebo výtvarné. Má snad rozpoznání těchto rozdílů vést k vyrovnání didaktické činnosti v praxi běžné třídy? Jinak řečeno – zda označení žáků za dobré nebo nadané v matematice nevede učitele k tomu, aby se choval didakticky tak, že by u žáka přiměřeně vytvářel a posiloval směřování k původnímu výchozímu očekávání?

Všeobecně je znám výzkum Rosenthala a Jacobsona (1971) známý jako „Pygmalion efekt“ jako proroctví automatické realizace.

Připomeňme si nejdříve, kdo je Pygmalion. Mýtus Pygmaliona se objevil poprvé v Ovídiových Metamorfózách (kniha X). Příběh lze shrnout následovně: Pygmalion byl zatvrzelý starý mládenec, zapřisáhlý nepřítel žen; vytvořil výjimečné umělecké dílo, sochu ženy, ze slonoviny. Dlouho po svém díle toužil, socha vypadala jako živá. Pygmalion obětoval Venuši a ta vyslyšela jeho prosbu o oživení sochy a přání se vyplnilo.

Pygmalionský mýtus pochází od Ovídia, mýtus tvorby plastické, estetické. Bernard Shaw ve své komedii Pygmalion publikované v roce 1916 přetvořil tento mýtus v pedagogickou proměnu. Zařadil na scénu profesora fonetiky Higginse,

[1]Přeložila Michaela Kaslová

[2]*Départemet des Sceinces de l'éducation, Université Victor Sagalen, Bordeaux, Alain.Marchive@sc-educ.u-bordeaux2.fr*

který z Elisy Doolitlové – pouliční květinářky stvořil slečnu vybraných mravů tím, že jí učil jazyk dobré londýnské společnosti. Už nejde o citový vztah zamilovaného Pygmaliona do své sochy, ale vztah mezi autoritativním pedagogem a jeho žákem, uvádějící užití tohoto mýtu do výchovné oblasti.

Pygmalion efekt by mohl být shrnut jako vliv efektu učitelova očekávání na žákovy výsledky. (Pozn. překladatele: srovnej princip uzavřené a otevřené budoucnosti – Matějček a další.) Žák dosáhne tím lepších výsledků ve škole, čím lepší mínění má o něm učitel.

V roce 1964 Rosenthal s Jacobsonem provedli svůj experiment v 18 třídách na škole Oak School. Provedli test (TOGA od Flagena), který umožnil výpočet IQ u žáků. Test byl prezentován jako prognostický, předpovídající u žáků rozvinutí nebo nastartování školního úspěchu. Na začátku následujícího školního roku dali experimentátoři každému z 18 vyučujících seznam žáků, kteří podle výsledků měli spět k úspěchu. Ve skutečnosti experimentální žáci (1 až 9 ve třídě) byli vylosováni v poměru odpovídajícímu 20 % žáků školy. Zbytek tvořil kontrolní skupinu. Mezi oběma skupinami existoval jediný rozdíl, a to rozum učitele. Jde o klasický typ experimentu. Byly provedeny tři post-testy. První po půl roce v pololetí, druhý na konci školního roku a třetí na konci následujícího školního roku. Výsledky byly na úrovni intelektuálního rozvoje, kde se kontrolní skupina zlepšila o 8 bodů, zatímco experimentální o 12 bodů. Nicméně tento efekt se projevil právě v nižších ročnících. V prvním ročníku v kontrolní skupině o 12 bodů a v experimentální o 27 bodů. Ve druhém ročníku v kontrolní skupině o 7 bodů a v experimentální o16,5 bodů. V ostatních ročnících je rozdíl nulový nebo není statisticky významný.

Rosenthal s Jacobsonem z toho vyvozují, že očekávání osoby mající na zřeteli chování jiné osoby se může transformovat z předpovědi na zautomatizovanou realizaci minimálně v nižších třídách. Vyvozují z tohoto pohledu určité interpretace: malí jsou více poddajní, méně stabilní, v tomto období života více podléhají změnám, malí mají méně zavedenou pověst než starší a učitelé tady mohou snadněji věřit ujištění experimentátora, učitelé je pokládají za schopné vývoje, malí žáci jsou citlivější na zvláštní znamení v hodině, která jim dávají najevo učitelé. Podle Roshentala a Jacobsona obdržené výsledky potvrdily hypotézu: předsudky jedné osoby týkající se chování jiné osoby se mohou stát předpokladem pro chování automatického typu.

Četné práce ukazují, že ve skutečnosti tento výzkum je sporný ve své metodologii a že výsledky nejsou příliš průkazné (počet velmi slabých žáků v experimentální skupině – 17 v prvním a druhém ročníku, nezvyklost malých žáků na test TOGA, podmínky prezentace experimentu učitelům, neschopnost učitelů identifikovat žáky, na které byli upozorněni. Mnohonásobné následné experimentování, které bylo laboratorní i přirozené, nepotvrdilo zcela výsledky získané Rosenthalem a Jacobsonem, americkými výzkumníky. Ale nedávný výzkum provedený ve Francii na skupině středoškoláků nicméně prokázal hypotézu (T, M, B). Potvrdil, že očekávání učitele není bez efektu na vedení studenta. Učitel – Pygmalion formuje svého žáka, který se naopak chová podle očekávání učitele. Otázka, která zůstává latentní: Jak jsou žáci směrováni k adaptaci na očekávání učitele?

První vysvětlení je mýtické. Mýtus, který se týká Pygmaliona, Frankensteina, Golema, proniká do produkce lidské představy. Mýtus vede k plánu zvládnout zcela toho druhého (žáka) v řízení jeho osudu. Osud žáka budiž takový, jaký chceme my. Pygmalionův mýtus nás opět uvádí do archaického světa a do magické kauzality, tj. věříme, že můžeme sami uskutečnit své tužby. Stačí, že Pygmalion věří nebo chce, aby jeho tužby byly splněny. Tato vize zatím ne ještě logická, neboť činnost učitele působí téměř magickým způsobem na žáka, ruší všechny dimenze pedagogického nebo didaktického jednání. To není rozhodující didaktická aktivita učitele, kterou vnáší do procesu, je však rozhodující jako přesvědčení, jako víra, vůle a přání. Psychoanalytická rozprava spatřuje důvody intelektuálního investování do dítěte, jeho schopnosti adaptace na očekávání, přání rodičů.

V knize Drama nadaného dítěte Alice Millerová (1979) ukázala, jak některé děti mají překvapivou schopnost intuitivně, tudíž nevědomě, vycítit potřeby své matky nebo obou rodičů a schopnost se adaptovat na uspokojení těchto očekávání. Když nechce ztratit lásku své matky, když vycítí potřebu své matky nebo učitele, musí přijmout, převzít jejich přání, jejich očekávání a nahradit jimi svá vlastní očekávání a přání. Dítě, žák sebeobdivující bude takto rozvíjet své intelektuální schopnosti, nadání a dělá to často skvěle, poněvadž to je to, co se od něho očekává, ale je to na úkor jeho čistě vlastního vyjádření a jeho rovnováhy, jak to dokazují dvě formy poruch narcisistního typu u nadaných, o kterých hovoří Millerová, poruchy velikášství (potřeba obdivu) a deprese (z toho, že nežije vlastními city). Sociologický výklad není nezajímavý a ukazuje se celkem blízký vysvětlení Resenthala s Jacobsonem. H. Becherr (1985) ve svém díle se pokouší definovat deviaci jako přestoupení akceptované normy, společné dohody a jako výsledek „onálepkování". Za devianty jsou považováni ti, kteří jsou označeni, popsáni, poznamenáni tím, že překročili hranice skupiny. Nešlo by tedy říci totéž o nadání, o nadaném dítěti?

Význam tohoto druhu práce je ten, že opět směřuje ke zkoumání úzkého pohledu na deviaci, na omezený a uzavřený svět. Jde o návrat této otázky do nitra kolektivní činnosti, a tedy o vyzdvihující odpovědnost všech účastníků sociálního života. Studie deviace nemůže být omezena na studii překračování norem (devianti, nadaní žáci), ale musí se ptát také na způsoby, jakými se ustavují normy a jejich vliv na chování těch, kteří jsou „onálepkováni".

To, co nás zde zajímá méně, je tedy hypotetické vysvětlení daného jevu, a to, co nás zajímá více, je způsob, kterým se naplňuje v procesu učení: Kterými didaktickými mechanismy se nyní projevují tyto jevy? Jak se projevuje efekt očekávání ve vyučovacím procesu? Jinak řečeno vraťme se k otázce Rosenthala a Jacobsona. Jak fungoval Pygmalion? Odpověď, kterou nabízejí, je následující. Pro shrnutí řekněme, že díky tomu, co učitel řekl, jak a kdy to řekl, jaké měl výrahy obličeje, gesta a možná i kontakt, mohl učitel komunikovat s dětmi experimentální skupiny, u které očekával zlepšení v oblasti intelektuálních projevů. Taková komunikace spjatá s modifikací pedagogických technik může být přínosná procesu učení dítěte modifikujíc svoji koncepci.

Bylo by dobré ještě zpřesnit, že tato slova, vztahy, gesta vyučujícího jsou nejčastěji vytvořena nevědomým způsobem a zřídka závisejí na uvážené vůli privilegovat nebo vyznamenávat toho či onoho žáka.

Teorie didaktických situací (Brousseau 1998) uvedla vysvětlující rámec takovým způsobem, že očekávané jevy působí ve vyučování matematice většinou díky konceptu didaktické úmluvy (le contract didactique), kterou můžeme definovat jako systém recipročních očekávání. Žák očekává od učitele, že učí (tedy chová se tak, jak učitel očekává), a naopak učitel očekává, že se žák bude učit (učitel se chová tak, aby docházelo k učení). Didaktická (nepsaná, často ani nevyslovená) úmluva, z velké části implicitní, může dávat popud mnohým formám adaptace (na více či méně pádné požadavky učitele) a posílit pozice žáka, ať již byl dobrý, nebo špatný, talentovaný, nebo ne. Tyto jevy se projevují jak ve smyslu pedagogickém (organizace třídy, dispozice žáků, sestavování homogenních nebo výkonnostně heterogenních skupin ap.), tak ve smyslu didaktickém (výběr obsahu učiva, řízení hodiny, organizace interakcí, místo pro institucionalizaci vědomostí, typ hodnocení apod.).

Vezměme dva naprosto protikladné příklady:

(a) v jednom případě učitel stanoví předem rozdíly a nabízí, předkládá výukové situace, adaptované na každý takto definovaný typ žáků (talent, dobrý, průměrný, slabý). Osobní zájem učitele a jeho specifická očekávání se zřetelem na kategorie žáků nemohou tedy posílit rozdíly, označení.

(b) v jiném případě učitel odmítne veškerou diferenciaci a pustí se do přirozeného učení (děti se učí samy). Avšak ignorováním specifik žáků učitel maskuje podstatné zvláštnosti žáků, učitel zakrývá podstatu, umění šíření znalostí, odmítáním učení žáků ustavuje samotnou výchozí diferenciaci.

Jak ukázal Bernard Sarrazy, dobrý i špatný žák jsou didaktické produkty, kategorie nezbytné pro didaktické fungování a pro posun ve vyučovací hodině. Ať již je úroveň třídy průměrná, velmi vysoká nebo naopak velmi nízká, didaktická nezbytnost produkuje neustále žáky nejlepší, tak jako ostatní. Nebezpečí by na-stalo, kdyby osobní očekávání učitele se zřetelem k jedné či dalším kategoriím žáků ho zpravidla směřovalo k takovým didaktickým volbám, že by posiloval tyto přirozené rozdíly, místo aby je spíše redukoval. Ústřední otázka není zvolit mezi naivním rovnostářstvím a smělým elitářstvím, ale nejlepším způsobem je obrátit se k vytváření didaktických situací, kde každý z žáků se může projevit různým způsobem.

Literatura

[1] BECKER, H. S., *Outsiders.* Métailié, 1985, ISBN 2-86424-042-7.

[2] BROUSSEAU, G., *Théorie des situations didactiques*, *La pensée sauvage*. 1998, ISBN 2-738-8410-7.

[3] MILLER, A., *Le drame de l'enfant doué.* PUF, 1979, ISBN 2-13-039688-7.

[4] OVIDE, Métamorphoses in *Les métamorphoses*, tome II. Belles Lettres, 1989, ISBN 2251011234.

[5] ROSENTHAL, R., JACOBSON, L., *Pygmalion a l'école*. Casterman, 1971.

[6] SHAW, B., *Pygmalion*. L'Arcche, 1983, ISBN 2851810197.

[7] TAFALI, E., BELLON, S., MOLINER, P., The role of self esteem in the dynamics of social representations of higher education: An experimental approach. *Swiss Journal of Psychology*, vol. LXI, sept. 2002, ISSN 0-88937-140-7.

Matematický klokan v ČR[1]

Josef Molnár[2]

Abstrakt: Cílem příspěvku je připomenout některé významné mezníky vývoje soutěže Matematický klokan v ČR v mezinárodním kontextu, zmínit se o žákovských strategiích při řešení multiple-choice úloh této soutěže a poukázat na některá úskalí při tvorbě úloh a vyhodnocování výsledků.

[1]Příspěvek zpracován v rámci řešení projektu GAUK 316/2001/A-PP/PedF.
[2]*Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc, molnar@inf.upol.cz*

Abstract: The goal of the contribution is to point out some important landmarks of the development of the competition Mathematical Kangaroo in the Czech Republic in the international context, to describe some solving strategies of pupils for multiple-choice problems from the competition and show some obstacles in posing problems and evaluation of results.

Blíží se první „kulaté“ narozeniny Matematického klokana v ČR, lze se tedy ohlédnout zpět a poukázat na některé události, které sehrály významnou roli při formování Klokana v naší zemi.

Soutěž vznikla v Austrálii z podnětu prof. *Petera O’ Hallorana*. V Evropě se poprvé objevila v roce 1991 ve Francii pod názvem *Kangourou des mathématiques*. Od roku 1992 se s ní setkáváme i v jiných evropských zemích – Polsku, Rumunsku, Bulharsku, Slovinsku aj. Kolegové z Polska zasílali soutěžní úlohy i do polských škol na území jiných států, a tak se Klokan objevil v polských školách na severní Moravě.

v červenci 1994 se v bulharském Pravci konal 2. Kongres Světové federace národních matematických soutěží **WFNMC** (World Federation of National Mathematics Competitions). Tam budoucí pořadatelé Klokana v ČR navázali kontakt s pořadateli této soutěže z centra v Marseille a byli pozváni na setkání do Budapešti. To proběhlo v listopadu 1994 a připravovaly se zde úlohy pro studenty středních škol.

v rámci podzimní školy péče o talenty **MAKOS 1994** v Zadově byli účastníci informováni o kongresu WFNMC a v této souvislosti také o soutěži Matematický klokan. A právě zde byl vyhlášen první ročník Matematického klokana v České republice. Pořádání soutěže se ujala olomoucká pobočka JČMF ve spolupráci s katedrami matematiky Přírodovědecké a Pedagogické fakulty UP. Prvního ročníku, který se uskutečnil 23. března 1995, se účastnilo nečekaných 24 811 soutěžících.

Členem asociace sdružující pořadatele Klokana v jednotlivých zemích s názvem „Klokan bez hranic“ se Česká republika stala na setkání v prosinci roku 1995 v holandském Eindhovenu, kde se připravovaly úlohy kategorií *Benjamín* a *Kadet*. Akreditovaným zástupcem ČR se stal Josef Molnár. Za mezník rozvoje Klokana v Evropě lze považovat setkání v polské Toruni v prosinci 1996, na kterém se poprvé připravovaly úlohy pro všech pět kategorií soutěže společně. Ve španělském Valladolidu v roce 1999 byla uspořádáním následujícího setkání pověřena Česká republika.

Kangaroo meeting 2000, jak bylo toto setkání nazváno, se uskutečnil ve dnech 19. – 22. října 2000 v Čelákovicích a zúčastnilo se ho 65 zástupců z 23 zemí Evropy, Asie a Ameriky. Jeho uspořádáním MŠMT ČR pověřilo Univerzitu Palackého v Olomouci. Na zdárném průběhu se však podílela též JČMF, ZŠ v Čelákovicích, řada partnerů (např. Moravia consulting Brno, Prodos Olomouc aj.) a spolupracovníků (např. z UK Praha a UJEP Ústí nad Labem).

v srpnu roku 2002 si účastníci 4. kongresu WFNMC, který se konal v australském Melbourne, mohli mimo jiné vyslechnout i informaci o Matematickém klokanu v ČR.

S potěšením lze konstatovat, že díky značnému nárůstu počtu řešitelů řadí MŠMT ČR od roku 1997 Matematického klokana mezi soutěže kategorie A (tj. soutěže plně hrazené z prostředků MŠMT ČR). A to oprávněně, o čemž nás přesvědčí tabulka 1 uvádějící počty řešitelů v ČR podle kategorií v jednotlivých ročnících.

	Klokánek	**Benjamín**	**Kadet**	**Junior**	**Student**	**Celkem**
1995	6 205	7 834	7 280	2 195	1 297	**24 811**
1996	18 522	30 819	27 262	6 148	3 938	**86 689**
1997	61 161	59 314	51 769	8 631	7 349	**188 224**
1998	62 963	67 417	57 653	11 580	8 484	**208 097**
1999	87 885	79 717	73 578	16 847	6 606	**264 633**
2000	95 426	87 304	81 893	20 384	10 319	**295 326**
2001	93 434	86 458	78 408	20 173	11 228	**289 701**
2002	99 204	86 785	81 440	20 479	10 428	**298 336**

Tabulka 1

Česká republika dlouhodobě obsazovala třetí místo v počtu řešitelů ze všech zapojených zemí, a to za Francií a Polskem. V posledních letech došlo k nárůstu účastníků, jak je patrné z tabulky 2, která udává počty soutěžících v jednotlivých zemích v posledních třech ročnících. Doposud největší počet účastníků zaznamenala Francie, a to v roce 1996, kdy úlohy Matematického klokana řešilo na 620 000 žáků a studentů.

Země	**2002**	**2001**	**2000**
Bělorusko	27 000	24 000	14 000
Brazílie	2 000	0	0
Bulharsko	7 000	9 000	7 000
Česká republika	298 000	290 000	295 000
Estonsko	9 000	9 000	9 000
Francie	440 000	480 000	471 000
Gruzie	8 000	10 000	7 000
Chorvatsko	9 000	7 000	5 000
Irsko	2 000	0	0
Itálie	19 000	17 000	5 000

Litva	52 000	60 000	29 000
Maďarsko	18 000	21 000	21 000
Makedonie	4 000	1 000	5 000
Mexiko	20 000	12 000	7 000
Moldávie	29 000	27 000	18 000
Německo	155 000	104 000	68 000
Nizozemsko	30 000	35 000	30 000
Polsko	406 000	383 000	320 000
Rakousko	100 000	80 000	35 000
Rumunsko	178 000	120 000	91 000
Rusko	462 000	340 000	205 000
Slovensko	92 000	78 000	46 000
Slovinsko	68 000	56 000	49 000
Španělsko	13 000	13 000	11 000
Švédsko	80 000	39 000	6 000
Ukrajina	37 000	24 000	14 000
Velká Británie	5 000	1 000	2 000
Venezuela	4 000	0	0
Celkem	**2 574 000**	**2 240 000**	**1 770 000**

Tabulka 2

Přestože cílem Matematického klokana není provádět nějaká hodnocení či srovnávání tříd, škol, regionů či zemí, nýbrž přinášet radost z přemýšlení a soutěžení žákům a studentům, uvádíme na přání pořadatelů Klokana na různých úrovních srovnání výsledků řešení jednotlivých úloh kategorie Kadet z roku 1995 v ČR, Polsku a Francii. Tabulka 3 uvádí, kolik procent ze všech účastníků vyřešilo danou úlohu správně. Zadání úloh lze nalézt např. v [1]. Výsledky řešení úloh 19, 24 a 25 nemohly být porovnány, neboť v jednotlivých zemích byly zadány jiné úlohy. (Platí dohoda, že každá země může vzhledem ke svým podmínkám vyměnit maximálně pět úloh.) Na základě rozborů výsledků lze konstatovat, že nejlépe žáci řešili úlohy s jasným a stručným zadáním, vyžadující pouze základní matematické dovednosti. Naopak největší problémy měli řešitelé s úlohami zaměřenými na logické myšlení, vyžadujícími nápad, či s úlohami geometrickými. Vysoké procento chybných odpovědí se vyskytlo též u úloh s většími čísly. Ukazuje se, že není jednoduché předem odhadnout obtížnost zadané úlohy pro danou věkovou kategorii řešitelů.

Úloha	**Česká rep. (%)**	**Polsko (%)**	**Francie (%)**
1	80	53	88
2	55	85	78
3	84	94	90
4	71	77	86
5	18	23	15
6	26	50	14
7	42	43	22
8	50	57	47
9	80	82	76
10	54	88	51
11	33	34	33
12	12	5	4
13	30	31	27
14	19	29	24
15	36	12	24
16	77	90	84
17	39	40	47
18	14	13	8
19	-	-	-
20	29	28	34
21	15	6	11
22	23	33	27
23	49	51	53
24	-	-	-
25	-	-	-
26	14	25	9
27	79	18	22
28	13	19	5
29	14	10	17
30	23	12	11

Tabulka 3

K významným oblastem současného bádání v didaktice matematiky patří také problematika řešení úloh. Předmětem našeho zájmu jsou speciálně *úlohy klokanské*, tj. úlohy, se kterými se setkávají žáci i učitelé v mezinárodní soutěži Matematický klokan. Klokanské úlohy by měly být stručné, vtipné, zajímavé, srozumitelné, pokud možno řešitelné několika způsoby, nevyžadující dlouhé výpočty a splňující další požadavky na tzv. *uzavřené úlohy* (s nabídkou několika odpovědí, *multiple-choice*).

Jaké strategie při řešení takovýchto úloh používají nejčastěji řešitelé? Alespoň částečně odpovědět na tuto otázku jsme se pokusili v rámci výzkumu v roce 2000. Tehdy byli požádáni žáci 7. ročníku (kategorie *Benjamín*) jedné školy, aby po skončení soutěže odevzdali nejen tzv. *karty odpovědí*, ale také *pomocné papíry* s výpočty. (Připomeňme, že žáci vybírají odpověď z nabídnutých pěti možností a svou volbu vyznačují na kartu odpovědí.) Díky rozborům žákovských řešení se nám podařilo nejen odhalit různé řešitelské strategie, které žáci v testech používají, ale také poukázat na některá úskalí, která testová podoba zadání úloh přináší. Dodejme, že *strategií* se podle [5] rozumí řešitelova odpověď na otázku: „Jak úlohu řešit?“. Řešitel vytváří souhrn pravidel (plán řešení) určujících způsob jeho dalšího postupu při řešení slovní úlohy.

Závěry výzkumu spolu s ukázkami žákovských řešení jsou zveřejněny v [8], zde provedeme jen stručný přehled žáky často používaných strategií:

Strategie heuristické

Řešení logickou úvahou

Řešení je složeno z posloupnosti logicky správných úsudků.

Pokus – omyl

O této strategii hovoříme v souladu s [5] tehdy, když se řešitel pokusí výsledek náhodně či podle určitého pravidla uhodnout.

Systematický pokus

Termínem systematický pokus označujeme strategii, kdy řešitel několikrát po sobě použije strategii pokus - omyl.

Strategie využívané u multiple-choice testů

Dosazování

Jedním způsobem řešení multiple-choice úloh je strategie, kdy řešitel ověřuje, která z možností výběru vyhovuje zadání úlohy. S tímto postupem jsme se při rozboru řešení úloh setkávali velmi často. I když je to strategie „neškolská“, zpravidla vede ke správným výsledkům.

Vyloučení některých distraktorů

Často je využívána též strategie, kdy řešitel na základě úvahy předem některé z nabízených možností vyloučí.

Strategie algebraická

Řešení probíhá sestavením a vyřešením rovnice či soustavy rovnic.

Strategie aritmetická

Řešení probíhá výpočtem bez použití rovnic.

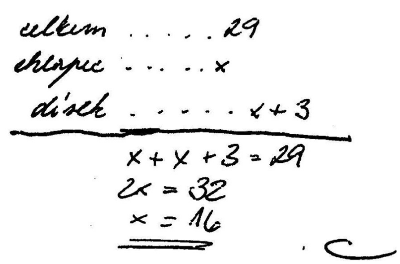
Zřejmě existují i další strategie řešení, zejména geometrických úloh.

Nyní se podívejme na dvě zajímavé ukázky žákovských řešení. Vodítkem při jejich rozboru nám byla metoda atomární analýzy, která představuje jednu z možností jak provést rozbor písemného řešení. Vycházeli jsme však pouze z její základní myšlenky, tj. snažili jsme se co nejpodrobněji analyzovat myšlenkové pochody řešitele. Také jsme se drželi doporučení autorů metody a použili žákovská řešení chybná, protože se mnohdy stávají cennějším zdrojem informací. (V závorce u čísla úlohy je procentuálně vyjádřena úspěšnost řešení této úlohy zjišťovaná v pěti náhodně vybraných okresech České republiky.)

Ú 2000 B 1 (správně 72 %, chybně 22 %, neřešilo 6 %):
Ve třídě je 29 žáků. Dívek je o tři více než chlapců. Kolik je ve třídě dívek?

A) 6 B) 13 **C) 16** D) 19 E) 29

Martinovo řešení:


celkem 29
chlapci x
dívek ..... x + 3
x + x + 3 = 29
2x = 32
x = 16
C

Interpretace řešení:

Žák sledoval podmínky ze zadání úlohy a transformoval je do jazyka matematiky: Správně si označil počet chlapců x a počet dívek $x+3$. Sestavil dobře rovnici o jedné neznámé x. Až po tento krok je jeho řešení v pořádku. Chyby se dopouští na dalším řádku. Nesprávně upravil sestavenou rovnici. Dostává $2x = 32$. Odtud správně určuje neznámou $x = 16$ a tuto odpověď pak volí ve výběru odpovědí, tedy C. Žák se zřejmě zaradoval, že výsledek je jednou z možností ve výběru, a zapomněl tak dopočítat počet dívek. Paradoxně tak dostává správnou odpověď.

Ú 2000 B 2 (správně 73 %, chybně 26 %, neřešilo 1 %):

Odstřihneme-li z papíru tvaru čtverce jeden jeho růžek, vznikne nám:

A) trojúhelník B) čtyřúhelník **C) pětiúhelník** D) šestiúhelník E) sedmiúhelník

Zuzanino řešení :

4-úhelník - 1 = 3-úhelník

Interpretace řešení:

Žákyně zřejmě, aniž by si situaci ze zadání úlohy představila nebo načrtla, formálně zapsala *4 - úhelník -1 = 3 - úhelník*.

Rozbory obou předchozích úloh dokládají úskalí testové podoby zadání. Především by se měly stát podnětem pro zamyšlení pro tvůrce úloh. Z první ukázky bylo patrné, že žák se i přes dvě chyby v řešení dostává ke správnému výsledku. V druhé ukázce se nabízí otázka: Co kdyby žák odstřihl růžek podél úhlopříčky čtverce? Pak by jeho odpověď byla: „Dostanu trojúhelník." Stejnou odpověď získáme i v případě, že za výsledný tvar žák považuje odstřižený růžek. Jak potom žáka přesvědčíme, že jeho odpověď není správná? Je tedy třeba při zadávání úloh **dbát na vhodnou volbu distraktorů**, ale také se vyhnout nejednoznačným termínům v zadání, jako byl v tomto případě termín *růžek*. Dodejme ještě, že dalším extrémem, se kterým se v testech setkáváme, je situace, kdy žák vyřeší úlohu správně, ale v konečném kroku zaškrtne (např. z nepozornosti) špatnou odpověď. Domníváme se, že je třeba zvážit všechna takováto úskalí i kvůli tolik diskutované otázce testové podoby maturitních zkoušek z matematiky.

Literatura

[1] Emanovský, P. a kol., *Počítejte s Klokanem – kategorie „Kadet"*. PRODOS, Olomouc 2001, ISBN 80-7230-077-6.

[2] Hejný, M., Michalcová, A., *Analýza písomného riešenia matematických úloh.* Metodické centrum, Banská Bystrica 1999, ISBN 80-8041-265-0.

[3] Molnár, J. a kol., *Matematický klokan 2002.* UP, Olomouc 2003, ISBN 80-244-0548-2.

[4] Molnár, J., Voglová, P., Z historie a současnosti soutěže Matematický klokan v ČR. In: *MAKOS 2001*, UJEP, Ústí nad Labem 2001, ISBN 80-7044-388-X.

[5] Novotná, J., *Analýza řešení slovních úloh.* UK, Praha 2000, ISBN 80-7290-011-0.

[6] Růžičková, R., Kopecký, M., Molnár, J., *Počítejte s Klokanem – kategorie „Benjamín"*. PRODOS, Olomouc 2000, ISBN 80-7230-068-7.

[7] Stehlíková, N., Analýza žákovských písemných řešení. In: *Vzdělávací program Iniciativa, Cyklus Jak tvořit se žáky v matematice,* UK, Praha 1995.

[8] Voglová, P., Molnár, J., Ke strategiím řešení úloh soutěže Matematický klokan. In: *Makos 2002*, UP, Olomouc 2003, ISBN 80-244-0549-0.

Od počítače a programování k matematice

Michal Musílek[1]

Abstrakt: Příspěvek naznačuje na několika konkrétních příkladech využití výuky programování webových stránek v jazyce JavaScript k podnícení zájmu žáků o matematické problémy. Jde o netradiční a zajímavou formu motivace matematických talentů.

Abstract: The contribution describes on some examples the use of programming web pages in JavaScript language to motivate pupils towards solving mathematical problems. It is a non-traditional and interesting way of motivating mathematically talented pupils.

Na dnešní střední škole, stejně jako v celé současné společnosti, jsou módou cizí jazyky a počítače. Matematika není tak v kurzu jako bývala před čtvrt stoletím. Proto zapálený učitel matematiky hledá způsoby, jak nadané žáky k matematice nenásilně přitáhnout.

Jednou z možností je využít současného zájmu o počítače a Internet a nabídnout studentům zájmový kroužek, nebo nepovinný předmět, zaměřený na tvorbu a programování www stránek. Pomocí vhodně volených příkladů skriptů (programů,

[1] *SZŠ, Nový Bydžov, mim3@szsnb.cz*

které jsou součástí webové stránky) je možné podnítit zájem o matematiku, informatiku, nebo o programování ve vyšším programovacím jazyce. Obsahem mého příspěvku je pět takových konkrétních příkladů. Všechny uvedené příklady jsou přístupné a funkční na adrese `http://mim.club.cz/talent/`.

Hlavolam s mincemi Martina Gardnera

Ve čtyřech řadách po čtyřech mincích je rozmístěno celkem 16 mincí. Každá z nich je náhodně otočena buď lícem, nebo rubem. Našim úkolem je otočit všechny mince nahoru stejnou stranou. Není však možné otáčet jednotlivými mincemi, ale vždy celou řadou mincí vodorovnou, svislou (po 4 mincích), nebo šikmou (po 2, 3, nebo 4 mincích).

Tento skript ukazuji studentům v době, kdy se učíme dynamickou výměnu obrázků. Jedná se o jednoduchou animaci otáčející se mince. Z matematického hlediska studenty zaujme hledání obecného postupu řešení hlavolamu. Není tak jednoduchý, jak se může zdát na první pohled.

