

Univerzita Hradec Králové – Přírodovědecká fakulta
a Fakulta informatiky a managementu
Královéhradecká pobočka JČMF

Ani
jeden
matematický
talent
nazmar
2024

Sborník příspěvků 11. ročníku celostátní konference
učitelů matematiky a přírodovědných oborů
na základních, středních a vysokých školách

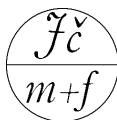
Hradec Králové
2024



Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta



Univerzita Hradec Králové
Fakulta informatiky a managementu



Programový výbor:

doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:

doc. PhDr. Michal Musílek, Ph.D., PřF UHK, Hradec Králové
Mgr. Iva Vojkůvková, GJKT, Hradec Králové

Editor:

doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha

Recenzent:

doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

Články zařazené do tohoto sborníku vyjadřují názory a zkušenosti jejich autorů. Nejsou stanoviskem organizátorů konference.

ISBN 978-80-7435-955-2 (on-line, PDF)

ISBN 978-80-7435-954-5 (brožovaná vazba)

OBSAH

Program konference	5
Úvodem	
<i>Zhouf, J.:</i> Úvodní slovo k jedenáctému setkání	7
Úvodní přednáška	
<i>Zhouf, J.:</i> 10 konferencí Ani jeden matematický talent nazmar . . .	8
Další přednášky	
<i>Beránková, E.:</i> Aplikace Mattecoach	11
<i>Dančanin, P.:</i> Hypotéza zjednotenia	14
<i>Dreval, M.:</i> Týmové matematické soutěže a turnaje jako efektivní prvek přípravy na matematické olympiády	33
<i>Dvořáková, L.:</i> Rozhledy matematicko-fyzikální	42
<i>Hanzalová, P.:</i> Únikovky v matematice s počítačem i bez něj (v učebnicích SPN)	44
<i>Huclová, M.:</i> Digitální kompetence s podporou dynamického matematického software ve výuce na základní škole	54
<i>Janeček, K.:</i> Archa 21	62
<i>Kačířek J., Stejskalová, M.:</i> Mathesso – inovativní nástroj v matematice formou hry	67
<i>Kaslová, M.:</i> Variabilita úloh k zobecnění – vliv na volbu strategií	73
<i>Kolář, K.:</i> Jak může být jednodušší řešit nekonečné elektrické obvody než konečné	93
<i>Königsmarková, S.:</i> Využití GeoGebry při řešení úloh na nalezení množiny všech bodů dané vlastnosti	102
<i>Lego, S.:</i> Hodnocení písemek – motivace studentů ke zlepšení . . .	116
<i>Müller, E.:</i> Matematické hry v primě osmiletého gymnázia	120
<i>Musílek, M.:</i> Želví geometrie a programovací jazyk Python	130
<i>Pražák, P.:</i> GeoGebra a úloha lineárního programování	143
<i>Škorpilová, M.:</i> Čẽvovy věty	149
<i>Šmíd, J.:</i> Platonium	162
<i>Teislerová, M.:</i> ForClassmates: Revoluce ve výuce nejen matematiky	170
<i>Tesař, V.:</i> Návrh nového „matematicko-zubařského“ slovníku . . .	174

<i>Vašíček, K.:</i> Isaac Newton a Principie	175
<i>Vávrová, A.:</i> Soma a jiné kostky	188
<i>Zhouf, J.:</i> Chybí / nechybí komplexní čísla v RVP?	191
<i>Zhouf, J.:</i> Informace o publikacích vydavatelství Portál III	195
Fotogalerie	199
Seznam účastníků	202
Poděkování sponzorům	205

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 10. 5.

- 10.00–10.15 Zahájení
- 10.15–10.45 Zhouf, J.: Rekapitulace 10 konferencí Ani jeden matematický talent nazmar
- 10.45–11.00 Dreval, M.: Týmové matematické soutěže a turnaje jako efektivní prvek přípravy na matematické olympiády
- 11.00–11.30 Vávrová, A.: Soma a jiné kostky (pracovní dílna)
- 11.30–12.00 Tesař, V.: Vhled a repetice
- 12.00–12.45 Hanzalová, P.: Únikovky v matematice s počítačem i bez něj v učebnicích SPN
- 12.45–14.00 Oběd
- 14.00–14.30 Kaslová, M.: Variabilita úloh k zobecnění
- 14.30–15.00 Dvořáková, L.: Rozhledy matematicko-fyzikální
- 15.00–15.21 Janeček, K.: Archa 21
- 15.21–15.35 Stejskalová, M.: Mathesso – celostátní kolo soutěže
- 15.35–16.30 Přestávka a hraní Mathessa
- 16.30–16.45 Königsmarková, S.: Užití Geogebra při řešení úloh na množiny bodů
- 16.45–17.00 Pražák, P.: Geogebra a lineární programování
- 17.00–17.20 Škorpilová, M.: Cévy věty
- 17.20–17.50 Rak, J.: Představení prostředí classpat.net

Sobota 11. 5.

- 09.00–09.35 Musílek, M.: Želví geometrie a programovací jazyk Python
- 09.30–10.00 Zhouf, J.: Chybí / nechybí komplexní čísla v RVP?
- 10.00–10.15 Lego, S.: Hodnocení písemek – motivace studentů ke zlepšení
- 10.15–10.30 Huclová, M.: Digitální kompetence s využitím dynamického matematického software u žáků ZŠ

- 10.30–10.45 Vašíček, K.: Isaac Newton a vydání Principií
10.45–11.00 Šmíd, J.: Platonium
11.00–11.45 Přestávka
11.45–12.00 Müller, E.: Matematické hry v primě gymnázia
12.00–12.15 Beránková, E.: Aplikace Mattecoach
12.15–12.45 Kolář, K.: Jak může být jednodušší řešit nekonečné elektrické
obvody než konečné
12.45–13.00 Dančanin, P.: Hypotéza zjednotenia
13.00–13.15 Zhouf, J.: Informace o publikacích vydavatelství Portál III
13.15–13.45 Teislerová, M.: Prezentace učebnic matematiky SŠ psané
studenty ForClasmates
13.45–14.00 Zakončení

ÚVODEM

Úvodní slovo k jedenáctému setkání

V letošním roce 2024 proběhl již jedenáctý ročník konference *Ani jeden matematický talent nazmar*. Tato konference se od svého počátku koná jako bienále, ale v roce 2021 tuto frekvenci narušil covid, takže se setkání původně probíhající v lichých letech přesunula na sudé roky. Přesnější data týkající se této konference následují v úvodní přednášce.

Konference *Ani jeden matematický talent nazmar* je tematicky orientována na talentované žáky v matematice a přírodovědných oborech. V předchozích letech šlo obsahově převážně o matematiku, v tomto roce byl patrný posun témat do přírodovědných oblastí, hlavně však začala dominovat oblast informatiky, což odpovídá vývoji společnosti právě tímto směrem.

Na konferenci zazněla řada zajímavých a podnětných přednášek. Část konferenčního času byla také věnována dvěma stolním hrám, viz následující příspěvky.

Přednášky byly věnovány věku žáků prvního stupně základní školy až studentů vysokých škol.

Konference měla tradiční průběh. Popáté v historii se organizace i finanční podpory ujala Univerzita Hradec Králové, konkrétně Přírodovědecká fakulta, a Královéhradecká pobočka JČMF.

Konference jako obvykle probíhala ve výborné přátelské atmosféře při jednání i během trávení volného času.

Nezbývá, než se opět těšit na příští konferenci *Ani jeden matematický talent nazmar*.

Jaroslav Zhouf

ÚVODNÍ PŘEDNÁŠKA

10 konferencí Ani jeden matematický talent nazmar

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

ABSTRAKT. Článek rekapituluje uskutečněných 10 konferencí Ani jeden matematický talent nazmar. Dozvíme se zde, kdy se konference konaly, kdo je organizoval, kolik účastníků konference měly a řadu dalších informací.

1. Úvod

Před více než 20 lety se komunita převážně učitelů, kteří učili na matematiku talentované žáky a organizovali pro ně nejrůznější soutěže – čímž vlastně vychovávali budoucí významné matematické odborníky a také budoucí učitele, kteří budou vychovávat opět nové matematické talenty – rozhodla uspořádat nový typ konference, a to právě s uvedenou tematikou. Účastníky konference byli a jsou většinou učitelé základních, středních i vysokých škol.

Bylo rozhodnuto, že se první konference uspořádá v Hradci Králové. Tam tato konference postupně zdomácněla, takže se tam doposud konaly všechny její ročníky.

Postupně se ukázalo, že jde o důležitou konferenci, proto bude dobré na ni zavzpomínat a upozornit na zajímavé skutečnosti, které se jí týkají. Jelikož podstata a význam této konference je nasnadě, věnuje se článek hlavně tomu druhému pohledu, tj. statistickým údajům.

2. První konference

První konference se uskutečnila 24.–26. 4. 2003, tedy šlo o třídní konferenci, a to ve čtvrtek, v pátek a v sobotu. Místem konání byla Střední zdravotnická škola Hradec Králové.

Konference byla podpořena grantem GAUK 316/2001/A-PP/PedF, jehož řešitelem byl autor tohoto článku, proto konferenci i zahájil.

Počet účastníků této první konference bylo 109.

Konference měla tuto strukturu: jedna plenární přednáška (Jiří Mareš, Žáci nadaní a talentovaní na matematiku), 30 kratších příspěvků paralelně v 5 místnostech, 4 dílny.

Následně po skončení konference byl Pedagogickým centrem HK vydán sborník v počtu 220 kusů. Jeho editorek byl Jaroslav Zhouf, což mu již zůstalo i pro všechny sborníky dalších konferencí.

Na závěr konference bylo rozhodnuto, že konference bude nadále ve formě bienále. A také byl ustanoven programový výbor pro další ročníky: Jaroslav Zhouf, Vladimír Burjan, Robert Geretschlaeger, František Kuřina, Josef Molnár.

3. Druhá, třetí a čtvrtá konference

Další tři konference se konaly v termínech 14.–16. 4. 2005, 3.–5. 5. 2007 a 16.–18. 4. 2009, šlo tedy také o tří denní konference.

Programový výbor měl výše uvedené složení, organizační výbor v těchto ročnících tvořili: Lenka Takáčová (SOU obchodní), Michal Musílek (Střední zdravotní škola) a Naďa Pourová (Střední zdravotní škola). Organizačními institucemi byly Pedagogická fakulta UK Praha (PedF UK), JČMF, Střední zdravotnická škola HK, Pedagogické centrum HK. Místem konávání byla opět Střední zdravotnická škola Hradec Králové.

Zajímavým momentem byly vždy v pátek dopoledne otevřené hodiny na ZŠ a SŠ v Hradci Králové. A také páteční společenský večer – vždy s přednáškou Emila Caldý.

Počty účastníků byly: 85 (2. konference), 118 (3. konference), 73 (4. konference). Vydavatelem sborníku byla PedF UK Praha.

Počty vydaných sborníků byly: 150 (2. konference), 160 (3. konference) a 120 (4. konference). Vydavatelem sborníku byla stále PedF UK Praha v rámci grantů GAUK, jejímž řešitelem byl Jaroslav Zhouf.

4. Pátá a šestá konference

Termíny konání těchto konferencí byly 8.–9. 4. 2011 a 10.–11. 5. 2013. Zde je vidět podstatná změna oproti předchozím konferencím, a to zkrácení ze tří dnů na dva dny (pátek a sobota). Tato změna se udržela už u všech následujících konferencí.

Programový výbor se nezměnil, malinko se změnil organizační výbor na pouhou dvojici Lenka Takáčová (SOU obchodní) a Michal Musílek (PrF UHK a pobočka JČMF). Organizační instituce se také malinko obměnily, a sice PedF UK Praha, SUMA JČMF, Školské zařízení Královéhradeckého kraje.

Místem konání se poprvé stala Univerzita Hradec Králové (UHK), a tak to zůstalo do současnosti. Podstatnou změnou bylo vypuštění ote-

vřených hodin na ZŠ a SŠ. A už se též nekonal společenský večer. A tak to zůstalo i nadále.

Počty účastníků byly: 45 (5. konference) a 45 (6. konference).

Počty vydaných sborníků byly: 100 (5. konference) a 100 (6. konference). Vydavatelem sborníku se opět stala PedF UK Praha, protože to bylo stále v rámci grantu GAUK.

5. Sedmá a osmá konference

Termíny konání těchto konferencí byly 5.–6. 6. 2015 a 26.–27. 5. 2017.

Programový výbor se nezměnil, změnil se organizační výbor na dvojici Iva Vojkůvková (Fakulta Informatiky a managementu UHK) a Michal Musílek (PřF UHK a pobočka JČMF). Organizátorské instituce se pozměnily na Pobočku JČMF HK, PřF a FIM UHK.

Počty účastníků byly: 20 (7. konference) a 26 (8. konference).

Počty vydaných sborníků byly: 100 (7. konference) a 150 (8. konference). Vydavatelem sborníku se stalo vydavatelství Gaudeamus, UHK.

6. Devátá a desátá konference

Devátá konference se konala 24.–25. 5. 2020. Desátá konference se měla konat v roce 2021, napadl nás ale covid, takže se tato konference o rok posunula na termín 27.–28. 5. 2022.

Programový výbor se ztenčil na dvojici Jaroslav Zhouf, Josef Molnár. Organizační výbor se nezměnil, organizátorské instituce také ne.

Počty účastníků byly: 28 (9. konference) a 37 (10. konference).

Počty vydaných sborníků byly: 150 (9. konference) a 150 (10. konference). Vydavatelem bylo opět fakultní vydavatelství Gaudeamus, UHK.

7. Závěr

Z uvedených údajů je vidět, jak se průběh konference *Ani jeden matematický talent nazmar* vyvíjel a proměňoval.

Konference si neustále udržuje poměrně velký ohlas mezi učiteli a ostatními odborníky, které fandí matematice a výchově svých následovníků. Doufejme, že to takto bude i nadále. Současná 11. konference má ve svém programu mnoho zajímavých příspěvků. Proto jí i dalším ročníkům přejme stále pozitivní hodnocení.

Literatura

- [1] Deset sborníků konference *Ani jeden matematický talent nazmar*, 2003–2023.

DALŠÍ PŘEDNÁŠKY

Aplikace Mattecoach

Eliška Beránková, PřF UP, Olomouc

ABSTRAKT. Cílem článku je představit aplikaci Mattecoach, která nabízí novou formu online doučování matematiky pro všechny žáky základních a středních škol. Článek představí historii aplikace, její fungování a přínosy pro žáky a současně i pro studenty učitelství matematiky v České republice.

1. Úvod

Matematika je neodmyslitelnou součástí základního a středního vzdělávání, přičemž často představuje výzvu nejen pro žáky, ale i pro učitele. Právě proto je zásadní hledat efektivní způsoby, jak tuto výzvu překonat a podpořit žáky v jejich rozvoji. Aplikace Mattecoach přináší moderní řešení pro efektivní doučování, které je dostupné, flexibilní a anonymní. Projekt si klade za cíl zpřístupnit kvalitní matematické doučování široké skupině žáků.

2. Aplikace Mattecoach

Aplikace Mattecoach [4] byla spuštěna v roce 2009 ve Švédsku s cílem poskytnout online podporu v matematice žákům základních a středních škol. Projekt je výsledkem spolupráce tří švédských univerzit: Linköping University, KTH Royal Institute of Technology (Stockholm) a Chalmers University of Technology (Göteborg). V roce 2023 byla aplikace spuštěna také ve Skotsku, kde je realizována na University of Edinburgh. Vznik anglické verze [3] umožnil zpřístupnit aplikaci studentům po celém světě. V roce 2024 byla navázána spolupráce mezi švédskými univerzitami a Univerzitou Palackého v Olomouci, díky čemuž se projekt rozšířil do České republiky a nabízí žákům základních a středních škol podporu při studiu matematiky v češtině. Česká verze aplikace byla spuštěna v říjnu 2024 a je dostupná na webových stránkách [5].

Stejně jako ve Švédsku, i v Česku aplikace poskytuje služby zdarma. Tento přístup reflektuje základní filozofii projektu: zajištění rovného pří-

stupu ke vzdělání bez ohledu na socioekonomické podmínky studentů. Česká verze aplikace funguje od pondělí do čtvrtka v časovém rozmezí 17.00–20.00 podle švédského modelu, který se osvědčil jako efektivní.

3. Práce s aplikací Mattecoach

Aplikace Mattecoach je určena žákům základních a středních škol, kteří chtějí zlepšit své dovednosti v matematice. Žáci mohou aplikaci využít k opakování na test, k řešení konkrétního příkladu nebo i v případě, že chtějí probrat celou kapitolu, se kterou si neví rady nebo na ni ve škole chyběli. Bez ohledu na to, zda mají pocit, že jsou pozadu a potřebují pomoci nebo zda míří na nejvyšší známky anebo je zajímavá nějaká kapitola, kterou ve škole ještě neprobírali. V této souvislosti může být Mattecoach i nástrojem a příležitostí pro podporu matematicky nadaných žáků, kteří mohou aplikaci využít k prozkoumání nových témat ve spolupráci s koučím. Za dobu svého fungování pomohla aplikace více než 70 000 žákům při studiu matematiky [2].

Samotné doučování probíhá prostřednictvím chatu a interaktivní tabule, což nabízí možnost anonymní a personalizované pomoci. Používání chatu a sdílené tabule také umožňuje flexibilitu při poskytování pomoci s matematikou odkudkoli, kde ji žáci potřebují. Využití chatu nabízí koučům možnost komunikovat s více žáky najednou, a každý žák tak může pracovat vlastním tempem. K textu v chatu a na tabuli se mohou žáci během konverzace vracet a díky tomu se více orientují v probíraném tématu. Platforma [5] je dostupná na všech zařízeních s webovým prohlížečem (PC, Mac, tablety, mobilní zařízení).

Jedním z klíčových rysů aplikace Mattecoach je její flexibilita a uživatelská přívětivost. Žáci mohou anonymně a jednoduše vstoupit do systému. Stačí zadat své jméno (může být i smyšlené), ročník, lokalitu a téma, které potřebují konzultovat. Následně jsou propojeni s koučem, který jim prostřednictvím chatu a sdílené tabule pomáhá porozumět zadanému problému. Tento model umožňuje efektivní a personalizovanou výuku v bezpečném online prostředí.

Průměrná délka jedné konverzace činí 48 minut [1], což poskytuje dostatek času nejen na vyřešení problému, ale také na pochopení souvisejících matematických konceptů. Koučové navíc dbají na to, aby žák aktivně přemýšlel a postupně si osvojil postup řešení. Koučové se nesnaží vyřešit úlohu za žáka, ale kladou důraz na to, aby zjistili, čemu žák již rozumí a kde nastal problém. Poté žáka vedou k tomu, aby si

na správný postup přišel sám. Tento přístup pomáhá žákům lépe pochopit matematické koncepty a rozvíjet jejich schopnost samostatně řešit problémy.

Služby doučování zajišťují vysokoškolští studenti učitelství matematiky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci, kteří kombinují odborné znalosti s didaktickými dovednostmi získanými během svého studia. Koučové také procházejí speciálním školením zaměřeným na online výuku matematiky a koučování, což zaručuje vysokou kvalitu poskytovaných služeb. Koučové jsou připraveni řešit úlohy všech úrovní obtížnosti, od jednoduchých rovnic po komplexní matematické koncepty a rádi žákům pomohou s jakýmkoli matematickým problémem.

Projekt Mattecoach sleduje tři klíčové cíle:

1. Podpora žáků: Poskytnutí kvalifikované a dostupné pomoci v matematice pro žáky základních a středních škol.
2. Rozvoj budoucích učitelů: Příležitost k rozvoji didaktických i odborných kompetencí v prostředí online výuky pro studenty učitelství matematiky.
3. Výzkum: Prostor pro zkoumání efektivity online metod výuky a inovací v oblasti výuky matematiky.

V současnosti se Mattecoach zaměřuje výhradně na matematiku, avšak dlouhodobou vizí je rozšíření podpory i na další předměty a zahrnutí vysokoškolské matematiky. Tím by aplikace mohla oslovit širší spektrum studentů a stát se ještě užitečným nástrojem ve vzdělávání.

4. Závěr

Mattecoach představuje inovativní platformu, která propojuje flexibilitu online metod s personalizovanou odbornou podporou žáků a profesionálním rozvojem budoucích učitelů. Rozšíření projektu do České republiky otevírá nové možnosti pro posílení podpory žáků i modernizaci pedagogické praxe budoucích učitelů matematiky. Aplikace nejen zlepšuje dostupnost vzdělávání, ale zároveň přispívá k výzkumu a inovacím v oblasti vzdělávání.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory projektu Ukazatel P – pedagogické studijní programy 2024, PřF UPOL.