Slavná patnáctka Samuela Loyda

Hlavolam byl ve své době stejně slavný jako o století později Rubikova kostka. Úkolem je seřadit čísla od 1 do 15 do přirozeného pořadí. Čísla jsou napsána na malých čtvercových destičkách a jsou uložena ve čtvercové krabičce se čtyřikrát delší délkou strany čtverce, než mají destičky s čísly. Prázdné místo po chybějící šestnácté destičce (4 x 4 = 16) umožňuje provádění tahů. Zvedat destičky a vyndávat je z krabičky je zakázáno.

Samuel Loyd vypsal v novinách velkou finanční odměnu pro toho, kdo dokáže uspořádání $1-2-3-\cdots-13-15-14$ přeuspořádat do přirozené posloupnosti, viz [3]. To je však (jestliže nevyndáme destičky z krabičky) neřešitelný úkol, takže odměna ve skutečnosti nikdy nemohla být vyplacena.

Se studenty můžeme promluvit o lichých a sudých permutacích. O využití permutací pro řešení permutačních hlavolamů. Jako výchozí pozici hlavolamu jsem navíc zvolil magický čtverec se součtem 30 (prázdné políčko představuje nulu), takže je možné se nechat inspirovat a věnovat určitou pozornost právě magickým čtvercům, viz [1].

Tátův hlavolam s Faustem

Hlavolam s několika různě velkými čtvercovými, či obdélníkovými kameny, prováděním tahů podobný předchozímu hlavolamu. Na kamenech tentokrát nejsou čísla, ani žádné jiné symboly, ale liší se tvarem. Jsou zde dva malé čtverce 1 x 1, čtyři obdélníky 2 x 1 a jeden velký čtverec 2 x 2. Hrací plocha – krabička má rozměry 4 x 5 čtverců. Hlavolam bývá nazýván tátův hlavolam, nebo také Faust, podle velkého čtvercového kamene, kterým se nejobtížněji pohybuje. Zajímavý je z hlediska práce s dvojrozměrnými poli, která programovací jazyk JavaScript standardně nezná. Převody mezi indexy jednorozměrného a dvourozměrného pole jsou zajímavými matematickými funkcemi.

Pro matematika je inspirující možnost řešení hlavolamu pomocí metod teorie grafů, které jsou podrobně vysvětleny v knize [4].

Pět dam na šachovnici

Pro pochopení algoritmů potřebných při programování tohoto hlavolamu potřebujeme kromě práce s dvojrozměrným polem také jednoduchou „analytickou geometrii šachovnice“, dvojkovou číselnou soustavu a souvislost dvojkových číslic 1 a 0 s logickými hodnotami ANO a NE.

Našim úkolem je rozmístit pět šachových figur – dam na běžné šachovnici 8 x 8 polí tak, aby hlídaly všechna pole šachovnice (žádné pole nesmí zůstat mimo dosah některé z pěti dam, některé pole ovšem může být pokryto několikrát).

Další hezké úlohy se šachovnicí a figurami jsou uvedeny v knize [2].

Trojrozměrné piškvorky 3 x 3 x 3

Skript je inspirován úlohou z aktuálního 18. ročníku korespondenčního semináře PIKOMAT, viz [5]. Vyhraje ten hráč, který v trojrozměrném hracím prostoru 3 x 3 x 3 krychličky vytvoří vodorovně, svisle, nebo v úhlopříčce (tělesové, nebo ve vrstvě 3 x 3) piškvorku ze tří stejných symbolů (kolečko, křížek – hráči se střídají). Nejprve musíme určit vyhrávající strategii pro začínajícího hráče. Optimální strategie druhého hráče je jí velmi podobná. Pracovat nyní musíme s trojrozměrným polem.

Úlohu lze využít k propagaci matematických korespondenčních seminářů. Inspiraci jsem nalezl na `http://pikomat.mff.cuni.cz/`.

Literatura

[1] Dudeney, H. E., *Matematické hlavolamy a hříčky*. Olympia, Praha 1995, 1. vyd., s. 69–76, ISBN 80-7033-380-4.

[2] Opava, Z., *Matematika kolem nás.* Albatros, Praha 1989, 1. vyd., s. 253–255.

[3] Perelman, J. I., *Zajímavá matematika.* Mladá Fronta, Praha 1961, 2. vyd., s. 32–37.

[4] Vejmola, S., *Konec záhady hlavolamů.* SPN, Praha 1986, 1. vyd., s. 136, 258, 259.

Úlohy matematického korespondenčního semináře KoS Severák

Magdalena Prokopová, Petr Rys[1]

Abstrakt: Článek je zaměřen na koncepci, průběh a obsah matematického korespondenčního semináře KoS Severák. Je zde především rozebráno několik původních úloh ročníku 2002/2003 kategorie Junior i kategorie Student, jejichž autory jsou převážně studenti učitelství matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J. E. Purkyně. K úlohám je připojen krátký komentář a autorské řešení.

Abstract: The contribution focuses on the conception, course and content of a mathematical correspondence seminar KosS Severák. Some original problems from round 2002/03 of the categories Junior and Student are presented whose authors are mainly student teachers of the Faculty of Education of J. E. Purkyně University. The problems are complemented by a short commentary and the author's solutions.

Ve školním roce 2002/2003 proběhl první ročník matematického korespondenčního semináře KoS Severák, který je určen žákům druhého stupně základních škol – kategorie Junior – a studentům středních škol – kategorie Student. Jeho organizátory jsou studenti a pracovníci katedry matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J. E. Purkyně. Ve stejném roce byl vypsán i výběrový kurz, jehož hlavní náplní byla právě příprava úloh do korespondenčního semináře a veškeré činnosti související s jeho organizací. V následující části budou uvedeny úlohy, které studenti vytvořili, a jejich autorská řešení.

Jak je dobrým zvykem, úlohy obou kategorií jsou zasazeny do příběhu. V kategorii Junior se odehrávají příhody tří přátel, chlapce Matěje, jeho kamarádky Báry a mluvícího Kosa, nejchytřejšího tvora na světě. Účastníci kategorie Student odhalují s pomocí prof. RNDr. Aloise Kosa, CSc., diplomovaného matematika, historii imaginárního slavného rodu matematiků Kosů, kteří jsou jen neprávem

[1] *PF UJEP, Ústí nad Labem, prokopova@pf.ujep.cz, rysp@pf.ujep.cz*

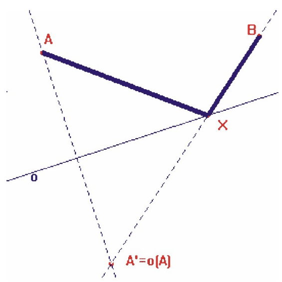
a nešťastnou shodou okolností zapomínáni. Úlohy jsou označeny následujícím způsobem: kategorie J/S-ročník-série-číslo úlohy.

Zadání J-I-1-5

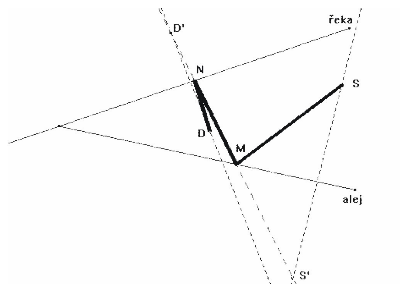
Sešli se opět odpoledne. „Když nám to tak šlo před obědem, říkal jsem si, že si zasloužíte ještě jeden příběh," uvítal je Kos. Zde je ten příběh:

Když byl Thales malý, bydlel s rodiči a sourozenci v Milétu nedaleko řeky a také nedaleko fíkové aleje. Každý všední den chodil do školy a cestou zpět se zastavil pro nějaký ten fík. Pak ještě nabral u řeky vodu pro maminku a hned běžel domů. Jak to tak u matematiků bývá, chtěl si co nejvíce zkrátit cestu. Dokážete, tak jako malý Thales, najít nejkratší cestu mezi školou a domem tak, že vede nejdříve k fíkové aleji a poté k řece?

Úloha je zaměřena na vlastnosti osové souměrnosti.



Obr. 1



Obr. 2

Řešení J-I-1-5

Nejprve je nutné uvědomit si, že nejkratší spojnicí mezi dvěma body je přímka. My ale dva body nemůže spojit přímo. Musíme se nejprve dotknout dané přímky. Využijeme vlastností osové souměrnosti. Nejkratší spojnici dvou libovolných bodů, která se dotýká dané přímky, najdeme s pomocí obrazu jednoho z nich v osové souměrnosti podle této přímky, jak je naznačeno na obr. 1.

Úkolem v podstatě je určit polohu bodu X.

Tohoto principu nyní využijeme dvakrát. Zobrazme bod S podle osy o_1 (alej), dostáváme bod S'. Dále zobrazme bod D podle osy o_2 (řeka) na bod D'. Body, které hledáme na těchto osách si označme M a N. Nevíme, kde bod M leží, ale víme, že body M, N a S' musí ležet na jedné přímce. To samé musí platit o bodech D', M, N. Z toho plyne, že oba body M i N musí ležet na přímce $D'S'$.

Hledanou nejkratší cestou je tedy lomená čára $SMND$ (obr. 2).

Zadání J-I-5-2

Na horách si Bára a Matěj udělali výlet na blízkou zříceninu. Jeden z nich jel na kole, druhý šel pěšky. Vyrazili současně. V jistém okamžiku nastala tato situace: Kdyby byla Bára urazila dvakrát méně, měla by zdolat ještě třikrát více. A zároveň, když by Matěj dosud zdolal dvakrát více, měl by urazit ještě třikrát méně. Jak se jmenoval cyklista? (Předpokládáme, že se oba pohybovali rovnoměrnou rychlostí a že cyklista byl rychlejší.)

Úloha je zaměřena na zápis vztahů uvedených v textu, práci se zlomky a jejich porovnávání.

Řešení J-I-5-2

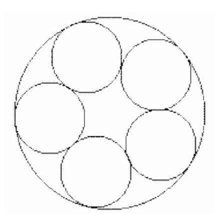
Jde o to zjistit, který z nich dosud překonal delší cestu (byl by to v tom případě cyklista). Označme si délku trasy, kterou ujela doposud Bára, jako x. Délku trasy, kterou překonal Matěj, jako y. Délku celé cesty na zříceninu si označme s.

Pak pro Báru platí $s = \frac{1}{2}x + 3 \cdot \frac{1}{2}x = 2x$, tj. $x = \frac{1}{2}s$.

Bára je tedy v polovině cesty. Pro Matěje dostaneme $s = 2y + \frac{2}{3}y = \frac{8}{3}y$, tj. $x = \frac{3}{8}s$.

Matěj je tudíž ve $\frac{3}{8}$ cesty. Protože $\frac{1}{2}s > \frac{3}{8}s$, je $x > y$ a na kole jela Bára.

Zadání J-I-5-3



Obr. 3

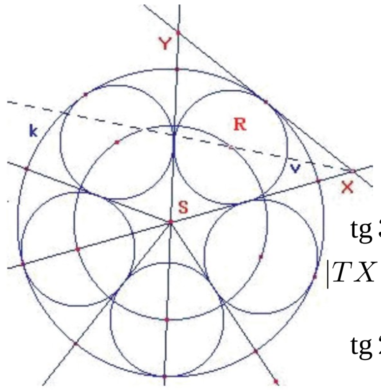
Ve městečku pod zříceninou měli zajímavou kašnu. Měla kruhový tvar s poloměrem přibližně 5m. Uvnitř bylo 5 stejně velkých bazénků s vodotryskem, které se dotýkaly obvodu kašny a také sebe navzájem podle obr. 3. Matěj a Bára si chtěli nakreslit plánek takové kašny, ale hned zjistili, že to není jednoduchý úkol. Napadlo je, že je to báječný úkol pro Kosa. Zkuste také narýsovat plánek kašny. (Tloušťku stěn bazénku zanedbejte, nezapomeňte na popis konstrukce a zdůvodnění svého postupu.)

Úloha využívá znalostí o pravidelných mnohoúhelnících a o kružnici vepsané trojúhelníku. V úloze **S-I-5-3** je totožné zadání doplněné otázkou velikosti poloměru jednotlivých bazénků. K řešení je využito sinové věty.

Řešení J/S-I-5-3

Rozdělme si danou kružnici k na pět stejných výsečí s úhlem $72°$. Můžeme zkonstruovat pravidelný pětiúhelník, který je kružnici k opsán (obr. 4). Tento pětiúhelník je tvořen pěti shodnými trojúhelníky, jedním z nich je

$\triangle SXY$. Hledané kružnice bazénků jsou kružnice vepsané těmto trojúhelníkům. Pro $\triangle SXY$ je to kružnice v. Najdeme-li jednu tuto kružnici v, středy zbývajících leží na pomocné kružnici se středem S a poloměrem $|SR|$, kde R je střed kružnice v.



Obr. 4

Nyní určíme poloměr bazénku. Označme střed úsečky XY (bod dotyku kružnice) písmenem T. Poloměr, který hledáme, je pak $r = |RT|$. Ze zadání víme poloměr celé kašny $q = |ST| = 5$ cm. Z pravoúhlého trojúhelníku STX je

$$\text{tg}\, 36^\circ = \frac{|TX|}{q},$$

$$|TX| = q \cdot \text{tg}\, 36^\circ.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku RXT je

$$\text{tg}\, 27^\circ = \frac{r}{|TX|}.$$

Proto

$$r = q \cdot \text{tg}\, 36^\circ \cdot \text{tg}\, 27^\circ, r \doteq 1,85 \text{ cm}.$$

Zadání S-I-3-2

Bratr mého dědečka Kristián byl významným archeologem. Podílel se na mnoha známých světových objevech. Se svými spolupracovníky se účastnil i archeologických vykopávek v Řecku. Podařilo se jim tehdy objevit základy starého chrámu. Z těchto základů se zachovaly jen čtyři sloupy. Z dostupných záznamů zjistili, že tyto čtyři sloupy stály na obvodu základů chrámu čtvercového půdorysu a žádné dva sloupy nestály v jedné straně. Chtěli chrám zakreslit do mapy starého města. Zpočátku nevěděli jak to provést, ale můj prastrýček na řešení zanedlouho přišel.

Sestrojte čtverec, který tvořil základy chrámu, jestliže znáte polohu zmíněných čtyř sloupů, každého na nějakém místě právě jedné strany.

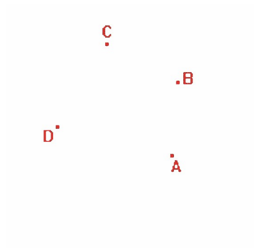
Úloha je zaměřena na shodná geometrická zobrazení a na vlastnosti příček (libovolná spojnice protilehlých stran) čtverce. Z úspěšnosti řešení účastníků semináře i některých studentů učitelství matematiky můžeme soudit, že patří k náročnějším úlohám.

Řešení S-I-3-2

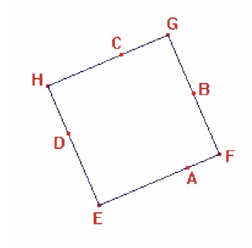
Úlohu převedeme na úlohu sestrojení čtverce, známe-li čtyři body (A, B, C, D) na jeho obvodě. Z daných bodů lze sestrojit příčky čtverce. Jsou-li dvě příčky čtverce na sebe kolmé, jsou shodné. Plyne to z toho, že každou kolmou příčku k dané příčce čtverce lze získat rotací kolem středu čtverce a posunutím. Obě zobrazení jsou shodná, tedy i jejich složením vznikne zobrazení shodné. Proto mají obě příčky stejnou velikost. Z této vlastnosti příček pak plyne konstrukce.

Body A, B, C a D jsou dány (obr. 5). Chceme sestrojit čtverec $EFGH$ (obr.6).

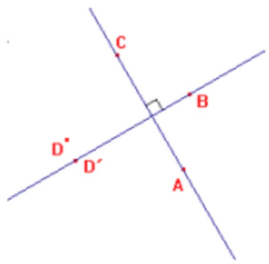
Body A a C vedeme přímku. K přímce sestrojíme kolmici bodem B. Velikost úsečky AC naneseme na tuto kolmici a dostaneme tak bod D', který je bodem strany HE (obr. 7).



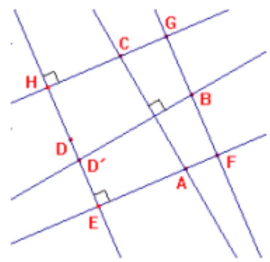
Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

Body D a D' vedeme přímku. Dále bodem A sestrojíme kolmici na přímku DD'. Průsečík těchto přímek je bod E. Bod H sestrojíme obdobně – pomocí kolmice bodem C na přímku DD'. Nanesením velikosti úsečky EH na přímku EA získáme bod F a nanesením na přímku HC získáme bod G. Tím jsme dokončili konstrukci vrcholů hledaného čtverce $EFGH$ (obr. 8).

Základní informace o korespondenčním semináři

Název:	KoS Severák
Kategorie:	Junior – žáci 2. stupně ZŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií Student – studenti SŠ všech typů
Organizátor:	katedra matematiky Pedagogické fakulty Univerzity J. E. Purkyně a JČMF, pobočka Ústí nad Labem
Průběh:	Během daného ročníku probíhá 5 sérií po 5 úlohách
Kontakt:	KoS Severák kat. Junior / kat. Student České mládeže 8 400 96 Ústí nad Labem, kos@pf.ujep.cz `www.ujep.cz/ujep/pf/kmat/home/page2/KoS.htm`

Literatura

[1] Beran, I., Ondráčková, I., *Prověřte si své matematické nadání.* SNTL, Praha 1988.

[2] Frýzek, M., Müllerová, J., *Sbírka úloh z matematiky pro bystré hlavy.* Fortuna, Praha 1992, ISBN 80-85298-51-1.

[3] Koman, M., Binder, J., Vrba, A., *43. ročník matematické olympiády na základních školách.* JČMF, Praha 1996, ISBN 80-7015-552-3.

[4] kol. autorů, *Řada učebnic matematiky pro gymnázia a sbírek úloh pro gymnázia.* Prometheus, Praha 1991 - 2001.

Nadání v matematice – didaktický pohled[1]

Analýza didaktických regulací rozdílů v poznávacích schopnostech ve vyučování racionálního kalkulu u žáků 9–10letých

[1] Přeložila Michaela Kaslová

Bernard Sarrazy[2]

Abstrakt: Prezentace výzkumu zaměřeného na to, jak se projevují žáci ve vyučování a jak odlišně z něho těží, je zasazena do teoretického rámce a do následné diskuse, co je inteligence, co je talent a jak s ním pracovat. Z toho vyplývají další otázky, jako například složení tříd, heterogenita kompetencí, problematika vyčleňování talentů a otázka demokratizace vzdělávání.

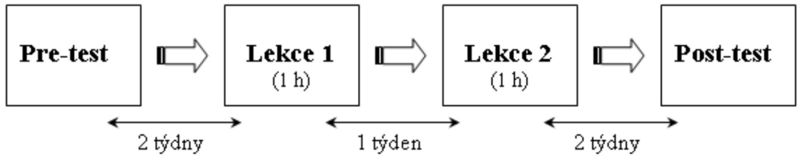
Abstract: The contribution focuses on ways pupils behave during classes and what knowledge they draw from them. Theoretical concepts of intelligence and talent are discussed and how to deal with it. Other questions stem from it such as class composition, different competences, chanelling of talented students.

Když požadovali po Alfrédu Binetovi, otci testu IQ, definici inteligence, odpověděl: „Inteligence je to, co měří můj test." Jestliže bychom se dotazovali na možné důvody matematického talentu, byl by býval pravděpodobně odpověděl se stejnou ironií: „Inteligence." Taková odpověď by zanechala nejednoho profesora skeptikem, co se týče zaznamenání kognitivních rozdílů u jeho žáků ve vyučování. Pozdější definice, které nám dávají psychologové, jako například Julian Ajuriagurra, který uvedl pojmenování „surdoué", „nadmíra nadaní ", budou také záhadné v otázce původu takového famózního talentu a zůstanou v tomto zcela věrní (Bible, Matouš, XXV, 14). Já ale nejsem ani psycholog, ani neuropsychiatr, takže jako didaktik matematiky předložím otázku týkající se nadaných žáků (nezávisle na všech ideologických stranách typu například pro, proti). Ve skutečnosti, jestliže se didaktik nemůže vyjádřit k oprávněnosti k diferenciační politice uplatněné ve výuce favorizující tu či onu kategorii žáků, může jeho práce nicméně přispívat k upřesnění toho, o co jde a které jsou pravděpodobné účinky takové organizace vyučování. To je to, na co se chci soustředit.

Protokol experimentu

Experiment byl proveden na reprezentativním vzorku francouzské populace, týkal se 112 žáků 9–10letých, vybraných ze 7 tříd prvního stupně ZŠ. S učiteli jsme vyjednali stejné téma hodiny i čas pozorování, dvě hodinové lekce u každého. Jednalo se o klasický pokus. Shrneme ho následujícím schématem:

[2]*Départemet des Sceinces de l'éducation, Université Victor Sagalen, Bordeaux, Bernard.Sarrazy@sc-educ.u-bordeaux2.fr*



Zadané téma koresponduje se čtvrtou aditivní strukturou podle typologie Vergnauda (1983). Tato struktura uvádí do hry pouze pozitivní transformace (například vyhrát, prohrát), aniž by byla dodána jakákoli nápověda ve výchozích informacích v oblasti číselné. Uveďme příklad tohoto typu:

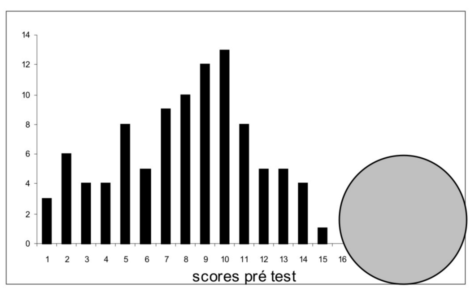
> *Helena hrála dvě partie kuliček. Nejdřív první, pak druhou partii. Ve druhé partii vyhrála 6 kuliček. Nakonec po obou partiích (celkově) prohrála 4 kuličky. Jak dopadla první partie?* (v pre-testu 14% úspěšnost)

Pre-test i post-test představovalo 21 úloh tohoto typu odpovídajícího více či méně souboru 24 úloh založeném na uvedené struktuře. Každá úloha obsahovala pouze dvě čísla v oboru do 10. Poznamenejme, že tyto úlohy jsou proměnlivé náročnosti podle toho, kde je zvolena neznámá, a podle toho, zda jsou transformace stejného znaménka, nebo opačného.

Například vyjděme z předchozí úlohy, která je pro 9–10leté žáky velmi obtížná, zatímco úloha o Janovi (*Jan vyhrál 6 kuliček, pak 4 prohrál. Jak celkově dopadla jeho hra?*) se jeví mnohem snazší, přičemž nezanedbatelné množství si plete výpočet stavu s transformací, změnou a odpovídá „Má celkem 2 kuličky“, na místo odpovědi „Vyhrál celkem 2 kuličky“.

Výsledky a analýza

Histogram představuje rozložení úspěšnosti získané při pre-testu:



Shodněme se na tom, že 15 žáků, kteří v pre-testu uspěli v 17 z 21 úloh, můžeme označit za „nadanější“.

Kdo jsou tito žáci?

Představují 13,4 % této věkové kategorie. Pozorujeme tam více chlapců (73,3 %) než dívek (26,7 %). Většina z nich (54 %) náleží k vyšší sociální třídě, 46 % ke střední třídě. Jejich rodiče mají všichni maturitu a 2/3 z nich mají univerzitní diplom. Dotazník týkající se rodiny umožnil ukázat, že výchovné postupy používané v rodině jsou pružné (jejich děti mohou dohadovat pravidla svého života) a dominantními hodnotami jejich výchovného pojetí je rozvoj zvídavosti a kritického ducha.

Ve třídě je psychosociální statut poměrně vysoký pro 87 % z nich a většina z nich si toho je vědoma (nepřeceňují se, ani se nepodceňují). Na druhé straně většina z nich, na rozdíl od ostatních žáků, se učitele bezprostředně ptá na něco, čemu neporozuměli v matematice. Nehlásí se častěji než ostatní, ale jejich interaktivní profil je významně odlišný. Nežádají o slovo, vykřikují.

Teoretický model studie; didaktické pojednání heterogenity profesorských kompetencí

Každý učitel může potvrdit, že celé vyučování v kontextu školy přinejmenším hledá způsob jak posunout znalosti u co největšího počtu svých žáků v nutně limitovaném čase. Toto posunutí je pozorovatelné poklesem žákovských chyb, jinak řečeno množstvím žáků považovaných učitelem za přijatelné. Učitel nedisponuje jediným prostředkem pro postižení heterogenity výchozích kompetencí žáků, jejich oblíbenosti matematiky, času a pozornosti, které jsou ochotni tomu věnovat¶ Jejich vyučování záleží na zvýraznění této výchozí heterogenity (s její optimalizací). Ve skutečnosti, ať je úroveň jejich třídy jakákoli (velmi dobří, dobří, slabí), jedna vyučovací hodina, příliš ambiciózní, bude příliš obtížná pro většinu žáků, naopak hodina příliš jednoduchá nebude zrovna tak přijatelná pro ztrátu času. Jednotlivci jsou citově angažováni ve svých pozicích v oblasti didaktické (dobří a slabí žáci). Pro všechny tyto důvody všechny tyto kategorie je třeba považovat za inherentní vůči fungování didaktických systémů nezávisle na výchozích kompetencích jednotlivců (Brousseau ,1998).

Nyní musíme zkoumat dvě otázky:

1. Dovolilo vyučování ve třídě učení co největšího množství žáků?
2. Je toto učení rovnoměrně rozloženo podle úrovně žáků?

Výsledky

1. Všichni žáci netěží stejně z vyučování, jsou to žáci dobří a průměrní, kteří z něho těží nejvíce (58 %). Tabulka ukazuje míru zisku (posunu) v post-testu žáků:

	Nadaní	***Dobří***	***Průměrní***	*Slabí*
Posun	15	**17**	**48**	32
m	0,7	**4.45**	**6.55**	2.32

2. Dobří a průměrní žáci, kteří nejméně dobře uspěli v pre-testu, prokázali největší posun a naopak. Zaregistrovali jsme vysokou korelaci mezi úrovní úspěšnosti v pre-testu a zisku v post-testu. To neplatí pro slabé žáky. Tabulka ukazuje korelaci úspěšnosti pre-testu a zisku (posunu p, Spearman) :

	Nadaní	*Dobří*	*Průměrní*	*Slabí*
ρ	-.57	- 0,78	- 0,73	-0,34
p	.02	$2{\cdot}10^{-5}$	.0001	.15

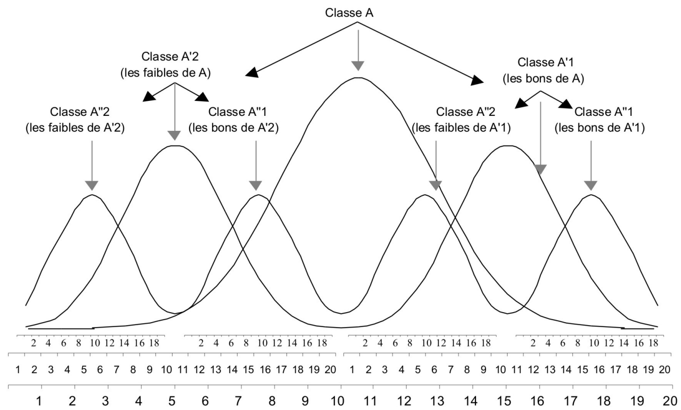
Závěr

Vyučování není účinné, pokud nevyjde z výchozí kompetence žáka, kterou bychom mohli nazvat podle A. Marchiva (1997) s odvoláním na Vygotského „proximální zóna vyučování“, ve které může učitel přiměřeně vyučovat. Následující výsledky umožňují potvrdit pravdivost tohoto tvrzení, ať je úroveň uvažované třídy jakákoli. Není-li obtížnost dost vysoká, rozvrství se žáci jinak, více se redukuje heterogenita. Je-li obtížnost vysoká, veškerý posun způsobuje nárůst heterogenity.

Diskuse

Zdalipak princip diferenciace pomůže podpořit vyučování?

Viděli jsme, že ať je úroveň třídy jakákoli, nárůst znalostí ve třídě zvyšuje heterogenitu, a naopak, čím menší jsou pokroky ve třídě, tím více se redukuje heterogenita třídy. Takto můžeme uvažovat o tom, že seskupení dětí podle úrovně kompetencí neumožní optimalizovat vyučovací proces žáků, ať jsou jejich výchozí schopnosti jakékoli (jistý počet výzkumů umožňuje podporovat naši hypotézu, Durru-Bellat 1996, Mingat, Durru-Bellat 1997). Ve skutečnosti pro to, aby mohli učitelé učit, musí nezbytně vytvořit rozdíly. Právě tento jev chceme demonstrovat v následujícím schématu, kde třída A’2 jsou slabí žáci ze třídy A a jsou rozděleni na slabé A”2 a dobré A”1, a třída A’1 jsou dobří žáci ze třídy A a jsou rozděleni na slabé A”2 a dobré A”1:



Vyčlenit elitu na úkor většiny znamená politickou volbu, ke které se didaktik nemůže vyjádřit, i když na druhé straně může oprávněně hájit myšlenku, že úlohou školy je umožnit jednotlivcům, aby se umístili v kultuře tím, že se osvojí kulturní statky, které jsou odkazem jejich předchůdců, a ne adaptovat tyto statky minoritních částí okrajových kultur naší společnosti. Jak poznamenávají Mc Dermott a Varenne (1995, 334), místo, které je určeno žákům minoritních kultur, je mnohem výmluvnější ve způsobu fungování našich institucí, v hodnotách, jichž jsou nositeli, než jejich předpokládanými poznávacími vlastnostmi. Tyto pozice jsou jasně adaptované na fungování institucí a na instituce, které prostřednictvím formálního vzdělávacího systému slouží k politickým a ekonomickým cílům.

Nejde vůbec o to chválit nemožné rovnostářství, ani radikální elitářství, ale jednoduše podtrhnout nebezpečí pro naši moderní demokracii vytvářením kategorie jednotlivců, kteří nebudou již moci komunikovat sami se sebou, ani s kulturní společností. Právě tak naše výsledky by nás mohly svádět k tomu, že bychom se domnívali, že to může vést k domněnce, že výzkum zaměřený legitimním zájmem na účinnost a spravedlnost, by mohl získat zaměření především na podmínky organizace vyučovacích situací proto, aby umožnil každému osvojit si znalosti potřebné pro uplatnění občanství. Zopakujme oblíbenou větu Pierra Bourdieu, že mezi neodlišností a odlišností a jejich označením ve škole existuje střední cesta, kterou by mohla didaktika otevřít, nebo aspoň naznačit.

Literatura

[1] Bourdieu, P., Passeron, J. C., *The inheritors: Students and their culture.* Chi-

cago: The University of Chicago Press (*Les héritiers : Les étudiants et la culture*. Paris: Éditions de Minuit, 1964), 1979, ISBN 2-7073-0081-0.

[2] Brousseau G., *Theory of Didactical situations in mathematics 1970–1990*. Kluwer Academic Publishers, 1997, ISBN 0-306-47211-2.

[3] Duru-Bellat M., De quelques effets pervers des pédagogies différenciés. *Educations*, 1996, s. 7, 12–15, ISBN 2-8041-3437-7.

[4] Duru-Bellat M., *Les inégalités sociales a l'école: genese et mythes*. PUF, Paris 2002, ISBN 2-13-052693-4.

[5] Duru-Bellat M., Mingat A., *La Gestion de l'hétérogénéité des publics d'éleves au college*. Rapport de recherche, FEN, UNSA, Paris., 1997, ISBN 2-85634-066-0.

[6] Marchive A., L'interaction de tutelle entre pairs: approche psychologique et usage didactique. *Psychologie et éducation*, 1997, s. 30, 29–42, ISBN 90-209-4144-5.

[7] Mc Dermott R., Varenne H., Culture as disability [La culture comme handicap] [Traduit de l'américain par D. Perret, P. Clanché]. *Anthropology & Education quarterly*, 1995, s. 26/3, 324–348, ISBN 0161-7761.

[8] Vergnaud G., *L'enfant, la mathématique et la réalité: Problemes de l'enseignement des mathématiques a l'école élémentaire*. Berne, Peter Lang, 1983, ISBN 3-261-04845-X.

Tvorba úloh pro Matematickou olympiádu

Jaromír Šimša[1]

Abstract: Příspěvek je především věnován osobnímu pohledu autora na historii a současný stav procedury výběru úloh pro Matematickou olympiádu v České republice.

[1]*Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, simsa@ipm.cz*

Abstract: The contribution presents a person view of the author of the history and present state of the selection of problems for the Mathematical Olympiad in the Czech Republic.

Matematická olympiáda, naše prestižní a nejstarší poválečná předmětová soutěž, se poprvé objevila na našich školách v roce 1951. Iniciovala ji skupina několika matematiků v čele s profesorem Karlovy univerzity Dr. Eduardem Čechem, vědcem světového významu. Soutěž se rychle rozšířila na střední a později i základní školy celého tehdejšího Československa. Přehled o každoročním průběhu Matematické olympiády spolu s řešenými soutěžními úlohami poskytují brožury N*-tý ročník Matematické olympiády*, vydávané dříve (do r. 1993) Státním pedagogickým nakladatelstvím, v současné době pak Jednotou českých matematiků a fyziků. Hodnocení soutěže za delší časová období lze nalézt v jubilejních publikacích [3], [4] a [5].

V dnešní podobě je Matematická olympiáda soutěží, vyhlašovanou v každém školním roce (v souladu s vyhláškou [1]) Ministerstvem školství, tělovýchovy a mládeže společně s Jednotou českých matematiků a fyziků a Matematickým ústavem Akademie věd ČR. Žákům středních škol jsou určeny kategorie A, B a C, žákům základních škol a nižších gymnázií kategorie Z5, Z6, Z7, Z8 a Z9 (podle ročníku jejich docházky). Soutěžní kola (domácí, školní, okresní, krajská a celostátní) se řídí pravidly zakotvenými ve směrnicích [2]. Úkolem soutěžících je vždy ve stanoveném čase (zpravidla 3 až $4{,}5$ hodiny) vyřešit několik nerutinních matematických úloh, jejichž obtížnost často výrazně převyšuje obtížnost úloh, se kterými se žáci setkávají při běžné školní výuce. Od roku 1986 je součástí Matematické olympiády též kategorie P, jejíž označení je odvozeno od slova *programování* a napovídá, že jde o soutěž v navrhování a počítačové realizaci algoritmů pro řešení předkládaných problémů.

Matematika je i na své elementární (středoškolské) úrovni strukturně i myšlenkově bohatou disciplínou, takže i po 50leté historii Matematické olympiády je stále možné soutěžícím předkládat k řešení zajímavé a neotřelé úlohy přiměřené obtížnosti. Výběr vhodných úloh ovšem není snadnou záležitostí a vyžaduje od zainteresovaných osob nejen dostatečný přehled přes matematickou literaturu, ale i značné úsilí a neutuchající invenci při hledání nových podob tradičních témat. Protože jsem do tohoto procesu významně zapojen po dobu přesahující 10 let, rád bych nyní podal informaci o historii a především současné práci týmu lidí, kteří úlohy pro Matematickou olympiádu připravují.

Z vyprávění pamětníků vím, že do konce osmdesátých let se úlohy pro MO vybíraly na jednodenních zasedáních předsednictva výboru, jehož členové předkládali (tak říkajíc u zeleného stolu) hotové návrhy úloh. Kromě svých vlastních nápadů mohli využívat archív utajených úloh přijatých v rámci veřejného konkursu, v němž dotyčnému autorovi úlohy příslušela odměna ve výši 50 Kčs. Tento systém počátkem devadesátých let fungoval s rostoucími obtížemi, které souvisely jednak s odchodem starších zkušených pracovníků MO, jednak se ztenčováním zásob použitelných úloh z konkurzního archívu.

Neutěšená situace kolem výběru úloh mě jako nového člena výboru velice trápila, vždyť jsem toto členství přijal v roce 1989 právě proto, abych jako matematik – profesionál vymýšlel pro olympiádu nové úlohy. Rozhodl jsem se proto spolu s několika přáteli změnit systém přípravy úloh; v roce 1991 jsme vytvořili volné společenství lidí, jejichž společná práce nad úlohami vrcholí dvakrát do roka na dvoudenních seminářích. Na nich posuzujeme a dolaďujeme návrhy úloh pro kategorie A, B, C na následující školní rok. O několik let později se vytvořil podobný tým lidí připravujících úlohy pro všechny kategorie Z.

Nechci vás nyní zatěžovat podrobnostmi o celoročním harmonogramu a systému práce obou týmů, kterým jsme začali říkat *úlohové komise*. Zdůrazním jen, že obě byly i dodnes zůstaly česko – slovenské, takže soutěžní kola MO probíhají v obou samostatných státech ve stejné dny a soutěžící řeší stejné úlohy. Chtěl bych při této příležitosti poděkovat svým nejbližším spolupracovníkům z úlohové komise ABC, jmenovitě *Karlu Horákovi*, *Jaroslavu Švrčkovi*, *Pavlu Leischnerovi*, *Jaroslavu Zhoufovi* a *Pavolu Černekovi*.

V závěru svého příspěvku se musím zmínit o problému, který mne velice tíží a jehož projevy přesahují hranice Matematické olympiády, soutěže, která mi tolik přirostla k srdci a pro jejíž rozkvět bych tudíž mohl nekriticky vynášet přemrštěné požadavky či falešné soudy. Označím rovnou podstatu onoho problému: je jí skutečnost, že na našich akademických pracovištích, totiž univerzitních fakultách připravujících učitele matematiky, se dosud neetablovala jako vědní disciplína ta tvůrčí činnost, která je zaměřena na hledání nových obtížných matematických úloh řešitelných elementárními prostředky, tedy aparátem středoškolské matematiky. Na takové bádání bez hlubokých základů vyšší matematiky hledí profesionálové základního výzkumu v lepším případě shovívavě jako na milou kuriozitu rekreačního charakteru, na druhém břehu stojící didaktici matematiky v něm zase postrádají „antropologické“ (psychologické a výchovné) prvky. A přece nad takovými úlohami se mladí talentovaní lidé učí lépe a lépe přemýšlet, a tím dále rozvíjejí svůj talent a schopnosti. Absence akreditovaného oboru, kterému se anglicky říká *Problem Solving* (tedy *Řešení úloh*) zapříčiňuje, že lidé s obrovským přehledem o úlohách v knižní i časopisecké literatuře celého světa, kteří do ní sami přispívají původními úlohami a články, se nemohou habilitovat, a tudíž i zastávat úlohu školitelů v postgraduálním studiu. Může někdo pochybovat o tom, jak užitečný by byl pro nejlepší absolventy učitelské matematiky doktorský studijní program v oboru zaměřeném na studium úlohové literatury, analýzu metod řešení a tvorbu původních úloh? Nemám teď samozřejmě na mysli pouhé partikulární zájmy Matematické olympiády. Může se ovšem stát, že za pár let se už na žádné pedagogické fakultě nenajde člověk, který by soubory úloh pro Matematickou olympiádu kvalifikovaně sestavil. A pokud ano, bude mít o takovou práci zájem?

Literatura

[1] Vyhláška MŠMT ČR ze dne 30.7.1992 o organizaci a financování soutěží a přehlídek žáků předškolních zařízení, škol a školských zařízení. Sbírka zákonů č. 431/1992, částka 86.

[2] Organizační řád Matematické olympiády a Fyzikální olympiády, předpis MŠMT ČR, č.j. 35 294/97-26 ze dne 8. 12. 1997.

[3] Dvacet pět let Matematické olympiády v Československu. (eds.) Moravčík, J., Vyšín, J., Mladá fronta, Praha 1976.

[4] Čtyřicet let Matematické olympiády (v Československu). (ed.) Horák, K., JČMF, Praha 1993, ISBN 80-7015-396-2.

[5] Padesát let Matematické olympiády. (eds.) Boček, L., Horák, K., Matfyzpress, Praha 2001, ISBN 80-85863-64-2.

Matematický korespondenční seminář

Gymnázia J. K. Tyla

Libor Šimůnek[1]

Abstrakt: Matematická soutěž pro žáky druhého stupně základních škol připravovaná studenty má na Gymnáziu J. K. Tyla již mnohaletou tradici. Soutěžící během roku řeší postupně třicet úloh. Jejich práce musejí obsahovat přesný popis postupu. Nové poznatky žáci získávají z autorského řešení či z poznámek, jež jsou opravujícími vpisovány přímo do jejich prací. Tento článek obsahuje mimo jiné

[1] *Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové, libor_simunek@email.cz*

šest úloh. Na každou navazuje komentář, který rozebírá, proč je daná úloha pro soutěžící užitečná.

Abstract: A mathematical competitions for 10-15 year old pupils prepared by secondary students from Gymnázium J. K. Tyla has a long tradition. During the year, competitors solve thirty problems. Their solutions must be very detailed. New knowledge is gained from the correct solution or from notes which the correctors write into the solution. Six problems are given with commentaries.

Základní informace

Gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové pořádá matematický korespondenční seminář od školního roku 1987–88. Je určen pro žáky druhého stupně základních škol a studenty odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Připravují jej studenti matematických tříd pod dohledem profesorů matematiky.

Seminář probíhá formou soutěže. Během školního roku pořádáme pět sérií o šesti úlohách. Vypracované úlohy nám žáci zasílají poštou. Do tří týdnů od uzávěrky série obdrží stejnou cestou své opravené práce, komentáře k úlohám a jejich autorské řešení, výsledkové listiny a zadání nových úloh.

Charakteristika semináře

Úlohy vymýšlíme tak, aby odpovídaly znalostem žáků základních škol. Mladší z nich se pro zvládnutí některých úloh musejí v průběhu soutěže sami naučit například Pythagorovu větu či goniometrické funkce. Výkladová část v našem semináři není, předpokládáme však, že soutěžící pečlivě studují autorská řešení a osvojí si postupy v nich obsažené. K metodám užívaným v autorském řešení se v průběhu roku často vracíme v nových úlohách.

Náměty úloh jsou ve většině případů původní. Přesto jsme přesvědčeni o tom, že podobné byly již nesčetněkrát zveřejněny a počítány. Matematické problémy jsou po celý ročník zasazeny do jednotného prostředí se stálými hrdiny. Tím se snažíme učinit seminář zábavnější a posilujeme tím jeho identitu.

Při opravování žákovských prací nikterak nešetříme vpisováním poznámek, které soutěžícímu individuálně vysvětlí jeho chybu, upozorní na zbytečnou zdlouhavost postupu nebo poukáží na formální nedostatky práce.

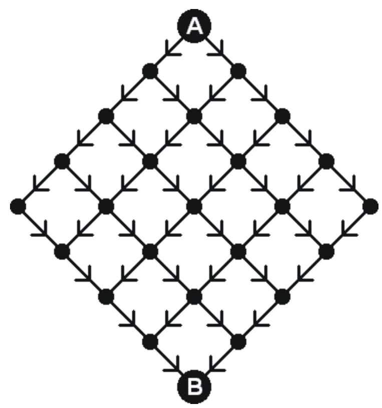
Pokud zvolí řešitel zdlouhavější a méně elegantní postup, není za to bodově penalizován. Rozhodující je pro nás přesný popis postupu, zdůvodnění každého kroku a správnost výsledku.

K autorskému řešení úloh předchozí série přikládáme i komentář, ve kterém hodnotíme jednotlivé úlohy. Soutěžící seznámíme s chybami, které se v pracích často vyskytovaly, a sdělíme jim, jaké různé postupy užívali. Vše doprovázíme statistickými údaji. V komentářích na začátku semináře upozorňujeme i na obecné nešvary, jako je dosazování bez jednotek, předčasné zaokrouhlování mezivýsledků, vyjadřování iracionálních čísel jejich přibližnými hodnotami a podobně.

Naším cílem je rozvíjet logické uvažování žáků v oborech matematiky, které už znají, seznámit je s předstihem s tím, co je ve škole teprve čeká, naučit je samostudiu a v neposlední řadě zdokonalit jejich matematické výrazové prostředky a celkovou formální stránku prací.

Ukázka jedné série

1. v hodině informatiky se Kajetán věnoval jedné počítačové hře. Nejvíce ho na ní zaujal herní plán, z něhož se vstupovalo do jednotlivých kol. Hra začínala v bodě A, ze kterého bylo nutné dopravit se po čarách ve směru šipek až do cílového bodu B. Na křižovatkách cest se vcházelo do kol hry. Kajetán při hraní přemýšlel, **kolika různými způsoby se může dostat z bodu A do bodu B.**



2. Josef s Kajetánem vymýšleli nové úlohy do svého matematického korespondenčního semináře. Josef pro inspiraci listoval v jedné sbírce úloh, kterou před několika lety velice často a rád otvíral. Některé stránky knihy byly proto pobryndány a zapatlány nejrůznějšími potravinami. V jedné úloze byl čokoládou zakryt velice podstatný údaj. Tato úloha zněla: „Součet . . . po sobě jdoucích přirozených čísel je 1 000 000. Určete tato čísla.“ Josef musel opatrně seškrabat vrstvu čokolády, aby zjistil, **jaký číselný údaj zakrývala**.
3. Josef nakonec pro seminář vymyslel jinou úlohu: **„Jaký nejvyšší počet čísel je možné vybrat z posloupnosti 1, 2, 3, . . . , 2003, aby se žádné z nich nerovnalo součtu jiných dvou vybraných čísel?“**

4. O velké přestávce hráli Josef, Kajetán a profesor matematiky mariáš. Na začátku hry balík všech třiceti dvou karet pečlivě promíchali. Pan profesor se při té příležitosti studentů zeptal, **jaká je pravděpodobnost, že srdcový svršek a srdcový král budou v balíčku vedle sebe.**
5. Na dveře do učebny matematiky bylo třeba umístit příznačný nápis MATEMATIKA. Josef a Kajetán za tímto účelem vyrobili deset písmen, a když je lepili na dveře, přemýšleli, **kolik různých, třeba i nesmyslných desetipísmenných slov lze z daných znaků složit.**
6. Náročný den byl u konce a Kajetán se vracel ze školy domů. Šel po přímém chodníku, ve vzdálenosti s nalevo od něj stál rovnoběžně s chodníkem panelák, ve vzdálenosti d napravo od něj stál rovnoběžně s chodníkem plot. V jednu chvíli zaštěkal hned za plotem pes, přičemž vzdálenost psa a Kajetána byla v tu dobu nejmenší možná, tedy d. Kajetán šel stále rychlostí v_1. Půl sekundy poté, co uslyšel štěknutí psa, uslyšel ozvěnu štěknutí jdoucí od paneláku. Doma Kajetán neodolal a počítal, **jaká je vzdálenost s, zná-li d, v_1 a rychlost v šíření zvuku**. (Kajetánovy uši a psí tlama byly ve stejné výšce, protože pes při štěkání skákal na plot.)

Cíl ukázkové série

První úloha vyžaduje pouze jednoduchý nápad. Není třeba použít žádný složitý postup. Čekali jsme, že soutěžící napíší na každé rozcestí číslo, kolika způsoby lze na dané místo dojít. Tato čísla budou doplňovat do obrazce na principu Pascalova trojúhelníku. Ovšem ten, kdo neobjeví tuto metodu a vymyslí složitější postup, procvičí své uvažování ještě více.

Kladem druhé úlohy je vysoký počet řešení. Žákům často chybí důslednost a po nalezení jednoho výsledku se přestanou problémem zabývat. Tato úloha vyžaduje obezřetnost až do posledního kroku. Někteří žáci při zapisování výsledků například zapomenou hlídat, zda jsou v daném případě všechny členy posloupnosti kladné.

Důsledné úvahy o tom, zda je domnělý výsledek skutečně správný, se uplatní i ve třetí, důkazové úloze. Důkaz je pro žáka základní školy neobvyklým problémem. Většina řešitelů správně odpoví, kolik čísel lze maximálně vybrat, navrhne která a zdůvodní, proč jejich množina vyhovuje podmínce. Důkaz, že nelze vybrat více čísel, bývá neúplný a někdy zcela chybí.

Čtvrtá úloha se zabývá pravděpodobností. Tato disciplína stojí bohužel mimo osnovy základní školy. Kvůli jejímu praktickému využití v životě jde přitom o disciplínu poměrně atraktivní. Před touto úlohou jsme již žákům zadali na seznámení s pravděpodobností jeden jednodušší úkol. Obdobné úlohy se zakládají na dvou úvahách – je třeba zjistit počet možných jevů a rozhodnout, které jevy jsou stejně pravděpodobné. V této úloze je cenné, uvědomí-li si řešitel, že je zbytečné zabývat se tím, jaké různé variace vzniknou přeházením ostatních třiceti karet. Postačí zajímat se pouze o možné polohy dvou sledovaných karet. Výsledná pravděpodobnost je pro matematika těžko kontrolovatelná, musí spoléhat pouze na svůj úsudek. Výjimku tvoří ti, kteří znají základy programování a výsledek si mohou pomocí počítače experimentálně ověřit.

Kombinatorice, často potřebné při určování pravděpodobností, se věnuje i pátá úloha. Někteří soutěžící vyhledávají v odborné literatuře vhodné vzorce. Za nejužitečnější považujeme, objeví-li potřebné postupy, jak určit počet variací či kombinací, sami. Jakéhokoli nahlédnutí do knih si ovšem také velice ceníme. Podobné úlohy v předchozích sériích, kde bylo třeba počítat kombinační čísla, jsme zadali tak, aby se v nich nevyskytovala příliš vysoká čísla, což usnadnilo určit počet kombinací vlastními metodami. Teď již soutěžící běžný postup znají.

V šesté úloze je třeba nakreslit dle zadání obrázek, zorientovat se v něm, najít pravoúhlý trojúhelník a použít Pythagorovu větu. Potřebné údaje jsme zadali obecně proto, aby si soutěžící navykli upravovat výrazy a aby si v závěru úlohy všimli, na jakých veličinách kýžená vzdálenost vlastně závisí. Úlohy bez konkrétních čísel činí vždy problémy, proto je nezapomeneme čas od času zařadit. Jednu z veličin jsme cíleně zadali konkrétně, aby si řešitelé uvědomili důležitost jednotek. Jednotky jsou na základní škole během početních operací zbytečně vynechávány. Většina soutěžících pak do výsledku dosadí místo 0,5 sekundy pouze bezrozměrné číslo 0,5. Výsledná vzdálenost jim pak, aniž by si to uvědomili, vychází v jednotkách rychlosti.

Úlohy i řešení úloh je možné najít na stránkách `http://www.gjkt.cz`. Je možné též s námi komunikovat na adrese seminar@gjkt.cz.

Literatura

[1] Calda E., Dupač V., *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Prometheus, Praha 1999, ISBN 80-7196-147-7.

[2] Odvárko O., *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha 1999, ISBN 80-7196-195-7.

Matematické soutěže pro žáky SŠ a ZŠ

Jaroslav Švrček[1]

Abstrakt: V příspěvku je soustředěny základní poznatky o vzniku a vývoji matematických soutěží pro žáky středních a základních škol, a to jak v jednotlivých zemích, tak i v mezinárodním měřítku. Zvláštní důraz je přitom kladen na dnes již tradiční matematické soutěže (MO a MMO). V závěrečné části jsou podány nejdůležitější informace o poslání Světové federace národních matematických soutěží.

Abstract: The origin and development of mathematical competetitions for primary and secondary students are given in some countries and internationally. Special emphasis is put on traditional mathematical competitions – Mathematical Olympiad and International Mathematical Olympiad. Some attention is paid to the goals of the World Federation of National Mathematics Competitions.

Vznik a vývoj matematických soutěží pro žáky SŠ

První matematické soutěže určené žákům středních škol (SŠ) vznikly s rozvojem a modernizací tehdejšího středního školství na konci 19. století. Tyto soutěže mají do současnosti největší význam především v souvislosti s vyhledáváním a rozvojem matematických talentů. Podporují dále u žáků rozvoj logického a kreativního myšlení. V neposlední řadě soutěže vyžadující od žáků úplná řešení – nikoliv tzv. *multiple-choice*, v nichž se vybírá vždy správná odpověď z nabídky několika možností – podporují rovněž rozvoj jejich popisných a vyjadřovacích schopností. Nejstarší matematické soutěže pro středoškoláky neměly ryze klausurní charakter jako např. matematická olympiáda (MO). Jednalo se o soutěže pro středoškoláky zveřejňované ve speciálních rubrikách některých časopisů. První matematickou soutěží, která svou podobou připomíná dnešní MO, vznikla v roce 1894 v Maďarsku. Jednalo se o tzv. soutěž Loránda Eötvöse určenou žákům posledních ročníků gymnázií.

První matematická soutěž pro žáky středních škol v Československu vznikla v roce 1921. Jednalo se o čtenářskou řešitelskou rubriku v časopise Rozhledy matematicko-přírodovědecké, což je předchůdce současného časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální, určenou především žákům středních škol a nazývala se „Soutěž z matematiky o ceny“. Matematická olympiáda se poprvé uskutečnila v Československu z podnětu JČMF ve školním roce 1951/52. U jejího zrodu stáli především *Akad. Eduard Čech* a *Akad. Jur Hronec*, dále pak *Prof. František Vyčichlo*, *Prof. Rudolf Zelinka* a *Akad. Josef Novák*. Dlužno podotknout, že však již

[1] *Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc, svrcek@inf.upol.cz*

ve školním roce 1950/51 proběhla matematická olympiáda pokusně v některých krajích tehdejšího Československa.

Dále uvádíme stručný přehled o vzniku některých vybraných matematických soutěží na světě:

- 1889 – RUMUNSKO, časopis GAZETA MATEMATICĂ, od roku 1902 pravidelná soutěžní rubrika
- 1894 – MAĎARSKO, soutěž LORÁNDA EÖTVÖSE pro žáky posledních ročníků gymnázií, od roku 1949 se tato soutěž pro žáky vyšších ročníků gymnázií nazývá soutěž JÓSZEFA KÜRSCHÁKA, a pro žáky nižších ročníků soutěž DÁNIELA ARANYIHO, obě mají charakter MO
- 1934 – SSSR, Lenigradská MO – Sankt-Peterburgská MO, u zrodu stáli B. N. Delone, A. D. Alexandrov, D. K. Fadějev a I. R. Šafarevič, od roku 1935 – Moskevská MO
- 1949 – MO v Polsku
- 1950 – MO v Bulharsku a Jugoslávii
- 1951 – MO v Československu a v Litvě
- 1956 – MO v Číně (pouze ve 4 velkých městech)
- 1958 – MO v Indii a Kanadě
- 1959 – 1. Mezinárodní MO (MMO) v Rumunsku
- 1961 – MO ve Švédsku
- 1960 – MO v NDR
- 1962 – MO ve Vietnamu, na Kubě, v Itálii a Nizozemsku
- 1963 – MO v Mongolsku a Lucembursku
- 1965 – MO v Anglii, Argentině a Belgii
- 1969 – soutěž v kanandském časopise CRUX MATHEMATICORUM
- 1970 – MO v Rakousku a SRN
- 1970 – soutěž v ruském časopise KVANT
- 1972 – MO v USA
- 1976 – MO v Austrálie atd.

Historie MMO

Nejstarší mezinárodní matematickou soutěží pro žáky středních škol je Mezinárodní matematická olympiáda (MMO). Poprvé se uskutečnila v roce 1959 v Rumunsku. O vznik této již tradiční celosvětové matematické soutěže se zasloužili významní rumunští matematici poloviny minulého století, mezi něž patří *Prof.*

Simionescu, *Akad. Moisil* a *Prof. Tiberiu Roman*. Historicky 1. MMO, která se konala v Bukurešti, se zúčastnilo 52 soutěžících ze 7 zemí Evropy. Počet soutěžících a zúčastněných zemí však v posledních deseti letech narostl zhruba desetinásobně. Pro zajímavost – v roce 2002 se uskutečnil ve Velké Británii, v Glasgowě, již 43. ročník této prestižní mezinárodní matematické soutěže (v roce 1980 se MMO nekonala), kterého se zúčastnilo 473 soutěžících z 83 zemí světa.

Struktura soutěže se během téměř půl století existence nezměnila. Soutěžící řeší v průběhu dvou dnů dvě trojice původních úloh, které vybírá mezinárodní jury z došlých návrhů těsně před soutěží. Jejich náročnost má zejména v posledních letech výrazně stoupající tendenci. O tom se můžete přesvědčit v posledních ročenkách MO, příp. ve zprávách o průběhu jednotlivých ročníků MMO zveřejňovaných pravidelně v časopisech MFI a ROZHLEDY M-F. O stoupající náročnosti úloh na MMO se můžete sami přesvědčit i v následující ukázce dvojice úloh:

1. (1. úloha z 1. MMO - Bukurešť, 1959)

Dokažte, že zlomek

$$\frac{21n+4}{14n+3}$$

nelze zkrátit pro žádné přirozené číslo n.

2. (6. úloha z 43. MMO - Glasgow, 2002)

V rovině jsou dány kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ o poloměru 1, kde $n \geq 3$. Jejich středy označme po řadě $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Předpokládejme, že žádná přímka nemá společný bod s více než dvěma z daných kružnic. Dokažte, že platí

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{|O_iO_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}\,.$$

V následujícím stručném přehledu pak najdete základní informace o nárustu počtu účastníků a jednotlivých zemí na MMO:

- 1959 – 1. MMO v RUMUNSKU, soutěže se zúčastnily tyto země: Bulharsko (8), Maďarsko (8), NDR (8), Polsko (8), SSSR (4), Rumunsko (8) a Československo (8); v závorce je uveden počet soutěžících z jednotlivých zemí
- 1960 – 2. MMO v RUMUNSKU (5 zemí)
- 1961 – 3. MMO v MAĎARSKU (6 zemí)
- 1962 – 4. MMO v ČESKOSLOVENSKU - Praha (7 zemí)
- 1971 – 13. MMO v ČESKOSLOVENSKU - Žilina (15 zemí)
- 1984 – 25. MMO v ČESKOSLOVENSKU - Praha (34 zemí, 192 soutěžících)

- 1999 – 40. MMO v RUMUNSKU - Bukurešť (81 zemí, 450 soutěžících)
- 2000 – 41. MMO v KOREI - Taejon (82 zemí, 462 soutěžících)
- 2001 – 42. MMO v USA - Washington D.C. (83 zemí, 473 soutěžících)
- 2002 – 43. MMO ve VELKÉ BRITÁNII - Glasgow (84 zemí, 485 soutěžících)
- 2003 – 44. MMO v JAPONSKU - Tokio (?)
- 2004 – 45. MMO v ŘECKU - Atény (?)
- 2005 – 46. MMO v MEXIKU - Cancún (?)
- 2006 – 47. MMO ve SLOVINSKU - Ljubljana (?)

Současné mezinárodní matematické soutěže

Od vzniku prvních matematických soutěží v jednotlivých zemích se stále výrazněji prosazovala tendence vytvořit kromě MMO některé další mezinárodní matematické soutěže pro žáky SŠ a ZŠ. V současnosti existuje několik desítek takových soutěží (vždy v rámci několika zemí), a to s různě dlouhou tradicí. Mezi nejvýznamnější z nich patří:

- KANGAROO (MATEMATICKÝ KLOKAN) – celosvětová soutěž pro žáky SŠ a ZŠ
- TOURNAMENT OF TOWNS (TURNAJ MĚST) – celosvětová soutěž pro žáky SŠ a vyšších ročníků ZŠ
- BALKÁNSKÁ MO – regionální soutěž balkánských zemí
- IBEROAMERICKÁ MO – soutěž zemí Latinské Ameriky, Španělska a Portugalska
- ASIAN-PACIFIC MO – regionální soutěž Austrálie – země Polynésie – některé asijské země
- MATEMATICKÁ SOUTĚŽ POLSKO-RAKOUSKO – dvoustranná mezinárodní matematická soutěž jednotlivců a družstev
- BALTIC WAY – regionální soutěž zemí při Baltickém moři
- INTERNATIONAL MATHEMATICAL TALENT SEARCH (IMTS) – celosvětový mezinárodní matematický korespondeční seminář (USA)
- MATEMATICKÝ DUEL – soutěž mezi žáky SŠ a ZŠ s rozšířenou výukou matematiky z rakouského Grazu, polského Chorzowa a českého GMK v Bílovci

Česká republika má v současnosti své zastoupení v následujících mezinárodních matematických soutěžích pro žáky SŠ a ZŠ: MMO, MATEMATICKÝ KLOKAN a MATEMATICKÝ DUEL.

World Federation of National Mathematics Competitions

V roce 1984 vznikla z podnětu *Australského matematického trustu* (AMT) na světovém matematickém kongresu v australském Adelaide SVĚTOVÁ FEDERACE NÁRODNÍCH MATEMATICKÝCH SOUTĚŽÍ (WFNMC). Tato „nadnárodní" organizace odborně i ekonomicky podporuje veškeré matematické soutěže pro žáky SŠ a ZŠ na celém světě. Její sídlo je v australském hlavním městě Canberra při AMT a její činnost řídí výkonný výbor WFNMC, v jehož čele stojí prezident WFNMC. Prvním prezidentem WFNMC byl již zesnulý nestor matematických soutěží na australském kontinetu *Prof. Peter O'Halloran*, posledním (od roku 2000) je *Prof. Peter J. Taylor* rovněž z Austrálie. Každý kontinent světa má ve výkonném výboru aspoň jednoho svého zástupce. WFNMC vydává svůj časopis MATHEMATICS COMPETITIONS, který vychází dvakrát do roka a najdete v něm kromě odborných příspěvků zaměřených na práci s matematicky talentovanými žáky také zprávy a informace o všech významných národních a mezinárodních matematických soutěžích.

Mezi nejdůležitelší aktivity této instituce patří pořádání tradičních mezinárodních matematických kongresů (každé 4 roky), kde hlavní tématikou je především výměna zkušeností z oblasti péče o matematicky nadané žáky a informace o matematických soutěžích celého světa. Poprvé se tato konference konala v roce 1990 v kanadském WATERLOO, v roce 1994 v bulharském PRAVCI (této konference se za ČR zúčastnili *J. Molnár* a *J. Švrček*), třetí konference se konala v roce 1998 v čínském ZHONG SHAN a dosud poslední konference se konala v australském MELBOURNE. Českou republiku na kongresu WFNMC-4 v Melbourne zastupovali *J. Zhouf*, *J. Molnár* a *J. Švrček*. Na každém kongresu patří mezi významné body programu také ocenění nejlepších světových odborníků v oblasti péče o matematické talenty. Na úrovni národních soutěží se jedná o cenu *Paula Erdöse*, na úrovni mezinárodní pak o cenu *Davida Hilberta*.

Následující, v pořadí již pátý celosvětový konfgres WFNMC-5 se bude konat v roce 2006 ve Velké Británii.

Literatura

[1] Konjagin, S. V. a kol., *Zaruběžnyje matěmatičeskije olimpiady.* Nauka, Moskva 1987.

[2] *Mathematics Competitions*, Vol. 16, No. 1, 2003.

[3] Horák, K., Müller, V., Vrba, A., *Úlohy mezinárodních matematických olympiád.* SPN, Praha 1986.

[4] Greitzer, S. L., *International Mathematical Olympiads 1959 – 1977*. New Mathematical Library, Vol. 27, MAA, Washinghton D.C. 1978.