Literatura

- [1] Årsrapport för Mattecoach på nätet. 2022. https://cdn.prod.website-files.com/649064a96e06ca6b51520649/64f77fb5d8507bc28f172f89_A%CC%8Arssrappport%202022%20Mattecoach%20pa%CC%8A%20na%CC%88tet.pdf
- [2] Låthén, S.: *Maths Coach Online – university students help with maths*. LiU Magazine Linköping, Linköping University. 2024 (3). <https://liu.se/en/news-item/maths-coach-online->
- [3] <https://www.mathscoach.scot/>
- [4] <https://www.mattecoach.se/>
- [5] <https://mattecoach.upol.cz/>

Hypotéza zjednotenia

Pavol Dančanin

ABSTRAKT. *Práca Hypotéza zjednotenia (HZ) pozostáva z dvoch článkov: Hlavoľam a Hypotéza zjednotenia v kocke. V článku Hlavoľam je navrhnutý mechanizmus, ako vysvetliť princíp konštantnej rýchlosti svetla. Tiež je tu ponuka veľmi jednoduchého vysvetlenia gravitácie. V článku Hypotéza zjednotenia v kocke je opísaná snaha zjednotiť princíp šírenia sa svetla a gravitácie na základe rovnakého princípu, t.j. v sústave spojenej so svetelnou vlnou by v oboch prípadoch – na horizonte udalostí čiernej diery aj mimo gravitačného poľa čiernej diery – mala pôsobiť rovnaká, nazvime ju „relativistická zotrvačná“ alias gravitačná sila. Ešte by bolo dobré dodať, že princíp ekvivalencie gravitačnej a relativistickej zotrvačnej sily môže byť ten nový, jednoduchý fyzikálny princíp, ktorý v predslove spomína fyzik Vladimír Balek.*

1. Predslov od fyzika Vladimíra Baleka

Autor chce opísať gravitačné pôsobenie novým spôsobom, inak ako sa opisuje vo všeobecnej teórii relativity (VTR). Netvrdí, že sa VTR nezohoduje s pozorovaniami, čože je správne, pretože sa zhoduje, ale domnieva sa, že nie je dostatočne „zjednotená“, pretože neposkytuje jednotný opis gravitačného pôsobenia a šírenia svetla. Takto všeobecne povedané, je to pravda. Už Einstein sa pokúšal o zjednotenie VTR s klasickou elektrodynamikou, ktorá opisuje svetlo ako elektromagnetické vlnenie, a v súčasnosti sa považuje za najväčší otvorený problém fyziky zjednotenie VTR

s kvantovou mechanikou, do ktorej patrí opis svetla ako prúdu fotónov. Mnohí si myslia, že toto zjednotenie by malo byť založené na nejakom novom fyzikálnom princípe, rovnako jednoduchom a názornom, ako je princíp ekvivalencie vo VTR. Teórii strún, ktorá je v súčasnosti najväčším kandidátom na jednotnú teóriu všetkých interakcií, taký princíp chýba.

2. Úvodné úvahy Pavla Dančanina

V HZ navrhujem takýto fyzikálny princíp. Je to princíp ekvivalencie gravitačnej a relativistickej zotrvačnej sily. Tento princíp demonštruje myšlienkový experiment:

Povedzme, že máme raketu s neobmedzene výkonnými motormi, ktorú dokážeme dodávaním energie udržať na horizonte udalostí čiernej diery – raketa má zapnuté motory. Raketa tu zotráva zároveň so svetelnou vlnou, ktorá odtiaľto nemôže uniknúť. Na pozorovateľa v rakete pôsobí gravitačná sila na horizonte udalostí čiernej diery.

Keďže gravitačné pôsobenie je univerzálne (rovnako ovplyvňuje všetky procesy), situácia sa nezmení, ani keď si odmyslíme čiernu diery; raketa so zapnutými motormi ďalej zotráva zároveň so svetelnou vlnou, avšak pohybuje sa pri tom rýchlosťou c v otvorenom priestore. Na pozorovateľa v rakete ďalej pôsobí rovnaká sila, ale pretože čiernej diery tu niet, nie je to gravitačná sila, ale teraz je to, nazvime ju „relativistická zotrvačná“ sila pôsobiaca pri rýchlosti c . Týmto pomenovaním chcem túto silu pôsobiacu pri stálej rýchlosti c odlíšiť od klasickej zotrvačnej sily pôsobiacej na telesá pri zrýchlení.

Platí vzťah, že gravitačná sila na horizonte udalostí je ekvivalentná relativistickej zotrvačnej sile pôsobiacej pri rýchlosti c . Vyplýva z toho zjednotenie princípu gravitácie a elektromagnetizmu; gravitačná sila pôsobiaca na horizonte udalostí čiernej diery je vlastne relativistická zotrvačná sila pôsobiaca v sústave pohybujúcej sa rýchlosťou c . Je to úplne jednoduché, sila, ktorá by pôsobila na teleso na horizonte udalostí, pôsobila by naň aj pri rýchlosti c mimo gravitačného poľa a naopak.

Čo je vlastne tá relativistická zotrvačná sila, ktorú pri zotrvačnom pohybe, pri nižších rýchlostiach ako c , nemôžeme zaznamenať? HZ predpokladá, že táto sila pri rýchlosti c naozaj pôsobí. Tým sa rýchlosť c líši od nižších rýchlostí. Jednoducho povedané, podľa HZ sa teleso zároveň so svetelnou vlnou nemôže pohybovať zotrvačne. To je základná téza, na ktorej stojí HZ.

Klasická mechanika aj špeciálna teória relativity (ŠTR) vyúsťuje do paradoxu. Podľa ŠTR, keby kozmonaut letel rovnomerne priamočiaro rýchlosťou c , držal by svetelnú vlnu v ruke. Lenže sústava pohybujúca sa rovnomerne priamočiaro rýchlosťou c , je podľa klasickej mechaniky aj ŠTR zotrvačná, teda bezťažová a v nej sa svetlo šíri tak, ako v pokojovej sústave, rýchlosťou c . V tom spočíva logický paradox: buď svetelnú vlnu kozmonaut drží v ruke, alebo sa vzhľadom naňho pohybuje rýchlosťou c ako v pokojovej sústave. Riešením tohto paradoxu je môj myšlienkový experiment: sústava spojená so svetelnou vlnou nie je zotrvačná, ale je ekvivalentná sústave zotravajúcej na horizonte udalostí čiernej diery. Vtedy kozmonaut drží svetelnú vlnu v ruke. Z toho vyplýva zjednotené vysvetlenie princípu gravitácie a pohybového zákona šírenia sa svetla. V sústave spojenej so svetelnou vlnou v oboch prípadoch platí: na horizonte udalostí čiernej diery aj pri rýchlosti c mimo gravitačného poľa pôsobí rovnaká relativistická zotrvačná, alias gravitačná sila.

Čo sa týka experimentálneho overenia HZ, to je problém. V súčasnosti nemáme prostriedky, ako ju overiť. Je to čisto teoretická koncepcia. Ide v nej o princíp, či je pohyb fotónu zotrvačný alebo nie.

Jadrom HZ je analógia medzi elektromagnetickou a gravitačnou energiou, elektromagnetická energia fotónu versus gravitačná energia čiernej diery. Tieto energie sú opačne orientované a na horizonte udalostí sa vyrovnávajú. Fotón sa udržiava na horizonte udalostí svojou elektromagnetickou energiou. Touto energiou sa udržiava pri rýchlosti c aj mimo gravitačného poľa čiernej diery, čo znamená, že pohyb fotónu nie je zotrvačný! Na základe toho v kapitole Hlavalam navrhujem mechanizmus, ako vysvetliť princíp konštantnej rýchlosti svetla.

Elektromagnetická energia fotónu je, tak ako gravitačná energia hmoty, niečo iné ako kinetická energia zotrvačne sa pohybujúceho telesa. Na rozdiel od telesa, ktoré si udržiava stálu rýchlosť kinetickou energiou, fotón sa udržiava pri konštantnej rýchlosti c vo všetkých inerciálnych sústavách svojou elektromagnetickou energiou, analogickou, ako je gravitačná energia hmoty.

Celé to vysvetlím na príklade. Fyzik Vladimír Balek prirovnáva fotón ku guľôčke, kotúľajúcej sa po hladkom vodorovnom stole, zachovávaajúcej si stálu rýchlosť zotrvačnosťou – kinetickou energiou. Je to jednoduché a názorné, vystihuje to jeho pohľad na problém. V čom je podľa HZ rozdiel? Môže si guľôčka, kotúľajúca sa po stole, zachovať zotrvačnosťou (kinetickou energiou) rovnakú konštantnú rýchlosť v každej inerciálnej sústave, tj. vzhľadom na stojacu guľôčku aj guľôčku kotúľajúcu sa oproti?

Nemôže! To platí aj pre fotón. Platí mechanizmus opísaný v kapitole Hlavolam: Fotón má vzhľadom na co-moving sústavu (t.j. spolupohybujúcu sa inerciálnu sústavu) väčšie zrýchlenie ako vzhľadom na pokojovú sústavu. Týmto spôsobom si svetlo zachováva rovnomernú rýchlosť c vo všetkých inerciálnych sústavách. Rovnako sa guľôčka, kotúľajúca sa po stole, neudrží zotrvačnosťou (kinetickou energiou) na horizonte udalostí čiernej diery. To isté platí pre fotón. Fotón má hybnosť, má teda aj hmotnosť tak ako teleso, gravitácia pôsobí aj naň. Ale na rozdiel od telesa nemá kinetickú energiu, ale má elektromagnetickú energiu, ktorá je opačná ako gravitačná energia. Fotón sa udržiava na horizonte udalostí svojou elektromagnetickou energiou, tou istou energiou nadobúda rýchlosť c pri emitácii a tou istou energiou si zachováva konštantnú rýchlosť c vo všetkých inerciálnych sústavách.

Podrobnejšie HZ rozoberám s fyzikom Vladimírom Balekom v mojej knihe [1].

3. Hlavolam

Zo špeciálnej teórie relativity vyplýva, že s rýchlosťou rastie zotrvačná hmotnosť objektu, preto na jeho ďalšie zrýchlenie treba vynakladať stále viac energie. Táto predikcia je experimentálne dobre potvrdená v jadrovej fyzike. Napriek tomu relativistická dynamika špeciálnej teórie relativity vyúsťuje do paradoxu.

Máme teleso, na ktoré začneme pôsobiť silou a budeme mu trvalo dodávať rovnakú energiu. Predstavme si, že je to raketa, ktorej sme zapli motory. Vo vnútri rakety je pozorovateľ, ktorý v ruke drží pingpongovú loptičku. Pretože rakete dodávame energiu, ktorou vyvoláme jej zrýchlenie vzhľadom na pokojovú (zotrvačnú vzťažnú) sústavu, na loptičku v rakete pôsobí zotrvačná sila, povedzme 10 N. Energia, ktorou pôsobíme na raketu, rakete udáva zrýchlenie, ktoré je spočiatku v čase stále, ale ako rastie jej rýchlosť, rastie jej zotrvačná hmotnosť a jej zrýchlenie vzhľadom na pokojovú sústavu stále klesá. Na pingpongovú loptičku však stále pôsobí rovnaká sila 10 N ako pri štarte rakety. Povedzme, že raketa už dosiahla rýchlosť blízku rýchlosti c a jej rýchlosť vzhľadom na pokojovú sústavu už takmer nerastie. Čo sa stane, keď pozorovateľ pustí pingpongovú loptičku?

Z hľadiska klasickej mechaniky, ale tiež špeciálnej teórie relativity, na loptičku pôsobí sila 10 N, takže by mala padať k podlahe rakety so zrýchlením tomu úmerným. Ako sa to však prejaví z hľadiska pozorovateľa

v pokojovej sústave, keď zrýchlenie rakety vzhľadom na pokojovú sústavu je iba zanedbateľné? Udrží si loptička zotrvačnosťou vzhľadom na pokojovú sústavu rýchlosť, ktorú mala raketa v momente, keď ju pozorovateľ pustil? Potom by mala padať k podlahe rakety len s veľmi malým zrýchlením – s tým zrýchlením, ktoré má raketa vzhľadom na pokojovú sústavu. Alebo bude loptička padať k podlahe rakety so zrýchlením úmerným sile 10 N, ktoré by mala pri štarte rakety, a s týmto zrýchlením, ak zanedbáme nepatrné zrýchlenie rakety vzhľadom na pokojovú sústavu, bude zaostávať za raketou a strácať rýchlosť aj vzhľadom na pokojovú sústavu?

3.1. Fyzik Martin Scholtz – Riešenie hlavolamu

Fyzik Martin Scholtz stručne povie: Vaša úvaha je správna, ale paradox neexistuje. Zrýchlenie nie je absolútna veličina a závisí od pozorovateľa, takže jeden to uvidí tak, druhý onak. A podrobnejšie to rozoberá takýmto spôsobom:

Úvaha, ktorú prezentujete v priloženom dokumente, je zaujímavá a dobre osvetľuje problém zrýchlenia v špeciálnej teórii relativity (ŠTR). Je to však štandardná úloha a nepredstavuje paradox. V pokročilejších učebniciach relativity ju nájdete pod názvom „Rindlerove súradnice“ alebo „Rindlerov priestoročas“ (Rindlerov priestoročas je obyčajný Minkowského priestoročas, ale zapísaný v súradniciach urýchleného pozorovateľa).

Ako ste správne poznamenali, v ŠTR nemôže pozorovateľ zrýchľovať s konštantným zrýchlením voči inerciálnej sústave, inak by dosiahol rýchlosť svetla. Ale aj tak má dobrý zmysel hovoriť o konštantnom zrýchlení. A to presne v tom zmysle, ako ste napísali. Ak raketa bude vynakladať konštantný výkon, v rakete bude pôsobiť zotrvačná sila konštantnej veľkosti, čo zodpovedá sústave pohybujúcej sa s konštantným zrýchlením. Ak si zvolíme jedného konkrétného inerciálneho pozorovateľa, voči nemu sa zrýchlenie rakety bude zmenšovať z dôvodov, ktoré ste uviedli. Ale môžeme si predstaviť, že v každom čase existuje inerciálny pozorovateľ, ktorý má v danom čase rovnakú rýchlosť ako urýchľovaná raketa. Takže povedzme, že raketa spojíte prechádza rýchlosťami 0, 1, 2, 3 m/s voči pôvodnému pozorovateľovi. Existujú však ďalší pozorovatelia, jeden z nich sa pohybuje konštantnou rýchlosťou 1 m/s, druhý 2 m/s atď. Voči každému z nich sa raketa pohybuje s meniacim sa zrýchlením, ale zároveň v každom čase existuje práve jeden pozorovateľ, voči ktorému je v da-

nom čase raketa v pokoji. Preto zavádzame pojem „spolupohybujúca sa inerciálna sústava“ (anglicky co-moving, neviem to lepšie preložiť); je to inerciálna sústava, ktorá má v jednom konkrétnom okamihu rovnakú rýchlosť ako raketa. Hneď v ďalšom okamihu už to platiť nebude, pretože raketa zrýchli, zatiaľ čo inerciálny pozorovateľ sa pohybuje stále rovnakou rýchlosťou. V tomto ďalšom čase však existuje iný pozorovateľ, ktorý je v tomto čase co-moving s raketou, ale zase len na okamih. Snáď je to jasné.

Takže rovnomerne zrýchlený pohyb rakety je taký, že raketa má konštantné zrýchlenie voči spolupohybujúcej sa inerciálnej sústave v každom čase. To presne zodpovedá tomu, že pozorovateľ v rakete pociťuje konštantnú zotrvačnú silu.

No a teraz k pingpongovej loptičke. Z hľadiska rakety je to jasné. V momente, keď kozmonaut pustí loptičku, loptička sa pre neho stane (na okamih) spolupohybujúcou sa inerciálnou sústavou, a teda raketa sa voči nej pohybuje so zrýchlením, aké by mala pri štarte, tak ako voči každej spolupohybujúcej sa inerciálnej sústave.

Inerciálny pozorovateľ, voči ktorému je už zrýchlenie rakety prakticky zanedbateľné, ale, samozrejme, uvidí niečo iné. Pre neho sa raketa už pohybuje skoro rovnomerne priamočiari, zrýchlenie je skoro nulové. Kozmonaut pustí loptičku, ktorá sa tým stane inerciálnou sústavou, ale má rovnakú rýchlosť ako raketa (je co-moving), takže pre pozorovateľa na zemi je loptička prakticky v pokoji voči rakete a ich vzájomné zrýchlenie je skoro nulové. Až po chvíli si všimneme, že raketa predsa len trochu zrýchľuje a bude za sebou pingpongovú loptičku nechávať.

Nie je v tom žiaden paradox. Neviem, či Vás táto odpoveď uspokojila. V podstate ste na ňu prišli sám, ja len hovorím, že v tom nie je žiaden rozpor.

3.2. Pavol Dančanin – Ako je to teda so svetlom

Princíp konštantnej rýchlosti svetla podľa môjho názoru vyplýva z jednoduchého predpokladu:

Vzhľadom na co-moving sústavu pohybujúcu sa v smere šírenia sa svetla má svetlo väčšie zrýchlenie ako vzhľadom na pokojovú sústavu. Takto si svetlo zachováva konštantnú rýchlosť c v oboch sústavách.

Skúsím to objasniť trochu širšie:

Svetlo sa správa tak ako zrýchlený objekt, na ktorý pôsobí sila – podobne ako raketa, ktorej dodávame konštantnú energiu. Pri vyššej rýchlosti je jej zrýchlenie vzhľadom na pokojovú sústavu už „takmer“,

alebo vôbec žiadne, ale vzhľadom na co-moving sústavu má rovnaké zrýchlenie, aké mala pri štarte vzhľadom na pokojovú sústavu.

Povedzme, že máme raketu s neobmedzene výkonnými motormi, ktorú dokážeme dodávaním energie udržať zároveň so svetelnou vlnou zachytenou na horizonte udalostí čiernej diery. Keď si čiernu dieru odmyslíme, táto raketa sa bude pohybovať zároveň so svetelnou vlnou rýchlosťou c v otvorenom priestore. Pri rýchlosti c sa však dodávanie energie rakete už neprejavuje jej zrýchlením vzhľadom na pokojovú sústavu, ale jej stálou rýchlosťou c . Vzhľadom na co-moving sústavu má však zrýchlenie rovné gravitačnému zrýchleniu na horizonte udalostí čiernej diery.

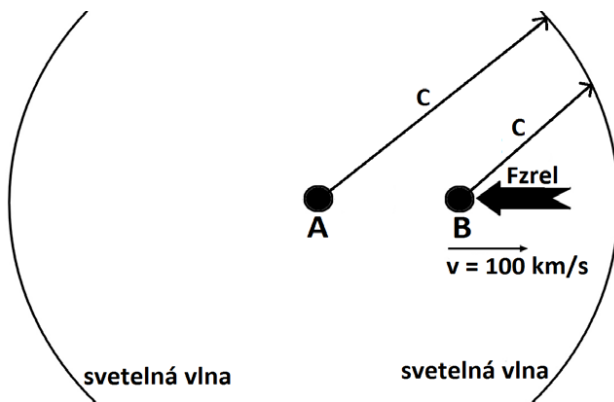
Keď svetlo (raketa) štartuje z pokojovej sústavy, táto je preň na moment co-moving sústavou, voči ktorej jeho zrýchlenie je rovné gravitačnému zrýchleniu na horizonte udalostí čiernej diery, resp. rýchlosť c je ekvivalentná gravitačnému zrýchleniu na horizonte udalostí čiernej diery. Keď vzhľadom na pokojovú sústavu dosiahne rýchlosť c , udržuje si túto rýchlosť svojou energiou (v prípade rakety dodávanou energiou).

Ako je to so šírením svetla vzhľadom na dve telesá pohybujúce sa zotrvačne voči sebe? Máme teleso A, ktoré považujeme za pokojové, a teleso B, ktoré sa vzhľadom naň pohybuje zotrvačne v smere šírenia sa svetla. Čím väčšiu má teleso B rýchlosť v smere šírenia sa svetla, tým viac je to pre svetlo co-moving sústava, voči ktorej je jeho zrýchlenie väčšie oproti pokojovej sústave – telesu A. Týmto spôsobom väčšieho zrýchlenia vzhľadom na co-moving sústavu, oproti pokojovej sústave, si svetlo zachováva konštantnú rýchlosť c vzhľadom na všetky zotrvačne sa pohybujúce telesá, bez ohľadu na ich vzájomný pohyb, teda v každej inerciálnej sústave. Ako si to predstavujem, vysvetlím na obr. 1.

Teleso A považujeme za pokojové, teleso B sa vzhľadom naň pohybuje zotrvačne v smere šírenia sa svetla rýchlosťou $v = 100 \text{ km/s}$.

Teleso B je pre svetlo viac co-moving sústava, voči ktorej je zrýchlenie svetla väčšie oproti pokojovému telesu A; teleso B zotrvačne zaostáva, padá za svetlom s väčším zrýchlením ako teleso A. Rozdiel v zrýchlení vyjadruje sila F_{zrel} – *relativistická zotrvačná sila* – je to sila, ktorou teleso zaostáva, padá za svetlom. (Táto sila podľa môjho názoru spôsobuje relativistické javy: dilatáciu času v pohybujúcej sa sústave z hľadiska pokojovej sústavy, kontrakciu dĺžky pohybujúcej sa sústavy a narastanie zotrvačnej hmotnosti pohybujúceho sa telesa.)

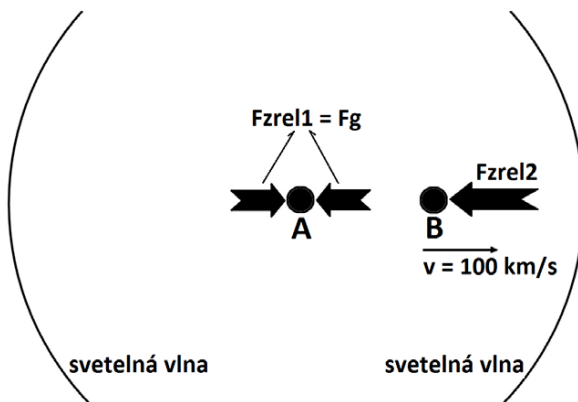
F_{zrel} je sila vyjadrujúca pád telesa A za svetlom. Z obr. 2 je zrejmé, že pokojové teleso A zotrvačne zaostáva, padá za svetlom zo všetkých strán do stredu, čo sa prejavuje ako gravitačná sila F_g .



Obr. 1: Princíp konštantnej rýchlosti svetla

Týmto spôsobom môžeme zároveň vysvetliť, prečo je gravitačná hmotnosť telesa ekvivalentná jeho zotrvačnej hmotnosti. Je to preto, že sila, ktorou pôsobí svetlo na teleso (teleso padá za svetlom) z jednej strany, je presne rovnaká, akou naň pôsobí z druhej strany.

F_{zrel2} je sila vyjadrujúca zrýchlenie pohybujúceho sa telesa B vzhľadom na svetlo v smere proti šíreniu sa svetla. Z obr. 2 je zrejmé, že teleso B je pre svetlo viac co-moving sústava a zotrvačne zaostáva, padá za svetlom s väčším zrýchlením ako pokojové teleso A. Týmto spôsobom si svetlo zachováva konštantnú rýchlosť c vzhľadom na obidve telesá.