[5] Klamkin, M. S., *International Mathematical Olympiads 1978 – 1985 and Forty Supplementary Problems.* New Mathematical Library, Vol. 33, MAA, Washington D.C. 1988.

[6] Kuczma, M. E., *International Mathematical Olympiads 1986 – 1999.* MAA, Washinghton D.C. 2003, ISBN 0-88385-811-8.

Gymnázia s rozšířenou výukou matematiky

Václav Vaněk[1]

Abstrakt: Příspěvek se zabývá výchovou talentovaných žáku ve třídách gymnázií se zaměřením na matematiku. Obsahuje krátký náhled do historie těchto tříd a zdůvodnění nutnosti péče o talenty. Podstatná část článku je věnována současným problémům.

Abstract: The contribution focuses on the education of talented students in the secondary school classes with the extended teaching of mathematics. It includes a short introduction into the history of these classes and justification of the necessity to care for talented students. The main part concentrates on some contemporary problems.

Dlouho jsem vážil, jak má můj příspěvek vyznít, zda optimisticky, či naopak. Rozhodl jsem se nakonec pro pravdivý popis současné reality. Obávám se však, že budu tímto považován za zarytého pesimistu. Ale vše dále uvedené popisuje skutečnost, či úvahy lidí, kteří se výchovou talentů v matematice zabývají více než čtvrt století.

Budu se zabývat výukou žáků talentovaných na matematiku v gymnaziálních třídách se zaměřením na matematiku – studijní obor 7941K402, dříve 01 matematika.

Jedná se o jednu z nejkoncentrovanějších forem péče o matematicky nadané středoškoláky. První třídy se zaměřením na matematiku vznikly v roce 1974 na čtyřech gymnáziích v tehdejším Československu: v Praze - G Wilhelma Piecka (nyní G Christiana Dopplera), GMK v Bílovci, G Antona Markuša v Bratislavě (nyní G Gresslingova) a G v Košicích. Později bylo k těmto školám připojeno G v Žilině.

[1] *Gymnázium M. Koperníka, Bílovec, vvanek@gmk.cz*

Po roce 1984 byla síť těchto škol rozšířena tak, aby na území každého kraje existovala aspoň jedna taková třída. Tak přibylo G v Plzni (Mikulášské nám.), G v Liberci (dnes G F. X. Šaldy), G J. K. Tyla v Hradci Králové a G na tř. kpt. Jaroše v Brně. V roce 1985 přibylo G v Č. Budějovicích a G v Olomouci.

V současnosti už existují pouze čtyři z těchto škol.

Myšlenka koncentrované péče byla tedy v našich podmínkách poprvé zrealizována v roce 1974 a i v následujících letech jí byla věnována značná pozornost a institucionální, finanční a materiální podpora.

Nebudu se zabývat definicemi matematického talentu a nadání, neboť toto není jednoznačně definováno. Můžeme se ale shodnout na tom, že ho charakterizuje soubor sladěných, rozvinutých matematických a tvořivých schopností a nadprůměrného intelektu společně s motivací k úlohám z matematiky v jejich vzájemné interakci.

Pečovat o talentovaného žáka je velmi důležité, ale současně pro učitele matematiky i nesmírně obtížné a často se práce s ním dostává nad časové možnosti učitele.Tato práce je však potřebná. Jestliže totiž nepřipravíme žákovi s hlubším zájmem o matematiku vhodné podmínky pro jeho rozvoj a dostatek příležitosti pro tvořivou práci, má to za následek, že se tento žák začne věnovat jiné intelektuální činnosti a pro matematiku ho ztratíme. Na druhé straně je pravdou, že některé motivační formy práce, které dobře fungují pro vytvoření kladného postoje žáka, nelze použít z důvodu, že zejména u výrazně talentovaných žáků už tento vztah je vytvořen. Tito žáci často nemají ve svém okolí konkurenci, své poznávací zájmy projektují do sporů s vyučujícím a narušují tak poklid běžné školské výuky. Důvodem může být též snaha předvést se spolužákům a přivádět neustále učitele do rozpaků předkládanými dotazy, v nichž se ho snaží před třídou jakoby „shodit“. Postupně se vytváří mezi učitelem a žákem nový, nezvyklý vztah, který jistě je, pokud ho učitel umí využít, přínosem pro obě strany.

„Suchá je teorie, košatý strom života“ – praví klasik. Jak je to tedy s tím pomyslným stromem v případě matematických tříd na gymnáziu? Pokusím se porovnat podmínky v minulosti a současnost.

Studium matematiky mělo v minulosti celou řadu výhod:

1. Třídy byly naplňovány do počtu 25 žáků – nyní jsme z ekonomických důvodů tento počet nuceni zvyšovat.
2. Školy pečující o talentované žáky měly v minulosti možnost konat talentové zkoušky asi měsíc před řádným termínem přijímacích zkoušek. On totiž žák ZŠ těžko pozná, zda je dostatečně talentovaný, aby u zkoušek i v dalším studiu obstál. Pokud zjistil, že jeho talent pro studium v matematické třídě nestačí, přihlásil se na jinou školu do prvního kola a nepřišel tak o jeden termín. V sou-

časnosti mají tuto výsadu pouze umělecké školy, jako by matematický talent byl něco méně, než nadání taneční, či talent pro práci na hrnčířském kruhu.

3. Každoročně, vždy na jednom ze čtyř gymnázií, byla pořádána 3 – 4-denní setkání vyučujících v matematických třídách s autory textů, vysokoškolskými odborníky na výchovu talentů a pracovníky Ministerstva školství, kde se řešily aktuální problémy výuky matematiky a vzájemně se předávaly zkušenosti. Tato setkání byla vlastně intenzivními vzdělávacími kurzy včetně toho, čemu se dnes říká pracovní dílny.
4. Existoval dostatečný počet tříd z rozšířenou výukou matematiky na ZŠ, odkud se rekrutovala velká část zájemců o studium ve třídách se zaměřením na matematiku na gymnáziích. Po roce 1989 nastal jakýsi jazykový boom a mnoho rodičů usoudilo, že budoucnost jejich dítěte je v tom, že se naučí cizí jazyk. Ne cizí jazyk jako prostředek k uplatnění, ale jako cíl. Některé základní školy zareagovaly okamžitě a téměř přes noc se z nich staly školy s rozšířenou výukou jazyků.
5. Hodinová dotace matematiky byla 5 hodin plus disponibilní hodiny ředitele plus nepovinná cvičení plus semináře ve 3. a 4. ročníku. Od roku 1999 povoluje generalizovaný učební plán dotaci matematiky 3-3-2-2. Je pravdou, že i zde má ředitel několik disponibilních hodin, ale povinná estetická výchova, rozšíření výuky IVT do všech ročníků, zvýšený počet hodin občanské a tělesné výchovy mnoho prostoru pro navýšení neposkytuje. Z toho důvodu bylo nutno redukovat učivo co do obsahu (neučí se např. maticová algebra, numerické metody a grafy), i co do rozsahu. Dost jsme si slibovali od Rámcového vzdělávacího programu, ale po prostudování jeho návrhu naše nadšení vyprchalo.
6. Studenti pracovali ve výuce s učebními texty, nikoliv s učebnicemi, neboť texty jsou psány s větším důrazem na odbornou stránku. Na jejich tvorbě se podílely kolektivy autorů složené z vysokoškolských a středoškolských učitelů, což zaručovalo jakousi rozumnou vyváženost. V současnosti jsou na školách už jen zbytky skript a o vydání nových se z ekonomických důvodů neuvažuje.
7. Existovaly smlouvy s patronátními univerzitami, jejichž pracovníci vedli semináře a kroužky. Jednalo se o vysoce náročnou výuku, neboť tito učitelé museli reagovat na otázky z mnoha partií matematiky. V současnosti dostáváme mzdové prostředky na 96 % požadovaného výkonu školy, takže mzda za tuto práci je spíše „všimným“. Hluboce se proto skláním před jejich zápalem pro věc a ochotou nadále u nás učit.
8. Toto studium mělo i svou materiální stránku. Vzhledem k tomu, že např. pro Bílovec byly v počátku spádovou oblastí tři kraje (SM, JM, VČ), musela škola zajistit pro žáky ubytování. Byl proto postaven domov mládeže. V něm ubytovaní žáci mohli, při splnění jistých podmínek, získat stipendium, které z velké

části pokrývalo náklady spojené se studiem. Dosud platná vyhláška, která toto řeší, nebyla od roku 1984 inovována, takže málokterý současný student může splnit její kriteria – jako příklad uvádím podmínku, že „měsíční příjem na člena rodiny nepřesáhne 800,- Kč, přičemž matka jako samoživitelka se počítá za dvě osoby“. Jistě uznáte, že takových rodin u nás není mnoho.

9. Pokud absolventi matematického gymnázia pokračovali ve studiu matematiky na vysoké škole, měli možnost individuálního studijního plánu, který jim dovoloval ukončit studium v kratší době než ostatním studentům. Následně pak mohli věnovat získaný čas kariérnímu růstu.

A tak bych mohl pokračovat dále. Je zajímavé, že i přes snižující se zájem státu podporovat tento typ vzdělání je procento účastníků matematických tříd v družstvu, které reprezentuje ČR v mezinárodní matematické olympiádě stále přibližně stejné. Jen jejich umístění je podstatně horší. Svědčí to možná o celkově menším zájmu společnosti o matematiku, možná je to i tím, že u nás **neexistuje** propracovaný systém vyhledávání a výchovy matematických talentů a jejich, a to bych zdůraznil, **dostatečná podpora**.

V tom, co zde bylo doposud uvedeno, zcela jistě není návod jak situaci zlepšit. Ale to jsem si za cíl nekladl. Chtěl jsem jen poukázat na to, že stát nesehrává v případě talentů v matematice takovou roli, jakou by sehrávat měl. Možná by měla vláda zrušit fond vládních rezerv, který je využíván k ucpávání tunelů v bankách, na pokuty za prohrané arbitráže, špatně zadané zakázky, či na odškodnění za neuvážené výroky svých ministrů, a takto získané prostředky investovat do školství. Pak by nebylo třeba pracně hledat způsoby, jak zabránit ztrátám nadaných žáků. On by totiž nepřišel **ani jeden matematický talent nazmar**.

Literatura

[1] Volf, I., *Učitel a talentovaný žák.* Metodický materiál pro seminář „Aktivní formy podpo-ry rozvoje nadání s důrazem na rozvoj samostatných tvůrčích aktivit“, Praha 2001.

[2] Zhouf, J., *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice.* Doktorská disertační práce, Praha 2001.

[3] Vaněk, Vl., *Péče o talenty v matematických třídách.* Referát na didaktickém semináři PřF UP, Olomouc 2003.

[4] Ausbergerová, M., Sucháňová, M., *Sbírka náročnějších úloh z matematiky pro žáky 4. ročníku ZŠ.* Pedagogické centrum, Plzeň 1996.

Vektor nebo komplexní číslo?

Aneb jsem líná, tudíž přemýšlím

Zuzana Vítovcová[1]

Abstrakt: Tento článek se snaží přispět k řešení problému dnešní generace studentů, kteří nedokáží chápat abstraktně a v souvislostech. Celému příspěvku udává směr základní myšlenka: Jaký je vlastně význam matematiky pro člověka vůbec, jaké jsou příčiny ubývání počtu hodin matematiky na školách a proč je matematika noční můrou většiny studentů. Na interpretaci pojmů bodu, přímky, vektoru a komplexního čísla v různých matematických oborech, ve kterých se pohled na tentýž pojem liší, je ukázán způsob jak podpořit analyticko-syntetické myšlení u studentů interpretací jednoduchých pojmů v příbuzných matematických oborech, např. v planimetrii, vektorové algebře, analytické geometrii, teorii komplexních čísel a goniometrii. K osvětlení vztahu matematiky a ostatních odborných předmětů slouží řešení konkrétních příkladů z praxe.

Astract: The article focuses on students' inability to reason in an abstract way and see things in mutual connections. It is guided by the basic ida of what is the importance of mathematics for people, of what the causes are of the diminishing number of mathematics lessons and of why mathematics is the source of fear in most students. The way of supporting analytic-synthetic thinking in students by interpretations of individual concepts in related mathematical areas, for instance in planimetry, vector algebra, analytic geometry, theory of complex numbers and in trigonometry. The above is illustrated on the concepts of point, straight line, vector and compels numbers in related mathematical areas. Some concrete examples from practice are given.

Jaký je vlastně význam matematiky pro člověka vůbec a jaké jsou příčiny ubývání počtu hodin matematiky na školách, proč je matematika noční můrou většiny studentů, . . . ?

S podobnými otázkami se potýkám u nás na Střední zdravotnické škole v Karlových Varech denně. Tento článek se snaží řešit bolestný vztah k matematice většiny studentů, kteří nedokáží chápat abstraktně a v souvislostech. Příkladem, jak podpořit analyticko-syntetické myšlení, je ukázat rozdílnou interpretaci jednotlivých pojmů v příbuzných matematických oborech. Jako červená nit udává směr celému příspěvku základní myšlenka: tvorba *představ*, *souvislostí* a *aplikací matematiky* v běžné praxi a životě každého studenta.

[1]*SZŠ a VZŠ, Karlovy Vary*

Příspěvek se zabývá interpretací pojmů bodu, přímky, vektoru a komplexního čísla v různých matematických oborech, ve kterých se pohled na tentýž pojem liší. Tak například z hlediska analytické geometrie lze bod chápat jako uspořádanou dvojici nebo jako vektor s koncovým bodem, jehož počáteční bod leží v počátku pravoúhlého souřadnicového systému. Tentýž vektor z hlediska goniometrie lze interpretovat rovněž směrnicí přímky. Přímku lze pak vyjádřit několika způsoby: jako nekonečnou množinu bodů, ve směrnicovém tvaru pomocí tangenty jejího směrového úhlu, v parametrickém tvaru bodem a vektorem a obecnou rovnicí s využitím normálového vektoru. Na příkladu interpretace bodu a přímky je ukázána spojitost různých matematických disciplín, které jsou vyučovány odděleně a také studenty odděleně chápány.

Vektory jsou objekty, které tvoří prvky vektorového prostoru. V kartézské soustavě souřadnic má každý vektor $\vec{v}(v_1, v_2)$ své složky v_1, v_2.

Komplexní čísla lze zobrazit vzájemně jednoznačně na množinu bodů Gaussovy roviny, která je určena osami reálných a imaginárních čísel. V takto definované pravoúhlé soustavě souřadnic se komplexní číslo dané uspořádanou dvojicí $a(a_1, a_2)$ vyjadřuje ve tvaru

$a = a_1 + a_2$i.

Přitom velikost vektoru $|\vec{v}|$ a absolutní hodnota komplexního čísla $|a|$ se v obou případech vypočítají obdobně ze stejného pravoúhlého trojúhelníku podle Pythagorovy věty.

V tomtéž pravoúhlém trojúhelníku lze ukázat odvození vztahu mezi goniometrickými funkcemi $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

kde $\cos x$ je:

– první složka vektoru v_1

– první (reálná) část komplexního čísla a_1

– kosinus příslušného úhlu pravoúhlého trojúhelníku v jednotkové kružnici

– první souřadnice bodu $A[a_1, a_2]$ na jednotkové kružnici

a kde $\sin x$ je:

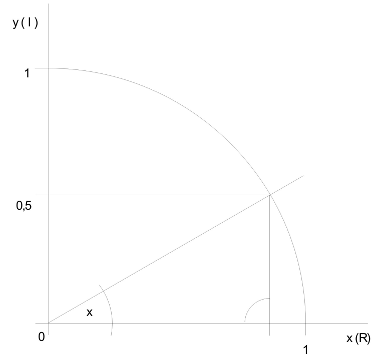
– druhá složka vektoru v_2

– druhá (imaginární) část komplexního čísla a_2

– sinus příslušného úhlu pravoúhlého trojúhelníku v jednotkové kružnici

– druhá souřadnice bodu $A[a_1, a_2]$ na jednotkové kružnici

Goniometrická funkce $\operatorname{tg} x$ zároveň vyjadřuje směrnici přímky OA. Přitom délka úsečky $|OA|$ udává velikost vektoru $|\vec{v}|$, ale také absolutní hodnotu komplexního čísla $|a|$, viz obr. 1.



Obr. 1

Přímku OA je možné pak vyjádřit několika způsoby. Jak bylo již řečeno, ve *směrnicovém tvaru* $y = kx + q$, kde $k = \operatorname{tg} x$ je směrnice přímky, tedy tangens jejího směrového úhlu, a q je druhá souřadnice jejího průsečíku s osou y. (V našem modelu je $q = 0$.) Z hlediska analytické geometrie má vyjádření přímky dva tvary: *Obecnou rovnici* $p : ax + by + c = 0$, kde alespoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, a *parametrické vyjádření* $p : x = a_1 + tv_1$, $p : x = a_2 + tv_2$, kde a_1, a_2 jsou souřadnice bodu $A[a_1, a_2]$, v_1, v_2 jsou složky vektoru $\vec{v}(v_1, v_2)$ a t je parametr.

Geometrickou interpretací koeficientů a, b v rovnici přímky $p : ax + by + c = 0$ je vektor $\vec{n}(a, b)$, což je normálový vektor přímky p, tedy vektor k ní kolmý. Směrový vektor přímky p pak má složky $\vec{s}(-b, a)$, resp. $\vec{s}(b, -a)$. Pomocí směrového vektoru přímky p lze zapsat její tzv. *vektorovou rovnici* s parametrem t ve tvaru $p : X - A = t\vec{v}$, z níž jednoduchou úpravou dostaneme vyjádření parametrické $p : X = A + t\vec{v}$. Toto vyjádření se z pravidla zapisuje jako soustava dvou lineárních rovnic v rovině, jak již bylo uvedeno, viz [1].

Výše uvedenou interpretací *vektoru*, *komplexního čísla*, *přímky* a *bodu* z pohledu planimetrie, vektorové algebry, analytické geometrie, teorie komplexních čísel a goniometrie jsem chtěla ukázat možnost chápání různých pojmů v souvislostech a analogiích. Uplatnění těchto principů (Pythagorova věta, vztah $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ atd.) v příbuzných matematických disciplínách ukazuje na možnosti široké aplikace těchto teorií v praxi.

Obdobná metodika je užívána i k osvětlení vztahu matematiky a ostatních odborných předmětů, kdy během hodin matematiky jsou obecnými metodami řešeny konkrétní úlohy z praxe. Matematika patří mezi exaktní vědy. Vzhledem k svému obecnému charakteru řešení úloh, možnosti zobecňovat konkrétní poznatky z příbuzných přírodních věd a vzájemně je logicky propojovat, jim plní zastřešující roli. Spojuje jejich poznatky v jednu obecnou teorii a naopak, sama nachází konkretizaci svých teorií v těchto oborech.

Ukázkou je následující tabulka, která dokladuje výše uvedený vztah matematiky a chemie:

matematika	jednočlen x	dvojčlen $x+2$	jednočlen $x(x+2)$
chemie	1 mol např. H_2 , O	3 moly H, H, O	1 mol H_2O

Tak například vezmeme-li obyčejnou molekulu vody H_2O, můžeme se na ni dívat jako na *jeden mol*, jednu částici. Ovšem tato jedna částice – jedna molekula se skládá ze dvou atomů vodíku a jednoho atomu kyslíku. Jedna částice obsahuje tři částice. *Jeden mol* tedy obsahuje *tři moly* látky jiné. Podobným příkladem je aplikace téže myšlenky v matematice. V jednočlenu $x(x+2)$ je tedy obsažen dvojčlen $x+2$.

Dalšími příklady jsou výklad pojmu geometrické posloupnosti v matematice, fyzice, ale třeba i hudební výchově, nebo pojmu nukleová kyselina v biologii a chemii.

Je tedy zbytečné v příbuzných oborech, kde můžeme využít mezipředmětových a mezioborových vztahů, vykládat tématické celky vždy v celém svém rozsahu. Je důležité upozornit studenty na souvislosti mezi jednotlivými pojmy a vysvětlit specifika každého termínu v tom příslušném oboru, ukázat tentýž pojem z různých hledisek a souvislostí. Souvislosti a aplikace jsou velmi významné pro tvorbu představ a myšlenek člověka. Nedílnou součástí tohoto způsobu myšlení je také fantazie opřená o odborné vědomosti.

Každý obor má svůj dorozumívací jazyk, který je zcela specifický pro příslušnou vědní disciplínu. Slouží pro vyjadřování a sdělování myšlenek mezi vědeckými pracovníky, učiteli a žáky i mezi jednotlivými studenty vzájemně. Je to také prostředek, který naprosto přesně a jednoznačně popisuje myšlenky každého oboru, a tím ho činí sdílným. Každý obor, matematika tím více, se řídí přísnými vnitřními pravidly, která jsou přesně formulována axiomy, definicemi, větami a vzorci, jejichž přesné znění musí žák znát a ovládat, aby se v předmětu vyznal a mohl je vhodně používat při řešení úloh.

Dalším důležitým problémem je vztah obecného a vtipného řešení příkladu. Obecné řešení je univerzální, dá se použít pro celou množinu obdobných úloh téměř bez výjimky, nicméně toto řešení bývá zdlouhavé a nezajímavé. Tzv. vtipná řešení jsou krátká, mají novou myšlenku, jsou dynamická, ovšem nebývají univerzální. Znamená to tedy, má-li žák nápad, vyřeší určitý příklad a pro další podobný již potřebuje další nápad a další myšlenku.

Co u žáků v dnešní době velmi postrádám, je „selský rozum“. Žáci o řešení úloh a především o reálnosti jejich výsledků vůbec nepřemýšlí, nedokáží si ujasnit, zda to, co jim vyšlo, je vůbec reálně možné, a v jednoduchých příkladech hledají složitosti. Řadu úloh, které jsou řešitelné pouhou úvahou, odhadem, jednoduchým vhledem do dané problematiky, řeší vzorci a složitým matematickým mechanismem.

Dalším problémem dnešních studentů je nedostatek trpělivosti, vytrvalosti, houževnatosti a sebekázně. Studenti se nechají odradit hned prvním neúspěchem. Chybí jim pracovitost, cílevědomost, chuť do práce a nutkání přemýšlet o problému tak dlouho, dokud ho nevyřeší.

Znalost a ovládání určitých matematických úkonů patří do všeobecného vzdělání každého člověka. Říkáme, že člověk má tzv. různé gramotnosti. Umět mluvit několika cizími jazyky, hrát na hudební nástroj, tančit, řídit automobil, ovládat počítač, to patří dnes do všeobecného vzdělání každého z nás.

Matematika má ovšem svá specifika. Učí nás zcela jedinečným způsobem myslet, jinak než ostatní předměty. Učí nás nejen novým vědomostem, ale především dovednostem a návykům v práci i myšlení. Matematika zpracovává modelové situace, a tím učí člověka správně analyzovat životní situace, umět odhadnout výsledek svého jednání a správně se rozhodnout. Matematika nás učí analogiím, které lze aplikovat i v jiných oborech, a tak si zredukovat množství informací, které bychom jinak museli studovat odděleně, bez vzájemných souvislostí. Čím lépe člověk chápe jakýkoli obor, tím méně se ho tedy musí mechanicky učit a není tak přetěžován, protože určitý pojem pochopí a zařadí do systému vědomostí pouze jednou. Setká-li se s týmtéž pojmem z jiného hlediska, tento pojem už jen přehodnotí, doplní o další informace, ale nemusí se ho učit znovu, jak činívají lidé bez schopnosti učení a myšlení v představách, souvislostech, bez porozumění. Dynamické uspořádání myšlenek podporují přehledy, tabulky, schémata a jiné systematizující prvky výuky.

Nedílnou součástí výuky matematiky je také zpětná vazba. S výhodou se užívá při ověřování správnosti řešení slovní úlohy zkouškou. Zda řešil správně, zjistí žák okamžitě. V životě člověk zpětnou vazbu svého jednání většinou okamžitě nezíská. Nicméně v obou případech je praktickým hlediskem toho, zda naše jednání bylo správné, a slouží jako vodítko našeho dalšího počínání. Schopnost vzít si poučení ze svých vlastních chyb má tedy rovněž kořeny ve způsobu myšlení, kterému nás učí matematika, a tím nás dostává na kvalitativně novou úroveň myšlení a jednání.

Při řešení školních příkladů musí žák opakovaně a vytrvale hledat předem známý výsledek, dokud řešení nepochopí. Smyslem vyučování matematice je zpětná vazba v praxi. Tedy to, co se žák učí, by mělo mít ověření a aplikaci v praxi. Interpretaci, pro kterou žák nemá uplatnění, velmi rychle zapomene, což je přirozená obrana mozku proti přetěžování. Tuto myšlenku je možné pozorovat na příkladu sinové a kosinové věty, Pythagorovy věty a řady dalších příbuzných vzorců z oblasti stereometrie, se kterými se žák v praktickém životě jistě setká.

Samostatnost vede žáky k odpovědnosti. Proto např. nezadávám domácí cvičení, jen neustále dodávám dostatečné množství příkladového materiálu, a je na nich vypočítat adekvátní množství příkladů potřebných k optimálnímu zvládnutí učební látky.

Tyto a další dovednosti tvoří tzv. matematickou gramotnost. Je to soubor dovedností a návyků, které se naučíme řešením modelových úloh ve škole. Přitom důležité nejsou výsledky, ale cesty, mnohdy velmi nepřímočaré a nesnadné, kterými se výsledku postupně, přes spoustu omylů dobereme. Mezi nejzávažnější návyky, kterým nás jiný předmět než matematika nenaučí, patří přesnost, systematičnost, pořádek a čistota, organizace práce, schopnost vytvořit si vlastní úsudek a řada dalších, bez kterých se zdravotní sestra ve svém povolání neobejde. V každém z nás pak matematika pěstuje tvořivost a schopnost správně argumentovat, a tím hájit svůj názor. Není tedy nejdůležitější zvládnout určité penzum vzorců a pouček, ale osvojit si tzv. matematickou gramotnost, což je soubor dovedností a návyků, nezbytných pro kvalitní práci.

Z výše uvedených poznámek jednoznačně vyplývá nezastupitelná výchovná role matematiky. Ve školách matematiky ubývá po stránce hodinové dotace, a tím i obsahově. S tím souvisí i neustále sílící požadavky učitelů matematiky na zachování či rozšíření hodinové dotace matematiky ve školách, aby zůstal časový prostor pro rozvíjení výše uvedených charakterových vlastností naší mládeže. Totiž jak známo z vývojové psychologie, s duševním rozvojem určitých osobnostních vlastností nelze čekat. Je třeba je podporovat z hlediska vývoje osobnosti dítěte a mladého člověka právě s ohledem na jeho věkové zvláštnosti v tu danou chvíli.

Např. v podmínkách výchovy středního zdravotnického personálu to znamená, že je třeba na střední škole vyučovat vedle matematiky i profilující odborné předměty ve vzájemné symbióze. Vztah k pacientům a ošetřování nemocných získává budoucí sestra mezi *šestnáctým až sedmnáctým rokem*. Sebekvalitnější a sebekvalifikovanější vzdělání v pozdějším věku již nenahradí výchovu k trpělivosti, starostlivosti, pochopení nemocných a vztahu k nim. Tyto nepostradatelné vlastnosti budoucí sestra získá bohatou praxí, kterou jí poskytuje stávající čtyřleté studium. Naše školství bylo po staletí tradičně Evropě vzorem, v cizině bylo uznávané, ctěné a vysoce ceněné. Naše zdravotní sestry jsou v zahraničí žádané pro svoji preciznost, kvalifikovanost a profesionální povahové vlastnosti. Bylo by velmi neuvážené náš fungující model vzdělání měnit podle cizích vzorů směrem k horšímu. Výsledkem by totiž byl ještě větší nedostatek a další úbytek kvalitních zdravotních sester, což by byla škoda. Ve zdravotnictví je zapotřebí lidí, kteří své povolání vykonávají především srdcem. Z tohoto důvodu je velmi nežádoucí přesunout vzdělání zdravotní sestry na vyšší odborné školy nebo na vysoké školy.

Literatura

[1] Polák, J., *Přehled středoškolské matematiky.* SPN, Praha 1980.

17 let práce v úlohové komisi matematické olympiády kategorie Z

Marta Volfová[1]

Abstrakt: Příspěvek stručně připomíná historii matematické olympiády kategorie Z, vysvětluje hlavní problémy práce úlohové komise a zabývá se výhledy do příštích let. Končí výzvou pro učitele matematiky, aby přispěli svými úlohami nebo i další prací pro kategorii MO – Z.

Abstract: The contribution focuses on the history of the Mathematical Olympiad, Category Z, and explains the main problems of work of the problem committee. It also concerns the future of the Olympiad. It finishes with the challenge for mathematics teachers to contribute their problems and/or work in the next round of Category Z.

Kategorie Z matematické olympiády (MO – Z)

Kategorie Z soutěže MO je „mladší sestrou“ matematické olympiády studentů středních škol. Jak je známo, 1. ročník MO (pro střední školy) začal již ve školním roce 1951/52 (a tedy v letošním školním roce probíhá již její 52. ročník). Speciální úlohy pro žáky základních škol se objevily o dva roky později, tedy ve školním roce 1953/54, a to jen pro nejvyšší třídu základních škol (kterým ovšem střídavě byl 8. nebo 9. ročník). V dalších letech se soutěž rozšířila o jeden ročník níže (tak tomu bylo např. ještě v 35. ročníku soutěže MO, které se účastnilo 11 912 žáků 7. tříd, co řešili úlohy MO – Z7, a 14 627 žáků 8. tříd, kteří pracovali s úlohami MO – Z8). Postupně se však soutěž dále rozšiřovala.

[1] *PdF UHK, Hradec Králové, marta.volfova@uhk.cz*

Na Slovensku byla již od r. 1980 ověřována vhodnost MO i pro žáky nižších kategorií Z, a to od školního roku 1980/81 pro žáky 5., 6. a 7. ročníků v kategoriích Z5, Z6 a Z7 a od školního roku 1983/84 i pro žáky 4. tříd v kategorii Z4. Tyto všechny kategorie se pak uplatňovaly v celém Československu (např. 40. ročník uvádí kategorie Z8, Z7, Z6, Z5 a Z4, kde v Z8 bylo 6 úloh 1. kola, 4 úlohy v okresním 2. kole a 4 úlohy v krajském 3. kole; pro Z7 až Z4 bylo vždy 6 úloh 1. kola a 3 úlohy pro kola okresní, tedy celkem 30 úloh pro nejnižší kola, 16 úloh pro okresní a 4 pro krajské kolo, tedy 50 úloh). Později přibyla kategorie Z9 (nějakou dobu společná Z8, 9), tedy dalších asi 10 úloh.

Dnes se v ČR pracuje s kategoriemi Z5 až Z9, které mají ve školním kole po šesti úlohách, Z5 až Z8 v druhém kole po třech a Z9 ve druhém i třetím kole po čtyřech úlohách. (V SR je ještě kategorie Z4.)

Problémy práce úlohové komise

Úkolem úlohové komise je každoročně dodat úlohy pro všechny kategorie Z, tedy vymyslet (či aspoň tvořivě obměnit) 50 do značné míry originálních úloh – takových, aby zahrnovaly aritmeticko-algebraickou část matematiky i geometrii a logiku, aby vyšší kola navazovala aspoň částečně na nižší, aby nešlo o úlohy řešitelné známým (tj. žákům známým) algoritmem, aby výsledek byl samozřejmě jednoznačný, ale aby se k němu dalo případně dojít různými způsoby, mimo jiné občas (zejména v nižších kategoriích) promyšleně uplatněným experimentováním.

Samozřejmě je třeba dbát, aby žáci měli již osvojeny matematické znalosti potřebné pro řešení úlohy. To bývá někdy problém, neboť úlohová komise je stále „federální" a osnovy v SR a ČR se trochu liší.

Pro mladší žáky je významné i znění úlohy – proto se často uchylujeme i do pohádkového světa draků, trpaslíků, kouzelných bylin, ale i „pěkných dat", „veselých čísel", „skamaráděných čtyřúhelníků" apod.

Někdy se setkáváme s kritikou, že naše úkoly neodpovídají běžnému typu „školních úloh", že odrazují (možná někdy spíše učitele než žáky) svou netradičností a někdy i obtížností. (Setkala jsem se i u vysokoškolských studentů s určitou nechutí pouštět se do řešení úloh MO – někdy je odmítali s tím, že tomu nerozumějí, že tam asi něco chybí, že nevědí, jak se to má řešit. . . Někdy stačilo „poradit", aby si text znovu přečetli. . .)

Představujeme si, že úlohy MO mohou být – zvláště pro matematické talenty – významnou a dlouhodobou motivací. Zejména pro skutečnost, že se (většinou) nedají „vypočítat za 5 minut", že se k nim žák třeba vícekrát vrací, zkouší, zkoumá, tvoří a nalézá řešení.

Věříme, že matematické talenty právě zaujmou úlohy vymykající se „užití" běžných algoritmů. Úlohy, které vyžadují experimentování, delší promýšlení, třeba i odložení na určitou dobu – a opětné zkoušení, u nichž žáci mohou projevit (nebo prvně objevit) badatelský přístup k řešení.

Dovolte mi zde malou osobní vzpomínku. Až do začátku osmé třídy mě matematika nijak neoslovila (tehdy jsem hlavně četla a četla a četla. . .). Měli jsme na ni typického učitele bývalé „měšťanky“, který trval na rychlém, přesném a bezchybném řešení celé řady podobných (nudných) algoritmických příkladů. V 8. ročníku nás však přišel učit profesor z gymnázia (musel si – po zrušení osmiletých gymnázií – doplňovat úvazek na základní škole). Byl to opravdový šok! Najednou se v matematice muselo myslet!! A přinesl nám úlohy MO. Nikdy jsme nic podobného neviděli – úlohy, které se nedaly „spočítat“ během čekání na vlak, které se vzpíraly řešení – a u kterých nestačilo řešení jen určit, ale i zdůvodnit a zjistit, zda není řešení více. . . Najednou se pro mne – i několik dalších spolužáků – z nezajímavého školního předmětu začala objevovat KRÁLOVNA VĚD. Byli jsme polapeni její krásou, záhadností . . . , mnozí na celý život.

Ovšem vytvořit úlohu, která by vše výše uvedené splňovala, oslovovala žáky, motivovala. . . , není snadné – ani pro celou úlohovou komisi. (A vytvářet jich tolik, aby se jich každoročně 50 vybralo. . .) Naše komise pracuje (stále ještě) s tvořivým nadšením, ale nutně by potřebovala nové (mladé) členy! Vždyť každý po čase vyčerpá do značné míry svou tvořivost, zásobu vlastních nápadů. . . (Pracuji v komisi 17 let a vím, o čem mluvím.) Také naši učitelé by mohli více pomoci a posílat návrhy svých zajímavých motivujících úloh.

Úlohová komise se schází dvakrát ročně. Vždy dva lidé mají na starosti jednu kategorii s tím, že by od všech ostatních měli dostat vhodné příklady a z nich kategorii vytvořit. (Toto nefunguje úplně – obvykle každý posílá své úlohy všem bez konkrétního označení, pro jaký ročník jsou určeny – a úlohy se dopracovávají až na zasedání komise. Každý je přitom povinen předtím úlohy propočítat, „opřipomínkovat“ je, doporučit pro ten či onen ročník, případně zavrhnout. Např. před posledním zasedáním komise jsme si takto poslali 89 úloh.)

Na zasedání komise se pak úlohy různě variují, obměňují, vylepšují, vybírají. Naše zasedání jsou – často dlouho do nočních hodin – naplněna řešením nejrůznějších úloh, hledáním lepších variací, vhodnějšího slovního vyjádření, jsou plná tvořivosti – i humoru! Výsledkem jsou pak texty úloh MO pro všechny kategorie Z. Nakonec zbývá napsat tzv. komentáře k úlohám a jejich řešení. (Bylo by vhodné uvést do komentářů i přípravné úlohy, které by žákům pomohly rekapitulovat potřebné znalosti, částečně dovést ke klíčovým myšlenkám řešení a případně upozornit na možná úskalí.) Komentáře píší „garanti kategorie“ a posílají je ostatním k eventuálním úpravám.

Výhledy

1. Někteří kolegové z kategorií MO – A, B, C uvažují, že by se měla kategorie Z výrazněji zúžit. Mně osobně se to zdá být veliká škoda. Rozšiřování kategorií po matematice napodobily i další olympiády (fyzikální, . . .) a po zrušení nižších kategorií by se tyto jen obtížně obnovovaly. Myslím, že pro výchovu matematických talentů jsou důležité.

2. Vytvořené řady úloh MO mohou představovat vítané motivační sbírky úloh pro další generace (zejména matematicky nadaných) žáků. Bylo by vhodné je vydat!

3. Výzva pro všechny učitele matematiky: posílejte své úlohy pro MO! Ať jsou vybrané úlohy barvitější, zajímavější, vhodnější, s přiměřenou obtížností! Vaše účast, účast praktiků je velmi potřebná. A kdo má chuť, zájem (a nekonzumní přístup k životu), ať nás v práci v úlohové komisi vystřídá.

Literatura

[1] Boček, L., Horák, K., *50 let MO*. MATFYZPRESS, Praha 2001, ISBN 80-85863-64-2.

Povinná školní docházka budoucích vědců a matematika

Eva Vondráková[1]

Abstrakt: Lze předpokládat, že někteří ze současných školáků jsou budoucí vědci. Předmětem autorčina zájmu je vliv školy na rozvoj jejich nadání a osobnosti. Zkušenosti nadaných dětí a jejich rodičů poukazují na problémy, které je třeba řešit, chceme-li intelektový potenciál žáků co nejlépe rozvíjet. Zajímavý je také pohled úspěšných absolventů škol na průběh a kvalitu vzdělávání. Péče o nadané u nás je zatím zaměřena spíše na vyučovací předmět, nikoli na osobnost nadaného žáka. Autorka upozorňuje na úskalí tohoto přístupu a na současné trendy v péči o nadané ve světě. Metody práce s nadanými lze často úspěšně použít pro rozvoj všech žáků. Zdrojem aktuálních informací i léty osvědčených metod jsou mezinárodní společnosti, zabývající se výchovou a vzděláváním nadaných, např. WCGTC a ECHA, jejichž pobočkou v ČR je Společnost pro talent a nadání..

[1] *ECHA, Praha, vondrakova@mistral.cz*

Abstract: Some of the present students can be expected to become scientists in the fiture. The author focuses on the influence of formal education on the development of their talent and personality. Experience of talented students and their teachers highlight problems which need to be solved in order to develop the intellectual potential of the students. The view of successful graduated students of the course and quality of education is also interesting. The care for talented students concentrates on the subject rather than on the students themselves in our country. The author points to some obstacles of this approach and to the present trends in this field abroad. Methods of work with talented students can often be used successfuly with all the students. The source of up-to-date information and efficient methods are international organisations dealing with the education of talented students, such as WCGTC and ECHA which has a branch in the Czech Republic called Society for Talent and aptitudes.

Motto konference „Ani jeden matematický talent nazmar“ je zcela v souladu se snahou mezinárodních odborných společností, zabývajících se vyhledáváním, podporou a rozvojem nadání. Z nich jsou pro nás nejvýznamnější **WCGTC** (World Council for Gifted and Talented Children) a její mladší kolegyně **ECHA** (European Council for High Ability, its study and development). Tyto společnosti sdružují odborníky, zejména psychology a pedagogy, ale také rodiče nadaných dětí. Zabývají se vyhledáváním a rozvojem nadání v různých oblastech lidské činnosti, u jedinců všeho věku, zdravých i handicapovaných. Nejčastěji se jejich členové věnují intelektovému nadání dětí. Činí tak s ohledem na zdravý a radostný vývoj celé osobnosti dítěte, v zájmu jednotlivých nositelů nadání i celé společnosti.

Nám geograficky i historicky nejbližší ECHA umožňuje svým členům vzájemné sdělování poznatků z výzkumů i výměnu zkušeností prostřednictvím bulletinu **ECHA-news**, odborného časopisu **High Ability Studies** a webových stránek `www.echa.ws`. Konference, workshopy, stáže, spolupráce na výzkumech a mezinárodně platný **postgraduální kurz „ECHA Diploma“** (pro učitele a psychology pracující s nadanými) dávají každému účastníku příležitost získat přehled o současné úrovni péče o nadané ve světě a aktivně se podílet na jejím rozvoji. Díky vynikajícím výsledkům své práce **se stala ECHA v květnu 1995 poradcem Rady Evropy**.

V mezinárodním výboru ECHA jsou zastoupeni významní odborníci z evropských univerzit a vědeckých pracovišť. Zajišťují výzkumnou, pedagogickou a poradenskou činnost, týkající se vzdělávání a výchovy nadaných. Ve většině zemí existuje příprava učitelů pro práci s nadanými, pregraduální i postgraduální, a různé rozsahy kurzů, včetně specializace na tuto problematiku. Existují a dále vznikají poradenská, výzkumná a vzdělávací **Centra pro nadané**.

Společnost pro talent a nadání je českou a slovenskou pobočkou ECHA. Její členové se aktivně zúčastňují konferencí ECHA. V Praze se konají 2 – 4 krát do roka **odborné semináře** a jednou měsíčně **Klub rodičů** nadaných dětí. Akce jsou přístupné každému zájemci o problematiku.

Vývoj poznání v oblasti péče o nadané se přesouvá od počátečního měření schopností, přes mimointelektové faktory ovlivňující nadání, péči o problémové žáky a jejich rodiče, až po etiku v souvislosti se vzděláváním a výchovou nadaných. Tématem poslední konference bylo „Vzdělávání nadaných - investice do naší budoucnosti“. Příští ECHA konference (Pamplona 10.–13. září 2004) bude zaměřena na technologie vzdělávání nadaných a posun od věku informací do éry znalostí (pochopení, poznání, vědění, kompetencí).

Mezi témata, která jsou poslední dobou v popředí zájmu, patří např. **underachievers**, tedy ti, jejichž výkon je zjevně pod úrovní jejich potenciálu, a **experti**, kteří naopak ve zvoleném oboru dokázali vyniknout. Aktuální je také **vyhledávání a podpora talentů pro vědu**.

Zájemců o vědu je ve světě mnohem méně, než by bylo zapotřebí. Přiměřeně tomu se pak nedostává mimořádných talentů, zejména pro přírodovědné a technické obory. Proto bylo v dubnu 2002 pozváno na 50 odborníků z 23 členských států NATO a partnerských zemí na **pracovní setkání NATO - UNESCO** do Visegrádu, aby se seznámili se **současnými nejúspěšnějšími příklady vědecké výchovy dětí v Evropě, USA a Izraeli** a rozšířili tyto poznatky do dalších, zejména středoevropských postkomunistických zemí. Organizátory workshopu byli maďarský biochemik a molekulární biolog Peter Csermely a nositel Nobelovy ceny za fyziku z roku 1988 Leon Ledermann.

Workshopu se zúčastnilo několik mimořádně nadaných studentů, kteří se vedle svého úspěšného studia podílejí na vědeckých výzkumech, organizaci studentských konferencí apod. Jedním z nich byl Tomasz Macura, Američan polského původu, který ve svých 16ti letech právě končil studium matematiky a informatiky na Augusta State University jako nejmladší v historii státu Georgia (nyní, ve svých 17ti letech je nejmladším doktorandem na Trinity College v Cambridge).

Na rozdíl od obecně rozšířených představ o mimořádně nadaných dětech, zejména pokud studovaly rychleji a intenzivněji než jejich vrstevníci, netrpí Tomasz žádným zjevným handicapem. Je společenský, přátelský, má smysl pro humor, nemá problémy v komunikaci s kýmkoli a dokonce rád sportuje. Má zcela konkrétní a konstruktivní připomínky k povinnému vzdělávání, z něhož absolvoval pouze první stupeň. Při něm zvládl učivo vyšších stupňů natolik, že v 11ti letech maturoval mnohem úspěšněji než většina 18tiletých Američanů. Ve 13ti letech napsal otevřený dopis guvernérovi státu Georgia, kde mimo jiné zmínil, kolik peněz ušetřil daňovým poplatníkům tím, že si zkrátil studium. Vysvětloval, jak je důležité vážit si kvalitních učitelů, a doporučoval, aby špičkoví učitelé byli placeni stejně jako špičkoví zpěváci a sportovci.

Tomasz si je vědom své vysoké inteligence, popírá však, že by byl mimořádně nadaný. Říká, že podobně nadaných jako on je spousta, jenom to nedotáhnou do konce (více najdete ve vyhledávači pod heslem „Tomasz Macura“).

Společným rysem úspěšného vzdělávání nadaných byla studentům poskytovaná **míra samostatnosti**, vlastní aktivity a „skutečné“ práce na **řešení úkolů z praxe**, např. v laboratořích výzkumných ústavů. Dělat něco „doopravdy“ a podílet se na řízení svého vzdělávání (např. výběru témat, způsobu jejich zpracování, hodnocení vlastní práce) děti baví. Jsou více vnitřně motivovány a není třeba je k práci nutit.

V tomto duchu pracuje v ČR soukromé reálné gymnázium **Přírodní škola**, kde se žáci učí vědeckými metodami zpracovávat „v terénu“ témata, která si zvolí. Pracují ve věkově smíšených týmech a na konci školního roku mají veřejné obhajoby svých výzkumných prací. Podobně laděna je **Deutsche Schüler Akademie**, prestižní letní soustředění pro nadané středoškoláky, organizované německou společností Bildung und Begabung. Ve skupině 15ti stejně silně motivovaných vrstevníků, pracujících na tématu, které si z bohaté nabídky vybrali, nemají studenti obavy, že budou považováni za „šprty“.

S tím se, bohužel, nadaní žáci často setkávají ve školách, které navštěvují. Chtějí-li pracovat naplno, riskují odmítnutí vrstevnickou skupinou. Velká část z nich tomuto tlaku neodolá a raději se přizpůsobí tempu a zájmům většiny spolužáků. Jejich nadání se za těchto podmínek nemůže přiměřeně rozvíjet a tito žáci se zcela ztratí v průměru, případně „vyniknou“ nežádoucím směrem.

Nadaní se dělí zhruba do dvou kategorií:

a) **výrazně nadprůměrní** – výborně zvládají požadavky školy, profitují z nabídky škol a tříd pro nadané a bývají úspěšní i v kariéře

b) **mimořádně nadaní** – ti mívají paradoxně více problémů ve škole, bývají méně konformní, takže mohou mít problémy s autoritami, obtížně nacházejí ty, se kterými by si rozuměli

Mimořádně nadaní mívají vlastní způsoby učení a řešení problémů, obvykle efektivnější než ty, které jim nabízí škola. Ke své práci potřebují větší míru samostatnosti (menší míru řízení) než jejich spolužáci. Mívají jiný systém hodnot i jiný smysl pro humor. Jsou také často velmi sebekritičtí, pochybují o sobě a na rozdíl od laických představ trpívají pocity méněcennosti. Uvědomují si rozdíly mezi tím, jaké věci „mají být“ a jaké jsou. Nesrovnalosti těžce nesou a reagují na ně skepsí a depresemi. Jsou-li introvertní (což bývají matematicky nadaní velmi často), může se stát, že v období, kdy pochybují o smyslu života, jejich okolí nepostřehne závažnost situace nebo neví, jak jim pomoci, a neposkytne jim patřičnou emoční podporu. V některých případech uniknou tito jedinci z pro ně bezútěšné situace sebevraždou. Rodiče jednoho z takovýchto studentů založili v r. 1980 v USA nadaci, která sice jejich synovi už pomoci nemůže, ale svou podporou emocionálních a sociálních potřeb nadaných je šancí pro další podobné děti.

Učitelé, psychologové i rodiče by měli mít alespoň základní informace o potřebách a zákonitostech vývoje a prožívání nadaných dětí a o tom, kde hledat pomoc. Užitečnou institucí je např. **školní psycholog**. Získá-li si důvěru studentů, chodí se s ním radit i introverti, kteří by do žádné poradny nešli.

V ČR příprava učitelů (i psychologů) pro práci s nadanými chybí. Měla by se stát základní částí systému péče o nadané, který se připravuje. Zatím je zdrojem informací Společnost pro talent a nadání - ECHA, která prostřednictvím odborných seminářů, Klubu rodičů a popularizační činnosti informuje naši veřejnost o současných světových trendech v péči o nadané.

Na Slovensku existuje **Škola pro mimořádně nadané děti a gymnázium**. Zakladatelkou a ředitelkou je psycholožka PhDr. Jolana Laznibatová, dlouholetá pracovnice Výskumného ústavu detskej psychologie a patopsychologie. Na základě poznatků z výzkumů i zkušeností z praxe založila původně experimentální třídu, která by respektovala vzdělávací potřeby nadaných. V současné době má bratislavská školy pobočky v mnoha slovenských městech. K realizaci je připraven kurz vzdělávání učitelů pro práci s nadanými a je vytvořen i program pomoci učitelům nadaných dětí v běžných školách.

Velmi **zajímavé změny** probíhají v současné době **v britském školství**. Protože společné vzdělávání všech dětí v hlavním proudu škol nepřineslo očekávané výsledky, rozhodla se britská vláda situaci řešit. Cílem je **co nejlépe rozvíjet potenciál každého dítěte**. Vychází se mimo jiné z informací o osvědčených praktických metodách a výsledcích výzkumů, týkajících se vzdělávání nadaných v celém světě. Výuka už od první třídy klade důraz na **pochopení učiva**. Realizují se i četná opatření, zohledňující **vzdělávací potřeby mimořádně nadaných žáků** ([1], str. 229–231).

U nás se zatím problémy, provázející výchovu a vzdělávání nadaných, řeší intuitivně. Zkušenosti rodičů, kteří se obracejí na STaN-ECHA napovídají, kolik potenciálně nadaných dětí se setkává se zbytečnými obtížemi a je demotivováno už v průběhu docházky do základní školy, svůj talent přiměřeně nerozvíjí, případně ztrácí. Péče o nadané je různě pokročilá v různých částech světa. Chceme-li rychleji dohnat své zpoždění, lze čerpat z nepřeberného množství kvalitní odborné literatury a z nabízené spolupráce.

Myšlení se nejrychleji rozvíjí v útlém věku dítěte. Záleží na prostředí, jeho informovanosti, vybavení, vztahu k dítěti a pochopení jeho potřeb, zda mu dokáže poskytnout podmínky k optimálnímu rozvoji. Důležitost tohoto období pro radost z poznávání, motivaci ke vzdělávání a pozdější studijní úspěšnost je u nás zatím nedoceněna. Ani mateřské školy nejsou připraveny na práci s mimořádně nadanými dětmi.

Děti, které zahajují povinnou školní docházku, jsou téměř všechny zvídavé a činorodé. Do školy nastupují sice věkově podobné, ale přesto na různém stupni vývoje a s různými zájmy. Už v první třídě však často dochází k rozčarování u dětí, které jsou „napřed“: „Náš syn, který nyní navštěvuje první třídu, vyniká v matematice a ve čtení a má problémy s tím, že se ve škole nudí. Na začátku školního roku jsme se snažili paní učitelku upozornit na to, že Honza umí plynně číst a v matematice jsou jeho znalosti na trošku jiné úrovni, ale bylo nám řečeno, že rozdíly mezi žáky se časem smažou.“

Toto je, bohužel, nikoli ojedinělá, nýbrž typická ukázka stesku rodičů na přístup školy k nadaným prvňáčkům. Jsou-li žáčci aktivní, nastávají záhy i „výchovné problémy“. Děje se tak zejména v případech, kdy dítě (častěji chlapec) není vyvoláváno, protože paní učitelka ví, že zná správnou odpověď. Pokud dítě nedokáže poslušně čekat, „až je ostatní doženou“, a není-li vyvoláno, odpovědi vykřikuje. Některé si vytvoří „náhradní program“, kterým může „oživit“ pro něj nudné vyučování. „Hodné děti“se „přizpůsobí “ a poslušně opakují to, co už dávno znají, aniž by se dále rozvíjely. Jiné se uzavřou do „svého“ světa a přestanou se o vyučování zajímat. To se může stát i mimořádně nadaným studentům víceletého gymnázia. Jeden z nich, který měl i v této náročnější formě vzdělávání před svými spolužáky několikaletý náskok ve fyzice, přinesl poznámku: „Paní doktorko, Váš syn nedokáže 10 minut před koncem vyučovací hodiny odpovědět na otázku, který předmět právě máme.“

Na počátku školní docházky mají děti lepší vztah k matematice než k českému jazyku a jsou v ní i úspěšnější. Na druhém stupni ZŠ se tento vztah mění v neprospěch matematiky. Mnoho dětí z ní má obavy a je přesvědčeno, že pro tento předmět nemají nadání. Později to vede k jejich snaze matematice se vyhnout a také z ní nematurovat. Bohužel se často jedná o **naučenou bezmocnost**, kdy k závěru o své neschopnosti došly pouze na základě opakovaných neúspěchů. Psychologické testy, zjišťující strukturu rozumových schopností, obvykle potvrzují u těchto žáků nízkou úroveň znalostí matematiky. Poměrně často však stejní probandi úspěšně zvládnou subtest „číselné řady“, ve kterém by při skutečném nedostatku matematického nadání uspět neměli. Ze své praxe znám případy, kdy vhodným (náročným a dlouhodobým) doučováním, které bylo založeno na pochopení základů školské matematiky, nikoli na snaze pouze překlenout aktuální mezeru, došlo k obratu v úspěšnosti žáků i v jejich vztahu k předmětu.

Vztah k matematice a úspěšnost v ní je předmětem zájmu i v zahraničí. **Matematika je klíčem** k mnoha moderním oborům. Jejím nezvládnutím si mnozí blokují přístup **k dalšímu vzdělávání** i pozdějšímu úspěšnému uplatnění na trhu práce. Matematika také rozvíjí logické myšlení, které je, mimo jiné, nezbytným předpokladem k dosažení nejvyšší úrovně morálního usuzování. Ne všichni intelektově nadprůměrní dospějí k postkonvenční úrovni na stupních morálního vývoje. Bez vynikající schopnosti logického uvažování jí ale dosáhnout nemohou (Šest Kohlbergových stadií morálního vývoje, s.234, in: Fontana, 1997).

Zajímavý **projekt podle japonského učitele matematiky Kumona** byl realizován na Tchaiwanu. Děti staršího školního věku, různého stupně nadání a úspěšnosti v matematice byly po dobu tří let podrobeny nápravnému programu, po jehož skončení byly porovnávány se svými vrstevníky z USA a s americkými maturanty. V matematice byly rozděleny do skupin po deseti žácích. Náprava u každého z nich začínala na úrovni, ve které ještě učivo s jistotou zvládalo – tedy u každého jinak. Podmínkou bylo každodenní krátkodobé (asi 10timinutové) procvičování příkladů doma. Výsledkem bylo odstranění obav z matematiky, díky porozumění i zlepšení výkonu a zvýšení zájmu o předmět. Na konci experimentu byly lepší než jejich američtí vrstevníci a srovnatelné s věkovou skupinou maturantů. Vztah k matematice se změnil k lepšímu dokonce i u rodičů těchto žáků.

U nás se v současné době věnuje pozornost žákům s **dyskalkulií**, neboli poruchou učení, týkající se matematiky. V mnoha případech si odborníci nejsou jisti, jedná-li se o skutečnou poruchu nebo spíše o důsledky nevhodného výukového postupu. Náprava se v některých případech řeší metodou velmi podobnou výše zmíněné metodě Kumonově.

Společným jmenovatelem úspěšných postupů je **individualizace** a **výuka, založená na pochopení**, nikoli na pouhém „probrání“ učiva. Na první pohled se možná někomu bude tento postup zdát organizačně, časově i finančně náročnější. Současný přístup, který odrazuje žáky od matematiky a učitelům přináší více „dřiny“ s méně pozitivními výsledky, je ve skutečnosti mnohem dražší.

Smysluplností a účinností výuky se zabývá Madeline Hunterová, jejíž útlá knížka může poskytnout učitelům cenné podněty pro praxi.

Velmi poučné je podívat se na náš vzdělávací systém očima úspěšných nadaných studentů. I u nás jsou přemýšliví hodnotitelé současné praxe. Zpětná vazba z jejich pohledu by patrně nebyla vždy lichotivá. Určitě by ale mohla přispět k zamyšlení a žádoucím změnám, byl-li by na straně vzdělavatelů zájem (Eva Vondráková: Future Scientists and School Attendance, in: Science Education).

Společnost pro talent a nadání – ECHA se snaží na svých odborných seminářích, Klubech rodičů a vzdělavacích akcích přinášet podněty k zamyšlení, aktuální informace ze světa i výměnu názorů mezi účastníky, ať jsou jimi učitelé, rodiče, studenti, či další zájemci.

Další informace o vzdělávání a výchově nadaných u nás i ve světě najdete na připravovaných webových stránkách STaN-ECHA (e-mail: vondrakova@mistral.cz).

Literatura

[1] Freeman, J., *Educating the Very Able*. Ofsted, London 1998, ISBN 0-11-350100-5.

[2] Freeman, J., *Gifted Children Grown Up*. David Fulton Publisher, London 2001, ISBN 1-85346-831-2.

[3] Webb, J. T., Meckstroth, E. A., Tolan, S. S., *Guiding the Gifted Child*. Ohio Psychology Press 1992, ISBN 0-910707-00-6.

[4] Csermely, P., Ledermann, L. (eds.), *Science Education, Talent Recruitment and Public Understanding*. NATO Science Series, IOS Press 2003, ISBN 1-58603-308-5.

[5] Wu-Tien Wu (Taiwan, R.O.C.), Effects of Kumon Instruction on Children´s Math Achievement, Attitudes and Anxiety. In: *Gifted and Talented International*, Vol. X, No.2, Fall 1995, s. 76 - 84.

[6] Mönks, F. J., Ypenburg, I. H., *Nadané dítě*. Grada, Praha 2002, ISBN 80-247-0445-5.

[7] Fontana, D., *Psychologie ve školní praxi*. Portál, Praha 1997, ISBN 80-7178-063-4.

[8] Hunterová, M., *Účinné vyučování v kostce*. Portál, Praha 1999, ISBN 80-7178-220-3.

[9] Laznibatová, J., *Nadané dieťa*. IRIS, Bratislava 2001, ISBN 80-88778-23-8.

[10] Vondráková, E., *Nadané děti*. Raabe, Rádce učitele (A 2.2), 2002 (`www.raabe.cz`).

[11] `www.schuelerakademie.de`

[12] `www.chaperone.sote.hu`

[13] `www.osf.cz/prirodniskola`

Karty a kartičky, aneb dvě z mnoha metod rychlého opakování učiva

Věra Voršilková[1]

Abstrakt: V referátu jsou popsány dvě praktické metody pro rychlé opakování učiva na začátku hodiny. První metoda je nazvána „Karty“ a ukazuje, jak pomoci krátkých hesel nebo symbolů napsaných na kartách lze účinně, pružně a rychle opakovat starou látku. Druhá metoda nazvaná „Kartičky“ je převzata z nižšího stupně škol. Používá kartičky s nápisy ANO-NE, resp. A, B, C, D, . . . apod., které pak studenti zvedají jako odpovědi na dotazy.

Abstract: This paper describes two practical methods of a quick revision of a subject matter at the beginning of the lesson. The first method (called “Cards”) shows how to effectively, flexibly and quickly practise knowledge previously acquired using short signs or symbols written on these paper cards. The second one (called “Small Cards”) was taken over from elementary school teaching. Students are asked to answer mutiple-choice questions by lifting different card (yes/no or A,B,C,D, . . . etc.).

„Opakování – matka moudrosti,“ říká jedno staré a omleté přísloví. Omleté je ale asi proto, že na něm přece jenom něco bude. Určitě platí i při učení se matematice.

Ačkoliv podstata práce s talentovanými studenty je jistě v něčem jiném než v mechanickém zvládání učiva, tak stejně každý, kdo se matematikou více zabývá, přizná, že základem jeho pozdějších úspěchů v osvojování této vědy je jisté množství poznatků, které si na střední škole osvojil a zapamatoval a které později do jisté míry automaticky používal. Středoškolská matematika totiž do značné míry buduje právě takový systém poznatků, dovedností a algoritmů. Jestliže chceme, aby množství poznatků, které mohou studenti používat, bylo co největší, musíme je neustále opakovat.

Existuje celá řada metod, které při opakování můžeme používat. Některé z nich rozvíjejí i tvůrčí vlastnosti studentů, některé jsou velmi mechanické – a určitě je nejlepší používat co nejvíc těchto metod a často je střídat. Dají se k tomuto účelu použít i různé hry (bingo, křížovky, číselné řady apod.), lze využít zajímavých příkladů.

Já chci ve svém příspěvku připomenout dvě metody, které jsou vhodné na rychlé opakování učiva na začátku hodiny, v rámci jakési „matematické rozcvičky“. Ta má kromě opakování za úkol také to, aby se studenti začali soustředit na matematiku, aby se začali vůbec celkově koncentrovat. Je proto klidně možné (a často i žádoucí), abychom opakovali látku možná už zapomenutou, látku, která

[1] *Gymnázium, Liberec, vo@gfxs.cz*

nemusí souviset s tématem současné hodiny. Pracovně jsem tyto metody nazvala Karty a Kartičky.

Karty

Vyrobíme si je např. ze čtvrtky formátu A4 tak, že ji rozstříháme na několik proužků, kterým budeme říkat „karty“. Fixem na ně napíšeme různá hesla dostatečně velkými písmeny, aby je bylo možné přečíst i z poslední lavice. Tyto karty totiž potom od tabule ukazujeme studentům a máme k nim různé dotazy. (Budu uvádět příklady vhodné především pro vyšší stupeň gymnázia). Možností je pochopitelně nepřeberné množství a každý učitel si při probírání jednotlivých kapitol sám vybaví, co je nutné často opakovat, a právě to si na karty připraví.

Takže můžeme mít např. takovéto karty a k nim někdy jeden, někdy i více dotazů (pro sebe si dotazy můžeme psát tužkou na rub karty):

$$\boxed{A \wedge B}$$

přečtěte tento zápis; jak se tento složený výrok nazývá?; znegujte; uveďte konkrétní příklad takového výroku; kdy je tento výrok pravdivý?

$$\boxed{(2x^2 - \tfrac{1}{3}x)^2}$$

umocněte; jak se nazývá výraz, který umocňujete?; jaký stupeň má umocňovaný dvojčlen?; co je grafem funkce f, jejíž předpis je dán tímto umocňovaným dvojčlenem?; určete průsečíky grafu funkce f s osou x

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$

usměrněte zlomek; napište ho ve tvaru součtu

$$\boxed{2x - 3y + 1 = 0}$$

co tato rovnice geometricky představuje?; jak se nazývá tato rovnice přímky?; v jakém jiném tvaru může být napsána rovnice přímky?; napište rovnici této přímky ve směrnicovém tvaru; napište rovnici této přímky v parametrickém tvaru; napište rovnici přímky k této přímce kolmé a procházející počátkem

$$\boxed{|z - 5| < 4}$$

jaký má tento zápis význam na číselné ose?; řešte tuto nerovnici; napište výsledek ve tvaru intervalu; znázorněte výsledek na číselné ose

$$\boxed{b^2 - 4b - 45}$$

rozložte zpaměti na součin; určete kořeny tohoto trojčlenu

$$\boxed{\log_2 0,5}$$

určete hodnotu tohoto výrazu; jak tuto hodnotu znázorníte na grafu funkce (načrtněte)?

$$\boxed{3x^{-\frac{1}{2}}}$$

napište výraz bez záporných a lomených exponentů; usměrněte ho; jaký je definiční obor tohoto výrazu?

$$\boxed{45^\circ}$$

převeďte na obloukovou míru; jakou hodnotu má kosinus tohoto úhlu?; jakou hodnotu má tangens tohoto úhlu?

$$\boxed{\sin 2\alpha}$$

rozepište pomocí goniometrických funkcí úhlu α; jakou hodnotu má tento výraz pro
$\alpha = 120^\circ$?

$$\boxed{z = 2 - 2i}$$

v jakém tvaru je tento zápis komplexního čísla?; určete jeho absolutní hodnotu; co je jeho reálná část?; jakou má imaginární část?; napište toto číslo v goniometrickém tvaru; napište číslo $2z$ v goniometrickém tvaru; jak vypadá číslo komplexní sdružené?; napište v goniometrickém tvaru číslo z^2

$$\boxed{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0}$$

co v geometrii představuje tato rovnice?; převeďte ji do středového tvaru; jaké souřadnice má střed této kružnice?; jaký má poloměr?