Obr. 2: Princíp zotrvačnosti a gravitácie

Ako som uviedol, týmto spôsobom väčšieho zrýchlenia vzhľadom na co-moving sústavu oproti pokojovej sústave si svetlo zachováva konštantnú rýchlosť c vzhľadom na všetky zotrvačne sa pohybujúce telesá, bez ohľadu na ich vzájomný pohyb, teda v každej inerciálnej sústave.

Podľa môjho názoru pohyb svetla nemôže byť zotrvačný. Zotrvačný pohyb si nemôže zachovať konštantnú rýchlosť v každej inerciálnej sústave – tj. vzhľadom na stojace teleso aj teleso pohybujúce sa zotrvačne oproti!

3.3. *Michelsonov–Morleyov pokus s interferometrom*¹⁾

Interferometer je zariadenie skladajúce sa z dvoch navzájom kolmých rovnako dlhých ramien – ramena x a ramena y , ktoré sú spojené v bode S , a zo zdroja svetla pred bodom S a tienidla za ním. V bode S je polopriepustná doštička, ktorá časť svetla odrazí do ramena y a časť prepustí do ramena x . Na konci ramena x je zrkadlo X , ktoré vráti svetlo späť do bodu S , a na konci ramena y je zrkadlo Y , ktoré takisto vráti svetlo späť do bodu S . V bode S svetlo, ktoré prišlo z ramena x , interferuje so svetlom, ktoré prišlo z ramena y . Ak centrálny lúč prejde vzdialenosť L_1 medzi bodmi S a X a späť a vzdialenosť L_2 medzi bodmi S a Y a späť v rovnakom čase, interferencia je konštruktívna a v mieste, kde centrálny lúč dopadne na tienidlo, sa bude nachádzať stred svetlého interferenčného prúžku. Ak sa časy zmenia tak, že sa budú líšiť o polovicu periódy svetla, interferencia bude deštruktívna a v danom mieste sa bude nachádzať stred tmavého interferenčného prúžku. Prúžky sa teda posunú o šírku jedného prúžku. Vo všeobecnosti platí, že čím viac sa zmení rozdiel časov, tým je posunutie väčšie.

Ak interferometer aj so zdrojom vzhľadom na pokojovú sústavu stoja a vzdialenosť L_1 sa rovná vzdialenosti L_2 , výsledok sa dá predpokladať: svetlo prejde obe vzdialenosti v rovnakom čase a prúžky budú v základnej polohe. Ale čo ak sa interferometer vzhľadom na pokojovú sústavu vzdáľuje v smere osi x ? Vzdialenosti, ktoré musí svetlo prekonať pri svojom pohybe tam a späť v ramenách interferometra, sa zmenia a jednoduchým výpočtom sa dá ukázať, že vzdialenosť L_1 v smere pohybu interferometra bude väčšia ako vzdialenosť L_2 v smere kolmom na pohyb interferometra. Malo by tu preto dôjsť k interferenčnému posunu. Michelsonov–Morleyov pokus však ukázal, že k žiadnemu interferenčnému posunu nedochádza. Svetlo sa šíri rovnako, ako keď je interferometer vzhľadom na pokojovú

¹⁾Tento text sformuloval fyzik Vladimír Balek.

sústavu nehybný. V teórii relativity sa to vysvetľuje tým, že rameno x sa pri pohybe interferometra skráti v dôsledku relativistickej kontrakcie dĺžok.

Podrobne o experimente hovorí napr. [2, s. 304–306].

3.4. Moje vysvetlenie

Svetlo sa správa ako zrýchlený objekt, na ktorý pôsobí sila (podobne ako raketa so zapnutými motormi). Vzhľadom na co-moving sústavu pohybujúcu sa jeho smerom má väčšie zrýchlenie ako vzhľadom na pokojovú sústavu. Týmto spôsobom si zachováva konštantnú rýchlosť c , keď je interferometer vzhľadom na pokojovú sústavu nehybný, aj keď sa od nej vzdďaľuje. Ak sa interferometer vzdďaľuje vzhľadom na pokojovú sústavu v smere šírenia sa svetla v osi x , je to pre svetlo viac co-moving sústava, vzhľadom na ktorú je jeho zrýchlenie väčšie ako v smere kolmom na pohyb – v osi y . Vzdialenosť L_1 a L_2 tak v oboch prípadoch (keď je interferometer vzhľadom na pokojovú sústavu nehybný, aj keď sa od nej vzdďaľuje) svetlo prejde v rovnakom čase a k žiadnemu interferenčnému posunu nedochádza.

4. Hypotéza zjednotenia v kocke

4.1. Bod 1

Ako definovať zotrvačný pohyb? Zotrvačný pohyb si vyžaduje impulz, ďalej si nevyžaduje pôsobenie sily. Svetlo impulz (daný jeho hybnosťou) odovzdáva, keď je emitované (vyžiarené) a impulz odovzdáva, keď narazí do telesa.

Tento jav demonštruje experiment: Keď v tmavej miestnosti zasvietime baterkou na papierovú vrtuľku, dopadajúce fotóny ju roztočia. Platí to aj naopak. Keby sme mali svietiacu vrtuľku, emitovaním fotónov by sa roztočila.

To má spoločné s telesom, napr. guľkou vystrelenou z pušky. Čím sa líši? Zrýchlenie z nuly na c je ekvivalentné gravitačnému zrýchleniu na horizonte udalostí čiernej diery. Čierna diera je fyzikálny objekt, ktorého gravitácia je taká silná, že pohltí aj svetlo. V určitej vzdialenosti od stredu čiernej diery gravitácia vyrovnáva energiu svetla, takže na tejto hranici svetlo nie je ani pohltené čiernou dierou, ale ani neuniká von. Táto hranica sa volá *horizont udalostí* čiernej diery.

Pri tomto zrýchlení môžeme povedať, že svetlo má pri emitácii rýchlosť c hneď. Gravitačné zrýchlenie na horizonte udalostí čiernej diery je ekvivalentné rýchlosti c preto, lebo pri tomto zrýchlení čierna diera stopne fotón. Opačne to znamená, že svetlo má pri tomto zrýchlení rýchlosť c hneď. Na základe tejto ekvivalencie má fotón pri emitácii rýchlosť c okamžite. Gravitačné zrýchlenie na horizonte udalostí nie je nekonečné, pretože pod horizontom udalostí je väčšie. Myslím si, že žiadne nekonečné gravitačné zrýchlenie reálne neexistuje; podrobnejšie o tom píšem v Bode 4. Na rozdiel od telesa, ktoré nadobúda rýchlosť impulzom, svetlo nadobúda rýchlosť c svojou elektromagnetickou energiou, ktorá je analogická, presnejšie opačná ako gravitačná energia hmoty. Pohyb svetla nie je zotrvačný!

Poznámka: Fotón má hybnosť, má teda aj hmotnosť. Rozdiel medzi fotónom s nulovou pokojovou hmotnosťou a telesom je ten, že fotón sa pri stálej rýchlosti c udržiava svojou elektromagnetickou energiou. Teleso sa pri stálej rýchlosti, ľubovoľne nižšej ako c , udržiava zotrvačne, teda kinetickou energiou.

4.2. Bod 2

Telesu môžeme dodať impulz, ale zotrvačne sa na horizonte udalostí neudrží. To isté platí pre fotón. Fotón sa na horizonte udalostí nemôže udržať zotrvačne! Na horizonte udalostí sa nemôže nič udržať zotrvačne, ani fotón s nulovou pokojovou hmotnosťou. Fotón má hybnosť, má teda aj hmotnosť, aj naň pôsobí gravitácia. Gravitácia napr. zakrivuje dráhu svetla. Aj na svetlo pôsobí gravitácia, ako na objekty s nenulovou pokojovou hmotnosťou, ale fotón sa udržiava na horizonte udalostí svojou elektromagnetickou energiou, tou istou energiou, ktorou nadobudne rýchlosť c pri emitácii. Touto energiou sa udržiava pri rýchlosti c . (Bod 3 z toho vyplýva.)

Poznámka: Ak sa fotón udrží pri rýchlosti c zotrvačne v inerciálnej sústave mimo gravitačného poľa, udrží sa zotrvačne aj na horizonte udalostí čiernej diery. Podľa mňa fotón, ktorý má hybnosť, a teda aj hmotnosť, sa nemôže udržať zotrvačne na horizonte udalostí čiernej diery, preto sa nemôže zotrvačne udržať pri rýchlosti c ani v inerciálnej sústave mimo gravitačného poľa.

4.3. Bod 3

Zotrvačný pohyb si nemôže zachovať konštantnú rýchlosť v každej inerciálnej sústave! Podľa HZ svetlo sa správa ako zrýchlený objekt, na

ktorý pôsobí sila; vzhľadom na co-moving sústavu (pozri kapitolu Hlavolam) má väčšie zrýchlenie ako vzhľadom na pokojovú sústavu. Týmto spôsobom vysvetľujem princíp konštantnej rýchlosti svetla. Je to dané tým, že svetlo sa udržiava pri rýchlosti c svojou elektromagnetickou energiou (je to tá energia, ktorá ho udrží na horizonte udalostí), podobne ako energia hmoty budí gravitačné pole.

Špeciálna teória relativity (ŠTR) vychádza z princípu konštantnej rýchlosti svetla, kapitola Hlavolam princíp konštantnej rýchlosti svetla vysvetľuje. Myslím, že by sa z toho mali dať odvodiť relativistické javy, ktoré sa ďalej pokúsim intuitívne objasniť. Lorentzove transformácie by sa mali dať nahradiť týmto mechanizmom.

ŠTR zamietla Galileiho transformácie platné v klasickej mechanike a pre výpočet relativistických javov používa Lorentzove transformácie.

Kapitola Hlavolam vychádza z môjho myšlienkového experimentu (pozri tiež Bod 5): Máme raketu s neobmedzene výkonnými motormi, ktorú dokážeme dodávaním nekonečnej (čo je však relatívny pojem vyplývajúci z limitnej rýchlosti svetla) energie udržať zároveň so svetelnou vlnou na horizonte udalostí čiernej diery. Keď si čiernu dieru odmyslíme, táto raketa sa bude pohybovať rýchlosťou c v otvorenom priestore. Dodávanie energie rakete sa však už neprejavuje jej zrýchlením vzhľadom na ľubovoľnú zotrvačnú sústavu, ale jej konštantnou rýchlosťou c .

Teraz si to rozoberme na príklade vzájomne zotrvačného pohybu dvoch telies. Teleso A považujeme za pokojové, teleso B sa pohybuje vzhľadom naň v smere pohybu modelovej rakety rýchlosťou $v = 100$ km/s. Teleso B je pre raketu viac co-moving sústava ako teleso A. Z tohto dôvodu raketa má vzhľadom naň väčšie zrýchlenie – teleso B zaostáva, padá za raketou s väčším zrýchlením oproti telesu A. Z hľadiska pozorovateľa pri telese A sa toto väčšie zrýchlenie (ak raketu nahradíme svetelným signálom) prejavuje narastaním zotrvačnej hmotnosti telesa B, dilatáciou času a kontrakciou dĺžky v sústave spojennej s telesom B. Kontrakciu dĺžky som v kapitole Hlavolam (v časti 3.3) vysvetlil na výsledku Michelsonovho–Morleyho pokusu s interferometrom.

Najnáročnejšie je objasniť neaditívny zákon skladania rýchlostí:

Máme pokojovú sústavu s dvomi elektrónovými delami, delom A a delom B, namierenými proti sebe. Delo A vystrelí elektrón x rýchlosťou $0,9c$. Zároveň s tým vyšle svetelný signál. V tom istom čase delo B vystrelí elektrón y tiež rýchlosťou $0,9c$. Elektrón x je pre svetlo viac co-moving objekt ako delo A, preto svetlo má vzhľadom naň väčšie zrýchlenie. Elektrón y sa pohybuje opačným smerom, svetlo má preto vzhľadom

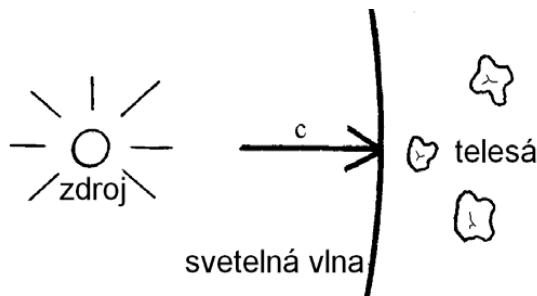
naň menšie, ale nenulové zrýchlenie. Keďže elektróny sa vzhľadom na seba pohybujú zotrvačne, svetlo sa medzi nimi pohybuje rýchlosťou c . Ich vzájomná rýchlosť musí byť teda menšia ako c ! Zrýchlenie svetla vzhľadom na elektróny sa spočítava, čím rastie ich vzájomná rýchlosť. Pridávať (pripočítavať) sa môže len pod (menej ako) zrýchlenie na horizonte udalostí, pokiaľ má platiť limitná rýchlosť svetla.

Dodatočne mi napadol jeden špecifický prípad mechanizmu opísaného v kapitole Hlavlom. Máme dve telesá padajúce do čiernej diery pohybujúce sa vzhľadom na seba zotrvačne v smere pádu. Teleso A považujeme za pokojové, teleso B sa vzhľadom naň pohybuje v smere proti pádu, rýchlosťou povedzme 1 km/s . Požiadavka je, aby svetelná vlna na horizonte udalostí mala vzhľadom na všetky pohlcované telesá, bez ohľadu na ich vzájomný zotrvačný pohyb, vždy rýchlosť c . Podľa kapitoly Hlavlom na teleso B by mal mať horizont (svetelná vlna) väčšie zrýchlenie ako na teleso A. Gravitácia by mala viac zrýchľovať co-moving teleso B ako pokojové teleso A. Malo by to platiť aj pre gravitačné pole Zeme. Toto by sa možno dalo overiť experimentom, nejakým veľmi presným meraním. Zo špeciálnej teórie relativity ani všeobecnej teórie relativity, takýto jav nevyplyva.

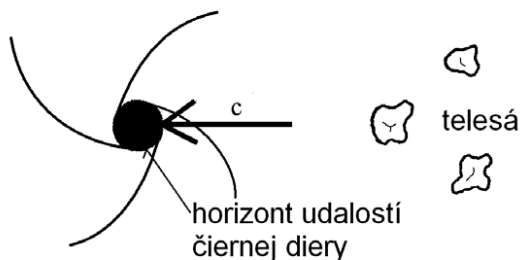
Z kapitoly Hlavlom vyplýva, že pokiaľ sa raketa pohybuje zároveň so svetelným signálom, sú si ekvivalentné – dá sa nahradiť jedno druhým. Rozdiel je len v tom, že raketa má nenulovú pokojovú hmotnosť, a preto sa musí udržiavať pri rýchlosti c odovzdávaním energie prostrediu zapnutými motormi a fotón má nulovú pokojovú hmotnosť, čo znamená, že sa udržiuje pri rýchlosti c vlastnou energiou.

Čo je tá vlastná energia, to vysvetľujem analógiou medzi energiou fotónu a energiou hmoty čiernej diery, ktorá budí gravitačné pole. Fotón má elektromagnetickú energiu a čierna diera gravitačnú energiu. Tieto energie sú opačne orientované, na horizonte udalostí sa vyrovnávajú. Táto analógia je jadrom mojej hypotézy. Ak sa fotón udrží neobmedzene dlho na horizonte udalostí svojou elektromagnetickou energiou (a to sa udrží), potom by táto analógia mala platiť. Touto energiou fotón nadobúda rýchlosť c pri emitácii a touto energiou si udržiava konštantnú rýchlosť vo všetkých inerciálnych sústavách. Analógia spočíva aj v tom, že čierna diera, keď budí gravitačné pole, energiu nemíňa, rovnako ju nemíňa ani fotón/svetelná vlna šírením sa do priestoru. Preto má fotón nulovú pokojovú hmotnosť. Raketa s nenulovou pokojovou hmotnosťou musí energiu prostrediu odovzdávať zapnutými motormi, preto sa jej energia míňa. (Jednoduchšie sa moja analógia dá chápať aj ako analógia

medzi svetelnou vlnou a čiernou dierou, obr. 3a, 3b. Túto analógiu som objavil presne pred 27 rokmi, myslím, že to bolo v roku 1997, v treťom ročníku štúdia na univerzite. Odvtedy bojujem s mainstreamovou fyzikou.)



Obr. 3a: Svetlo sa šíri vzhľadom na všetky telesá konštantnou rýchlosťou c



Obr. 3b: Horizont udalostí čiernej diery pohlcuje hmotu konštantnou rýchlosťou c

4.4. Bod 4

Z vyššie uvedenej analógie vyplýva analógia medzi šírením sa svetla a pohlcovaním hmoty čiernou dierou, obr. 3a, 3b (čo je kontroverzný bod). Horizont udalostí sa správa ako svetelná vlna – vzhľadom na pohlcované telesá má rýchlosť c . (S týmto súhlasí aj recenzent fyzik V. Balek.) To však, mojimi slovami povedané, znamená, že horizont udalostí pohlcuje hmotu rýchlosťou c . Podľa ŠTR rýchlosť c je limitná, čo znamená, že ju nie je možné dosiahnuť, preto horizont udalostí by mal pohlcovať hmotu len rýchlosťou menšou ako c . Žiadne teleso, objekt s nenulovou pokojovou hmotnosťou, nemôže padať pod horizont udalostí rýchlosťou c . To podľa mňa nie je správne. Limitná rýchlosť svetla podľa môjho názoru platí iba

po horizont udalostí, kde energia čiernej diery vyrovnáva energiu svetla. Pod horizontom udalostí má čierna diera viac energie ako svetelná vlna, preto svetlo pohltí. Z tohto jednoduchého dôvodu rýchlosť c nemôže byť limitná! Väčšia energia vyvinie väčšiu rýchlosť, preto pod horizontom udalostí čierna diera pohlcuje hmotu rýchlosťou väčšou ako c . Hmota čiernej diery má vzhľadom na pohlcované telesá rýchlosť väčšiu ako má svetlo!

Z limitnej rýchlosti svetla vyplýva, že na hmotu čiernej diery pôsobí nekonečne veľká sila, a mala by preto skolabovať do bodu. Ako som uviedol, reálne rýchlosť svetla nemusí byť, a ani by nemala byť limitná (keďže čierna diera pod horizontom udalostí svetlo pohltí), preto si myslím, že hmota čiernej diery si môže zachovať určitý rozmer. Je to vlastne tak trochu začarovaný kruh. Pokiaľ hmota čiernej diery spočíva v singularite (bode), rýchlosť pohlcovaných telies nie je vzhľadom na čo porovnávať, pretože porovnávať sa dá len rýchlosť telesa vzhľadom na iné teleso, ktoré nutne musí mať rozmer. Ale keby si hmota čiernej diery zachovala rozmer čo i len zrnka maku, pohybovala by sa vzhľadom na pohlcované telesá rýchlosťou väčšou ako c – väčšou ako má horizont udalostí! Tým pádom by rýchlosť c nebola limitná a hmota čiernej diery by si mohla zachovať rozmer. Treba rozťať tento gordický uzol. Najjednoduchšie je vychádzať z toho, že limitná rýchlosť svetla prestáva platiť na horizonte udalostí, kde energia čiernej diery vyrovnáva energiu svetla. Tu pohlcované telesá dosiahnu rýchlosťou c . Pod horizontom udalostí je väčšia energia, preto čierna diera tu pohlcuje hmotu rýchlosťou väčšou ako c .

Žiadne nekonečné gravitačné zrýchlenie reálne neexistuje! ŠTR počíta s limitnou rýchlosťou svetla, preto nekonečné gravitačné zrýchlenie vyzodzuje na horizonte udalostí, kde gravitácia čiernej diery stopne svetlo. Väčšie gravitačné zrýchlenie je však pod horizontom udalostí. Najväčšie gravitačné zrýchlenie je na povrchu hmoty čiernej diery. To je však tiež relatívne, lebo existujú rôzne hmotné čierne diery.

4.5. Bod 5

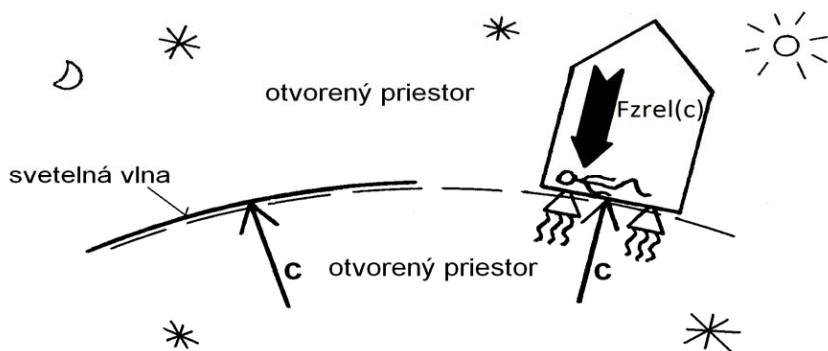
Áký je váš postoj k môjmu nasledujúcemu myšlienkovému experimentu? Znázorňuje ho obr. 4a, 4b. Vyplýva z toho vysvetlenie gravitácie: gravitačná sila je relativistická zotrvačná sila.

V obr. 4a je urobený myšlienkový experiment: Ponoríme raketu na horizont udalostí čiernej diery a dodávame jej (nekonečnú ???) energiu, aby sa tam udržala – raketa má zapnuté motory. Raketa tu zotrúva

zarovno so svetelnou vlnou, ktorá odtiaľto nemôže uniknúť. Na pozorovateľa v rakete pôsobí gravitačná sila F_g na horizonte udalostí čiernej diery (hu); túto silu označujem $F_g(hu)$.



Obr. 4a



Obr. 4b

Keď si odmyslíme čiernu dieru (obr. 4b), situácia sa nezmení: raketa so zapnutými motormi ďalej zotrúva zarovno so svetelnou vlnou, avšak pohybuje sa pri tom rýchlosťou c v otvorenom priestore. Na pozorovateľa v rakete ďalej pôsobí rovnaká sila, ale pretože čiernej diery tu niet, nie je to gravitačná sila, ale teraz je to relativistická zotrvačná sila F_{zrel} pôsobiaca pri rýchlosti c , túto silu označujem $F_{zrel}(c)$. Táto sústava je ekvivalentná extrémne zrýchlenej sústave (UPE). Platí $F_g(hu) = F_{zrel}(c)$.