Dalo by se dlouho v podobných příkladech pokračovat, ale to jistě není nutné. Jaké jsou výhody této metody? Proč je lepší než psát totéž na tabuli?

1. Je to změna – upoutá studentskou pozornost víc než psaní na tabuli, které mají každou hodinu.
2. Karty lze dát do krabice a před hodinou buď vyhledat karty ke konkrétnímu tématu nebo jen tak namátkou sáhnout a pak už vyučující nemusí ve třídě vymýšlet, co má opakovat.
3. Opakujeme i témata, na která bychom jinak možná zapomínali – jakmile je jednou zařadíme mezi karty jako důležitá, už je opakovat občas budeme.
4. Opakování se provádí na konkrétních velmi jednoduchých příkladech, které se dělají zpaměti (ale nezakazujeme je studentům psát, pokud jim to činí potíže; po nějaké době stejně přejdou na počítání zpaměti).

Kartičky

Tato metoda je známá a používaná především na nejnižším stupni základní školy. Dá se však s úspěchem používat i u mnohem starších studentů.

Každý student má připravené kartičky, což mohou být listy papíru nejlépe formátu A6. Jsou napsané fixem, aby byla kartička i na dálku dobře čitelná. Může se používat několik sad těchto kartiček. Důležité je, aby se studenti naučili nosit je neustále s sebou v sešitě, čehož se nejsnadněji dosáhne jejich častým používáním.

Nejčastěji se používají následující sady kartiček, jsou však jistě i další možnosti:

$$\boxed{\text{ANO}} \qquad \boxed{\text{NE}}$$

$$\boxed{\sin\alpha} \qquad \boxed{\cos\alpha} \qquad \boxed{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\boxed{\text{A}}\ \boxed{\text{B}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{D}}\ \boxed{\text{E}}\ \boxed{\text{F}}$$

Studenti je zvedají jako odpovědi na dotazy.

První sada (ano, ne) se dá použít např. na otázky typu „jedná se o výrok?“, „je to kvadratická rovnice?“, „jedná se o rovnici roviny?“, „je napsaná úprava správná?“ – jednotlivé příklady je nejlépe připravit na slide pro zpětný projektor a postupně je promítat.

Ke druhé sadě (goniometrické funkce) si připravíme řadu obrázků trojúhelníků či jehlanů, kuželů, v nichž vyznačíme známé prvky a jinou barvou hledaný prvek, k jehož výpočtu je potřebné použít některou z goniometrických funkcí. Lze použít i sériově vyráběné fólie s těmito příklady.

Poslední sada se používá nejčastěji na testové otázky s volbou odpovědi. Je vhodné používat k tomuto účelu jednodušší příklady z Klokana, starých testů Scio, IQ testů nebo ze souborů příkladů pro státní maturity. Důležité je, aby příklady mohly být řešeny dostatečně rychle, neboť se pořád jedná o krátké opakování na začátku hodiny, které by nemělo zabrat dobu delší než 10 minut.

Opět na závěr shrnu výhody této metody:

1. Je to změna, a ta aktivuje.
2. Musí spolupracovat všichni a my hned vidíme chyby a můžeme je hned rozebrat.
3. Dají se sem zařadit i úlohy z tzv. IQ testů, které studenty baví.
4. Studenti si zvykají i na testy s volbou odpovědi, které byly v matematice méně časté.

Literatura

[1] Sýkora, V. a kol., *Matematika – sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky – základní obtížnost*. ÚIV, TAURIS, Praha 2001, ISBN 80-211-0400-7.

[2] Sýkora, V. a kol., *Matematika – sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky – vyšší obtížnost*. ÚIV, TAURIS, Praha 2001, ISBN 80-211-0397-3.

[3] Zhouf, J. a kol., *Sbírka testových úloh k maturitě z matematiky*. Prometheus, Praha 2002, ISBN 80-7196-249-X.

[4] Molnár, J. a kol., *Počítejte s Klokanem, kategorie Junior.* PRODOS, Olomouc 2001, ISBN 80-7230-096-2.

[5] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, Bratislava 1990, ISBN 80-08-01344-3.

Fyzikální olympiáda

Bohumil Vybíral[1]

Abstrakt: Stat'přehledně pojednává o středoškolské soutěži fyzikální olympiáda – o její historii a organizaci, a to jak na národní české (resp. československé) úrovni, tak o její mezinárodní formě. Věnuje pozornost aktivitám organizovaným na podporu rozvoje talentů v rámci fyzikální olympiády, zejména tvorbě studijních textů a organizaci celostátních soustředění. Zabývá se tvorbou vhodných úloh pro fyzikální olympiádu a uvádí náměty soutěžních teoretických i experimentálních úloh z některých mezinárodních olympiád. Posuzuje, co je společné a zvláštní pro fyzikální a matematickou olympiádu, a konečně se zabývá společenským a materiálním oceněním nejlepších řešitelů obou těchto soutěží.

Abstract: The contribution deals with a secondary school physical olympiad – with its history and organisation, both at the national and international levels. It includes the description of activities organised to support the development of pupils talented for physics, mainly of study texts and organisation of the national workshops. The creation of suitable problems for the olympiad is described and some topics for theoretical and experimental problems from some international olympiads are given. It distinguishes what is common for physical and mathematical olympiads and in which they differ and mentions a social and material evalutiona of the best solvers in the two competitions.

Vznik, vývoj a organizace soutěže

[1]*Katedra fyziky a informatiky PF Univerzity Hradec Králové, Bohumil.Vybiral@uhk.cz*

Fyzikální olympiáda (dále jen FO) patří vedle matematické olympiády (dále jen MO) k nejstarším prestižním středoškolským soutěžím, organizovaným v České republice. Byla založena roku 1959 (je tedy o 8 roků mladší než matematická olympiáda); ve školním roce 2002/03 proběhl její 44. ročník. Soutěž FO si klade za cíl vyhledávat a pěstovat talenty ve fyzice. Jejím vyhlašovatelem je Ministerstvo školství mládeže a tělovýchovy České republiky (dále jen MŠMT), které soutěž zabezpečuje finančně a legislativně. Po organizační a odborné stránce ji zajišťuje Jednota českých matematiků a fyziků prostřednictvím Ústředního výboru a krajských výborů fyzikální olympiády. Soutěž v současnosti probíhá v kategoriích A, B, C a D pro studenty na střední škole, přičemž nejvyšší kategorie A vrcholí třetím – celostátním – kolem. Ostatní kategorie mají školní a krajská kola. Pro základní školy se soutěž vypisuje v kategoriích E, F, G, které mají vedle školních kol okresní kola. Nejvyšší kategorie E (pro deváté ročníky) vrcholí krajským kolem.

Na vzniku FO v bývalém Československu a na jejím počátečním rozvoji v prvních dvaceti letech se významně podílel především prof. RNDr. Rostislav Košťál, profesor fyziky na Vysokém učení technickém v Brně. Ten také roku 1966 společně s prof. dr. Czeslawem Ścislowským z Polska a prof. dr. Rezsö Kunfálvim z Maďarska inicioval vznik **mezinárodní fyzikální olympiády** (dále jen MFO). Světové společenství fyziků (*Mezinárodní unie pro čistou a aplikovanou fyziku*) ocenilo jeho podíl na vzniku MFO udělením medaile u příležitosti 24. mezinárodní fyzikální olympiády v roce 1993 v USA (bohužel in memoriam). První MFO se konala v roce 1967 v Polsku (jen za účasti východoevropských zemí), třetí MFO v roce 1969 byla v Brně, desátá v roce 1977 v Hradci Králové. Brzy se k východoevropským zemím připojily i státy západní – Francie (1972), Spolková republika Německo (1974), Švédsko (1976) atd. Dnes se této prestižní mezinárodní soutěže zúčastňují řešitelé ze všech pěti kontinentů světa (např. minulé 33. MFO v Indonésii v r. 2002 se zúčastnilo 298 studentů ze 67 zemí). Naši studenti se ve světové konkurenci vždy umísťují v první čtvrtině pořadí zúčastněných zemí. Za dobu existence České republiky, tj. od roku 1993, se mezinárodních fyzikálních olympiád zúčastnilo celkem 50 českých soutěžících, z nichž čtyři získali ocenění zlatou medailí: Tomáš Kočka a Martin Beneš v USA (1993), Tomáš Brauner v Kanadě (1997) a Jan Houštěk v Itálii (1999). Dále naši soutěžící za tuto dobu deseti let obdrželi 9 stříbrných medailí, 17 bronzových medailí a 14 soutěžících získalo čestné uznání; úspěšnost členů českého družstva na MFO se tak dá vyčíslit jako 88%. Před třemi roky byla ustavena *Světová federace fyzikálních soutěží*, jejíž první kongres se uskutečnil u příležitosti 33. MFO na Bali v Indonésii za účasti nositele Nobelovy ceny za fyziku prof. Claude Cohen-Tannoudji. Členy *Federace* je 66 národních i mezinárodních fyzikálních soutěží, včetně tří fyzikálních soutěží, které existují v České republice.

Aktivity na podporu FO

Národní soutěž FO i účast v mezinárodní soutěži nespočívá jen v řešení náročných problémů, ale je doprovázena doplňkovými formami práce se soutěžícími, které dále rozvíjejí jejich talent: organizují se korespondenční semináře, vydávají se studijní materiály pro soutěžící a jejich učitele, kteří studenty vedou. Pravidelně jsou pořádána celostátní soustředění těch nejlepších. Za dobu 44 let existence soutěže fyzikální olympiády se z ní podařilo vytvořit jednu ze základních forem systémové mimoškolní péče o žáky základních a středních škol talentovaných pro fyziku. Ukázalo se totiž, že dobré výsledky v mezinárodní soutěži musí být podloženy několikaletou, dobře řízenou přípravou studentů. Centrum této náročné práce s mladými fyzikálními talenty je od roku 1990 umístěno na Katedře fyziky a informatiky Pedagogické fakulty Univerzity Hradec Králové.

K nejstarším aktivitám na podporu FO patří vydávání **studijních textů** pro řešitele. Bylo organizováno již od prvních ročníků, protože se v soutěži samozřejmě nelze spoléhat jen na to, co studenta podle osnov naučí škola. Zde jde o řízenou samostatnou přípravu studenta na téma zvolené pro určitý ročník a kategorii soutěže. V textu se provede rozšiřující výklad problematiky (u nejvyšší kat. A, ale výběrově i u kat. B), i s využitím aplikovaného aparátu vyšší matematiky, problém se ilustruje na řešených příkladech a k procvičení se studentovi předloží řada úloh s uvedenými výsledky řešení. Motivací pro studium tohoto textu není jen okruh zajímavých fyzikálních problémů, ale i očekávání, že jedna z úloh v krajském kole (u kat. A i v celostátním kole) bude orientována na danou problematiku (mimo to jedna z úloh je i v základním kole).

Studijní texty se v prvních desetiletích fyzikální olympiády publikovaly v *Rozhledech matematicko-fyzikálních* a v *Letáku FO*, které vydávalo MŠMT na zahájení každého ročníku. Byly však s tím neustálé problémy – u *Rozhledů* s rozsahem i výrobním termínem, u *Letáků* s finančními problémy ze strany MŠMT potřebných na jejich vydávání. Tak se předseda FO prof. RNDr. Ivo Volf, CSc. po změně politického systému v r. 1989/90 rozhodl založit vlastní nakladatelství MAFY se sídlem v Hradci Králové (nakladatelství začalo pracovat v roce 1992), jehož cílem je vydávat literaturu podporující rozvoj talentů ve fyzice i v matematice a literaturu pro další vzdělávání učitelů v těchto oborech. V edici *Knihovnička fyzikální olympiády* vyšlo již 58 svazků (rozsah jednoho svazku je 32 až 72 stran textu). Např. studijní texty pro 43. roč. FO byly publikace [1] – kat. A, [2] – kat. B, [3] – kat. C, [4] – kat. D. Obecnější postavení v těchto studijních textech má publikace [5], která je detailně věnována zpracování dat fyzikálních měření. Ukázalo se totiž, že i ti nejlepší středoškolští studenti v České republice mají potíže při fyzikálním měření a jeho správném zpracování. Citelně se zde projevuje úbytek hodinové dotace na výuku fyziky na gymnáziích právě v této oblasti. Proto neblahé zkušenosti s experimentální dovedností a schopností kvalitně zpracovat měření některými našimi studenty i na MFO mě přivedly k vypracování tohoto textu.

Další dlouhodobou aktivitou na podporu FO jsou **celostátní soustředění fyzikální olympiády** pro kategorii B (zúčastňují se jich i velmi vyspělí mladší řešitelé). První (zkušební) soustředění se konalo již v roce 1962 v Krkonoších (v tehdejším školicím středisku MŠMT). Soustředění byla v prvním desetiletí třítýdenní (z toho jeden týden byl až o prázdninách), později jen dvoutýdenní – ve druhé polovině června. Zkrácení doby se kompenzovalo zvětšením počtu dopolední výuky – zpočátku na 6 výukových hodin, později na 5 hodin. Až do roku 1992 (tedy 30 let) se celostátní soustředění konala pro celé území tehdejšího Československa, a to zpravidla tak, že dva roky po sobě je organizovala česká strana, další rok pak slovenská část republiky. Až do roku 1996 se organizovala soustředění společně s MO, a to do roku 1990 až pro 90 účastníků kategorie B obou soutěží FO a MO. Po roce 1990 se počet řešitelů obou olympiád výrazně zmenšil, což vedlo i ke zmenšení počtu účastníků soustředění (ke zmenšení tohoto počtu vedly i ekonomické důvody – menší státní dotace).

V prvních letech se výuka na celostátním soustředění konala ve čtyřech třídách: 1 tř. F, 2 tř. MF a 1 tř. M. Po roce 1968 byla výuka již jen ve třech třídách. Soustředění se zpravidla konalo při střední škole s žákovským internátem v místech s pokud možno atraktivním přírodním prostředím; některá soustředění např. byla i v rekreačních lokalitách – na větších chatách, či školách v přírodě – podle podmínek, které se podařilo organizátorům v daném roce zajistit. Program soustředění se ustálil na tématech, která pomáhají soutěžím. Do fyzikální části se někdy zařazovaly i experimenty (podle podmínek místa konání, od roku 2000 se tak již děje pravidelně). Dopolední výuku doplňují večerní besedy na různá odborná témata. Do poloviny 90. let se zařazovaly i kulturně poznávací a odborné exkurze. Významné pro odlehčení jsou i doplňující sportovní a turistické aktivity. Přednášejícími jsou zpravidla vysokoškolští učitelé – členové ústředních výborů FO a MO anebo krajských výborů v místě konání. Nejčastějšími vyučujícími ve fyzice byli: *B. Vybíral* (od r. 1964 dosud), *Z. Ungermann* (od počátku do r. 1992), *R. Koštǎl* (od počátku do r. 1977), *A. Kleveta* (v 60. a 70. letech), *M. Ouhrabka* (od 90. let dosud), dále např. *R. Zámečník* a *I. Čáp* (zástupci ze slovenské strany). Jako přednášející se v posledních letech uplatňují i vyspělí studenti z MFF (např. od. r. 2000 *J. Houštěk*).

Některá místa konání celostátních soustředění: Žďár n. S. (1964), Vojtěchov u Nového Města na Mor. (1965), Banská Bystrica (1966), Hranice na Mor. (1967), Mariánské Lázně (1968), Zadov (1969), Rajnochovice, okr. Kroměříž (1970), Martin (1971), Trenčín (1972), Žďár n. S. (1973, 1984), Zadov (1974), Plzeň (1975), Česká Lípa (1978), Čáslav (1979), Vysoké Mýto (1980), Praha – Třebešín

(1982), Zadov (1983), Zemplínská Šírava (1986), Jevíčko (1985, 1987, 1988, 1990, 1991), Nové Město n. Váhom (1989), Banská Štiavnica (1992). *Jen česká soustředění FO a MO:* Jevíčko (1993 – 1996). *Jen fyzikální soustředění* (pro jednu třídu – do 30 studentů): Pec p. Sněžkou, chata TÁŇA (1997 – 2003).

V období existence FO asi do r. 1990 organizovaly krajské výbory FO i krajská soustředění pro soutěžící kategorie C a D v délce trvání jeden až dva týdny. Jejich organizace a cíle byly podobné jako u výše uvedených celostátních soustředění. V posledním desetiletí se však výrazně změnily podmínky – poklesly počty soutěžících FO a zmenšily se především státní finanční dotace. Takže ke škodě věci se tato soustředění již nekonají. Na druhé straně začala Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy organizovat *fyzikální korespondenční seminář* (FYKOS) pro vyspělé zájemce ze středních škol, v jehož rámci se konají také soustředění – zúčastňují se jich především řešitelé FO.

Úlohy pro fyzikální olympiádu

Je žádoucí, aby úlohy pro FO byly pro řešitele nejen přitažlivé, vtipné, ale také přiměřeně náročné a pokud možno komplexní, tj. aby určitá úloha zahrnovala současně více oblastí fyziky. Úloha má být pro soutěžícího i přínosná tím, že se při jejím řešení něco nového dozví, a to i vlastním přičiněním. Úlohy používané na národní soutěži FO bývají zpravidla jen obtížné (avšak jen přiměřeně – podle kategorie), ale jinak často jde o typické úlohy školské fyziky. Navrhnout vhodnou, zajímavou a přiměřeně náročnou úlohu s prvky originality není vůbec jednoduché. Přitom takových úloh muselo být za dobu existence FO použito více než 3000, z toho více než 200 experimentálních.

Pro řešitele, o kterých se předpokládá, že se v životě budou zabývat některou z exaktních věd, je jistě motivující, když úloha obsahuje elementy současné fyzikální vědy. Je sympatické, že tento přístup v posledním desetiletí důsledně volí organizátoři mezinárodních fyzikálních olympiád. U **teoretických úloh** se však zpravidla požaduje zjednodušené řešení vědeckého problému – použije se jednoduchý *fyzikální model*. Další potíž je v tom, že studenti někdy neznají (resp. nemohou znát) potřebné vstupy k řešení – neznají některé potřebné fyzikální zákonitosti anebo matematický aparát. Proto je zadavatel někdy nucen krátce vysvětlit problém, eventuálně vložit potřebný výchozí zákon či matematický vzorec (vědec si to ostatně může najít v příruční literatuře). Pro soutěžícího ve FO (zejména v MFO) je potom náročné (a zpravidla i stresující) i to, že má dlouhé zadání a k řešení velmi omezený čas.

Některá zajímavá témata teoretických úloh použitých na MFO (podrobněji v [6]): *slapová deformace oceánu* (Norsko, 1996), *analýza pohybu kosmické sondy k Jupiteru* (Itálie, 1999), *voda pod ledovým příkrovem po erupci vulkánu* (Island, 1998), *difrakce svazku elektronů nabitým drátem* (USA, 1993), *magnetohydrodynamický generátor* (Turecko, 2001), *binární soustava hvězd* (Turecko, 2001), *hmotnosti jader a jejich stabilita* (Kanada, 1997), *model relativistické částice složené z kvarků* (Čína, 1994), *gravitační rudý posuv a měření poloměru a hmotnosti hvězdy* (Austrálie, 1995), *složený zdroj záření v naší Galaxii – rychleji než světlo?* (Island, 1998).

Významnou součástí soutěže FO je i **experimentální úloha**. Je třeba vymyslet pěknou, vtipnou nekonvenční úlohu a pro soutěž (zejména na celostátním kole FO a na MFO) ji postavit v mnoha exemplářích. Zde již ovšem nelze využívat námětů současných přístrojově a finančně náročných vědeckých experimentů ve fyzice. Proto se hledají vtipné experimentální problémy, kdy si řešitel často musí umět poradit s velmi omezenými prostředky, vymyslet k tomu vhodnou metodu, provést měření a vyhodnotit je včetně výpočtu chyb.

Některá zajímavá témata experimentálních úloh na MFO (podrobněji v [6]): *zákon pro odpor prostředí při pohybu válce v kapalině* (Austrálie, 1995), *optický výzkum rotující kapaliny* (Turecko, 2001), *měrné skupenské teplo varu tekutého dusíku* (USA, 1993), *výzkum magnetického stínění na principu vířivých proudů* (Island, 1998), *určení odrazivosti světla na transparentním dielektrickém povrchu* (Čína, 1994), *určení závislosti vodivosti rezistoru na vlnové délce světla užitím improvizovaného spektrometru z CD-ROMu* (Velká Británie, 2000). Jde sice vesměs o velmi zajímavé problémy, avšak řešitelé se s nimi poprvé setkávají zpravidla až při soutěži.

Společné a zvláštní v FO a MO

Mezi oběma soutěžemi FO a MO existuje těsná vazba a organizátoři obou soutěží vzájemně spolupracují a koordinují např. i termíny uzavřených částí soutěží, aby se někteří soutěžící (a těch je nemálo) mohli zúčastnit obou národních soutěží. Spolupráce mezi fyziky a matematiky je dána povahou obou oborů, zejména jejich vzájemnou provázaností. Matematika je pro fyzika velmi důležitý prostředek (nástroj), bez něhož se neobejde. Fyzika naopak často přináší podněty pro rozvoj matematiky.

Samozřejmě mezi oběma soutěžemi existují i výrazné odlišnosti. Práce v matematice vyžaduje především velké intelektové nadání a k řešení některých matematických úloh je zapotřebí značná invence. Od soutěžícího v MO se může požadovat, aby vymyslel něco nového, použil originální důkaz apod. To ve fyzice většinou nejde, protože fyzika jako přírodní věda, je vázaná na existující realitu. Druhá zvláštnost je v tom, že řešitel ve FO musí mít nejen intelektové nadání, ale musí mít i dobré nadání manuální. Součástí soutěže jsou totiž i experimenty, u nichž se současně uplatní intelekt a manuální zručnost.

Vzájemná vazba mezi matematikou a fyzikou vede i k tomu, že řada studentů soutěží v FO i MO. Společná účast některých soutěžících na obou soutěžích přináší i některé problémy, např. má-li se rozhodnout, kteří ze společných vítězů FO a MO (a těch bývá i 40 %) se mají zúčastnit mezinárodních soutěží MFO a MMO. Jejich termíny se často překrývají anebo na sebe bezprostředně navazují, avšak místa konání bývají velmi odlehlá, i v jiných kontinentech. Nakonec vždy dojde k dohodě a na obě mezinárodní soutěže odjedou kvalitní reprezentanti. Někdy se soutěžícímu podaří stihnout i obě soutěže - např. Jan Houštěk se v roce 2000 nejprve zúčastnil MFO ve Velké Británii, kde z časových důvodů ani nestačil převzít stříbrnou medaili, přemístil se do Jižní Koreje na MMO a tam získal rovněž stříbrnou medaili.

Společenské a materiální ocenění nejlepších řešitelů FO a MO

Hodnotíme-li celkově rozvoj České republiky v posledním desetiletí, je nutno přiznat, že naše země neoplývá surovinovými základnami, ani nemá příliš bohaté energetické zdroje. Jednou z mála bohatství, které Česká republika vlastní v hojném množství, jsou mladí talentovaní jedinci, kteří uspívají i na světových přírodovědných soutěžích a dokazují tak, že intelekt českého národa se může dobře uplatnit na světovém trhu vědních oborů. Z toho by vyplývalo, že společnost si bude vážit těchto talentů, bude výrazněji podněcovat jejich rozvoj a poskytovat k tomu i potřebné materiální podmínky. Finanční dotace, kterou na jednotlivé přírodovědné olympiády poskytuje MŠMT se za posledních deset let v absolutních číslech nezměnila, i když reálná hodnota koruny se za tu dobu výrazně zmenšila. Šetří se ovšem na nepravém místě. K organizování soutěží, ale i k vydávání studijních textů, k tvorbě úloh, k organizování soustředění aj. jsou zapotřebí stále větší finanční prostředky. Práce organizátorů je přitom neplacená a zcela nezištná. Tvůrci úloh a učitelé opravující studentská řešení dostávají jen symbolické odměny (často ovšem žádné). Rovněž oficiální ceny vítězům soutěží (z dotace MŠMT) jsou v podstatě již jen symbolické - a tak závisí jen na aktivitě organizátorů celostátních kol, zda se jim podaří přesvědčit některé místní podnikatele, aby poskytli ceny nejlepším řešitelům FO.

Na druhé straně je třeba ocenit, že ministr (resp. ministryně) školství, mládeže a tělovýchovy přijímá na závěr každého občanského roku delegace úspěšných soutěžících z mezinárodních předmětových olympiád, včetně jejich vedoucích, k přátelskému setkání, odmění je diplomem a studenty i nějakým (zpravidla knižním) dárkem. Je dobré, že dnes existují i další „nestátní“ formy uznání dobré práce studentů. NADAČNÍ FOND JAROSLAVA HEYROVSKÉHO uděluje od roku 1998 cenu nejlepšímu řešiteli FO, MO i dalších přírodovědných soutěží v den narozenin J. Heyrovského (20. prosince). Výrazné společenské i materiální ocenení poskytuje od roku 2001 také NADACE B. JANA HORÁČKA ČESKÉMU RÁJI ve formě cen PRAEMIUM BOHEMIAE, které uděluje všem účastníkům mezinárodních přírodovědných olympiád (fyzika, chemie, biologie, matematika a informatika) – viz např. [7] a [8]. Slavnost se uskutečňuje na státním zámku Sychrov rovněž v den narozenin mecenáše (4. prosince). Cenu tvoří medaile, diplom a finanční odměna. Medaile je ve trojím provedení – zlatá, stříbrná a bronzová, přičemž student ji dostává v souladu s příslušnou medailí z mezinárodní soutěže. Finanční odměnu dostávají všichni studenti - řešitelé na těchto mezinárodních soutěžích (tj. i ti, kteří nakonec na soutěži nebyli úspěšní). Finanční odměna má dvě složky – základ a prémii pro nositele medailí. Jde vcelku o nemalé částky (podle umístění na soutěži 15 až 50 tisíc Kč). Účastní-li se student současně více mezinárodních soutěží, prémiové části se sčítají.

Na závěr vyjímám pasáž z děkovného projevu nejúspěšnějšího studenta za rok 2002, Josefa Cibulky z Akademického gymnázia v Praze ve Štěpánské ulici, nositele zlaté medaile ze 14. mezinárodní olympiády v informatice (v Koreji) a stříbrné medaile ze 43. MMO (ve Velké Británii). Na slavnosti dne 4. prosince 2002 po převzetí ceny PRAEMIUM BOHEMIAE - zlaté medaile a sdružené odměny 65 tisíc Kč – prohlásil: „Pro drtivou většinu z nás je to největší ocenění, jakého se nám dosud v našem životě dostalo. Jedná se o ocenění morální, neboť je zde na naši činnost veřejně pohlíženo ne jako na zvláštní zálibu nebo koníčka, které je okolím tolerováno zpravidla se shovívavým úsměvem, ale jako na něco, co si zasluhuje zájem nejen úzkého okruhu odborníků, ale i širší veřejnosti. To je pro nás velkým povzbuzením. Pro nás, studenty, není rozhodně zanedbatelné ani nemalé finanční ocenění. Pro mnohé z nás je to největší hmotná odměna za naši práci v našem životě. Dnešní významný den si budeme pamatovat celý život, neboť – i kdyby někteří z nás dosáhli dalších úspěchů – na první významné události v životě se nezapomíná.“

Literatura

[1] VYBÍRAL, B., *Magnetické pole v látce. Knihovnička fyzikální olympiády č. 49* (Studijní text pro kat. A). MAFY, Hradec Králové 2001, ISBN 80-86148-44-0.

[2] VYBÍRAL, B., ZDEBOROVÁ, L., *Odporové síly. Knihovnička fyzikální olympiády č. 48* (Studijní text pro kat. B). MAFY, Hradec Králové 2001, ISBN 80-86148-43-2.

[3] ŠEDIVÝ, P., *Teplotní závislosti fyzikálních veličin. Knihovnička fyzikální olympiády č. 51* (Studijní text pro kat. C). MAFY, Hradec Králové 2002, ISBN 80-86148-53-X.

[4] ŠEDIVÝ, P., VOLF, I., *Práce – výkon – energie. Knihovnička fyzikální olympiády č. 47* (Studijní text pro kat. D). MAFY, Hradec Králové 2001, ISBN 80-86148-42-4.

[5] VYBÍRAL, B., *Zpracování dat fyzikálních měření. Knihovnička fyzikální olympiády č. 52.* MAFY, Hradec Králové 2002, ISBN 80-86148-54-8.

[6] VOLF, I., VYBÍRAL, B., Elementy současné vědy v úlohách fyzikální olympiády. *Československý časopis pro fyziku*, 2002, sv. 52, č. 1, s. 51–57, ISSN 0009-0700.

[7] VYBÍRAL, B., První ceny Praemium Bohemiae uděleny. *Matematika – fyzika – informatika*, 2001/2002, roč. 11, únor 2002, s. 382–384, ISSN 1210-1761.

[8] VYBÍRAL, B., Ceny Praemium Bohemiae pro studenty. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 47 (2002), s. 81–83. ISSN 0032-2423.

Mensa České republiky

Václav Fořtík[1]

Abstrakt: Příspěvek je zaměřen na prezentaci společenské organizace Mensa, která se zabývá rozvojem duševních schopností nadaných jedinců. Jsou zde nastíněny aktuální aktivity Mensy ČR, a to především letní campy, herní kluby, soutěže a přednášky. Mensa si klade za cíl také rozvoj matematických schopností, a to formou hlavolamů a logických her.

Abstract: The contribution focuses on the presentation of the NGO organization Mensa, which aims to develop mental abilities of gifted individuals. Some of the contemporary activities of Mensa – Czech Republic are mentioned here, mainly summer camps, game clubs, competitions and lectures. Mensa also tries to aim the development of mathematical abilities through brainteezers and logical games.

Co je Mensa?

Mensa je mezinárodní organizace, jejímž členem se může stát každý, kdo dosáhne v testu inteligence, schváleném mezinárodním dozorčím Mensy International, výsledku mezi horními dvěma procenty celkové populace (u nás IQ 130 a vyšší). Mensa je nevýdělečná apolitická organizace, jejímž hlavním posláním je sloužit k využití inteligence ve prospěch lidstva a působit jako prostředek komunikace pro své členy.