Môj myšlienkový experiment:

Keďže pod horizontom udalostí čiernej diery je väčšia (silnejšia) gravitácia a na udržanie telesa je potrebné viac energie, teoreticky (!) môžeme raketu na horizonte udalostí udržať dodaním konečnej energie. Ďalej je to vec čistej logiky. Gravitácia rovnako ovplyvňuje svetelnú vlnu aj raketu, takže keď si čiernu dieru odmyslíme, situácia sa nezmení, na raketu aj na svetlo ďalej pôsobí rovnaká sila ako na horizonte udalostí, len teraz sa raketa pohybuje rýchlosťou c zarovno so svetelnou vlnou v otvorenom priestore. Keďže čiernej diery tu niet, teraz je to *relativistická zotrvačná sila*. Svetlo prekonáva túto silu svojou energiou, raketa dodávanou energiou. Silu vyrovnáva sila. Preto sa svetlo správa ako zrýchlený objekt, na ktorý pôsobí sila (pozri Bod 3). Týmto pomenovaním chcem túto silu pôsobiacu pri stálej rýchlosti c odlíšiť od klasickej zotrvačnej sily pôsobiacej na telesá pri zrýchlení.

Akceptujete môj myšlienkový experiment, alebo nie? V čom sa mýlim?

Z myšlienkového experimentu vyplýva tiež predpoveď, že teleso (raketa) sa rýchlosťou c nemôže pohybovať zotrvačne. Na dosiahnutie rýchlosti c by sme mu museli dodať energiu, ktorá by ho udržala na horizonte udalostí, zarovno so svetelnou vlnou. Po vypnutí energie by sa stalo zotrvačnou sústavou, spadlo by z horizontu udalostí a stratilo by rýchlosť c – svetlo by sa potom vzhľadom naň šírilo tak ako v pokojovej sústave. Padla aj otázka: Na akú rýchlosť teleso spomalí po vypnutí energie? To neviem. Predpoklad je len jeden, že sa rýchlosťou c (zarovno so svetelnou vlnou) nemôže pohybovať zotrvačne.

4.6. Bod 6

V HZ sa snažím rozšíriť princíp ekvivalencie vo všeobecnej teórii relativity (VTR) o môj princíp ekvivalencie medzi gravitačnou a relativistickou zotrvačnou silou.

VTR stojí na Einsteinovom princípe ekvivalencie gravitačnej a zotrvačnej sily. Tento princíp vyplýva z dvoch faktov:

1) Pôsobenie gravitačnej sily rovnako ako zotrvačnej sily je univerzálne – ovplyvňuje rovnako všetky fyzikálne procesy.

2) Gravitačná hmotnosť telesa je rovná jeho zotrvačnej hmotnosti, čo znamená, že gravitačná sila, ktorou je teleso priťahované k inému telesu, je rovná jeho odporu voči zrýchleniu.

Einsteinov princíp ekvivalencie umožňuje skúmať gravitačnú silu ako zotrvačnú silu. VTR potom opisuje gravitáciu ako zotrvačnosť telesa v zakrivenom priestoročase.

Pre HZ je smerodajné, či je sústava pohybujúca sa rýchlosťou c zotrvačná, a teda bezťažová, alebo v nej pôsobí relativistická zotrvačná sila ekvivalentná gravitačnej sile na horizonte udalostí čiernej diery. Podľa klasickej mechaniky aj ŠTR by sústava pohybujúca sa rovnomerne priamočiaro, hoci aj rýchlosťou c , mala byť zotrvačná, a teda bezťažová. Podľa HZ sústava pohybujúca sa rýchlosťou c zotrvačne je kontradikcia. Svetlo sa v nej totiž šíri rovnako ako v pokojovej sústave, preto zotrvačná sústava nemôže byť spojená so svetelnou vlnou.

Vysvetlím to tak, aby to pochopilo dieťa. Keby sa kozmonaut v raketke pohyboval rovnomerne priamočiaro rýchlosťou c , podľa klasickej mechaniky aj ŠTR držal by svetelnú vlnu v ruke. Lenže podľa klasickej mechaniky aj ŠTR sústava pohybujúca sa rovnomerne priamočiaro je bezťažová a v nej sa svetlo šíri tak ako v pokojovej sústave, teda vzhľadom na kozmonauta má rýchlosť c . V tom spočíva logický paradox! Buď kozmonaut svetelnú vlnu drží v ruke, alebo sa vzhľadom na neho pohybuje rýchlosťou c . Jediným riešením je, že pri rýchlosti c raketa nie je zotrvačná, a teda bezťažová sústava, ale v nej pôsobí relativistická zotrvačná sila, ekvivalentná gravitačnej sile pôsobiacej na horizonte udalostí čiernej diery. Vtedy kozmonaut drží svetelnú vlnu v ruke. Riešením je teda môj myšlienkový experiment – sústava spojená so svetelnou vlnou nie je zotrvačná, ale je ekvivalentná sústave zotrvačujúcej na horizonte udalostí.

Sústava spojená so svetelnou vlnou je buď

- A) sústava zotrvačujúca na horizonte udalostí čiernej diery, alebo
- B) extrémne zrýchlená sústava, alebo
- C) sústava pohybujúca sa rýchlosťou c .

Ekvivalenciu týchto troch sústav nazvime univerzálny princíp ekvivalencie (UPE).

Z toho vyplýva nasledujúce zjednotenie:

- a) Na horizonte udalostí čiernej diery pôsobí na teleso gravitačná sila.
- b) Na horizonte udalostí extrémne zrýchlenej sústavy pôsobí na teleso zotrvačná sila.
- c) V sústave pohybujúcej sa rýchlosťou c by mala na teleso pôsobiť relativistická zotrvačná sila.

Vo všetkých týchto troch prípadoch je to rovnaká sila – preto hypotéza zjednotenia. Keby sme akceptovali UPE, bola by to báza pre zjednotenie gravitácie, zotrvačných síl a pohybového zákona šírenia sa svetla – relativistickej zotrvačnej sily.

Poznámka: Samozrejme, nemáme energiu, ktorou by sme dokázali teleso udržať a) na horizonte udalostí čiernej diery, b) na horizonte udalostí extrémne zrýchlenej sústavy, alebo c) urýchliť ho na rýchlosť c . Ale keďže pod horizontom udalostí čiernej diery je ešte silnejšia gravitácia, čo podľa mňa znamená, že rýchlosť svetla nie je reálne limitná, väčšiu rýchlosť má vzhľadom na pohlcované telesá hmota čiernej diery, hypoteticky môžeme o sústave spojenej so svetelnou vlnou uvažovať. Následne skúmame vlastnosti tejto sústavy. Vo všetkých troch prípadoch a) na horizonte udalostí čiernej diery, b) na horizonte udalostí zrýchlenej sústavy, c) aj pri rýchlosti c , by v nej mala pôsobiť rovnaká relativistická zotrvačná sila.

5. Zhrnutie

Jadrom HZ je analógia medzi elektromagnetickou energiou fotónu a gravitačnou energiou telesa. Na horizonte udalostí čiernej diery sa tieto energie vyrovnávajú, čo znamená, že na fotón pôsobí relativistická zotrvačná sila, alias gravitačná sila. A gravitačná sila je vlastne relativistická zotrvačná sila pôsobiaca pri rýchlosti c .

Rýchlosť c sa líši od nižších rýchlostí tým, že pri nej pôsobí relativistická zotrvačná sila, ktorú je nutné kompenzovať energiou.

Ak sa fotón udrží svojou elektromagnetickou energiou na horizonte udalostí čiernej diery neobmedzene dlhý čas (čo sa udrží), táto analógia by mala platiť! Touto energiou fotón nadobúda rýchlosť c pri emitácii a touto energiou sa udržuje pri rovnomernej rýchlosti c vo všetkých inerciálnych sústavách.

Základné tézy sú:

1. Zrýchlenie z nuly na c je ekvivalentné gravitačnému zrýchleniu na horizonte udalostí. Na základe tejto ekvivalencie má svetlo pri emitácii rýchlosť c hneď. Gravitačné zrýchlenie na horizonte udalostí nie je nekonečné, lebo pod horizontom udalostí je väčšie.
2. Fotón sa udržiava na horizonte udalostí svojou elektromagnetickou energiou, tou istou energiou, ktorou nadobudne rýchlosť c pri emitácii.
3. Svetlo sa udržiava pri konštantnej rýchlosti c vo všetkých inerciálnych sústavách svojou elektromagnetickou energiou, tou energiou, ktorá ho udrží na horizonte udalostí – pohyb svetla nie je zotrvačný! Energia svetla je analogická s energiou hmoty telesa, ktorá buď gravitačné pole, presnejšie elektromagnetická energia svetla je

opačne orientovaná ako gravitačná energia, na horizonte udalostí čiernej diery sa tieto energie vyrovnávajú.

4. Gravitačná sila na horizonte udalostí je relativistická zotrvačná sila pôsobiaca v sústave s rýchlosťou c . Limitná rýchlosť svetla prestáva platiť na horizonte udalostí, kde gravitácia stopne svetlo.
5. Platí UPE: V sústave spojenej so svetelnou vlnou sú vo všetkých troch prípadoch a) na horizonte udalostí čiernej diery, b) na horizonte udalostí extrémne zrýchlenej sústavy aj c) pri rýchlosti c , rovnaké podmienky – pôsobí tam rovnaká sila.

HZ je alternatíva k ŠTR aj VTR. Je to zjednotenie elektromagnetizmu a gravitácie.

Literatúra

- [1] Dančanin, P.: *Hypotéza zjednotenia (výber z tvorby) – druhé vydanie*. VMV, Prešov, 2025 (tlačená i digitálna forma).
- [2] Karjakin, N. I., Kirejev, P. S. a Bystrov, K. N.: *Přehled fyziky*. 1. vyd., SNTL, Praha, 1970.

Týmové matematické soutěže a turnaje jako efektivní prvek přípravy na matematické olympiády

Maksym Dreval, FJFI ČVUT, Praha

ABSTRAKT. *O matematických soutěžích a turnajích se často hovoří jako o efektivním nástroji aktivizace a motivace žáků 1. a 2. stupně základních škol. Protože hra je přirozenou činností dětí mladšího a středního školního věku, začlenění matematických her do výukových aktivit podporuje tvořivost a zájem o matematiku. Tento příspěvek se však zaměřuje především na to, jaké přínosy mohou matematické soutěže nabídnout z hlediska přípravy nadaných žáků staršího školního věku na matematické olympiády, jak je mohou motivovat a podpořit jejich sebezrovoj. Diskutujeme rovněž několik formátů matematických soutěží, které může učitel organizovat během vyučovacích hodin, v matematických kroužcích nebo v rámci mimoškolních aktivit.*

1. Úvod

„Standardní“ středoškolská matematika často nutí žáky aplikovat pevně dané algoritmy při řešení úloh – řešíme rovnice, používáme dané vzorce či právě před chvílí ukázané věty. Přitom může někdy chybět vysvětlení jejich podstaty, původu a důvodu, proč vlastně fungují. To je často způsobeno buď nedostatkem času, nebo tím, že dané koncepty pocházejí z kapitol vysokoškolské matematiky. Čím starší naši žáci jsou, tím více času trávíme stručným vysvětlováním nových matematicky těžších témat a rychlým jejich procvičováním na sadě standardních úkolů, což výrazně omezuje prostor pro jiné aktivity. Jak si za těchto podmínek můžeme dovolit s nimi hrát? Nemůžeme přece promarnit drahocenný čas!

Nadaní žáci si přitom mohou vytvořit mylný dojem, že matematika spočívá především v pečlivém počítání a aplikaci standardních kroků na standardní úlohy. To je může rychle vést k pocitu nudy, ztrátě skutečného zájmu o matematiku a oslabení motivace se zlepšovat, protože mají pocit, že jsou již „úspěšní“ bez většího úsilí.

Matematické olympiády mohou pomoci otevřít „nový svět“ – matematiku, kde často předem nevíme, jaký přístup nám pomůže úlohu vyřešit, a kde je prostor pro objevování a diskuzi. Nicméně i v matematických olympiádách se často předpokládá, že student musí úlohu vyřešit sám, bez jakékoli spolupráce a komunikace s jinými žáky, a „uhádnout“ jediný správný postup (možná s některými mírnými modifikacemi) vedoucí k jediné správné odpovědi.

Reálný svět však takto černobílý není – ve většině situací běžného života řešíme nestandardní úkoly v aktivní spolupráci s přáteli a kolegy. Často si ani předem nedokážeme představit, kam nás ta či ona cesta dovede.

2. Proč mají týmové matematické hry a soutěže smysl i pro starší středoškoláky

Ve starší věkové skupině středoškoláků se namísto „obyčejné hry“ dostává do popředí potřeba sebeidentifikace, seberealizace a formování adekvátního sebehodnocení. Právě v těchto oblastech mohou matematické hry a turnaje sehrát zásadní roli.

Starší žáci přirozeně často mezi sebou soutěží. Matematické hry mohou být efektivním způsobem, jak využít jejich sklon k soutěživosti, k učení, procvičování a seberozvoji. Soutěžní prvky podporují snahu překonávat dosavadní úspěchy a směřovat k lepším výsledkům. Hry zároveň

umožňují žákům adekvátně porovnat své schopnosti s ostatními, identifikovat své silné a slabé stránky a naplánovat další kroky v osobním rozvoji.

Matematické hry často vyžadují kombinaci logického uvažování, plánování a strategie. Tyto dovednosti jsou klíčové nejen pro matematiku, ale i pro řešení problémů v běžném životě. Jedním z důležitých cílů soutěží často je seznámení s pokročilejšími úlohami a tématy včetně těch, které nejsou běžnou součástí školní látky. Takové netradiční úkoly rozvíjejí kreativní myšlení a schopnost „přemýšlet mimo šablonu“. Studenti se učí aplikovat své znalosti v nových a nečekaných situacích a intenzivně rozšiřují své znalosti i obzory v matematice. Matematické soutěže také mohou sloužit jako „odlehčený trénink“ na složitější úlohy, například ty ze státních a mezinárodních olympiád. Hravé prostředí pomáhá zmírnit stres a obavy z možného neúspěchu, které mnozí studenti při náročnějších úkolech pociťují. Tím poskytují bezpečnější prostor pro učení se z chyb, opakování pokusů a postupné zdokonalování. Jak uvidíme dále, některé formáty matematických her navíc vyžadují dlouhodobou soustředěnost a vytrvalost při řešení úkolů.

Týmové matematické soutěže navíc přinášejí benefity, které nejsou na první pohled zřejmé. Úspěch v týmových hrách je podmíněn efektivní komunikací a spoluprací. Pravidla týmových soutěží jsou nejčastěji vymyšleny tak, že ani nejtalentovanější jednotlivec pravděpodobně nezvládne zvládnout všechny úlohy sám, často ani nestihne hloubavě přechít všechna zadání. Časový limit a náročnost úloh vedou studenty k taktickému, v rámci turnajů i strategickému, dlouhodobějšímu plánování. Musí zejména zvážit, kdo se bude věnovat konkrétním úlohám a s kým bude diskutovat svoje nápady o možných postupech řešení. Taková diskuze často přináší rozmanité pohledy a přístupy, které by jednotlivce možná ani nenapadly při individuálním řešení. Tyto situace učí žáky zvládat konflikty, které mohou při diskuzích vznikat, a uvědomovat si důležitost přínosu každého účastníka týmu. To podporuje rozvoj odpovědnosti, sebevědomí a schopnost překonávat náročné výzvy. Týmové soutěže zlepšují dovednost prioritizace a efektivního řešení problémů. Studenti získávají širší perspektivu na matematické výzvy a seznamují se se složitějšími koncepty. Díky týmové spolupráci se připravují i na individuální olympiádní soutěže, kde mohou využít zkušenosti z různých přístupů a strategií.

3. Několik příkladů týmových matematických soutěží

Představme nyní několik příkladů týmových matematických soutěží, které nejenže mohou povzbudit zájem o matematiku ve třídě, ale zároveň se efektivně podílejí na přípravě nadaných a již motivovaných žáků na matematické olympiády vyšších úrovní.

Matematický kolotoč, Matematická regata a Matematický boj získaly popularitu v rámci matematického olympiádního hnutí ve východní Evropě, zejména v Rusku, na Ukrajině a v Bělorusku, během posledních několika desetiletí. Cílem těchto soutěží není pouze, jak tomu moderně říkáme, gamifikace, ale především podpora týmové spolupráce, budování herní strategie, rozvoj kreativního a kritického myšlení. Formát Matematického boje vznikl podle dostupných zdrojů v šedesátých letech minulého století v Leningradu [1]. Matematické regaty se poprvé konaly v Moskvě v devadesátých letech [2]. Na rozvoji těchto i mnoha dalších soutěží se podíleli nejen středoškolští učitelé-nadšenci, ale také matematické fakulty vedoucích univerzit. Během let pravidla těchto soutěží prošla mnoha úpravami.

Na Ukrajině sehrává klíčovou roli v integraci různých matematických soutěží do kontinuálního procesu přípravy nadaných žáků na matematické olympiády Bogdan Rublyov, doktor fyzikálně-matematických věd a profesor katedry výpočetní matematiky Kyjevské národní univerzity Tarase Ševčenka. Pod jeho vedením a za podpory týmu zapálených učitelů a studentů vznikl celostátní systém, v jehož rámci se talentovaní žáci z různých měst Ukrajiny celoročně účastní rozmanitých matematických aktivit a turnajů [3].

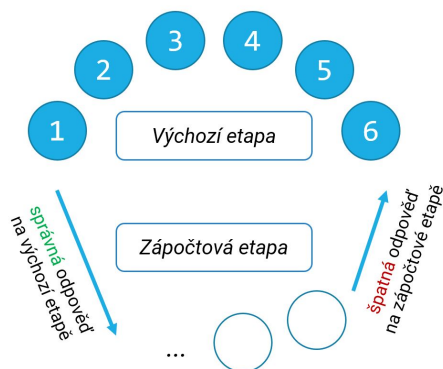
3.1. Matematický kolotoč

Matematický kolotoč je týmová soutěž, které se účastní týmy žáků o 4–6 členech, přičemž počet týmů není omezen. Délka soutěže a počet úloh se mohou přizpůsobit okolnostem, standardně však trvá kolotoč 60–120 minut. Pro každou ze dvou etap – tzv. *výchozí* a *zápočtovou* – se připravuje samostatný soubor úkolů, obvykle čítající 20 úloh. Všechny týmy řeší úlohy ve stejném pořadí, porota kontroluje pouze správnost odpovědí.

Na začátku soutěže se celý tým nachází ve „frontě“ na výchozí etapě a společně řeší úlohu č. 1. Pokud odpověď správně, první člen z „fronty“ přechází do zápočtové etapy. Každá další správná odpověď na výchozí etapě umožňuje poslat dalšího člena týmu (následujícího v pořadí) na

zápočtovou etapu. Chybná odpověď na výchozí etapě nemá žádnou penalizaci, avšak počet dostupných úloh na této etapě je omezený.

Účastníci na zápočtové etapě spolupracují na řešení tzv. zápočtových úloh. Za správné odpovědi tým získává body následujícím způsobem: 3 body za první správnou odpověď v řetězci, každá následující správná odpověď v řetězci je hodnocena o 1 bod více (tj. 4, 5, 6 bodů atd.). Chybná odpověď na zápočtové etapě znamená 0 bodů za danou odpověď, přerušení řetězce rostoucích bodů (nový řetězec začne opět od 3 nebo 5 bodů v závislosti na délce předchozího řetězce) a návrat jednoho účastníka na výchozí etapu na konec „fronty“ (obr. 1).



Obr. 1: Pohyb účastníků Matematického kolotoče

Body se získávají pouze na zápočtové etapě. Proto je cílem týmu vést co nejvíce členů z výchozí do zápočtové etapy, aby mohli svými správnými odpověďmi vytvořit co nejdelší řetězec bodů za zápočtové úlohy. Tým, který nasbírá nejvíce bodů, se stává vítězem. Ukázka tabulky výsledků je na obr. 2.

Tým	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	...	Σ
A	3	4	0	3	0	3	4	5	6	...	...
B	0	0	3	4	5	6	7	8	9	...	...
C	0	0	0	3	4	5	0	5	6	...	...
...											...

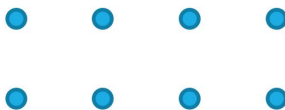
Obr. 2: Formát tabulky výsledků Matematického kolotoče

Do úloh matematického kolotoče se obvykle zařazují relativně jednodušší olympiádní úlohy. Tyto úlohy mohou být provokativní, což zna-

mená, že na první pohled se žákům může zdát, že odpověď je zřejmá, avšak důkladnější zamyšlení odhalí jiné řešení. Vhodné jsou také úlohy, které zahrnují různé možnosti kombinací prvků. Z geometrických úloh jsou pro kolotoč ideální ty, které umožňují různé odpovědi v závislosti na poloze bodu v rovině (nebo prostoru).

Několik příkladů úloh vhodných pro Matematický kolotoč:

1. Stavební společnost dostala povolení ke kácení lesa, ale ekologové protestují. Na to mluvčí společnosti reagoval uklidněním veřejnosti: „99 % stromů v lese tvoří borovice. Pokácíme pouze borovice a po kácení jejich část bude 98 %.“ Jaké procento všech stromů chce firma pokácet?
2. Osm bodů leží v rovině a tvoří obdélník (viz obr. 3). Kolika způsoby lze sestavit trojúhelník, jehož všechny vrcholy jsou zvoleny z těchto bodů?



Obr. 3: Ilustrace k úloze 2

3. Honzík vynásobil všechny dělitele některého přirozeného čísla a takto získal číslo H . Tomášek zvětšil každý z těchto dělitelů o 1 a vynásobil takto získaná čísla, čímž dostal číslo T . Ukázalo se, že H dělí T . Pro které dvojice čísel H a T je to možné?

3.2. Matematická regata

Matematické regaty se obvykle účastní menší týmy o 3–5 členech, počet týmů je libovolný. Standardní doba trvání regaty je 120–180 minut, avšak její formát lze snadno přizpůsobit například délce vyučovací hodiny. Kromě verze s olympiádními úlohami lze Matematickou regatu využít také k opakování, systematizaci a zobecnění látky určitého tématu z běžného školního kurikula.

Matematická regata se skládá ze 3–5 kol s postupně se zvyšující obtížností. V každém kole tým společně řeší 3 úlohy, přičemž všechny týmy dostávají stejný soubor úloh. Po uplynutí času kola týmy odevzdávají nejen odpovědi, ale i postupy řešení. Hned po každém kole následuje rozbor správných postupů řešení. Současně s rozбором jiní členové poroty kontrolují správnost odevzdaných řešení a na závěr rozboru zveřej-

ňují výsledky kola. Pokud oprava řešení trvá déle, může být dokončena v průběhu kola následujícího, výsledky se pak vyhlásují dodatečně.

Bodové hodnocení úloh se v každém následujícím kole zvyšuje o 1 bod (např. 3–4–5–... bodů). Zároveň se postupně prodlužuje i časový limit jednotlivých kol, a to obvykle o 2–5 minut (např. 5–7–10–15–... minut). Celkové skóre týmu je součtem bodů za všechny úlohy ve všech kolech (obr. 4).

Tým	1. kolo			2. kolo			3. kolo			...	Σ
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	...	
A	3	3	3	4	0	2	5	5	0		...
B	0	1	3	0	4	4	5	2	1		...
C	0	2	0	1	4	4	5	5	5		...
...											...

Obr. 4: Formát tabulky výsledků Matematické regaty

Do úloh olympiádní verze Matematické regaty se začleňují úlohy základní a střední obtížnosti, které lze vyřešit a stručně popsat postup jejich řešení během plánovaného časového limitu jednotlivého kola.

Dva příklady úloh vhodných pro Matematickou regatu:

4. Ve třídě je 33 žáků, součet jejich věků je 430. Dokažte, že součet věků 20 nejstarších z nich nebude menší než 260. (Předpokládejme, že věk každého žáka je přirozené číslo.)
5. Žáci v trojúhelníku ABC sestrojili osy vnitřních úhlů u vrcholů A a B a těžnici z vrcholu C . Body jejich vzájemných průsečíků vytvořily pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Najděte velikosti úhlu trojúhelníku ABC .

3.3. Matematický boj

Matematický boj má podobu plnohodnotné matematické diskuze. Učí nejen zvládání nejtěžších olympiádních úloh, ale také dovednost vykládat a obhajovat své řešení, korektně argumentovat a opodstatněně oponovat. Matematickému boji často říkají, že je průnikem matematiky, sportu a divadla. Ve zkrácené verzi jej lze uspořádat v rámci hodin matematického kroužku, zatímco plná verze může trvat téměř celý den.

Matematického boje se účastní sudý počet týmů, z nichž každý má 6–12 členů. První fáze soutěže, tzv. *příprava*, spočívá v tom, že každý tým

obdrží od poroty stejný seznam 8–10 olympiádních úloh různé obtížnosti (obvykle od střední po vysokou). Na jejich řešení mají týmy 2–4 hodiny.

Po přípravě se týmy setkávají ve dvojicích při tzv. souboji. Hlavní část Matematického boje začíná duelem kapitánů, kteří vystoupí k tabuli. Porota jim zadá relativně jednoduchou úlohu nebo krátkou hru s matematickou strategií. Kapitáni přemýšlejí samostatně bez možnosti konzultace se svým týmem. Jakmile jeden z kapitánů oznámí, že má odpověď, duel končí. Pokud kapitán odpoví správně nebo vyhraje hru, jeho tým získává právo rozhodnout, zda v prvním kole zavolá jiný tým k představení řešení konkrétní úlohy, nebo zda nechá volání na soupeři. V případě nesprávné odpovědi či prohry duel automaticky vyhrává druhý kapitán.

Samotný souboj se skládá z několika kol. Každé kolo začíná vyzváním týmu-odpůrce na konkrétní úlohu ze seznamu úloh, které týmy řešily během přípravy. Jiný tým pak musí přednést svoji verzi postupu řešení nebo může využít tzv. ověření volání (požádá volající tým, aby předložil své řešení). Řečník (ve standardním případě zástupce volaného týmu, příp. při ověření volání zástupce volajícího týmu) má za úkol jasně a bezchybně představit postup řešení úlohy, zatímco oponent (zástupce druhého týmu) se snaží odhalit chyby, nepřesnosti či nesprávné závěry, musí zkontrolovat správnost a úplnost odpovědí.

Za každou nalezenou chybu získává oponent polovinu bodů, které tato „díra“ představuje; druhou polovinu může obdržet řečník, pokud správně opraví chybu. Pokud řečník chybu neopraví, svoji verzi řešení této „díry“ může nabídnout i oponent. Diskuze mezi řečníkem a oponentem má být věcná, zdvořilá a podpořená přesvědčivými matematickými argumenty.

O přidělení bodů rozhoduje porota, která se diskuze přímo neúčastní, ale dohlíží na pravidla. Na konci každého kola porota rozdělí mezi týmy celkem 12 bodů. Pokud však předložené řešení nebo jeho část nebyly správné a oponent to nedokáže prokázat, část z těchto bodů nemusí být přidělena – tyto body si ponechává porota. Řečník může za bezchybný výklad získat pro svůj tým všech 12 bodů, zatímco oponent může obdržet maximálně 6 bodů za přesvědčivou oponenturu.

V následujícím kole bude na některou ze zbylých úloh volat jiný tým. Standardně i dále se v každém kole pořadí volání střídá. Pokud se ovšem v průběhu ověření volání zjistilo, že v tomto kole tým vyzýval k řešení úlohy, na kterou neměl ani koncept řešení, v příštím kole musí volat znovu a tím marně ztrácí 6 bodů. Každý člen týmu může být u tabule maximálně dvakrát (ať už jako řečník, nebo oponent). Duel kapitánů

se do tohoto počtu nezapočítává. Každý tým má během celé soutěže právo na šest 30vteřinových přestávek. Přestávku může oznámit kapitán v jakémkoli okamžiku diskuze. To je jediný čas kola, kdy se řečník a oponent mohou poradit s ostatními členy svých týmů. Vítězem se stává tým s vyšším součtem bodů za všechna kola. Ukázku protokolu matematického boje (obr. 5).

Tým A		Číslo úlohy	Tým B		Porota
Jméno/číslo člena týmu	Body		Body	Jméno/číslo člena týmu	Zbylé body
A4	0	4.	12	B10	0
A7	8	6.	2	B2	2
A2	12	1.	0	B2	0
...					
Součet ->	...	-	...	<- Součet	...

Obr. 5: Protokol Matematického boje

4. Závěr

Na etapě plánování, v průběhu a po ukončení matematických soutěží vždy vzniká obrovské množství pedagogických situací. Tyto situace se často stávají podnětem k dalšímu profesnímu rozvoji učitele. Na jeho mistrovství záleží, zda týmové matematické soutěže zůstanou pouze dobrým prvkem gamifikace, nebo zda významně ovlivní i motivaci a individuální vzdělávací trajektorie žáků.

Matematické hry se staršími žáky pomáhají podpořit spolupráci, přispívají k hlubšímu pochopení učiva a rozvoji tvořivosti a kritického myšlení. Různorodé matematické soutěže mohou tvořit celistvý prvek – matematický turnaj, který se může stát inspirací pro žáky na celý akademický semestr či rok. Talentovaným žákům zajistí efektivní a smysluplnou přípravu na další matematické akce, včetně matematických olympiád různých úrovní.

Mezi nejtypičtější otázky spojené s organizací týmových matematických soutěží patří následující:

- Jak přizpůsobit formát matematické soutěže realitám na své škole?
- Jak vytvořit vhodný soubor úloh, který nebude příliš jednoduchý, ale přiměřený aktuálním znalostem a schopnostem žáků?
- Jak stanovit korektní cíle při organizaci matematické hry?

- Jak rozdělit žáky do týmů? Jak se má zvolit kapitán?
- Jak udělat soutěž přínosnou jak pro slabší, tak i pro silnější žáky?
- Kdo může být členem poroty?
- Jak správně provést reflexi po matematické soutěži? Jak hodnotit výsledky?

Tyto otázky si zatím povolíme nechat otevřené. Asi neexistuje univerzální návod – každý učitel to udělá tak, jak to umí nejlépe. Není v tom krása učitelské profese?

Literatura

- [1] Генкин, С. А., Итенберг, И. В., Фомин, Д. В., Рубанов, И. С.: *Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы*. Киров, издательство «АСА», 1994.
- [2] Блинков, А. Д., Горская, Е. С., Гуровиц, В. М.: *Московские математические регаты*. М.: МЦНМО, 2007.
- [3] *Українські математичні олімпіади*: <https://matholymp.com.ua>

Rozhledy matematicko-fyzikální

Ľubomíra Dvořáková (vedoucí redaktorka), FJFI ČVUT, Praha

ABSTRAKT. *Rozhledy matematicko-fyzikální (RMF) jsou nejlepším časopisem pro středoškolské studenty se zájmem o matematiku, fyziku a informatiku a jejich učitele. Samozřejmě toto vyjádření berte s nadsázkou, ale určitě má smysl pravidelně časopis číst nebo do něj také přispívat.*

Časopis má za sebou již téměř stoletou historii. Vznikl pod názvem Rozhledy matematicko-přírodovědecké v roce 1921 jako příloha Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky vydávaného JČSMF (Jednotou československých matematiků a fyziků). V roce 1957 získal dnešní název. Vycházel pravidelně i během války, delší přerušení nastalo až v letech 2002–2005. Kulatý 100. ročník a s ním spojené oslavy nás čekají v roce 2025. O této historii se můžeme dozvědět více např. v [1]. V tomto článku se ale budeme zabývat současnou podobou tohoto časopisu.



Obr. 1: Obálky RMF posledních let. Autorem obálky je výtvarník Bohuslav Šír.

Hned na začátku uveďme, že časopis vychází čtyřikrát ročně (březen, červen, září, prosinec) a je dostupný online *zdarma* na stránkách [2]. Členové JČMF (Jednoty českých matematiků a fyziků) si mohou předplatit papírová čísla za 200 Kč ročně, dostávají je pak poštou. Čísla od roku 2019 jsou dostupná na [2] a od roku 2005 na stránkách [3].

Podle mého mínění se nám daří plnit časopis zajímavými a kvalitními články (pravidelně i v angličtině), které procházejí recenzí a jejichž *autory jsou často i sami středoškoláci!* Není ovšem jedinou úlohou časopisu, aby otiskoval zajímavé články. Rovněž dáváme prostor pozvánkám na akce, jako jsou soutěže, olympiády, tábory, přednášky, exkurze, korespondenční semináře, akce vysokých škol pro středoškoláky, a zprávám z těchto akcí. Představujeme netradiční zdroje pro studium a výuku M, F, I, jako jsou videa, internetové sbírky úloh, online přednášky a pokusy. Občas otiskneme rozhovor se zajímavými osobnostmi a recenze knih, o kterých se domníváme, že si zaslouží pozornost našich čtenářů. Pravidelně nahlížíme do historie matematiky a fyziky. Zároveň ale reagujeme na aktuální témata, ať už to byl v minulosti covid a s ním

související modely šíření epidemií či téma online výuky, nebo aktuální objevy z fyziky a matematiky, o nichž se snažíme informovat.

V časopise je otevřený prostor pro nápady zvenčí. Neváhejte a kontaktujte nás na rozhledy@jcmf.cz, pokud pracujete na zajímavém projektu a chcete se podělit se čtenáři o pěkné výsledky nebo organizujete akci pro středoškoláky nebo točíte videa pro zájemce o M, F, I nebo děláte cokoli jiného, co si zaslouží pozornost ostatních středoškoláků či středoškolských pedagogů.

Těšíme se na spolupráci se všemi zájemci o matematiku, fyziku a informatiku a na jejich dobré nápady, které od nich vzejdou pro další rozvoj našeho časopisu, a samozřejmě se také těšíme na nové čtenáře!

Literatura

- [1] Zhouf, J.: Téměř 100 let Rozhledů matematicko-fyzikálních. In: Bečvářová, M., Bečvář, J. a kol. (eds.): *Matematický svět mezi válkami*. ČVUT, Praha, 2020, s. 299–334.
- [2] www.rozhledy.jcmf.cz
- [3] Czech Digital Mathematics Library. www.dml.cz

Únikovky v matematice s počítačem i bez něj (v učebnicích SPN)

Pavla Hanzalová, Gymnázium F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou

ABSTRAKT. Tento příspěvek pojednává o únikových hrách v hodinách matematiky. Je zaměřen na základní principy a různé typy šifrovacích a únikových her, kde jsou využity matematické problémy. Ty mohou být zařazeny do běžné hodiny nebo je lze využít jako doplňkové aktivity pro nadané žáky (záleží na stupni obtížnosti). Součástí jsou i různé praktické ukázky (převážně z chystané interaktivní učebnice Matematika pro 6. ročník od nakladatelství SPN), a to jak digitálně „zpracovaných únikovek“, tak i her, kde postačí „tužka a papír“.

1. Úvod

Dnes se ve školách již běžně setkáváme s procvičováním učiva hravou formou. Učitelé využívají různé kvízové aplikace, tvoří si vlastní hry a materiály, kterými by svou hodinu ozvláštnili a přiblížili dětskému přístupu získávání nových informací a procvičování již osvojených doved-

ností. Jednou z těchto metod je i využití šifrovacích a únikových her. Na internetu můžeme najít mnoho inspirace, ale při jejich tvoření a předkládání žákům je důležité dbát i na pestrost a celkovou promyšlenost tak, aby se tato aktivita nestala pouhým náhodným klikáním a odhadováním vytoženého výsledku.

Únikové hry zároveň mohou rozvíjet mnoho důležitých kompetencí a podporovat rozvíjení čtenářské, počítačové i digitální gramotnosti. Je zřejmé, že učitel, který chce tuto metodu používat, by měl mít na paměti, co přesně je jeho cílem – naučit porozumění textu, zopakovat učivo hravou formou, předložit nový problém, zařadit do výuky trochu pohybu, nebo naopak využít počítač, nechat žáky řešit samostatně nebo v nich podpořit chuť pracovat v týmu; dále na jak dlouhou dobu má únikovka být a zda ji má při dostatečném čase vyřešit každý, nebo to není podmínkou.

2. Únikové hry obecně

Únikové hry můžeme charakterizovat jako dobrodružnou aktivitu, kdy účastníci hledají indicie a předměty potřebné k řešení hádanek, které vedou k cíli. Tím je „únik z místnosti“. Velmi často hře dodává napětí časově omezený interval, za který je nutné hru dokončit.

Existuje několik různých forem, ve kterých se v dnešní době můžeme s únikovými hrami setkat. Velmi populární jsou únikové místnosti nebo organizované soutěže. Pokud ale hráči nechtějí za hrou cestovat do konkrétního místa, lze si „únikovky“ zahrát i ve formě brožurek, knížek nebo v poslední době ve velké míře vznikajících deskových hrách. Velká nevýhoda této aktivity je, že je ve většině případů lze hrát pouze jednou, protože při dalším hraní (pokud nejde o propletený příběh s různými konci) již chybí prvek překvapení a řešení dílčích úkolů postrádá nutnost nápadu a kreativity.

Únikové hry, ačkoli jde o poměrně novodobou záležitost – první oficiální úniková hra vznikla v Japonsku v roce 2007 (viz [6]), mají své kořeny v mnoha jiných (již dávno známých) aktivitách:

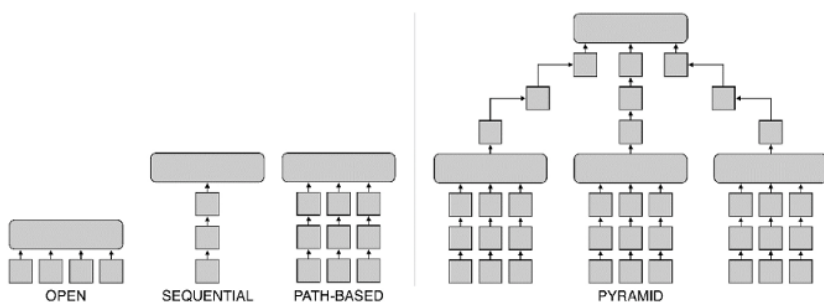
- LARP: Jedná se o role-playing game (tzv. živé hraní rolí). Lidé se na okamžik stávají někým jiným (bytostí ve fiktivním světě, oblíbenou postavou z filmu či knihy), a prožívají tak nové, v obyčejném světě někdy nemožné příběhy. Často se jedná i o několikadenní akce, které organizuje skupina vedoucích, kteří dávají rámec příběhu a korigují dění v předem dohodnutém ohraničeném prostoru.

- Textové hry: Jde o jedny z prvních počítačových her, kde záleželo na tom, jak se člověk rozhodne, a podle toho se odvíjel celý příběh. Velmi podobná je i tištěná verze, která se označuje jako gamebook (čtenář se rozhoduje, co se v ději stane, a podle toho přeskakuje na předepsanou stranu knihy).
- Dobrodružné soutěže: I dnes jsou velmi populární soutěže, kde je nutné řešit hlavolamy. Mohou probíhat v jedné místnosti, ale mohou být spojeny i s překonáváním přírodního terénu. Některé z nich můžeme znát jako šifrovací hry (další stanoviště získáme vyluštěním hádanky, kterou získáme na startu či jiném dílčím stanovišti), jejichž cílem je dojít do cíle s co nejmenším počtem nápověd (pokud jsou dostupné) v co nejrychlejším čase.
- Interaktivní grafické adventury: Jedná se často o rozsahem menší počítačové hry, kdy hráč prozkoumává prostředí a snaží se získat nápovědy nebo předměty, které mu umožní postup ve hře.
- Hon za pokladem: Asi nejpoužívanější hrou je tzv. hon za pokladem, jehož pravidla mohou být velmi různá, ale cíl je jasný – dostat se k pokladu. K tomu hráči může sloužit třeba jen mapa nebo sada různých nápověd. Tuto hru často vymýšlí i rodiče pro své děti – nápovědou může být třeba i jen obrázek, který znázorňuje místo, kde má dítě hledat další indicii. Do této kategorie by se dala zařadit i stále oblíbená aktivita geocaching.
- Interaktivní divadlo [3]: „Jde o divadlo ve výchově, hraje se všude tam, kde je problém, tzn. ve školách, v dětských domovech, speciálních zařízeních, ve věznicích, v domech pro seniory apod. Interaktivní divadlo spojuje prvky dramatu a interakce s divákem.“ V rámci představení herci na základě diváckých rozhodnutí předloží řešení konkrétního představeného problému.
- Tematický zábavní průmysl: Jedná se o populární televizní soutěže. Jako příklad můžeme uvést již mnoho let vysílanou soutěž Pevnost Boyard nebo i soutěže o přežití (například Survivor) [4].

Únikové hry lze dělit podle následujících kritérií [2]:

- Zaměření příběhu: Důležitou součástí únikových her je zasazení do nějakého příběhu. Pro mladší hráče je možné se inspirovat pohádkou, knižním příběhem nebo fantasy. Existují i hry s hororovou tematikou, dobrodružné, akční nebo kriminální.

- Časový limit: Existují hry, které jsou časově omezené (od desítek minut, přes hodiny, až po dny), ale i takové, které žádný limit nemají.
- Počet hráčů: Únikovou hru lze projít i v jednom hráči (některé jsou určeny právě pouze pro jednoho), ale mnohem populárnější jsou pro týmy (2 až 5 hráčů).
- Obtížnost: Určujeme ji podle procenta úspěšnosti hráčů. Můžeme ji ale také odhadnout na základě složitosti dílčích úkolů. Nejčastější dělení je na začátečníky, pokročilé a experty.
- Vybavení: Některé hry si vystačí s aplikací, počítačem nebo papírem a tužkou. Pokud ale chceme průběh hráčům zpestřit, je možné využít i vhodné fyzické komponenty, jako jsou například kryptexy, zámky s klíči, truhly nebo ve hrách situovaných do moderní doby i čipy. Hru je také možné doplnit audiovizuální technikou, která velmi dobře navozuje atmosféru.
- Průběh: Nejjednodušším systémem je lineární průběh hry (jednotlivé dílčí úkoly na sebe navazují a postupně vedou k cíli – na obr. 1 popsané jako sequential). Velmi dobře se hodí jak na kratší, tak na dlouhotrvající hry. Druhým principem, který se velmi často objevuje v šifrovacích hrách na startu pro oddělení týmů, je více dílčích úkolů, z nichž je potřeba alespoň některé vyřešit, aby se tým dostal k řešení dalšího úkolu (na obr. 1 popsané jako open). Pokud tyto dva přístupy zkombinujeme, může vzniknout pestrá škála dalších možností, jak průběh koncipovat. Pokud hru vytváříme, je vždy nutné průběh pečlivě naplánovat a přizpůsobit časovým i prostorovým možnostem.