Založena byla v roce 1946 v Oxfordu, dnes existuje ve více než 100 zemích světa a má asi 100 000 členů. Pobočka v Československu byla založena v roce 1989, na Ministerstvu vnitra byla zaregistrována v březnu 1991. Po rozdělení ČSFR vznikla Mensa ČR (právně zájmové sdružení), která má dnes okolo 1500 členů na území celé republiky. Jako v jedné z mála zemí působí v ČR též tzv. Dětská Mensa (DM) pro děti od 10 do 16 let („dospělá“ Mensa je od 14 let).

Jaké má Mensa cíle a smysl?

Citujme ze stanov Mensy ČR:

[1] *Mensa ČR, Praha, vaclav.fortik@mensa.cz*

„Cílem Mensy ČR je zkoumat a rozvíjet lidskou inteligenci ve prospěch lidstva, podporovat výzkum vlastností, znaků a využití inteligence a vytvářet stimulující intelektuální a společenské prostředí pro své členy.

Mensa vytváří fórum pro intelektuální výměnu mezi svými členy. Její činnost sestává zejména z výměny názorů prostřednictvím přednášek, diskusí, časopisů, zájmových skupin a místních, regionálních, národních a mezinárodních setkání, podpory rozvoje talentu a nadání a podpory výzkumu zaměřeného na inteligenci a Mensu, ať již uvnitř Mensy či mimo ni.

Inteligence má být využívána ve prospěch lidstva. Cílem Mensy není tudíž nic, co by mohlo být proti zájmům lidstva.

Mensa sestává z členů, kteří reprezentují mnoho různých názorů. Proto Mensa jako organizace nebude konat žádné politické akce, nebude uzavírat žádné ideologické, filosofické, politické či náboženské svazky, ani se nebude k otázkám tohoto druhu vyjadřovat.“

Co je Dětská Mensa a jaké má aktivity?

Dětská Mensa je součástí Mensy ČR, její členové jsou ve věku 10 – 16 let včetně. Aktivity DM jsou zaměřeny především na věkovou skupinu osob 6 – 19 let. Do její činnosti patří:

1. Kurzy vzdělávacího a volnočasového charakteru, a to i kurzy vedené přes internet pro mimopražské zájemce (v současné době probíhají kurzy Rozvíjení praktické inteligence, Tvůrčího psaní a Hraní Dračího Doupěte)
2. Akce (jedno a vícedenní) vzdělávacího a volnočasového charakteru (Dětská Mensa se podílí na pořádání Dnů plných her, Literární soutěže o Loutnu barda Marigolda a Pragoconu)
3. Letní tábory pro duševně nadané
4. Mensa jako nezisková organizace zaměřená na volnočasové aktivity (podporuje rozvoj matematického/technického myšlení především propagací her a hlavolamů rozvíjejících tyto oblasti)

Představu o našich aktivitách si může každý udělat z webu `www.mensa.cz.`

Literatura

[1] Fořtík, V., *IQ MENSA 1*. Ivo Železný, Praha 2000, ISBN 80-240-1711-3.

[2] Fořtík, V., *IQ MENSA 2*. Ivo Železný, Praha 2000, ISBN 80-240-1712-1.

[3] Fořtík, V., *IQ MENSA 4*. Ivo Železný, Praha 2000, ISBN 80-240-1828-4.

[4] Fořtík, V. a kol., *Skvělá kniha her a testů*. Ivo Železný, Praha 2002, ISBN 80-237-3722-8.

[5] Fořtík, V. a kol., *Hry a testy na volný čas*. Ivo Železný, Praha 2002, ISBN 80-237-3736-8.

Zajímavá matematika aneb „boříme bariéry“

Irena Koudelková[1]

Abstrakt: Příspěvek prezentuje několik matematických problémů, které mohou být užity ve výuce žáků ve věku 12–15 let. Jsou zde uvedeny jak problémy geometrické (např. Möbiova páska), tak algebraické (problémy nekonečna). Zkušenost ukazuje, že tyto problémy pomáhají při utváření kreativity dětí a boří bariéry, které obvykle limitují nalezení řešení problémů.

Abstract: The article presents several mathematical problems that may be used in the education of pupils of the age of 12–15 years. Both geometric (e.g. Möbius tape) and algebraic (e.g. concerning infinities) tasks are included. Our experience shows that these tasks help to develop children's creativity and to break barriers that usually limit finding solutions of problems.

Ve svém příspěvku chci ukázat některé netradiční úlohy a problémy. Nejsou to úlohy nové, možná jste se s nimi (či s jejich částmi) setkali během svého studia či v nějakých sbírkách zajímavých úloh. Mám však zkušenost, že hodně učitelů z praxe je nezná, nikdy je sami neřešili. Věřím, že budou zajímavé i pro vás – ať už samotné jejich řešení nebo (pokud již úlohy znáte) metodické komentáře a moje zkušenosti se zadáváním těchto úloh. Článek jsem se proto snažila psát tak, abyste formulace jak úloh, tak řešení mohli přímo použít ve své práci s dětmi.

Přestože se jedná o úlohy, které přesahují látku základní školy, domnívám se, že je vhodné úlohy tohoto typu do učiva matematiky zařazovat – třeba při suplování, v předvánočních a předprázdninových hodinách apod. Při jejich řešení musí děti tvořivě uvažovat, hledat netradiční řešení, „bořit bariéry“, které si ve svých hlavách v průběhu života vybudovaly.

[1] *ZŠ Červený Vrch, Praha, koudelkova@zscvrch.cz*

Proto prosím i vás – čtenáře mého příspěvku – abyste úlohy aktivně řešili, abyste nepřeskočili rovnou k výsledkům, neboť se tím sami připravíte o jejich kouzlo, o radost z překonání svých vlastních bariér.

Problém č. 1: Devět bodů

K tomuto problému potřebujete pouze papír a tužku na kreslení a list papíru na zakrytí další části úlohy. Přečtěte si prosím vždy úkol, zakryjte si pokračování s nápovědou a pokuste se úlohu vyřešit. Pokud se vám ani po delším snažení nepodaří úkol vyřešit, přečtěte si nápovědu. Věřím, že další část úlohy – řešení – budete potřebovat pouze pro kontrolu svého výsledku.

Základní obrazec, o kterém se v úlohách mluví, je složen z devíti bodů, uspořádaných do čtverce 3 x 3.

. . .
. . .
. . .

Nakreslete si prosím tento obrazec, zakryjte si spodní část stránky a zkuste první úkol:

1. úkol

Spojte těchto devět bodů **pěti** rovnými čarami jedním tahem.

Řešení 1. úkolu:

Úloha je velmi jednoduchá, jistě se vám podařilo body jedním tahem spojit (například začít v jednom rohu a pokračovat po obvodě čtverce a poslední čarou spojit i poslední, prostřední bod).

Pokračujeme dál. Posuňte si papír zakrývající text na další úlohu.

2. úkol

Spojte devět bodů v základním obrazci **čtyřmi** rovnými čarami jedním tahem.

Nápověda k 2. úkolu:

Nápověda je velmi jednoduchá: „Máte dost velký papír."

Řešení 2. úkolu:

Tento úkol je hodně obtížný, a pokud se vám ho podařilo vyřešit skutečně samostatně, bez předchozí znalosti řešení, tak vám gratuluji.

Při kreslení začněte například v pravém dolním rohu. První čára je úhlopříčka čtverce, druhou čáru veďte vodorovně, ale přetáhněte ji za pomyslnou hranici čtverce a ukončete ji až jeden dílek za posledním bodem, třetí čáru veďte šikmo doleva dolů, propojíte tak další dva body. Tuto čáru ukončete pod levým okrajem čtverce. Poslední - čtvrtou - čárou pak spojíte poslední dva body na levé straně čtverce.

Podařilo se? Pokračujeme tedy další úlohou.

3. úkol

Nakreslete si znovu základní obrazec, tentokrát si ale udělejte body trochu větší, spíše jako puntíky, aby se vám to lépe kreslilo. Těchto devět puntíků máte spojit **třemi** rovnými čarami jedním tahem.

Nápověda ke 3. úkolu:

Místo bodů máte teď puntíky, to je důležité.

Řešení 3. úkolu:

Udělejte jednu čáru, která bude začínat na levé části levého dolního puntíku a půjde nahoru mírně šikmo doprava přes horní dva puntíky. Protáhněte ji tak daleko, abyste druhou, opět mírně šikmou čarou, tentokrát však doprava dolů, spojili prostřední tři puntíky. Tuto čáru opět protáhněte dolů. Třetí šikmou čarou vedenou doprava nahoru pak spojíte zbývající tři puntíky. Získáte obrázek tří téměř rovnoběžných čar, které protínají nakreslené puntíky (ale nikoliv v jejich středu).

4. úkol

Znovu se vraťte k bodům a nakreslete si opět základní obrazec s 3 x 3 body. Těchto devět bodů máte tentokrát spojit **dvěma** čarami jedním tahem.

Nápověda ke 4. úkolu:

Přečtěte si znovu pozorně zadání.

Řešení 4. úkolu:

Vzhledem k tomu, že tentokrát není v zadání, že se má jednat o dvě rovné čáry, můžete začít kdekoliv, spojit nějaké body libovolnou křivou čarou, dle vlastní úvahy ji někde ukončit a pokračovat ve spojování zbývajících bodů druhou čarou.

5. úkol

Znovu si nakreslete obrazec s 3 x 3 body. V této úloze je máte spojit **jednou rovnou** čarou jedním tahem. Existují minimálně tři, principielně odlišná řešení. Pokuste se najít alespoň některá.

Nápověda k 5. úkolu:

Nápověda k jednomu řešení: „Kdybych ho dělala já na tabuli, tak by se na mne pan školník zlobil, vy to ale na papíře snadno zvládnete."

Nápověda k dalšímu řešení: „Čáry se nemusí dělat jenom tužkou."

Řešení 5. úkolu:

První způsob: Nějakým způsobem poničit papír – poskládat do harmoniky, aby se body dostaly na sebe; rozstříhat ho na proužky po třech bodech a položit je za sebou apod.

Druhý způsob: Spojit body jednou tlustou čárou – štětcem, houbou, křídou položenou naplocho apod.

Třetí způsob: Změnit geometrii plochy papíru – stočit ho například do válcové plochy a body spojit spirálou, která je v této ploše skutečně rovnou čárou. Podobně si můžeme představit, že začneme kreslit vodorovnou čáru, kterou spojíme první tři body, pokračujeme dále po tabuli, po zdi a kolem zeměkoule, spojíme další tři body a oběhneme Zemi ještě jednou.

Rozbor Problému devíti bodů

Vraťte se nyní k jednotlivým úlohám a rozmyslete si, co jste potřebovali k jejich úspěšnému vyřešení, co jste si museli uvědomit, jaké bariéry jste museli překonat. Patrně dospějete zhruba k těmto závěrům:

1. úkol: Velmi jednoduchý, každý ho zvládne, není na něm nic složitého.
2. úkol: Je třeba překonat bariéru zdánlivého okraje čtverce, vyjít s kreslením do okolní plochy.
3. úkol: Je nutné si uvědomit, že čára nemusí procházet středem puntíků, že se nejedná o bezrozměrné body.
4. úkol: Je potřeba poslouchat pozorně zadání, všimnout si toho, že se v zadání neobjevilo slovo „rovnými“.
5. úkol: Tentokrát je nutné buď překonat bariéru vzniklou zdánlivě neměnnou plochou papíru (první a třetí způsob), nebo bariéru, která ztotožňuje pojem čáry a přímky, a tím vylučuje možnost nakreslení tlusté čáry.

Zkuste si rozmyslet, jaké vlastnosti člověka rozvíjí tento typ úloh, v jakých povoláních asi budou podobné schopnosti potřeba.

Metodický komentář k Problému devíti bodů

Pokud budete tento problém zadávat dětem, počítejte s tím, že vám jeho zadání, řešení a rozbor zaberou prakticky celou vyučovací hodinu. Na začátku hodiny několikrát důrazně upozorněte děti, aby na vás nepokřikovaly doplňující otázky (např. ve čtvrté úloze: „A paní učitelko, musí být ta čára rovná?“). Je velmi náročné této ukázněnosti dosáhnout (a to i tehdy, když se úloha zadává dospělým), pokud ale někdo vykřikne svůj nápad, zkazí řešení všem ostatním. Požadujte od dětí, aby v případě, že někdo objeví řešení úlohy, nevykřikoval, ale přihlásil se, vy k němu dojdete a potichu řešení zkontrolujete.

Doporučuji po zadání každé úlohy počkat tak dlouho, než úlohu vyřeší alespoň část třídy (případně během těchto několika minut pomoci dětem nápovědou). Pak teprve nechat někoho z úspěšných řešitelů nakreslit výsledný obrázek na tabuli a pokračovat další úlohou. U druhé úlohy se vám může stát, že nikdo z dětí v rozumném čase řešení neobjeví a že ho budete muset nakreslit vy. Děti také mohou objevit řešení, které zde není uvedeno. Tuto situaci ale jistě zvládnete a jeho správnost posoudíte sami.

Po vyřešení všech pěti úloh je třeba s dětmi udělat výše uvedený rozbor. Je nutnou součástí tohoto problému, neboť je třeba, aby si děti svoje bariéry uvědomily, pokud se chtějí pokusit je bořit.

Úlohu jsem mnohokrát zadávala různým skupinám lidí, od dětí v sedmé třídě, přes vysokoškoláky - studenty učitelství, až k učitelům z praxe. Jejich reakce se však prakticky nelišily. Jak děti, tak dospělí byli úlohami zaujati, často se stávalo, že požadovali, abychom ještě neříkali řešení, že chtějí ještě chvíli přemýšlet. Také při rozboru byli i sedmáci schopni najít své bariéry a poznat, že se jedná o problém, který rozvíjí tvořivost a další podobné vlastnosti. V další diskusi děti ale také často hovořily o tom, že se s podobnými úlohami ve škole běžně nesetkávají, že se po nich často chce jen řešení obvyklých „školských“ úloh.

Problém č. 2: Möbiova páska

K řešení tohoto úkolu budete potřebovat papír, tužku nebo pastelku, lepidlo a nůžky (místo papíru a lepidla můžete použít také kancelářskou hnědou papírovou lepicí pásku).

1. úkol

Ustřihněte si proužek papíru, případně cca 20 cm lepicí pásky, a nejdříve z něj udělejte prstýnek (zatím ale nic nelepte).

Rozmyslete si, kolik má tento prstýnek stran, kolik má hran.

Řešení 1. úkolu:

Jistě snadno zjistíte, že prstýnek má dvě strany, že ho můžete zevnitř nabarvit třeba červeně a zvenku modře. Stejně tak je vidět, že má také dvě hrany.

2. úkol

Jeden konec papíru, ze kterého jste vytvořili prstýnek, otočte o 180° a papír slepte. Získali jste jakýsi „přetočený“ prstýnek. Vezměte si tužku nebo pastelku a nakreslete **po jedné straně** proužku prostředkem čáru, jako kdybyste ho chtěli obarvit.

Řešení 2.úkolu:

Úkol je neřešitelný, není možné obarvit jen jednu stranu proužku, aby druhá zůstala čistá.

Znamená to tedy, že jste vyrobili objekt, který má jenom jednu stranu. Tento útvar objevil v 18. století Gaussův žák Augustus Möbius. Möbiova páska má ještě další zajímavé vlastnosti, které můžeme zkoumat.

3. úkol

Zjistěte, kolik má Möbiova páska hran.
Řešení 3. úkolu:
Páska má pouze jednu hranu.

4. úkol

Vezměte si nůžky a začněte Möbiovu pásku středem po celé její délce rozstřihovat. Ještě než tento úkol provedete, uvědomte si, co byste získali stejným rozstřižením prstýnku, a pokuste se odhadnout, co získáte stříháním Möbiovy pásky.
Řešení 4. úkolu:
Rozstřižením prstýnku získáte dva užší prstýnky, stejně dlouhé jako byl původní. Podélným rozstřižením Möbiovy pásky však vznikne jediný kus pásky, která je přetočená o 360° a má dvojnásobnou délku. (Zjistěte, zda má tento kus pásky vlastnosti Möbiovy pásky nebo obyčejného prstýnku.)

5. úkol

Vyrobte si novou Möbiovu pásku. Začněte ji stříhat stejně jako předtím, ale tentokrát nikoli středem pásky, ale asi v jedné třetině od okraje. Pokuste se odhadnout, čím se bude výsledek lišit od předchozího případu.
Řešení 5. úkolu:
Získáte dva, navzájem propojené, různě dlouhé přetočené proužky, z nichž jeden bude Möbiovou páskou.

Budete-li mít chuť, můžete si vyzkoušet stříhat Möbiovu pásku v jedné čtvrtině, pětině, šestině atd. a zkoumat její zákonitosti.

Metodický komentář k Problému Möbiovy pásky

Tento problém otvírá dětem (ale i mnohým dospělým) pohled do zdánlivě zcela absurdního světa, kde neplatí zákony „zdravého selského rozumu“. Přesto však manipulací s Möbiovou páskou zjišťují, že se jedná o objekt z našeho, reálného světa, jenom na jeho vlastnosti nejsme zvyklí, překvapují nás.

Necháte-li děti hrát si s Möbiovou páskou, strávíte s nimi rušnou hodinu objevováním, formulováním hypotéz a jejich ověřováním, přemýšlením o zcela nezvyklých věcech. Přála bych vám i vašim žákům tuto radost zažít.

Podrobnější (a matematicky přesnější) informace o Möbiově pásce a mnoha dalších matematických problémech získáte například v publikaci [1].

Problém č. 3: „Různě velká“ nekonečna

K řešení tohoto problému budete potřebovat pouze psací potřeby a velkou dávku fantazie.

1. úkol

Nakreslete si několik koleček a několik čtverečků a rozmyslete si, jak malé dítě, které ještě neumí počítat, může poznat, jestli je koleček stejně jako čtverečků.

Řešení 1. úkolu:

Dítě porovnává počet tak, že přiřazuje kolečkům čtverečky a zjišťuje, jestli něco zbude. Když může udělat dvojice a nic nezbude, prohlásí, že koleček je stejně jako čtverečků.

V dalších úlohách budeme používat slovo **stejně** ve výše uvedeném smyslu. Matematicky to vyjádříme tak, že můžeme-li udělat vzájemně jednoznačné přiřazení prvků jedné množiny prvkům druhé množiny, řekneme, že mají stejný počet prvků. Pokud se nám to žádným způsobem nepodaří, řekneme, že jedna množina má více prvků než druhá.

2. úkol

Rozhodněte, zda má víc prvků množina přirozených čísel nebo množina sudých přirozených čísel.

Řešení 2. úkolu:

Pokud napíšeme několik prvních členů řady přirozených čísel a pod ni začátek řady sudých přirozených čísel (dvojnásobků čísel v horní řadě), zjistíme, že můžeme každému číslu v horní řadě přiřadit číslo v dolní řadě a naopak. (Pro děti: Každé číslo v jedné řadě má jednoznačného „kamaráda“ v druhé řadě.) Podle výše uvedené dohody je tedy v obou řadách stejně čísel. (Poznámka: Pro žáky je srozumitelnější používat méně přesný název „řada“ než korektní termín „posloupnost“.)

Stejným způsobem lze dokázat, že přirozených čísel je stejně jako násobků deseti, sta či tisíce. Můžete uvažovat, jak byste dokázali, že přirozených čísel je stejně jako celých čísel (stačí k tomu jen vhodně přeuspořádat množinu celých čísel).

3. úkol

Pokuste se najít takové uspořádání množiny všech kladných zlomků, abyste mohli dokázat, že i zlomků je stejně jako přirozených čísel.

Řešení 3. úkolu:

Začneme vytvářet tabulku všech zlomků tak, že v první řadě budou zlomky s čitatelem 1 a jmenovatelem postupně rostoucím od jedné do nekonečna. Ve druhé řadě budou zlomky s čitatelem 2 a opět rostoucím jmenovatelem, ve třetí řadě všechny zlomky s čitatelem 3 atd. Pokud by nám vadilo, že se velikosti zlomků opakují (zlomky nejsou v základním tvaru), můžeme do tabulky zapisovat jen zlomky v základním tvaru. Abychom dokázali vyřešit zadání, musíme teď najít způsob, jak zlomky v tabulce očíslovat. Stačí procházet tabulku „po úhlopříčkách“. Začneme u zlomku 1/1, pokračujeme ke zlomku 1/2 a pak po úhlopříčce ke zlomku 2/1. Vrátíme se zpět na horní řádek ke zlomku 1/3 a znovu pokračujeme po úhlopříčce doleva dolů přes zlomky 2/2 a 3/1. Tímto způsobem můžeme pokračovat libovolně daleko. Nalezli jsme tedy vzájemně jednoznačné zobrazení množiny přirozených čísel a množiny kladných zlomků.

Podobně lze jednoduše ukázat, že přirozených čísel je stejně jako racionálních čísel. (Jak víme z vysokoškolské matematiky, nekonečným množinám, které mají stejně prvků jako množina přirozených čísel, říkáme **spočetné**.)

Pro množinu reálných čísel však lze dokázat, že prvků v ní je víc než přirozených čísel, že je **nespočetná**, že reálných čísel je sice také nekonečně mnoho, ale jedná se o jiné nekonečno než nekonečno přirozených čísel. (Důkaz také není složitý, ale pro děti na základní škole je přece jen asi myšlenkově náročnější.) I s tímto „větším“ nekonečnem můžeme řešit zajímavé úlohy.

4. úkol

Dokažte, že na dvou různě dlouhých úsečkách leží stejně bodů (stále používáme slovo „stejně“ ve výše uvedeném smyslu).

Řešení 4. úkolu:

Narýsujte si obě úsečky na papír tak, aby byly rovnoběžné. Spojte dvěma přímkami krajní body úseček. V místě, kde se přímky protnou, získáte bod (geometricky střed stejnolehlosti). Povedete-li nyní přímku tímto bodem a libovolným bodem jedné úsečky, protne tato přímka druhou úsečku v bodě, který je jednoznačným „kamarádem“ bodu na první úsečce. Obě úsečky obsahují tedy stejně bodů.

5. úkol

Dokažte, že půlkružnice bez krajních bodů obsahuje stejně bodů jako přímka.

Řešení 5. úkolu:

Narýsujte přímku a půlkružnici bez krajních bodů na ni „posaďte“ (jako misku na stůl). Použijete-li promítání ze středu půlkružnice, najdete ke každému bodu půlkružnice odpovídající bod přímky a naopak.

Metodický komentář k Problému nekonečna

Tento problém doporučuji zadávat nejdříve v deváté třídě až tehdy, kdy jsou žáci schopni mu porozumět. Není třeba se těmto úlohám (případně dalším úlohám podobného typu) věnovat v jedné hodině. Je vhodnější s nimi seznamovat děti postupně, zařazovat úlohy do vyučování při vhodných příležitostech, nechat dětem čas na to, aby si na pojem nekonečna zvykly a udělaly si o něm nějakou představu. Bude to pro ně velmi užitečné při dalším studiu matematiky, například při studiu diferenciálního a integrálního počtu.

Poznámka: v době mezi napsáním a odevzdáním tohoto příspěvku vyšel velmi zajímavý článek [2], jehož jedna část je věnována spočetným a nespočetným množinám. Doporučuji k prostudování.

Závěr

Já se ve svých hodinách snažím zařazovat nestandardní, neobvyklé úlohy poměrně často (nejen před vánocemi či prázdninami) a přiznám se, že někdy i na úkor klasického „počítání“. Důvodem je jeden z mých nejhorších kantorských zážitků. Suplovala jsem v době svých učitelských začátků za kolegyni. Vyvolala jsem jednu žákyni k tabuli a začala zadávat úlohu: „Narýsuj trojúhelník KLM, je-li dána strana. . . “ Holčička se na mne nechápavě dívala a na můj dotaz, co jí není jasné, odpověděla: „Já neumím narýsovat trojúhelník KLM, my rýsujeme jen trojúhelníky ABC.“

Přeji Vám i sobě, abychom se co nejméně setkávali s tím, že:

- čtverec postavený na špičku se pro děti stane kosočtvercem
- žák sice zná Pythagorovu větu ve tvaru $c^2 = a^2 + b^2$, ale v trojúhelníku TUV ji nenajde
- je-li řešením rovnice výsledek $x = 0$, třetina třídy k tomu připíše komentář „Rovnice nemá řešení“.
- úlohu „Jedna plenka na šňůře uschne za hodinu, za jak dlouho na šňůře uschne dvacet plenek?“ žáci řeší jako přímou úměrnost
- atd., atd.

Věřím, že k tomuto cíli přispějí i úlohy, které jsem se v tomto článku pokusila ukázat.

Literatura

[1] Devlin, K., *Jazyk matematiky.* Dokořán a Argo. Praha 2003, str. 230 – 234, ISBN 80-86569-09-8 (Dokořán), ISBN 80-7203-470-7 (Argo).

[2] Kuřina, F., I elementární matematika může být krásná. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 2003/2, JČMF, Praha 2003, str. 115 – 128.

Nejenom dvacetičtyřstěn má dvacet čtyři stěn

Marie Kupčáková[1]

Abstrakt: Není jednoduché definovat mnohostěn. Můžeme demonstrovat postup při analýze třídimenzionálního tělesa, které je složené z 24 rovnostranných trojúhelníků. Některé z tzv. kaleidocyklů jsou též tvořeny z 24 trojúhelníků, tyto trojúhelníky nejsou ale rov-nostranné, nýbrž jsou rovnoramenné. Tento příspěvek popisuje konstrukci a tvary kalei-docyklů. Metody jsou inspirovány prací M. C. Eschera.

Abstract: It is not easy to define a polyhedron. We can demonstrate the concept by examining a three-dimensional figure consisting of 24 equilateral triangles. Some so-called kaleidocycles are also constructed from 24 triangles, but those triangles are not equilateral, they are isosceles. This article is about the construction and decoration of kaleidocycles. Methods are inspired by the work of M.C. Escher.

V jedné fiktivní třídě učím o mnohostěnech a deltastěnech (to jsou mnohostěny, jejichž stěny jsou rovnostranné trojúhelníky) a zadávám dobrovolnou domácí úlohu:

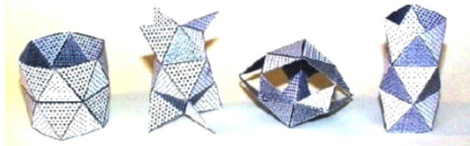
Úloha: Najděte prostorový útvar složený z dvaceti čtyř rovnostranných trojúhelníků.

Mám předem docela jasnou představu, co mi žáci přinesou. Možná se jim podaří objevit Keplerovu stellu octangulu (k osmi stěnám osmistěnu jsou připojeny čtyřstěny) nebo ke dvěma čtyřbokým spojeným antihranolům přidají dva čtyřboké jehlany nebo nad šest stěn krychle připojí šest čtyřbokých jehlanů (obr. 1).

Obr.1

Ve třídě mám bystrého žáka, který si naschvál hraje na nedovtipného. Přinese čtyři výtvory (obr. 2) a bude tvrdit, že to jsou prostorové útvary složené z 24 trojúhelníků. Jeden, ten, který vypadá jako UFO, je dokonce nespojitý.

[1] *PF UHK, Hradec Králové, marie.kupcakova@uhk.cz*



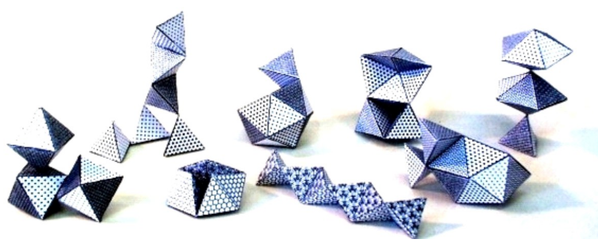
Obr. 2

Má sice pravdu, ale budu se bránit: „Chtěla jsem, aby žádná hrana nebyla volná.“ Další den přinese novou skupinku modelů (obr. 3).

Obr. 3

Pochválím jej, že objevil konvexní mnohostěn složený z 24 rovnostranných trojúhelníků. Upřesním pak, že jsem si přála, aby žádné dva sousední trojúhelníky neležely v téže rovině.

Jak by mohl tento vymyšlený příběh dál pokračovat?



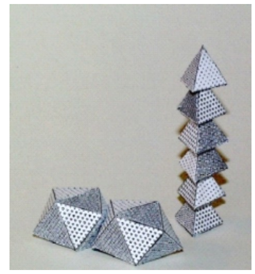
Obr. 4

Žák přinese dalších 8 útvarů (obr. 4) a ještě bude tvrdit, že by si mohl vymýšlet do rána. . .

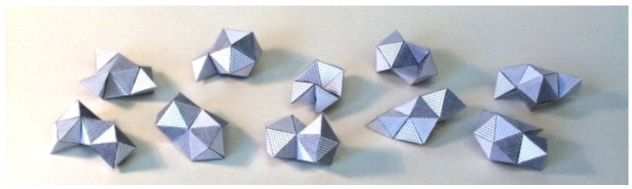
Existuje totiž nekonečně mnoho možností, naznačených touto poslední skupinou, jak spojovat mnohostěny v jejich vrcholech (vrchol k vrcholu) nebo hranami, částmi hran, popřípadě vrchol jednoho ke stěně či k hraně mimo vrchol druhého. Vyloučíme i tyto situace.

Přesto se jako řešení mohou objevit další 2 modely (obr. 5). Mají protínající se trojúhelníkové stěny!

Přidejme tedy další podmínku: Stýkající se trojúhelníky smějí mít společnou pouze hranu nebo vrchol. Konečně náš přemýšlivý žák přinese trochu normální nekonvexní deltastěny (obr. 6), nemusí však mezi nimi být žádný z první skupinky mnohostěnů.



Obr. 5



Obr. 6

Jak je z vymyšleného příběhu o jednom mnohostěnu, delta – dvacetičtyřstěnu, jasné, definice pojmu mnohostěn nebyla a není jednoduchá.

Podle Aškinuzeho [1] definujeme:

Mnohostěnem se nazývá útvar vytvořený z konečného počtu rovinných mnohoúhelníků (nazývaných stěny mnohostěnu) umístěných v prostoru tak, že

1. libovolná strana každé této stěny je stranou ještě jedné a právě jedné stěny (nazývané vedlejší, přilehlá, sousední),
2. pro libovolné dvě stěny α, β lze nalézt takovou posloupnost stěn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, že stěna α sousedí s α_1, stěna α_1 sousedí s α_2 , . . . , stěna α_n sousedí s β,
3. mají-li stěny α, β společný vrchol A, pak stěny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, o kterých se hovoří v bodě 2, je možné vybrat tak, aby měly společný vrchol A.

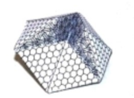
   Cromwell [2] pak přidává další podmínku, vylučující sebeprotínání mnohostěnu, tj.

4. dva mnohoúhelníky se setkávají v jedné straně nebo vrcholu.

Ve svém příspěvku se dále zaměřím na jeden z papírových modelů, který byl ve skupině na obr. 4. Tvoří jej šest čtyřstěnů spojených do kruhu (obr. 7).

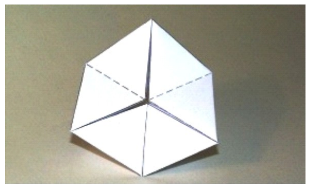
Historie tohoto útvaru se začala psát před 100 lety. Tehdy Max Brückner [3] objevil, že lze spojovat n pravidelných čtyřstěnů hranami a vytvářet tak řetízek (je také ve skupině na obr. 4).

Coxeter později upozornil na technickou zajímavost, že když je počet n shodných tetraedrů nejméně 6, pak je lze spojovat do prstence. Přišel také s tím, že pokud je n nejméně 8, lze tyto prstence protáčet středem. Je-li $n = 22$, lze řetízek proplést a spojit v uzel.