Obr. 1: Různé přístupy k průběhu hry [7]

3. Únikové hry ve vzdělávání

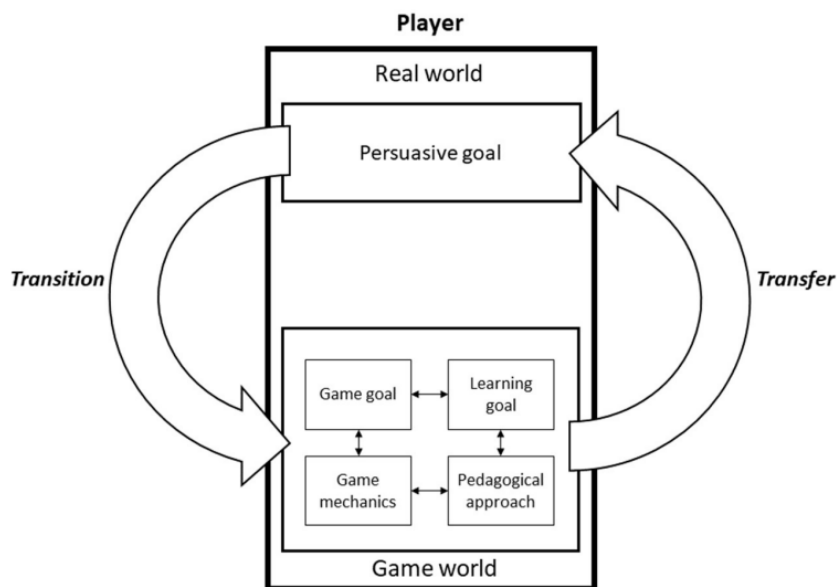
Únikové hry se ve vzdělávání využívají nejen k motivaci, představení nebo opakování učiva. Rozvíjíme jimi také mnoho kompetencí a gramotnosti [1]. Zde je několik důvodů, proč tuto metodu zařadit do výuky:

- **Kompetence k řešení problémů:** Hra často obsahuje řadu různých úkolů (někdy i velmi netradičních), které mnohdy poskytují dílčí cíle a žák musí přemýšlet ve větší rovině, aby získal finální výsledek. Některé úlohy kladou velké nároky na kreativitu řešitelů a předpokládají zdolání různých (převážně intelektuálních) překážek.
- **Kompetence komunikativní:** Pokud pracují žáci v týmu, je potřeba komunikovat. Musí se domluvit na strategii, zjistit své silné a slabší stránky a využít je ve svůj prospěch.
- **Kompetence sociální a personální:** Pokud je hra pro více hráčů, je jasné, že se žáci učí pracovat v týmu. Prochází fází brainstormingu, rozdělení si práce i vzájemné spolupráce na jednom problému. Během hry musí zvládnout napětí, správně si zorganizovat čas. Vzájemně se mohou naučit motivovat k práci, podporovat nebo jednat shovívavě v případě nezdaru.
- **Kompetence digitální:** Některé únikové hry využívají moderní technologie, různé aplikace a zařízení. Některé jsou tvořeny přímo pro hru na počítači. Pokud je to pravidly povoleno, mohou hráči využívat internet pro vyhledávání informací.
- **Čtenářská gramotnost:** Jak již bylo psáno, nedílnou součástí hry je zasazení do příběhu. Některé jsou navrženy tak, že příběh slouží pouze jako motivační část (proč se vlastně dostat ven, proč začít řešit), některé jsou příběhem protkány celé, a mohou mít dokonce více závěrů, podle toho, jak je hráč v řešení úspěšný, nebo podle toho, jak se rozhodne v případných dialogích.
- **Informatické myšlení:** Řešení problému se skládá z jeho popisu, analýzy a hledání efektivního řešení, což je vlastně definice informatického myšlení. Pokud žák nalezne vhodný postup, pak jej systematicky opakuje, čímž rozvíjí myšlení algoritmické.

Při tvorbě, ale i výběru únikové hry do vyučovací hodiny je velmi důležité zohlednit pět významných faktorů: cíl hry, výukový cíl, pedagogický přístup, mechanika hry a odpovídající obtížnost. Vše by mělo

vést k tomu, aby žáci zkušenosti získané během hry mohli aplikovat i v reálném světě (viz obr. 2).

Existuje již mnoho vytvořených didaktických únikových her v různých jazycích. A. Veldkamp (2020) a kolektiv ve své studii předkládají velmi podrobnou rešerši existujících cizojazyčných únikových her zaměřených do výuky [7].



Obr. 2: Schéma popisující vztahy mezi zkušenostmi v reálném a herním světě [8]

4. Únikové hry v matematice

Téměř ve všech únikových hrách se vyskytují různé logické úlohy, šifry nebo úkoly, jejichž součástí je práce s čísly, útvary nebo tělesy. S matematickými příklady si můžeme velmi dobře vyhrát. Využít lze výsledky příkladů, které určí pořadí písmena v abecedě nebo porovnávají čísla, kde dostaneme tři znaky, které potřebujeme při morseovce. Na střední škole můžeme výrokovou logiku spojit s binární soustavou. Když nechceme příliš kombinovat, lze použít jen příklad s několika možnostmi, které nabízejí různá písmena potřebná k vylustění kódu. Osobně si myslím, že matematika je ideálním předmětem pro zařazení právě takové aktivity.

5. Příklady z praxe

Při tvorbě vlastní únikové hry je vhodné nejprve vyzkoušet několik již vytvořených a nabrat v nich inspiraci. Je důležité si uvědomit, že ne všechno bude fungovat přesně tak, jak si představujeme. Některé principy mohou být pro žáky příliš náročné nebo mohou vyžadovat jiný druh myšlení, který zatím neznají. Je vhodné si připravit i systém nápověd tak, aby učitel žáky při řešení podpořil a dal jim možnost dojít do konce. Ty mohou být dostupné v rámci samotné hry, nebo dostupné u učitele. Žáci by si měli zvyknout, že cílem nemusí nutně projít bez nápovědy, ale hlavně se dostat na konec.

Koncept hry by měl zahrnovat promyšlení následujících tří bodů:

- Motivace: Pomocí příběhu (může být velmi jednoduchý, ale může se proplétat i celou hrou) motivovat žáka k tomu, aby chtěl pokračovat ve hře, aby byl zvědavý, co ho čeká, a chtěl splnit úkoly ke splnění hry.
- Systém hry: Důležité je promyslet si průběh hry a jednotlivé úlohy. Důležité je myslet na časovou náročnost i obtížnost úloh.
- Odměna: Tou je zcela jistě samotný cíl hry, ale je možné přidat i něco dalšího (bonbony, diplomy, medaile apod.).

6. Motivace: prostředí a atmosféra

Sedíte na tvrdé židli, před vámi obyčejná stará lavice. Strohé vybavení místnosti připomíná nemocniční zařízení. Patrně už opuštěné, protože nikde není nic slyšet – možná jen tikot hodin na stěně. Máte hlad, necítíte se tu pohodlně, chcete ven. Ale nejste tu sami. Bohužel ne zrovna mile vyhlížející paní, stojící před vámi, situaci nezpříjemní. Všimnete si, že v lavici se válí nějaký stočený lísteček. Patrně ho tu nechal někdo před Vámi. Něco, co neměl nikdo jiný vidět? Tajná zpráva? Co tam je asi napsáno?

TEXT NA LÍSTEČKU:

Už ti to došlo?

Téma je jen krytí!

E-učebnice a únikovky. . .

Človče, přemýšlej!

Kromě příběhu je v digitální podobě důležité zvolit i vhodný obrázek prostředí (obr. 3). V něm mohou být skryté interaktivní prvky, mohou tam být postavy, které mezi sebou mohou vést rozhovory, ve kterých

může být naznačen způsob, jak hrou úspěšně projít. Obrázky můžete použít z internetu, nechat je vygenerovat umělou inteligencí nebo použít vlastnoručně kreslený obrázek (lze použít i výtvar od žáků, zcela jistě je to potěší).



Obr. 3: Ukázka ručně kresleného prostředí hry upraveného počítačovým programem a směrovač vytvořený v online programu Canva.com

7. Systém hry a úkoly

Samotný systém hry může být různě obtížný, podle cílové skupiny (je hra určena pro všechny žáky, nebo jen pro ty, kteří už mají práci hotovou, a tudíž umí rychleji počítat a očekává se od nich i netradiční myšlení). Na úkoly je možné použít jakoukoli matematickou látku. Na obr. 4 je vidět grafická šifra, kde po vyznačení čísel, které jsou dělitelné pěti, vznikne písmeno L.

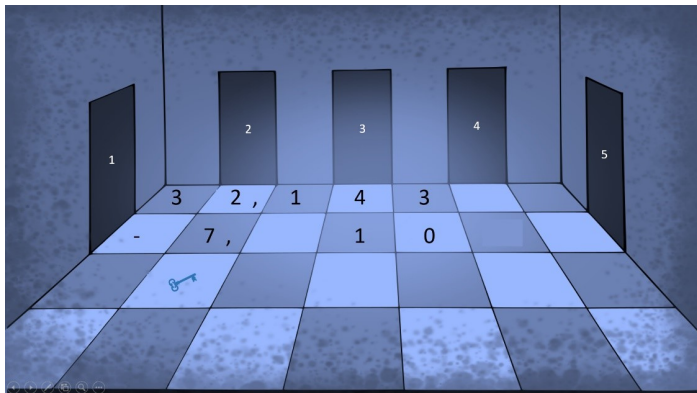
53	105	17	9
27	45	63	36
124	135	23	116
6	90	32	7
42	15	65	118

53	105	17	9
27	45	63	36
124	135	23	116
6	90	32	7
42	15	65	118

Obr. 4: Ukázka jednoduché grafické šifry (zadání a řešení)

Úkoly mohou být ale zakryty i přímo v místnosti. Na obr. 5 je vidět ukázka místnosti. Když se do ní žák poprvé dostane, jsou vidět pouze bílá čísla. Když žák kliká na kachličky na podlaze, začnou se zobrazovat

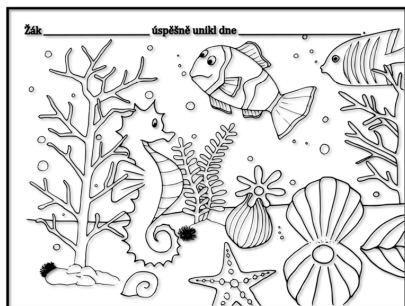
čísla, a postupně tak celý příklad. Také je potřeba objevit klíč. Pokud příklad vypočítáme, získáme na místě klíče jedno konkrétní číslo. Podle tohoto čísla zvolíme dveře, a dostaneme se tak do další místnosti.



Obr. 5: Příklad přímo v místnosti

8. Odměna

První odměnou je překonání všech úkolů a zvládnutí cíle. Občas není na škodu týmu podpořit i fyzickým předmětem. Tím může být něco, co žákům vydrží (viz obr. 6), například diplom nebo třeba medaile vytvořené na 3D tiskárně (pokud v rámci roku žáci absolvují více her, může žáky motivovat i sběratelský duch).



Obr. 6: Ukázka odměn, které vydrží

9. Závěr

Ráda bych podpořila učitele k využívání této aktivity. Zároveň je však mít na paměti jejich kvalitu a také častost využívání, aby se ze zábavy nestalo něco běžného (v rámci každé hry by měl být vždy nový mechanismus, něco neočekávaného).

Pokud byste chtěli únikové hry tvořit, je možné využít například MS PowerPoint nebo třeba online grafický editor Canva.com. Hru je možné zařadit nejen jako opakování učiva, ale z vlastní zkušenosti vím, že je to skvělá aktivita pro poznávání školy nebo jejího okolí (není potřeba digitální prostředí, úkoly stačí rozmístit na různá místa ve škole, ke kterým vede mapa nebo dílčí šifry), k podpoření týmové práce na výletě nebo při projektovém vyučování.

Poděkování. Tento příspěvek vznikl díky podpoře SPN – Pedagogické nakladatelství, a. s.

Literatura

- [1] Bláhová, L.: *On-line úniková hra zaměřená na vybraná témata nového RVP pro informatiku do ZŠ (2. stupeň)*. Diplomová práce na pedagogické fakultě Západočeské univerzity v Plzni, 2024. https://otik.uk.zcu.cz/bitstream/11025/56860/1/DP_BlahovaLucie_final.pdf
- [2] Endorfin: *Typy únikových her*. 2019. <https://endorfin.cz/typy-unikovych-her/>
- [3] Gošová, V.: *Interaktivní divadlo*. NPI, Metodický portál RVP.CZ, 2011. https://wiki.rvp.cz/Knihovna/1.Pedagogick%C3%BD_lexikon/I/Interaktivn%C3%AD_divadlo#0dkaz_autorky.3a
- [4] Nicholson, S.: *Peeking behind the locked door: A survey of escape room facilities*. 2015. <http://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf>
- [5] Nicholson, S.: *The state of escape: Escape room design and facilities*. 2016. <http://scottnicholson.com/pubs/stateofescape.pdf>
- [6] Stips: *Historie únikovek*. 2024. <https://stips.cz/historie-unikovek>
- [7] Veldkamp, A., van de Grint, L., Knippels, M.-C. P. J., van Joolingen, W. R.: Escape education: A systematic review on escape rooms in education. *Educational Research Review*, 31 (2020), 100364. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:229166186>
- [8] Veldkamp, A., Knippels, M.-C. P. J., van Joolingen, W. R.: Beyond the early adopters: Escape rooms in science education. *Frontiers Education*, 6(3) (2021), 1–11. <https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/educ.2021.622860/full>

Digitální kompetence s podporou dynamického matematického software ve výuce na základní škole

Miroslava Huclová, KMT FPE ZČU, Plzeň

ABSTRAKT. Článek se zaměřuje na rozvoj nové klíčové kompetence v oblasti digitálních technologií během základního vzdělávání. Věnuje pohled na adaptaci dynamického matematického systému do výuky, a tím zařazení digitálních kompetencí do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Praktická část uvádí využití GeoGebra Classroom pro výuku geometrických témat v učivu Úhel a jeho velikost. Diskutovány jsou metody tvorby a metodika výuky jednotlivých appletů učitelem a jejich začlenění do výuky. To umožňuje interaktivní a vizuálně atraktivní způsob učení. Součástí jsou i náměty pro praktické nastavení appletů tak, aby došlo k efektivní výuce v této oblasti.

1. Úvod

Digitální kompetence jsou na základních školách zásadní pro přípravu žáků na požadavky moderního digitálního světa, což je klíčové nejen pro jejich budoucí profesní úspěchy, ale i pro osobní rozvoj. Tyto kompetence pokrývají širokou škálu dovedností od základního ovládání počítače až po pokročilé využívání informačních a komunikačních technologií (ICT). Aktualizace školního vzdělávacího programu (ŠVP) je nezbytná pro integraci těchto dovedností do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Implementace změn v kurikulárních dokumentech ve všech základních školách představuje zásadní krok vpřed k začleňování moderních technologií do vzdělávacího procesu a je nezbytná pro efektivní výuku digitálních kompetencí [2].

2. Výuka matematiky s využitím digitálních zařízení

Následující text poskytuje pohled na praktické aspekty výuky v konkrétní základní škole a může sloužit jako inspirace pro sborovny, předsedy a členy předmětových komisí matematiky, metodiky ICT, stejně jako pro vedení škol. Je zde představena řada nástrojů a strategií, které tato škola implementovala za účelem efektivního využívání digitálních kompetencí během výuky. Detailně je popsán způsob, jakým jsou aplikace a moderní technologie začleněny do vzdělávacího procesu v dané oblasti. Využití takto nastavených nástrojů, technologií a aplikací umožňuje plnění cílů

stanovených v platných kurikulárních dokumentech a podporuje moderní přístupy k výuce.

Ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace je v uváděné škole od třetí třídy zavedena systematická výuka s využitím digitálních zařízení. Žáci mají k dispozici počítačové učebny s desktopovými PC nebo iPady přímo ve svých třídách. Každý žák má osobní přístupový účet ke školní doméně, což mu umožňuje přihlašovat se do počítačové sítě školy, využívat cloudové služby Microsoft 365 a komunikovat pomocí školního e-mailu. Žáci rovněž využívají školní informační systém Škola OnLine.

Od čtvrtého ročníku jsou žáci vybaveni dovednostmi potřebnými pro samostatné využívání těchto platforem a aplikací. Do konce pátého ročníku si žáci osvojí schopnosti, jako hodnocení úplnosti dat, vyhledávání informací, tvorba jednoduchých tabulek a grafů pomocí platformy Excel. Pro zpracování informací v tabulkových kalkulátorech jsou schopni využívat data z webových stránek státních organizací, například z Českého statistického úřadu nebo podobných statistických zdrojů. K řešení praktických či slovních úloh a problémů pak využívají standardní nástroje operačních systémů, jako je kalkulačka, nebo aplikace na iPadech.

Tento integrovaný přístup k digitálnímu vzdělávání vede k rozvoji klíčových digitálních kompetencí, které jsou nezbytné pro úspěch žáků ve stále více digitalizovaném světě.

Na druhém stupni základní školy se žáci v rámci tematického oboru Číslo a proměnná učí efektivně využívat digitální nástroje, jako je tabulový kalkulátor, kalkulačka operačního systému a také pokročilé systémy pro symbolické výpočty, například Microsoft Math Solver a Wolfram Alpha. Tyto nástroje jim umožňují hlouběji proniknout do abstraktních matematických konceptů a efektivně řešit matematické problémy.

V oblasti Závislosti, vztahy a práce s daty se žáci naučí manipulovat s daty pomocí různých tabulkových kalkulátorů, využívat data státních úřadů, provádět výpočty s použitím vzorců a třídít data podle různých kritérií. Tato dovednost je klíčová pro rozvoj analytických schopností žáků a přípravu na další akademické a profesní využití.

Pro tematický obor Geometrie v rovině a v prostoru je zavedeno využívání dynamického matematického software Geogebra, což žákům umožňuje interaktivně prozkoumávat geometrické koncepty a řešit úlohy odpovídající jejich ročníku. V oblasti prostorové geometrie se vyučuje s využitím modelovacího software, jako je Thinkercad nebo Sketchup, doplněného o modul 3D Waterhouse pro praktické modelování. Tyto moderní technologie umožňují žákům nejen lépe vizualizovat a porozumět

geometrickým tvarům, ale také rozvíjet kreativní a projektové dovednosti při návrhu a realizaci vlastních 3D modelů.

3. Učivo „Úhel a jeho velikost“ s využitím digitálních technologií

Praktická část se zabývá konkrétní výukou v 6. ročníku na 31. ZŠ v Plzni v tematickém oboru Geometrie v rovině a prostoru ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. V této kapitole jsou formulovány konkrétní požadavky na pedagogické dovednosti učitelů, které jsou nezbytné pro efektivní vyučování tohoto předmětu. Kromě teoretických základů jsou zde stanoveny specifické požadavky na tvorbu a úpravu interaktivních appletů, které jsou integrální součástí moderního přístupu k výuce geometrie. Dále kapitola podrobně popisuje metodiku vhodnou pro zapojení žáků a zefektivnění jejich učebního procesu. Speciální pozornost je věnována praktické realizaci výuky a konkrétní práci žáků, což umožňuje lepší pochopení, jak teoretické principy proměnit v praktické dovednosti.

3.1. Rámec digitálních kompetencí učitelů

Pro účinnou tvorbu a úpravu appletů v dynamickém matematickém software je nezbytné, aby učitelé matematiky disponovali digitálními kompetencemi. Jako teoretický základ pro začlenění digitálních technologií do vzdělávacího procesu byl vyvinut na úrovni Evropské komise rámec digitálních kompetencí DigCompEdu [1]. Rámec identifikuje šest klíčových oblastí digitálních kompetencí, které by měli učitelé ovládat. Tyto kompetence zahrnují schopnost vytvářet a upravovat digitální obsah, efektivní digitální komunikaci a kolaboraci, pochopení využívání digitálních technologií a platform s důrazem na kybernetickou bezpečnost a ochranu osobních údajů, tvorbu matematických úloh a scénářů podporujících kritické myšlení a řešení problémů a nakonec schopnost využívat digitální technologie pro individualizaci výuky, sledování pokroků a poskytování zpětné vazby [2].

DigCompEdu rámec dále definuje úrovně způsobilostí, od nováčka (A1) přes objevitele (A2) a praktika (B1) až po odborníka (B2), lídra (C1) a průkopníka (C2), umožňující učitelům objektivně hodnotit a rozvíjet své digitální dovednosti. Tento audit lze provést na metodickém portálu RVP.CZ pod názvem Profil Učitel 21, kde mohou učitelé identifikovat své současné kompetence a stanovit cíle pro svůj další rozvoj [5]. Takový přístup nejen podporuje profesní rozvoj učitelů, ale zásadně přispívá k výraznému zlepšení kvality matematického vzdělávání.

3.2. Nastavení aktivity, tvorba a metodika appletů

Před zahájením výuky na platformě GeoGebra Classroom je zásadní pečlivě připravit a nastavit jednotlivé aktivity, aby tvořily soudržný celek odpovídající učebnímu plánu. Učitelé by měli aktivně využívat webovou platformu Geogebra.org pro tvorbu, ukládání a sdílení matematických projektů a vzdělávacích materiálů v cloudu. Pro využití této platformy byla vyvinuta pro žáky ukázková aktivita, obsahující sérii postupně náročnějších úloh na téma úhel a jeho velikost. Tyto úlohy byly navrženy tak, aby byly přístupné všem žákům a těm nadanějším poskytovaly rozšířené příklady, přinášející po dokončení základních úkolů další výzvy. Metoda nastavení těchto aktivit klade důraz na využití funkcí dynamického softwaru, které podporují rozvoj dovedností a znalostí žáků. Podrobný popis úkolů a aktivit umožňuje učiteli maximálně využít možnosti GeoGebra Classroom a zároveň zajišťuje, že si žáci osvojí klíčové koncepty a dovednosti potřebné pro úspěšné zvládnutí učiva.

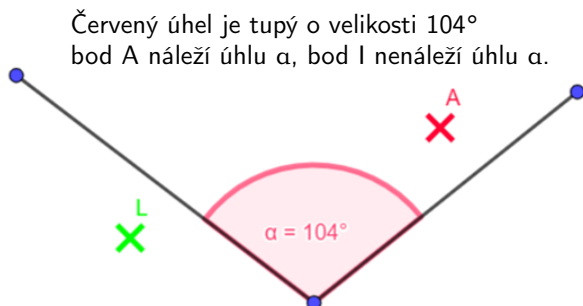
Sada úloh 1: Úhel a jeho velikost

Úvodní úloha zobrazuje úhel v rovině (obr. 1). Žák může s ramenem úhlu manipulovat a měnit velikost úhlu. Pozoruje změnu jeho velikosti a vztah k bodům, které jsou v rovině umístěny. Jedná se o základní úlohu, ve které se žák seznámí s úhlem, ramenem a vrcholem úhlu. Další úloha zahrnuje manipulaci s úhlem tak, aby věta, kterou žák přiřadí, byla pravdivá. Úloha již vyžaduje spojení znalostí a dovedností o velikosti úhlu. Navazující úloha graduje. Barvě úhlu je přiřazena věta, která zahrnuje nejen text o velikosti úhlu, ale i vztah bodu k úhlu. Žák opět manipuluje úhlem a body tak, aby věta byla pravdivá. Poslední applet této sady ukládá žákům doplnit text o ramenech úhlu a jeho vrcholu. K ověření znalostí této sady jsou stanoveny otázky na velikost úhlů. Otázky přímo souvisejí se zjištěnými skutečnostmi z předchozích úloh.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu

Učitel pro tvorbu appletů první sady sestruje úhly, znázorňuje jejich velikost, vkládá text s editací úhlů a propojuje pole pro interaktivní nastavení vztahu se zobrazovaným úhlem. Didakticky zadává úlohy podle barev textu, správně edituje body. Úlohy zadává podle náročnosti, kterou stupňuje. V poslední geometrické úloze sady využívá možnosti proměnné a vstupního pole, propojuje objekty a vkládá zaškrtačací tlačítka pro zobrazení správné odpovědi. Sada úloh je ukončena souborem otáz-

zek, jejichž odpovědi jsou v kontextu získaných znalostí uvedených úloh. V pokročilém nastavení appletu je vhodné zohlednit rozlišení obrazovky (1920 × 1080) a zobrazit ikony pro reset konstrukce.