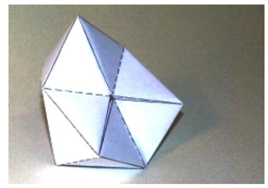


Obr. 7

Prstenec slepený ze šesti pravidelných čtyřstěnů neprotočíme. Je však jasné, že pokud by bylo možné uskutečnit otáčení útvaru, musel by mít jeho obrys v okamžiku protočení tvar pravidelného šestiúhelníku (obr. 8 a obr. 9).

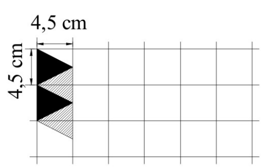


Obr. 8

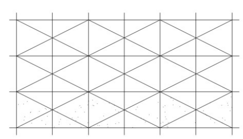


Obr. 9

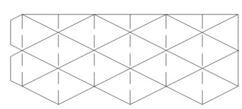
Promítněme prstenec pravoúhle do roviny, na níž leží jeho vrcholy. Délka strany obrysu (výška trojúhelníkové stěny) musí mít stejnou délku jako hrana – pant (základna rovnoramenného trojúhelníku). Síť prstence bude tedy tvořena šesti čtveřicemi rovnoramenných trojúhelníků, které lze vepisovat do čtvercové sítě (obr. 10a, 10b – velikost čtverců je pouze orientační). K síti připojíme promyšleně záložky (obr. 10c) a uvědomíme si, že hrany budeme přehýbat na rub a panty na líc (jsou v obrázku čárkovaně).



Obr. 10a



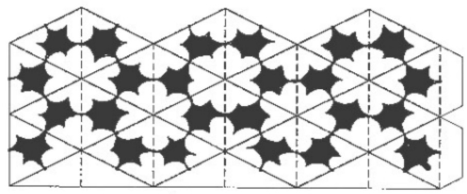
Obr. 10b



Obr. 10c

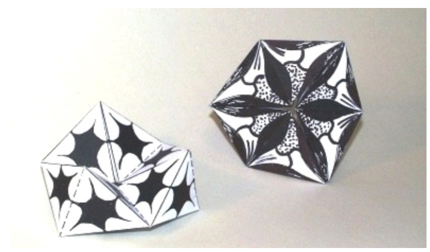
Poprvé takové sítě prstenců publikovali D. Schattschneiderová a W. Wolker ve vystřihovánkách, které bylo možné zakoupit i v českém překladu [4]. Pokrývali je Escherovými nekonečnými motivy, a protože útvary byly „krásné“ a navíc se „protáčely“, nazvali je **kaleidocykly**. Uvedený návod na konstrukci, ani návody na pokrývání kaleidocyklů však v jejich publikaci nejsou. Přitom je to docela snadné a žáci takový úkol, který má v sobě dynamický prvek, rádi plní.

Vzor na kaleidocyklu musí stále navazovat. Při ručním kreslení to zajistíme tak, že na hranách vyznačíme středy. Od bodu k bodu pak kreslíme křivku, kterou jakoby otáčíme kolem těžiště (obr. 11).



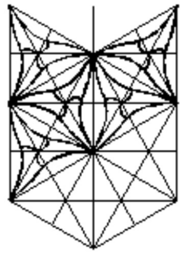
Obr. 11

Takový kaleidocyklus pak bude například květinový, dvoubarevný (obr.12 vlevo). Druhý vzor na fotografii je typově stejný.

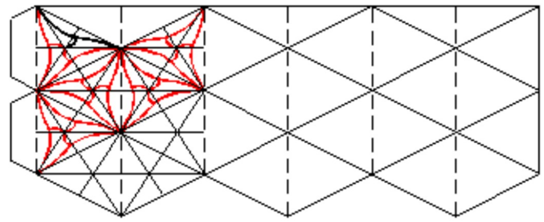


Obr. 12

Vycházeli jsme z mozaikového pokrývání roviny rovnostrannými trojúhelníky (obr. 13a). Pro lepší orientaci v kresbě jsme vyznačili systém těžnic všech trojúhelníků sítě. Od vrcholu k vrcholu trojúhelníku jsme zvolili křivku, spojili ji třeba s těžištěm a otočili o 120° a o 240°. Do každého sousedního trojúhelníku jsme nakreslili osově souměrný obrázek (překlápěli jsme jej kolem stran – obr. 13a).



Obr. 13a

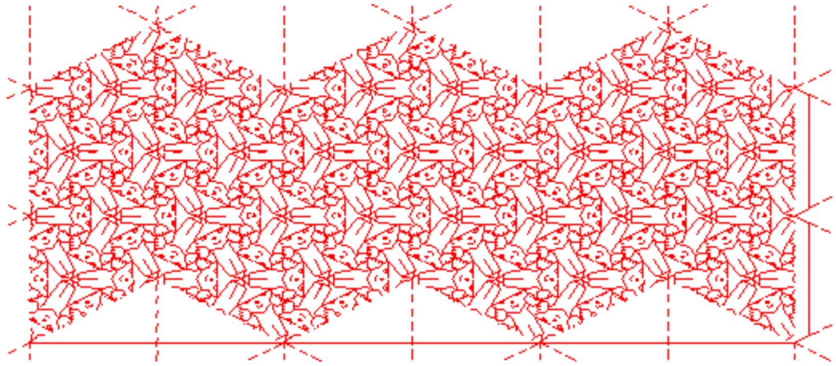


Obr. 13b

Síť kaleidocyklu (obr. 13b) je afinním obrazem sítě z rovnostranných trojúhelníků. Vlastnosti incidence se však zachovávají, proto můžeme i zde využít pomocné sítě těžnic a dodržovat přibližný tvar křivek.

Při vybarvování kaleidocyklů pamatujeme na to, že se v prostoru při protáčení setkají čtyřstěny, jejichž sítě jsou teď vodorovně vedle sebe.

Konstrukce je vhodná i pro práci na počítači. V časopise *abc* jsem publikovala šestiúhelníkový kaleidocyklus již několikrát, m.j. barevnou verzi „panáčků“, kteří se ve trojicích drží za ruce (obr. 14). Vzor byl vytvářen výše uvedeným způsobem s použitím programu AutoCAD.



Obr. 14

Některé mnou publikované kaleidocykly lze nalézt na internetové adrese `www.iabc.cz/index2i.html` (Kupčáková).

Literatura

[1] Aškinuze, V. G., Mnogougolniki i mnogograniki, *Enciklopedija elementarnoj matematiky*, t. IV. Moskva 1963, s. 384.

[2] Cromwell, P. R., *Polyhedra*. Cambridge University Press 1997, s. 209, ISBN 0-521-55432-2.

[3] Brückner, M., *Vielecke und Vielflache.* Teubner, Leipzig 1900, s. 72.

[4] Schattschneiderová, D., Walker, W., *M. C. Escher kaleidocykly*. Taschen 1992, s. 23, ISBN 3-89450-390-4.

Využití šachovnice pro formulování zajímavých úloh

(které mohou oslovit zejména matematické talenty)

Marta Volfová[1]

Abstrakt: Šachovnice lze využít k formulování a řešení překvapivě široké řady matematických i logických problémů a k osvětlení některých heuristických způsobů řešení (např. využití symetrie a parity, stromu logických možností, postupu odzadu aj.). Úlohy rozvíjejí významně kombinační myšlení a prostorovou představivost.

Abstract: It is possible to use chessboards to formulating and solving a surprisingly wide range of mathematical and logical problems and to explaining some heurstic solvign strategies (e.g. use of symmetry and parity, logical trees, etc.). The problems significantly develop combinatorial thinking and space imagination.

Šachovnicemi budeme rozumět pravoúhelníky s různými počty polí (kromě nejznámější šachovnice 8 x 8 polí např. i 3 x 3, 4 x 4, 4 x 5 polí atd.). K řešení (i formulování) úloh je vhodné využívat čtverečkovaný papír. (Řešitelé nemusí hru šachy vůbec znát – jen u některé úlohy je třeba vysvětlit způsob pohybu figurky.)

V této dílně budeme postupně rozebírat následujících 9 okruhů:

1. Velká čísla na šachovnici

   využití pověsti o vynálezu hry šachové a odměně tvůrci v podobě obilných zrn (zápis čísla, pro představu počtu zrn např. spočítat, do jaké výše by sahala, kdyby byla rovnoměrně rozprostřena nad ČR apod.); určení počtu tahů např. dámy na šachovnici;

2. Dělení šachovnice (různých typů) na 2 či 4 shodné části

   hledání všech řešení (dělení na 2 shodné části lze provádět i u šachovnic s lichým počtem polí, domluvíme-li se, že prostřední pole se dělení neúčastní)

3. Pokrývání šachovnic (různých typů)

   a) tvary domina;

   b) tvary domina, chybí-li na šachovnici 2 políčka (sousedící políčka nebo políčka z protilehlých rohů);

   c) tvary tetramina;

   d)kostkami domina (určení způsobu pokrytí, známe-li počty teček na každém políčku šachovnice)

4. Počty čtverců na šachovnici

[1] *PdF UHK, Hradec Králové, marta.volfova@uhk.cz*

určování počtu čtverců, leží-li jejich vrcholy např. vždy ve středu nějakého políčka šachovnice

5. Strategické hry na šachovnici

   stanovení pravidel některých jednoduchých her na šachovnici (např. Cesta krále, Dvojkupičkový Nim, Princ, Pachole) a hledání vítězící strategie; uplatnění „postupu odzadu“

6. Procházky po šachovnici

   procházení šachovým koněm po všech polích šachovnice 3 x 3 (mimo prostředního) a 4 x 3; stejná úloha při procházení šachovnic s větším počtem políček (např. 5 x 5), ale část polí označena pořadovým číslem tahu koně

7. Geometrické křížovky na šachovnici

   vyznačení počtu vyplněných polí nad řadami a vedle sloupců (např. 2 – 1 – 2), nalezení všech vyznačených polí (často vytvoří nějaký obrázek); zajímavá varianta nalezení všech umístěných „lodí“

8. Klasické úlohy šachovnice

   počet umístění (maximálně, minimálně) figurek na šachovnici (např. dam, šachových koní, střelců), aby byla

   – všechna pole ohrožena nebo obsazena,

   – všechna pole ohrožena a figurky se vzájemně nenapadaly,

   – všechna pole ohrožena a figurky se vzájemně chránily,

9. Další možnosti využití šachovnice

   hry typu solitér, úlohy o síle jednotlivých figurek, o počtu možných tahů, o výměně figurek v řadě a další

Literatura

[1] Marek, V., Kaledonský, J., *Dáma a šach jako zábava, trénink ducha a sport.* Portál, Praha 2001.

[2] Gardner, M., *Mathematical puzzles and diversions.* Bell and Sons, London 1960.

[3] Gérová, L., *Matematická mal'ovaná krížovka.* Komenský, č. 7/8, s. 121, 1977.

[4] Volfová, M., *Metody řešení matematických úloh.* Gaudeamus, Hradec Králové 2000.

[5] Gardner, M., *Time Travel and Other Mathematical Bewildements.* W. H. Frieman & Comp., New York 1988.

Ze společenského večera

Chvála matematických antitalentů

Emil Calda[1]

Název této konference „Ani jeden matematický talent nazmar“ vzbuzuje dojem, že nám, učitelům matematiky, na matematických antitalentech nezáleží a že je nám jedno, jestli přijdou nazmar. Rád bych se alespoň krátce věnoval jejich obraně.

Matematický antitalent se na rozdíl od talentu pozná poměrně snadno, a to zejména tehdy, když se ve třídě pokoušíme něco dokázat:

Matematický talent pochopí, co jsme chtěli dokázat, i když se nám důkaz nepodařil.

Matematický antitalent nepochopí, co jsme chtěli dokázat, i když se nám důkaz podařil.

Zdá se mi, že tato konference propásla jedinečnou možnost ocenit konečně význam a přínos matematických antitalentů pro práci každého učitele matematiky. Co nám dávají, čím nás obohacují?

1. Poskytují nám zcela bezplatně vědomí, že existují osoby, které jsou na tom s matematikou ještě hůře, než jsme my sami.
2. Dávají nám možnost učit a vysvětlovat témata, která odolávají našemu porozumění, aniž se při výkladu musíme obávat, že to někdo pozná.
3. Umožnují nám, abychom se denně utvrzovali v poznání, že patříme mezi matematické talenty, o čemž nad příklady z matematické olympiády můžeme někdy zapochybovat.
4. Kdo by ocenil naše pedagogické mistrovství, kdyby ve třídě žádní matematičtí antitalenti nebyli, a byla tedy prázdná?
5. Kdyby nebylo matematických antitalentů, kdo by se veřejně vychloubal svými neznalostmi a přispíval tak k povznesení národa?

Na základě uvedeného proto žádám, aby v závěrech konference byl přínos matematických antitalentů patřičně oceněn. Vyzývám všechny kolegy a kolegyně:

Važme si každého matematického antitalenta a nebraňme jim v jejich úsilí o nepochopení matematického učiva! Ani jeden matematický antitalent nazmar!

[1] *MFF UK, Praha, ecalda@volny.cz, calda@karlin.mff.cuni.cz*

Píseň českých učitelů matematiky

kterou českým učitelům matematiky složil a věnuje HgS

1. My jsme čeští učitelé matematiky
   a na poli Komenského pedagogiky
   pracujem až do večera od rána,
   aby naše mládež byla vzdělaná.

R: Až pod tíhou povinností jednoho dne klesnem,
hlasem slabým, ale pevným za katedrou hlesnem:
Do příštích dnů hleď, národe, směle!
Zítra zase vstanou noví učitelé!

2. Na barikádách vědecké revoluce
   snášíme oběti české republice
   a zatímco rytíři spí v Blaníku,
   my učíme denodenně matiku!

R: Až pod tíhou povinností jednoho dne klesnem,
hlasem slabým, ale pevným za katedrou hlesnem:
Do příštích dnů hleď, národe, směle!
Zítra zase vstanou noví učitelé!

3. Nejsme hvězdy mediální, pomíjivé slávy,
   i když se to někdy nezdá, rozum máme zdravý.
   Své peníze na Bahamách v žádné bance neperem,
   protože jich u nás doma zase tolik neberem!

R: Až pod tíhou povinností jednoho dne klesnem,
hlasem slabým, ale pevným za katedrou hlesnem:
Do příštích dnů hleď, národe, směle!
Zítra zase vstanou noví učitelé!

Program konference

Čtvrtek 24.4.

14.00–14.30	Zhouf J.: Nový typ konference
14.30–15.30	Mareš J.: Žáci nadaní a talentovaní na matematiku
15.30–16.00	Přestávka
16.00–16.30	Švrček J.: Matematické soutěže pro žáky ZŠ a SŠ
16.30–17.00	Molnár J.: Matematický klokan v ČR
17.00–17.30	Kuřina F.: Kultura školské matematiky
18.00	Večeře

Pátek 25.4.

7.15– 8.15	Snídaně
8.30– 9.00	Vaněk V.: Gymnázia s rozšířenou výukou matematiky
9.00– 9.30	Krupka P.: Matematické třídy na gymnáziu kpt. Jaroše
9.30–10.00	Šimša J.: Tvorba úloh pro matematickou olympiádu
10.00–10.30	Přestávka
10.30–11.00	Vybíral B.: Fyzikální olympiáda
11.00–11.30	Lišková H.: Matematické korespondenční semináře
11.30–12.00	Lesáková E, Kolínská J.: Informace o přípravě společné části maturity
12.30	Oběd
14.30–15.30	Dílny účastníků
15.30–15.45	Přestávka
15.45–17.45	Příspěvky účastníků
18.00	Večeře
20.00	Společenský večer

Sobota 26.4.

7.15– 8.15	Snídaně
8.30– 9.00	Diskuse s pracovníky MŠMT
9.00– 9.30	Vondráková E.: Povinná školní docházka budoucích vědců
9.30–10.30	Netuka I.: Talentovaní studenti a matematika: vzpomínky a názory
10.30 –10.45	Zakončení
11.00	Oběd

Program dílen a příspěvků

14.30–15.30	**Dílny**
Místnost 1	
Václav Fořtík	Mensa ČR a zábavná matematika – kvízy, hádanky a hlavolamy
Místnost 2	
Irena Koudelková	Zajímavá matematika aneb „Boříme bariéry“
Místnost 3	
Marie Kupčáková	Nejenom dvacetičtyřstěn má dvacet čtyři stěn
Místnost 4	
Marta Volfová	Využití šachovnice při formulování zajímavých úloh

15.45–17.45		**Příspěvky**
Místnost 1		
15.45–16.15	M. Musílek	Od webu přes programování k matematice
16.15–16.45	L. Šimůnek	Matematický korespondenční seminář GJKT
16.45–17.15	M. Prokopová, P. Rys	Úlohy korespondenčního semináře KoS Severák
17.15–17.45	D. Komorová	Přehled vybraných zdrojů finančních prostředků

Místnost 2		
15.45–16.15	L. Hozová	Jak pečovat o matematické talenty
16.15–16.45	M. Volfová	17 let práce v úlohové komisi MO kategorií Z
16.45–17.15	V. Voršilková	Karty a kartičky
17.15–17.45	E. Calda	Jak jsem kdysi dávno učil v matematických třídách

Místnost 3		
15.45–16.15	M. Koblížková	Matematický kroužek na vyšším gymnáziu
16.15–16.45	J. Fischer	„Ukaž, co umíš“
16.45–17.15	M. Koman	„Dejte hlavy dohromady“ – týmová soutěž žáků 6. ročníků
17.15–17.45	J. Kubeš	Plzeňský matematický korespondenční seminář pro žáky 5. tříd

Místnost 4

15.45–16.15	M. Kaslová	Komunikace a talent
16.15–16.45	A. Marchive	Efekty očekávání a produkce výborného žáka
16.45–17.15	B. Sarrazy	Nadání v matematice–didaktický pohled
17.15–17.45	M. Kučera, J. Michálek	Elektronická mapa GJKT

Místnost 5

15.45–16.15	J. Houser	Vstupní test z matematiky pro 1. ročník SPŠ
16.15–16.45	Z. Vítovcová	Vektor nebo komplexní číslo? Aneb jsem líná, tudíž přemýšlím
16.45–17.15	J. Houser	Logická matematická soutěž na SPŠ
17.15–17.45	J. Fiala	Matematické modely skutečnosti – nerovnice

Seznam účastníků

Jméno	Pracoviště	E-mail
Burešová Dagmar Mgr.	ZŠ, Benešovo nám. 590, Pardubice	
Calda Emil doc. RNDr. CSc.	MFF UK, Sokolovská 83, Praha 8	calda@karlin.mff.cuni.cz
Čapková Zuzana Mgr.	G, K. Čapka, Školní 1530, Dobříš	
Částková Daniela Mgr.	G, Husitská 2053, Sokolov	castkova@gymso.cz
Čechová Eva Mgr.	G, Chvalšinská 112, Český Krumlov	cechova@gymck.cz
Dachs Václav	G, Pulická 779, Dobruška	
Daňková Dana RNDr.	G, P. de Coubertina, nám. Fr. Křižíka 860, Tábor	dankova@gymnasiumtabor.cz
Divoká Jaroslava Mgr.	SPŠ strojnická, Betlémská 287/4, Praha 1	j.divoka@quick.cz
Dubnová Lenka Ing.	ZŠ, Žižkovo nám. 1, Nové město nad Metují - Krčín	
Dvořáková Dana Mgr.	PC, Jihlava	dvorakova.pcjihlava@ji.cz
Fabiánová Věra	G, Křenová 36, Brno	fabianova@gymkren.cz
Ferfecká Iveta Mgr.	1. ZŠ, Třinec	
Fiala Jan Mgr.	PedF UP, Olomouc	jfjk@post.cz
Fischer Jakub	Ing. ZŠ, Uhelný trh 4, Praha	fischerj@vse.cz
Fořtík Václav	Mensa České republiky, Zavadilova 3, Praha	vaclav.fortik@mensa.cz
Fořtová Ilona RNDr.	Prometheus, s. r. o., Čestmírova 10, Praha 4	prometheus@iol.cz
Freiová Věra Mgr.	G, K. V. Raise, Adámkova 55, Hlinsko	Vera.sodomkova@seznam.cz
Froňková Věra Mgr.	SOŠ a SOU, Vratimovská 681, Ostrava – Kunčice	
Galiová Milena Mgr.	Z+S, Alšova 1123, Kopřivnice	zsals@zsals.edunet.cz
Hajdinová Světlana Mgr.	ZŠ, Zeyerova 3354, Kroměříž	s.hajdinova@seznam.cz

Hájková Hana RNDr.	G, Křenová 36, Brno	Hajkova@gymkren.cz
Haklová Iveta Mgr.	Škola ekon. a cest. ruchu, SSOŠ s.r.o., Ostrava	Iveta.Haklova@tiscali.cz
Haviger Jiří Mgr.	Biskupské G, Orlické nábřeží, Hradec Králové	Jiri.haviger@seznam.cz
Hoffmannová Darja Mgr.	1. ZŠ, Třinec	Dhoff@seznam.cz
Horák Karel RNDr. Csc.	Prometheus, s.r.o., Čestmírova 10, Praha 4	horakk@math.cas.cz
Horáková Hana RNDr.	Klasické G, Plovdivská 8, Brno – Žabovřesky	hana-hor@seznam.cz
Houser Jiří Mgr.	SPŠ, ČSA 376, Nové Město nad Metují	houser@spsnome.cz
Hozová Libuše Dr.	Slezská univerzita, Bezručovo nám.13, Opava	libusehozova@email.cz
Hrabáková Miroslava RNDr.	G, V. Hraběte, Jiráskova 617, Hořovice	mirkahra@škola.hornet.cz
Hruška Michal RNDr.	1. soukromé jazykové G, Hradec Králové	Michal.hruska@wo.cz
Hudcová Milada RNDr.	VOŠ, VYŠ, SOŠ a SOU, Hybešova 53, Boskovice	hudcova@nhskola-boskovice.cz, hudcova@abba.cz
Jacko Martin Mgr.	Biskupské G, Orlické nábřeží, Hradec Králové	Jackom@seznam.cz
Jedličková Milada Mgr.	SPŠ stavební ak. S. Bechyně, Havlíčkův Brod	jedlickova@stavskola.cz
Jelínková Dana Mgr.	ZŠ T.G.M., J. A. Komenského 467, Hodkovice nad Mohelkou	dana.jelinkova@zstgm.hodkovicenm.indos.cz
Jičínská Ema Mgr.	ZŠ, Benešovo náměstí 590, Pardubice	kabinet.chemie@zsben.cz
Jílková Eva Mgr.	ZŠ Mandysova, Hradec Králové	eva.jilkova@email.cz
Jílková Iva Mgr.	SPŠ a SOU,Horská 618, Trutnov	Jilkova@seznam.cz
Johnová Ludmila RNDr.	ZŠ, Komenského 11, Ústí nad Orlicí	
Kaňka Petr Mgr.	SOŠ a SOU, Hradební 1029, Hradec Králové	

Kaňoková Vlasta Mgr.	Integrovaná střední škola, Jablunkov	
Kapounová Kamila Mgr.	ZŠ, Dolní Újezd	Kapounovi@lit.cz
Kaslová Michaela PhDr.	PedF UK, KMDM, M.D.Rettigové 4, Praha 1	kaslovam@pedf.cuni.cz
Koblížková Michaela	G, V. Nováka, Husova 333/II, Jindřichův Hradec	
Kolínská Jana RNDr.	ÚIV – CERMAT, Praha	kolinska@cermat.cz
Koman Milan Prof. RNDr. CSc.	PedF UK, KMDM, M.D.Rettigové 4, Praha 1	milan.koman@pedf.cuni.cz
Komorová Dana Mgr.	KÚ Královéhradeckého kraje, Hradec Králové	dkomorova@kr-kralovehradecky.cz
Kopečná Kateřina Mgr.	G, K. V. Raise, Adámkova 55, Hlinsko	Katerina.Kopecna@centrum.cz
Kopfová Jana RNDr.	MÚ SU, Bezručovo náměstí 13, Opava	kopf@volny.cz
Koudelková Irena RNDr.	ZŠ, Červený vrch, Alžírská 680, Praha	koudelkova@zscvrch.cz
Králová Iva Mgr.	ZŠ, Žižkovo náměstí 1, Nové Město nad Metují	
Krupka Petr RNDr. Ph.D.	G, třída Kapitána Jaroše 14, Brno	Krupka@jaroska.cz
Křečková Věra Mgr.	ZŠ s rozšířenou výukou cizích jazyků, Kvítková 4338, Zlín	
Kubeš Josef PaedDr.	G, Mikulášské náměstí 23, Plzeň	Josef.Kubes@gymik.inpuls.cz
Kučera Michal	G, J.K.Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové	insurgent@seznam.cz
Kučírek Pavel	ZŠ, Na Kopcích 342, Třebíč	sekretarka@zskopce.cz
Kupčáková Marie RNDr.	PdF UHK, Hradecká 1227/4, Hradec Králové	marie.kupcakova@uhk.cz
Kuřina František Prof. RNDr. Csc.	PdF UHK, nám. Svobody 301, Hradec Králové	frantisek.kurina@uhk.cz
Lesáková Eva RNDr.	ÚIV – CERMAT, Praha	lesakova@cermat.cz

Lišková Hana RNDr.	VOŠP a SpgŠ, Litomyšl	liska@lit.cz
Macek Jiří	G, Pulická 779, Dobruška	gymred@dobruska.cz
Machková Lenka RNDr.	G, J. K. Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové	Machkova@gjkt.cz
Marek Tomáš Mgr.	VOŠ a SPŠ stavební arch. J. Letzela, Náchod	Marek@voss-na.cz
Mareš Jiří Prof. PhDr. CSc.	Lékařská fakulta UK, Hradec Králové	mares@lfhk.cuni.cz
Marchive Alain Prof.	Universite Victor Sagalen, Bordeaux 2, France	alain.marchive@sc-edu.u-bordeaux2.fr
Matouchová Jana	PedF UJEP, Ústí nad Labem	matouchovaj@seznam.cz
Mazůrek Rudolf	SOU a U, Masarykovo nám. 1, Hustopeče	
Michálek Jan	G, J.K.Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové	honza.michalek@seznam.cz
Mikulášek Petr Mgr.	G, A. K. Vitáka 452, Jevíčko	miki@gymjev.cz
Molnár Josef RNDr. Csc.	PřF UP, Tomkova 40, Olomouc	molnar@tisc.upol.cz
Mullerová Eliška Mgr.	PC, Ostrava, Blahoslavova 1576/2	eliska.mullerova@pcostrava.cz
Musílek Michal Mgr.	SZŠ, Masarykovo náměstí 2, Nový Bydžov	reditel@szsnb.cz
Netuka Ivan Prof. RNDr. Csc.	MFF UK, Praha	netuka@karlin.mff.cuni.cz
Nocar David Mgr.	PedF UP, Katedra matematiky, Olomouc	nocard@pdfuw.upol.cz
Novák Miroslav Mgr.	G, J.K.Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové	novak@gjkt.cz
Nováková Marie Mgr.	Prometheus, s. r. o., Čestmírova 10, Praha 4	prometheus@iol.cz
Novotná Hana Mgr.	G, Husitská 2053, Sokolov	novotna.hana@email.cz
Nožková Dagmar RNDr.	G, Nádražní 48, Žamberk	
Ondráčková Ivana Mgr.	G, J.K.Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové	ondrackova@post.cz

Pavlíčková Helena RNDr.	ISŠ PS, Bratří 851, Havlíčkův Brod	hellenka@centrum.cz
Pavlíková Zdeňka	ZŠ, M. Horákové 258, Hradec Králové	pavlikova@zshorak.pvtnet.cz, Pavlikova.Z@seznam.cz
Pomykalová Eva RNDr.	G, Lesní čtvrť 1364, Zlín	
Popp Karel	Soukromá osoba	poppk@post.cz
Prokopová Magdaléna Mgr.	PedF UJEP, České mládeže 8, Ústí n. Labem	prokopova@pf.ujep.cz
Pšenčíková Bohuslava Mgr.	ZŠ, Český Rudolec	
Salák Jar. Mgr.	ZŠ, Demlova 34, Jihlava	jarsalak@centrum.cz
Sarrazy Bernard prof.	Universite Victor Sagalen, Bordeaux 2, France	bernard.sarrazy@sc-edu.u-bordeaux2.fr
Skalková Radka Mgr.	PedF UP, Katedra matematiky, Olomouc	skalkova@pdfnw.upol.cz
Skýpalová Jana Mgr.	Soukromá SOŠ ochrany osob a majetku, s. r. o., Karviná-Darkov	janaskypalova@seznam.cz
Smejkalová Jana Mgr.	ZŠ, Benešova 585, Třebíč	
Staříková Svatava Mgr.	Hotelová škola a OA, Havířov	Starikova.S@seznam.cz
Stejskalová Marie Mgr.	G, Ladislava Jaroše, Palackého 524, Holešov	
Sušilová Jana RNDr.	G, Lesní čtvrť 1364, Zlín	Jana.Susilova@centrum.cz
Šafránková Blanka RNDr.	SOŠ a SOU, Jaselská 826, Kolín	info@soskolin.cz
Šetková Zdeňka Mgr.	ZŠ, Masarykova 1289, Ostrov	
Šimša Jaromír doc. RNDr. Csc.	PřF MU, Janáčkovo nám. 2a, Brno	simsa@ipm.cz
Šimůnek Libor	G, J.K.Tyla, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové	libor_simunek@email.cz
Škvarlová Iva Mgr.	ZŠ, Zeyerova, Kroměříž	s.hejdinova@seznam.cz
Šrubař Kamil Mgr.	ZŠ, Dřevnická 1790, Zlín	kamilsrubar@post.cz

Šulcová Monika Mgr.	ZŠ, Masarykova 1289, Ostrov	
Švrček Jaroslav RNDr. CSc.	PřF UP, Tomkova 40, Olomouc	svrcek@inf.upol.cz
Vaněk Václav Mgr.	G, M. Koperníka, 17. listopadu 526, Bílovec	vvanek@gmk.cz
Vaněk Vladimír Mgr.	PedF UP, Katedra matematiky, Olomouc	Vanekhc@pafn.upol.cz
Vaňková Jana Mgr.	G, F. X. Šaldy, Partyzánská 530, Liberec	Janinav.md@seznam.cz
Vítovcová Zuzana PaedDr.	SZŠ a VZŠ, Poděbradská 2, Karlovy Vary	
Voborníková Karla	SOŠ a SOU, Vratimovská 681, Ostrava – Kunčice	
Volfová Marta doc. RNDr. Csc.	PedF UHK, Hradec Králové	marta.volfova@uhk.cz
Vondráková Eva PhDr.	Společnost pro talent a nadání ECHA	vondrakova@mistral.cz
Voršilková Věra RNDr.	G, F. X. Šaldy, Partyzánská 530, Liberec	vo@gfxs.cz
Vybíral Bohumil Prof. Ing. CSc.	PedF UHK, Hradec Králové	bohumil.vybiral@uhk.cz
Zapadlová Marie Mgr.	SOŠ a SOU, Tyršova 112, Nový Bydžov	m.zapadlova@post.cz
Zhouf Jaroslav RNDr. Ph.D.	PedF UK, KMDM, M.D.Rettigové 4, Praha 1	jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Název: Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba v systému LaTeX: Naďa Stehlíková
Vydavatel: Pedagogické centrum Hradec Králové
Tisk: Marcela Langrová, reprografické středisko PCHK
Náklad: 220 kusů
Rok vydání: 2003

Text neprošel jazykovou úpravou.

Vydání sborníku bylo podpořeno grantem GAUK 316/2001/A-PP/PedF.

ISBN 80-7015-936-7
Evidenční číslo: 57-553-03