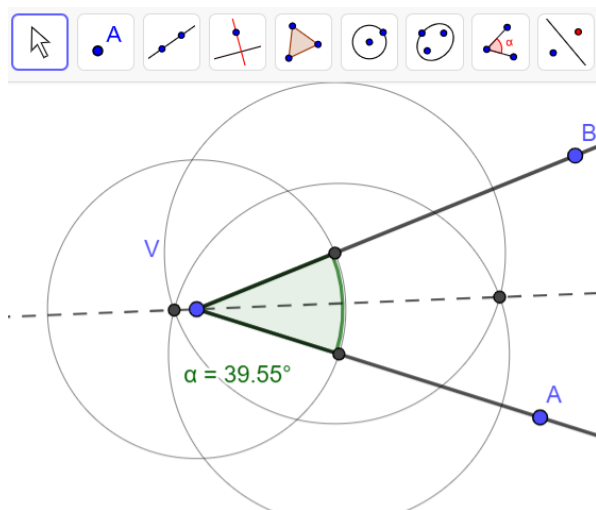


Obr. 1: Úhel a jeho velikost – řešení úlohy pomocí manipulace

Poznámka: rozlišení obrazovky je stejné u všech dalších úloh. Je závislé na technickém vybavení počítačové učebny, v níž výuka probíhá.

Sada úloh 2: Osa úhlu

Další úloha zahrnuje sadu příkladů na osu úhlu a konstrukci osy úhlu (obr. 2).



Obr. 2: Úhel a jeho velikost – práce žáka v GeoGebra Classroom

Úlohy graduují v obtížnosti řešení. V prvním úkolu mají žáci zadán úhel a sestrojenou jeho osu. S využitím nástroje *Úhel* mají změřit úhly, které vzniknou sestrojením osy úhlu. Při správném řešení zjišťují, že úhly jsou shodné. Osa úhlu rozdělí úhel na dva shodné úhly. Manipulační rameno tuto skutečnost ověřují. Druhý úkol této sady řeší žáci s využitím všech nástrojů. Nástroj *Osa úhlu* jim umožní sestrojit osu daného úhlu. V nastavení editují druh a tloušťku čáry dle získaných pravidel při rýsování. Třetí applet graduje. Žáci sestrojují osu úhlu. Mají k dispozici všechny nástroje vyjma nástroje *Osa úhlu*. Žáci tedy musí rýsovat osu úhlu tak, jak jsou zvyklí s využitím tradičních rýsovacích pomůcek z hodin. Využívají kružítko, průsečík, polopřímku. Vzniklé druhy čar editují. Tím dochází v této sadě v posunu dovedností od manipulace s objekty po získávání údajů o objektech.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu

Učitel pro tvorbu těchto appletů vytvoří sadu úkolů na osu úhlu. V nastavení volí vhodné barvy, texty, edituje druhy čar figury. Využívá správnou typografii sazby úhlů a propojuje pole. Zpřístupní žákům jen nástroje, které jsou nutné pro řešení dané úlohy. V pokročilém nastavení zobrazuje v první úloze nástroj *Ukazovátka* a *Úhel*. V druhé úloze kompletní menu (zde žák využívá nástroj *Osa úhlu*). Třetí úloha má omezené nástroje (chybí nástroj *Osa úhlu*). V konstrukci tedy využívá nástroje a postupy, které odpovídají tradičnímu rýsování z hodin matematiky a známým rýsovacím pomůckám (trojúhelník s ryskou, pravítko, kružítko).

Sada úloh 3: Vedlejší a vrcholové úhly, souhlasné a střídavé úhly

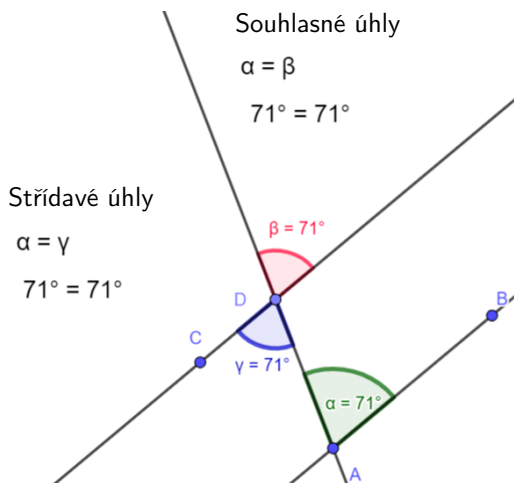
Poslední sada zahrnuje úlohy pro ověření znalostí vedlejších, vrcholových úhlů a souhlasných, střídavých úhlů [4] (obr. 3). V těchto úlohách vždy žák manipuluje s objekty a získává informace o vlastnostech dané figury. První úkoly jsou na vlastnosti vedlejších a vrcholových úhlů, druhé úkoly na vlastnosti souhlasných a střídavých úhlů. Klíčové je pozorování při manipulaci s úhly. Žák využívá manipulace k ověření získaných znalostí. Přiřazuje správné věty a vztahy jednotlivým figurám. Sady jsou ukončeny souborem otázek, jejichž odpovědi jsou v kontextu získaných znalostí předchozích sad úloh.

Digitální kompetence učitele pro nastavení appletu

Učitel pro tvorbu prvního appletu této sady sestrojí vedlejší a vrcholové úhly, označí jejich velikost. Vložené textové věty propojuje s polem.

Edituje vhodně druhy čar, využívá barev. Vhodně edituje jejich vlastnosti, označení a druhy čar tak, aby odpovídaly zadávanému označení ve výuce. Využívá své didaktické předpoklady k výuce tak, aby figura byla pro žáka zřetelná, označená v kontextu jeho znalostí.

V pokročilém nastavení obou úloh zobrazuje jen reset konstrukce.



Obr. 3: Souhlasné a střídavé úhly – zadání úlohy pro manipulaci s objekty dle správnosti

4. Podmínky realizace a ověření učiva

Případové studie se účastnili žáci 6. ročníku (VI. B a VI. C) v celkovém počtu 43 žáků. Žáci měli připraveny úkoly v GeoGebra Classroom. Odkaz pro sdílení byl uložen na síťovém disku školy. Po aktivaci je možno vyzkoušet popisovanou roli žáka a plnit uvedené úkoly [6].

Role učitele v této fázi výuky, která je realizovaná v počítačové učebně, je rolí poradce a mentora. Sleduje práci žáků, je poradcem dílčích úkolů. Na interaktivní tabuli je znázorněna činnost průběhu práce žáků (doporučeno v této fázi skrývat jména).

4.1. Hodnocení činnosti žáka, zpětná vazba

Na základě zkušeností z výuky je práce hodnocena následující hodinu. Učitel využívá zobrazovacího zařízení ve třídě a demonstruje žákům jejich činnost, úspěšně vyřešené úlohy a chyby, kterých se v jednotlivých

úlohách dopouštěli. Činnost provádí se skrytými jmény. Zároveň ihned modeluje správná řešení. Hodnocení probíhá formativně, vede k celkovému pohledu na učební látku. Následně generuje žákům nový Classroom. Odkaz dává žákům prostřednictvím školního informačního systému k dispozici a k dobrovolnému domácímu procvičení.

5. Závěr

Uvedený příklad dobré praxe přináší pohled na konkrétní řešení úloh v závěru učiva Úhel a jeho velikost v 6. ročníku základní školy s využitím digitálních zařízení. Lze konstatovat, že učitel musí být schopen efektivně pracovat s digitálními technologiemi, aby mohl plně využít potenciál těchto nástrojů ve vzdělávání. Integrace digitálních technologií do výuky poté přináší řadu výhod, jako jsou motivace žáků, personalizované učení a příprava na digitální, dovednosti nezbytné pro současný svět práce. Učitelé tímto přispívají k lepšímu a poutavějšímu vzdělávacímu prostředí pro své žáky.

Literatura

- [1] MŠMT a Národní pedagogický institut České republiky: *DigCompEdu: Digitální kompetence učitelů od teorie k praxi*. 2024, <https://revize.edu.cz/clanky/narodni-Ucitelicky-institut-cr-vydal-publikaci-michala-cerneho-digcompedu-digit>
- [2] MŠMT: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. 2024, <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>
- [3] Punie, Y., Redecker, C.: *European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu*. Luxemburg, 2017.
- [4] Tlustý, P., Huclová, M.: *Matematika s nadhledem 6: pracovní sešit pro základní školy a víceletá gymnázia*. Fraus, 2019.
- [5] Učitel 21. 2021. <https://ucitel21.rvp.cz/>
- [6] <https://www.geogebra.org/classroom/kundkprn>

Archa 21

Karel Janeček, Science21, Praha

ABSTRAKT. Článek pojednává o projektu Archa 21, což je vzdělávací projekt, který má zvyšovat občanské sebevědomí a mnoho dalších občanských změn.

Motto: Kde světlo je, tma odchází bez boje.

Jan Amos Komenský

1. Úvod

Archa 21 je dlouhodobý vzdělávací projekt, jenž přispívá k zásadním pozitivním změnám na osobní i společenské úrovni a tím k proměně všestranné hluboké krize do nové civilizační éry osobní svobody i odpovědnosti, individuální tvořivosti i spolupráce. Tým Archy 21 odvážně ukazuje možné cesty k růstu osobní síly lidí, občanského sebevědomí a svobodné občanské iniciativy, právě tak jako k posílení lidí vůči apatii, strachu, manipulaci a ovládání v době nevyhnutelných, zásadních společenských změn.

Archu 21 inicioval, financuje a na její práci se podílí Karel Janeček. Jde o ryze občanský projekt.

2. O co usilujeme

Naše úsilí v tomto projektu je zaměřeno na tyto aktivity:

- poctivé a nekompromisní poznání rozsahu a hloubky společenské a civilizační krize a jejích příčin,
- nalézání skutečných, systémových pozitivních východisek z krize,
- poukázání na společné kořeny i řešení problémů v různých společenských oblastech, a to na základě univerzalistického, syntetického přístupu, který často přináší synergii a průlom v řešeních složitých situací,
- přibývání vědomých, svobodných a aktivních lidí, odolných svou osobní silou vůči nevyhnutelným změnám a krizím, posílení lidí v občanské sebedůvěře a spolupráci, zvýšení odpovědnosti za sebe sama a nespolehání na stát,
- zvýšení odolnosti vůči apatii, strachu, manipulacím, rozdělování společnosti a předsudkům vůči lidem s jinými názory tak, aby se lidé při dalších krizích chovali vědoměji a pevněji než za covidu, aby

neopakovali destruktivní stereotypy myšlení, přístupů a chování (nedůvěra, izolace, strach, nekritická poslušnost, závislosti, ...),

- propojování lidí připravených ke změně nebo už veřejně aktivních i těch právě se „probouzejících“, právě tak jako už existujících ohnišek občanské aktivity, to vše pro dosažení synergie a zvýšení vlivu občanského, nepolitického působení ve veřejném prostoru,
- ukázky pozitivních příkladů dobré praxe jak řešit rozličné typy problémů na občanském principu, mimo oficiální struktury, a to na místní i regionální úrovni,
- nabízení naděje a vytváření společné občanské vize dobré budoucnosti, navzdory rostoucímu egoismu a silovému postupu mocenských elit.

3. Na čem stavíme

Naším cílem je zásadní změna, a proto ji stavíme na sdílení klíčových lidských hodnot. Svou vizi dobré budoucnosti opřenou o dvanáct hodnot jsme zveřejnili v dokumentu Archa 21. Patří k nim: odvaha, svoboda, zdraví, harmonie, odpovědnost, spravedlivost, radost, laskavost, soběstačnost, sounáležitost, síla a náš domov – Země. Hodnoty považujeme za neopomenutelné východisko další práce. Bez sdílených a respektovaných základních hodnot stěží dosáhneme podstatné společenské změny. Jediným skutečným pokrokem je pokrok v hodnotách.

Hluboká krize pro nás znamená nejen problém, ale i velkou příležitost. Žijeme v ojedinělé době z hlediska vývoje lidstva, v čase sociální singularity. Je to doba kolapsu stávajících společenských struktur a šance na přechod do nové civilizační éry.

Stavíme rovněž na důvěře v občanskou cestu společenské renesance. Jsme přesvědčeni, že prospěšná, synergická řešení začínají na úřadech ani v parlamentu, ale u každého z nás. O nezbytnou změnu se musíme zasloužit sami. Budoucnost záleží na úrovni vědomí každého z nás, na tom, čemu věnujeme to nejdražší – svou pozornost. Záleží i na naší odpovědnosti a spolupráci.

4. Co děláme

Pracujeme paralelně ve dvou hlavních směrech.

4.1. Galaxie učení – cyklus Kde jsme a kudy dál

Mapujeme současné klíčové společenské a civilizační problémy a výzvy a hledáme cesty z krize směřující k podstatným, systémovým pozitivním změnám. Analyzujeme a navrhujeme řešení v klíčových problémových oblastech. Vybrali jsme oblasti, které zrcadlí stav společnosti, např. psychické i fyzické zdraví, vědu, občanská práva, média a internet, ekonomiku a podnikání, instituce a mezilidské vztahy aj. Za covidové krize utrpěly tyto sféry zřetelným prohloubením a urychlením už existujících potíží. Nerozebíráme podrobně covidovou dobu, ale slouží užitečnými příklady, které máme všichni v čerstvé paměti – příklady zřetelně manifestujícími slepé uličky, kterými bychom se (pokud znatelně nezměníme kurz) bezpochyby ubírali k civilizačnímu kolapsu.

Dokumenty mají podobnou strukturu, obsahují analýzu současného stavu v dané oblasti, zhodnocení vlivu covidové doby na ni, návrhy řešení a existující pozitivní příklady (příklady dobré praxe). Dokumenty připravují odborníci ze zmíněných oblastí a doplňuje je širší okruh expertů z jiných oborů tak, aby poskytovaly komplexní pohled. Dokumenty slouží jako podklad k odborné i veřejné diskusi.

Plánujeme posvítit si blíže na řadu různých oblastí s předpokladem, že zásadní příčiny problémů i navržená řešení budou podobná napříč různými společenskými oblastmi. Taková společná řešení by byla v chaosu a kakofonii současné doby užitečnou kotvou i inspirujícím odrazovým můstkem.

4.2. Galaxie spolupráce

Tak velkou výzvu nelze uskutečňovat bez vzájemně prospěšné spolupráce. Proto vyhledáváme partnery na mnoha úrovních – odborníky pro cyklus Kde jsme a kudy dál, veřejně známé osobnosti pro šíření naší mise i aktivní partnery, kteří už přispívají ke společenským změnám. V další etapě plánujeme podporovat nositele pozitivních společenských změn na místní úrovni v regionech (příkladná občanská ohniska). Vycházíme z toho, že konkrétní pozitivní příklady a příběhy jsou nejsilnější inspirací pro osobní i společenskou změnu.

5. Koho oslovujeme

Archa 21 propojuje aktivní hybatele změn a jejich skupiny pro posílení synergické spolupráce i pro pěstování spolupráce jako perspektivní hodnoty namísto soupeření.

Archa 21 mluví k lidem, kteří už jsou si vědomi nezbytnosti osobních i společenských změn a pracují na nich. Oslovujeme lidi, kteří nečekají na pomoc státu a „autorit“, ale nacházejí ji sami u sebe. V náročném, chaotickém procesu změn mohou však dočasně ztratit sílu či směr a pomůže jim povzbuzení a perspektiva.

Archa 21 může být jako kompas nápomocná lidem, kteří se právě probouzejí ve své osobní síle a hledají inspiraci, směr a praktické příklady pozitivní občanské iniciativy.

Archa 21 chce být nápomocná přibývajícím lidem, kteří u vědomí domáčího, evropského i globálního dění ztratili či ztrácejí důvěru v politiku a stát. Bylo by zlé, kdyby propadli apatii, nihilismu či extrémismu.

6. Příloha

Archa 21 reaguje na společenskou situaci. Vychází ze současné velmi nepříznivé společenské situace, již prohloubila a urychlila globální covidová krize. Pozorujeme probíhající kolaps západní civilizace, kterému se nechceme ani nemůžeme vyhybat. Chceme ovšem proměnit krizi v příležitost k nezbytně hlubší osobní i společenské proměně dříve, než negativní trendy dosáhnou ještě destruktivnější intenzity.

Žijeme v době, kdy jedna krize prolíná druhou. Nejhlubší i nejširší blízkou zkušeností s dopady do životů miliard lidí měla covidová doba, která odhalila slabiny i potenciál naší civilizace.

Na covidovou krizi nejvíce doplatily děti především dlouhodobou izolací, která má dodnes vážné následky na jejich duševním zdraví. Také utrpěly očkováním, jež bylo u dětí až na naprosté výjimky zcela zbytečné, což bylo známo už tehdy. Situace, kdy děti byly obětovány kvůli tomu, že dospělí podlehli systémové manipulaci strachem, se už nikdy a za žádnou cenu nesmí opakovat.

6.1. *Galaxie učení – cyklus Kde jsme a kudy dál*

Podle drtivé většiny lidí je česká společnost v krizi, lidé si nedůvěřují navzájem ani nevěří politikům, ubývá spravedlnosti a covidová krize prohloubila rozdělení společnosti. Naštěstí překvapivě velký počet lidí se chce podílet na pozitivní změně. Níže jsou klíčové výsledky z průzkumu agentury Median z listopadu 2023, který zadal tým Archy 21.

- Podle 90 % občanů je společnost rozdělena, panuje v ní nedůvěra a přibývá psychických problémů a depresí.

- 80 % lidí uvádí, že společnost je v krizi, že politici nás rozdělují a že během covidové doby jsme podlehlí strachu.
- 75 % obyvatel si myslí, že během covidu docházelo k omezování svobody.
- Podle 70 % je v krizi západní společnost.
- 60 % lidí uvádí, že do našich životů se vrací cenzura a omezování svobody projevu.

6.2. *Průzkum přinesl i nadějně signály*

Předchozí i následující informace lze najít na stránkách [1] .

- Dvě třetiny lidí by uvítaly celospolečenskou diskusi a zhodnocení covidové doby, abychom se z ní poučili a vyvarovali vážných problémů.
- Téměř 80 % lidí si přeje celospolečenskou diskusi s cílem přinést konkrétní řešení pro obnovení důvěry mezi lidmi a spojení rozdělené společnosti.
- Na projektech pro zlepšení společenské situace v ČR je připraveno se aktivně podílet 11 % lidí a do diskuse se zapojit 36 % lidí.

7. Závěrečné shrnutí

Trvalou léčbu dle psychiatrů potřebuje přes 700 000 lidí. Počet lidí s depresemi či úzkostmi se za poslední dva roky ztrojnásobil, dramatický je nárůst hlavně u mladistvých. Polovina žáků a žákyň devátých tříd trpí středně silnými až silnými depresemi.

Literatura

- [1] https://www.median.eu/cs/wp-content/uploads/2023/11/MEDIAN_TZ_17_listopad_a_stav_ceske_spolecnosti_V03.pdf

Mathesso – inovativní nástroj v matematice formou hry

Jiří Kačírek, Markéta Stejskalová, Science 21, Praha

ABSTRAKT. *Tento článek představuje hru Mathesso, která byla navržena s cílem aktivovat kognitivní procesy zodpovědné za vznik a rozvoj matematické intuice. Hra využívá principů klasického peresa, avšak s důrazem na matematické koncepty, čímž podporuje podvědomé osvojování aritmetických operací u dětí i dospělých. Současně přináší inovativní přístup k rozvoji schopnosti rozpoznávání numerických vzorců a vztahů mezi čísly, čímž podporuje rychlé rozhodování a logické myšlení [4].*

1. Úvod

Matematická gramotnost je klíčovou součástí vzdělání a hraje zásadní roli v každodenním životě [5]. Přesto mnoho studentů vnímá matematiku jako abstraktní a složitou disciplínu, což často vede k obavám a neochotě ji studovat. Tradiční metody výuky mohou být pro některé žáky méně efektivní, neboť postrádají hravý a intuitivní přístup.

Hra Mathesso byla vyvinuta jako odpověď na tyto výzvy a usiluje o překlenutí propasti mezi teorií a praxí prostřednictvím interaktivního a zábavného formátu. Jejím cílem je nejen pomoci dětem osvojit si základní matematické operace, ale také podpořit hlubší pochopení matematických vztahů a principů [1, 4]. Díky kombinaci herního prvku a vzdělávacího obsahu se Mathesso stává silným nástrojem pro učitele, rodiče i studenty všech věkových kategorií.

2. Koncept hry Mathesso

Základní myšlenka Mathessa spočívá v aktivaci kognitivních procesů odpovědných za vznik a rozvoj matematické intuice. Hra je navržena tak, aby děti mohly přirozeně a nenuceně vnímat struktury a vzorce číselných operací, aniž by se musely spoléhat na memorování pravidel [3]. Pomocí bazální aritmetiky přibližuje dětem klíčové matematické pojmy, jako jsou násobení, mocniny, prvočísla nebo Fibonacciho posloupnost.

Výhodou Mathessa je, že dokáže stimulovat matematické myšlení na podvědomé úrovni. U dětí předškolního a mladšího školního věku se hraním této hry rychle vytváří tzv. páteří aritmetický systém, který slouží jako pevný základ pro další matematické vzdělávání. Děti nepotřebují

znát jediné číslo, a přesto postupně pochopí základní vztahy mezi čísly a naučí se s nimi intuitivně pracovat.

Na rozdíl od tradičních výukových metod Mathesso integruje vizuální a hmatové prvky, které podporují aktivní zapojení dětí a jejich schopnost asociativního učení. To vede k lepšímu uchování informací a přirozenějšímu přístupu k matematice jako celku.

3. Prospěšnost pro různé školní a věkové kategorie

Mathesso lze efektivně využít napříč různými věkovými skupinami (obr. 1):



Obr. 1: Hra Mathesso skládající se z mnoha kartiček

- **Předškolní děti:** U nejmenších hráčů podporuje rozvoj základní numerické gramotnosti, pomáhá jim pochopit pojmy jako větší/menší, množství a jednoduché aritmetické operace.
- **Žáci prvního stupně základní školy:** Hra pomáhá při osvojování základních matematických operací, jako je sčítání, odčítání, násobení a dělení. Díky vizuální podpoře usnadňuje pochopení složitějších matematických principů.
- **Žáci druhého stupně základní školy:** Mathesso slouží jako výborný nástroj pro zdokonalování rychlosti počítání a rozpoznávání vzorců v číslech. Díky rozšířeným variantám kartiček se žáci učí faktoriály, mocniny a Fibonacciho posloupnost.

- **Středoškoláci a dospělí:** Pro pokročilejší hráče hra nabízí hlubší pochopení abstraktních matematických konceptů a pomáhá v rozvoji logického myšlení a kombinatorických dovedností. Mathesso může být využito i v přípravě na matematické soutěže a olympiády.

4. Herní mechanismus

Pravidla hry se podobají klasickému pexesu, avšak s několika klíčovými rozdíly zaměřenými na matematické koncepty. Herní balení obsahuje sedm základních skupin kartiček, které se liší grafickým zpracováním a matematickým významem. Každá skupina má vlastní postup, podle kterého hráči hledají identické kartičky [4]:

- **Malá násobilka:** Kartičky mají na černobílé straně činitele násobení a na barevné straně výsledek jejich součinu.
- **Druhé mocniny:** Kartičky zobrazují na černobílé straně základ mocniny a na barevné straně výsledek umocnění.
- **Prvočísla:** Kartičky obsahují stejné číslo na obou stranách, přičemž barevná strana má specifické pozadí.
- **Fibonacciho čísla:** Podobně jako u prvočísel kartičky zobrazují stejné číslo na obou stranách s odlišným grafickým zpracováním.
- **Faktoriály:** Kartičky mají na černobílé straně číslo nebo symbol faktoriálu a na barevné straně výsledek této operace.
- **Nuly:** Kartičky zobrazují na barevné straně nulu s průsvitným číslem na pozadí, které odpovídá číslu na černobílé straně.
- **Cooperova–Janečkova varianta:** Speciální kartičky, které reprezentují specifické matematické vztahy a podporují hlubší pochopení abstraktních pojmů.

5. Program Mathesso do škol

V rámci iniciativy na podporu matematického vzdělávání se Nadace Science 21, pod vedením Karla Janečka, rozhodla darovat hru Mathesso do každé školy, dětského domova a dalších vzdělávacích institucí. Cílem tohoto programu je poskytnout pedagogům a vychovatelům efektivní nástroj pro výuku matematiky, který je zábavný a zároveň edukativní [4].

Školy a organizace, které mají o hru Mathesso zájem, mohou jednoduše vyplnit formulář dostupný na oficiálních webových stránkách programu. Po odeslání žádosti budou kontaktovány ohledně doručení nebo

osobního předání hry. Tento přístup usnadňuje integraci Mathessa do výuky a podporuje jeho rozšíření napříč vzdělávacími institucemi.

Program Mathesso do škol již obdaroval více než 1 200 institucí touto hrou, což svědčí o jeho úspěchu a pozitivním přijetí ve vzdělávací komunitě. Díky této iniciativě mají tisíce studentů možnost zažít matematiku jinak – hravě, interaktivně a s důrazem na rozvoj logického myšlení.

Integrace Mathessa do školního prostředí přináší řadu výhod. Učitelé mohou hru využít jako doplňkový nástroj k tradiční výuce, což obohacuje pedagogický proces a zvyšuje angažovanost studentů. Navíc hra podporuje spolupráci mezi žáky, rozvíjí jejich komunikační dovednosti a posiluje týmového ducha.

Celkově program Mathesso do škol představuje významný krok směrem k modernizaci výuky matematiky a podporuje inovativní přístupy ve vzdělávání. Díky němu se matematika stává přístupnější, srozumitelnější a především zábavnější pro všechny věkové kategorie studentů (obr. 2).



Obr. 2: Hraní Mathessa ve škole

6. Mistrovství České republiky v Mathesso

Nadace Science 21 vyhláší postupovou soutěž pro žáky základních škol s názvem Mistrovství ČR v Mathesso. Tato soutěž je navržena tak, aby podpořila zájem o matematiku a logické myšlení mezi mladými studenty prostřednictvím hry Mathesso.

6.1. Struktura soutěže

Soutěž je rozdělena do několika fází:

1. *Školní kola*: Každá základní škola může uspořádat vlastní interní turnaj, ze kterého vzejdou vítězné týmy postupující do dalších kol.
2. *Krajská kola*: Vítězné týmy ze školních kol se utkají na úrovni krajů, kde budou soutěžit o postup do celostátního finále.
3. *Celostátní finále*: Nejlepší týmy z krajských kol se setkají v celorepublikovém finále, kde budou soutěžit o titul mistra České republiky v Mathesso.

6.2. Cíle soutěže

Mistrovství ČR v Mathesso si klade za cíl:

1. Podpořit zájem žáků o matematiku a rozvoj jejich logického myšlení.
2. Posílit týmovou spolupráci a komunikaci mezi studenty.
3. Nabídnout zábavnou a interaktivní formu soutěže, která propojuje vzdělávání s hrou.

6.3. Účast a registrace

Školy, které mají zájem se do soutěže zapojit, mohou získat více informací a registrovat své týmy prostřednictvím oficiálních webových stránek Mathesso.

Tato soutěž představuje jedinečnou příležitost pro žáky základních škol zapojit se do matematického soutěžení v přátelském a podporujícím prostředí (obr. 3).

Závěr

Mathesso představuje inovativní nástroj pro výuku matematiky, který kombinuje zábavu s efektivním učením. Díky svému jedinečnému přístupu má potenciál změnit způsob, jakým děti i dospělí vnímají a učí se matematiku, a přispět tak k rozvoji matematické gramotnosti ve společnosti. Hra se osvědčila nejen v domácím prostředí, ale i ve školních a volnočasových centrech, kde podporuje kreativní myšlení a schopnost rychlého rozhodování v matematických úlohách [4].



Obr. 3: Vítěz soutěže Mistrovství ČR v Mathesso

Literatura

- [1] Boaler, J.: *Mathematical Mindsets*. Jossey-Bass, 2016.
- [2] Butterworth, B.: *The Mathematical Brain*. Macmillan, 1999.
- [3] Dehaene, S.: *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press, 2011.
- [4] Janeček, K. & Science 21: *Mathesso.cz: Inovativní hra pro matematickou gramotnost*. Nadace Science 21, 2024.
- [5] OECD: *PISA 2018 Results: What Students Know and Can Do*. OECD Publishing, 2019.

Variabilita úloh k zobecnění – vliv na volbu strategií

Michaela Kaslová, PedF UK, Praha

ABSTRAKT. *Pro nadprůměrné žáky, nadané či dokonce pro prokázané talenty chybí v dostupných didaktických materiálech dostatek úloh, ve kterých by po vyřešení určité entity úloh měli dostatek podkladů pro zobecnění. Na relativně jednoduchém problému se pokusíme z didaktického pohledu ukázat, jaké problémy mohou být spjaté při zobecňování v sérii úloh s podobným kontextem, jak dalece jsou řešitelé ve stejném kontextu schopni reagovat ve svých strategiích na změny podmínek.*

1. Úvod

Nadprůměrní žáci od prvního stupně ZŠ nemají v didaktických materiálech dostatek podnětů pro rozvoj, jak plyne z analýz používaných učebnic matematiky a pracovních sešitů pro 1. st., chybí dostatečně pestrá škála otázek [3] a témata, která by nadprůměrné zaujala a žáci by je považovali za smysluplné. Není ani dostatek úloh pro zobecnění [4, 5]. K zobecnění vzhledem k našim učebnicím matematiky dominantně dochází např. u řešení „tabulek“. Hlavní roli hraje učitel, který může na souvislosti mezi „rozsetými“ úlohami upozornit.

Pokud se v učebnicích zaměříme na slovní úlohy, vidíme v seznamovací fázi série podobných úloh, což vede k jisté motivační blokaci. U většiny žáků po prvních řešeních podobných úloh bez následné diskuse dochází k dílčímu zobecnění, ne vždy správnému, ale často trvalému. Nadprůměrný žák má, na rozdíl od ostatních, brzkou potřebu kontrastu, aby lépe proces zobecnění zpracovával, korigoval. Nepotřebuje významnější rozdíly mezi podobnými úlohami, ale dobře vedenou diskusi ke komparaci. V praxi při absenci dostatečné diskuse (na rozdíl např. od Belgie) může snadno docházet ke vzniku často nechtěných „kontextových řešitelských strategií“.

Z uvedených důvodů budeme sledovat řešitelské strategie ve vybraném variujícím kontextu již od nadprůměrných dětí předškolního věku, které dosud navštěvují mateřskou školu (nenastoupily do školy o rok dříve), až po žáky 2. st. ZŠ.

Cílem příspěvku je na vybraných aktivitách, v jednom situačním kontextu: a) sledovat proces zobecňování, jeho variabilitu v závislosti na obměnách úloh, b) identifikovat různé strategie jak úspěšných, tak méně

úspěšných řešení. V některých situacích chci poukázat na úskalí a případně odlišit řešení nadprůměrných žáků od nadaných či dokonce talentů.

Talentem chápeme nadaného žáka, který je navíc vybaven osobnostní charakteristikou, která umožňuje nadání projevovat, rozvíjet a současně v daném procesu vidět smysl, primárně cítit z úspěchu radost nezávisle na vnějším hodnocení. Jsem si vědoma toho, že talenti rádi zkoumají spíše série úloh do hloubky, nebo komplexní problémy, izolované nové zajímavé typy úloh chápou častěji jako východisko z nouze v rámci snahy učitele individualizovat výuku.

2. Východiska

Vycházíme z toho, že každý zdravý jedinec je schopen zobecňovat [4] úměrně úrovni svého intelektového rozvoje a že je schopen se tomuto procesu učit, respektive tento proces vědomě zlepšovat.

Pro jedno z prvních testování schopnosti zobecňovat jsem zvolila jedno z „kouzel“ ze hry pro děti od 7 let *Malý kouzelník* z roku 1979. Princip tohoto kouzla vychází z vlastností hrací kostky a ze souboru pravidel provázaných na postup kouzlení: Jedna osoba, zadavatel, staví věž z českých hracích kostek, na kterých je vždy součet počtu ok na protějších stěnách roven 7, tak zvané „pravidlo 7“ (obr. 1). Všechny hrací kostky ve hře mají tutéž síť z pohledu umístění ok na stěnách (např. pro polské hrací kostky to neplatí). Zadavatel při stavění věže o půdorysu 1 × 1 klade na sebe hrací kostky a dodržuje pravidlo doteku: kostky se vždy dotýkají jen stěnami se stejným počtem ok. Výška věže je libovolná. Zadavatelovu výstavbu věže kouzelník nepozoruje. Je-li věž dokončena, kouzelník je zavolán, věž si pouze prohlédne a určí, kolik ok je na stěně věže, která se dotýká podložky (která je vespod). V praxi kouzelníkovi stačí dva kroky: a) podívat se jen na horní stěnu věže, b) zjistit, z jakého počtu kostek je vystavěna (sudého či lichého).



Obr. 1: České kostky

Zobecnění principu, na kterém „kouzlo“ stojí: U sudého počtu kostek je zespodu stejný počet ok jako nahoře, u lichého počtu kostek ve věži počet ok zespodu zjistíme tak, že od sedmi odečteme počet ok, která vidíme nahoře. S oporou o algebrau předpokládejme hranu hrací kostky o velikosti $a = 1$ a označme v výšku věže a n počet kostek na sobě ve věži/hranolu. Písmenem x označme počet ok na horní stěně hranolu, písmenem y počet ok na spodní stěně hranolu. Pak platí $y = x$ pro sudé v a $y = 7 - x$ pro liché v . Jedná se de facto o hranol z n kostek o rozměrech $1 \times 1 \times v$. Od mluveného shrnutí vyžadují na 2. st. ZŠ přechod k zobecnění v grafické podobě přibližně v této podobě, a to u talentů od 6. ročníku, od ostatních od 8. r. ZŠ [3]; trénujeme tak transformaci komunikačních kódů.

Zajímavostí tohoto typu problému je, že řešitel musí současně či střídavě pracovat s relativně malými čísly a přitom řešit prostorové problémy. Takové řešení problému jak neurologové, tak psychologové (například [1]) označují za proces stojící na spolupráci obou hemisfér. Pokud chceme ještě po řešiteli dialog obsahující argumentaci, aktivizuje se výrazně řečové centrum. Jde tedy o komplexní aktivity, které v diagnostice dle mých letitých zkušeností (viz sborníky Ani jeden matematický talent nazmar) pomáhají snadněji identifikovat nadané, dokonce i talentované žáky, protože se na typu po sobě následujících úloh musí podílet i osobnost žáka, jeho trpělivost, „zařatost v tahu na branku“, otevřenost, schopnost vyrovnat se s překážkami, hledat mimo „naučené“ cesty, tedy tvořit. Jak uvádí [10], je tvořivost v matematice nutnou podmínkou pro porozumění. Máme problémové úlohy vyžadující tvořivost žáka? Sledujme autorskou řadu úloh, která by toto měla splňovat.

Ve všech následujících šetřeních byly sledovány děti mateřských škol, které učitelé identifikovali jako nadprůměrné, případně děti zájemci. Podobné to bylo i u žáků ZŠ. Někdy šlo o práci s jednotlivci, jinde se zapojilo více žáků. Proces řešení probíhal v rámci samostatné práce řešitelů, aby bylo možné zmapovat specifické přístupy. Pokud byl zájem, probíhala po dokončení diskuse k řešení nejdříve jednotlivě, případně ve skupině. U každého šetření popíšeme strategie, které se v dané sérii aktivit objevily poprvé. To nevylučuje situaci, kdy řešitel použije strategii.

3. Šetření 1 – úvodní

Prezentuji vývoj problému a současně i vývoj úrovně řešení v závislosti na věku řešitele. Kouzlo z Malého kouzelníka jsem „hrála“ v období

leden až květen v roli kouzelníka s dětmi před vstupem do školy (dětí od 5 let a 3 měsíců do 6 let a 7 měsíců). Jde o sběr dat za 4 roky [3, 4]. U 5 % sledovaných předškolních dětí došlo k zobecnění po čtyřech až šesti ukázkách věží, kdy děti stavěly a já „hádala“. Jazyk zobecnění se samozřejmě lišil od jazyka matematiků, např.:

C(chlapec)1: *Co je tady, je i tam, ale když přidám jednu (kostku), tak je to jinak, pak zase stejně a jinak a stejně a tak.*

D(dívka)3: *Když je tam jedna kostka a má nahoře šestku, (je) dole... jedna, když (mám) dvě kostky a nahoře je šestka, (je) taky dole... (chápejme: přidám-li jednu, pak) je dole jednička,... zas šestka,... zas jednička (kýve do rytmu hlavou), zase šestka,... zas jednička, chachacha!*

Na řešení přicházely spíše děti „bystré“ než starší, některé svými závěry překvapily, protože se do té doby jevily svému okolí nevýrazné. To je pro některý typ nadprůměrných typické, že nejeví zájem o snadné aktivity a jsou pak okolím podceňovány, chybně diagnostikovány, až utlučovány, třeba jen relativně nízkou úrovní podnětů. To, že je problém zaujal, dávaly najevo nejen úrovní odpovědi, ale i projevy nadšení, či přechodu od role dítěte do role kolegy včetně tykání (MK). Např.:

D7: *To je dobrý! ... Když jsou na sobě dvě, je dole šestka (jako nahoře), když tam dám věž... znova (chápejme dvě věže ze dvou kostek na sebe), bude to stejný a taky tři věže, čtyři (věže zde dvou kostek).*

MK: *Co když nedáš na sebe dvě a zas dvě, ale dvě a jednu?*

D7: *Nó... to je jinak! Že jo?!*

MK: *A jak to je?*

D7: *Tak si to vyzkoušej! ... (staví ze 3, pak z 5, pak 6 a přidá 1) je tam furt, jak... nó, furt jednička, koukej!*

U předškolní věkové skupiny jsme někdy naráželi na to, že pro ně neexistuje to, na co nevidí, což je pro tento věk typické, ale co také odlišuje běžnou populaci od dětí nadaných. Ti žádné vysvětlení o schovaných puntíciích nepotřebují. V jistém směru zde u některých dětí figurovala magičnost, typická pro daný věk. V momentě, kdy jsem opustila roli „hádačického kouzelníka“ a přešla do role hádačického učitele, víc než ve třetině případů mi děti dávaly najevo, že kouzelník na řešení přišel svojí magií, ale učitelka „to musí vymyslet“. Ona magičnost brání dětem v přemýšlení a odkrývání, jak na to kouzelník-hadač přišel. Role učitele při hádání je obecně pro danou situaci vhodnější než role kouzelníka. Toto ovšem u nadaných dětí nefunguje.

Zvlášť byla vyzkoušena zjednodušená aktivita určená všem zúčastněným předškolákům, bez jakékoli selekce, v rámci oslav Mezinárodního dne matematiky na PedF UK v roce 2023. Zde jsme pracovali zpočátku jen s jednou kostkou a děti měly zjistit bez manipulace, kolik ok se skrývá na spodní straně kostky, která před nimi ležela, a to i přestože nikdo z dospělých pozorovatelů nevěřil, že to děti zvládnou. I zde se vyčlenily děti, které hádaly. Jiné obhlížely kostku ze všech stran, evidentně uvažovaly, a pak odpovíděly. V argumentaci se vyskytly dva typy:

a) *Dole je... pět, protože ho nikde (na stěnách) nevidím.*

b) Dvě děti již při prohlížení kostky před hádáním zjistily, že jsou na kostce „proti sobě“ zvláštní dvojice (*kamarádi, ...*). Jeden chlapec dodal, že to je *pořád sedm puntíků* (ok).

Dětem obou skupin a), b) jsme následně nabídli hádání počtu ok na spodku kouzelné věže postavené ze dvou kostek. Dvě děti ze tří nejvýše do 30 vteřin správně odpověděly, i když jsme věž obměnili (poprvé bylo nahoře šest, následně tři, nakonec pět). Jak na to děti přišly, je někdy těžké jednoznačně odpovědět, protože předškolní děti nejsou běžně v mateřské škole zvyklé na argumentaci. Připadalo jim to jasné nebo necítily potřebu o tom mluvit, když bylo jasné, že my to víme. Situace byla poučná především pro asistující studenty. Aktivita zkoumání kostky jako nultá fáze [4] by, dle mého názoru, měla předcházet sledovaným složitějším aktivitám.

V šetření, které bylo prováděno v mateřských školách vždy individuálně, se některé děti (např. D7) spokojily se zobecněním odhalení počtu ok pro sudý počet kostek v kouzelné věži a intuitivně chápaly, že pro další situace to bude platit jinak. To, že pracovaly se sudostí a lichostí, se prokázalo i jinou formou než slovně. Např.:

C21: *Já na to chci kostky zelený a červený.*

MK: *Proč?*

C21 (ukazuje): *Přijdu na to hned!*

Zde se projevuje, do jisté míry zákonitě, ještě nezkušenost argumentovat mluvou. Dítě přenáší mluvní argumentaci do jiných, nejčastěji smíšených, komunikačních kódů především v komunikaci s dospělým, kterého považuje za chytřejšího. Tehdy kombinuje různé komunikační strategie se strategií „domysli si“, nebo „vždyť víš, jak to myslím“. Tato komunikační strategie je více intuitivní než cíleně vědomá. U nadprůměrných smíšená komunikace přetrvává i na ZŠ tak dlouho, pokud jim to okolí

uznává, protože rovnou vyhodnocují dospělého jako schopného komunikovat a situaci pochopit.

Děti byly výrazně úspěšnější v případě sudého počtu kostek na výšku, někdy uvažovaly a usuzovaly, někdy jen hádaly, co je právě napadlo. Zde se rychle oddělily děti, které si uvědomily vztah mezi hodnotami horní a spodní stěny věže. To nutně neznamená, že by chápaly, že je součet počtu ok na protějších stěnách kostky stále roven 7. Některé děti tvrdily, že jsou čísla v (za)daných dvojicích (6,1), (5,2), (4,3). Objevování strategie je vázáno na rozvinutější pozorovací schopnosti, vztahové vnímání a myšlení a v neposlední řadě i na paměť. Schopnost najít správné řešení se prudce snižovala s nárůstem počtu n kostek ve věži, počínaje $n = 2$. Pro $n = 2$ fungovala strategie především nezávisle na tom, jaký počet ok jsem volila na horní stěně. U $n = 3$ již některé nadprůměrné děti dopředu hlásily, že tam „to bude jinak“. Pokud se děti mohly věže ze strany dotýkat a mluvit u toho (musely být k tomu vybídnuty, protože na to nejsou z mateřské školy zvyklé), řešení zpravidla našly. Pro $n = 4$ byla rychlost správného řešení u sledovaného vzorku o něco málo vyšší. Bylo zcela zřejmé, že lichost, ač termín neznají, je v daném typu úkolu chápána jako obtížnější, ať již byly děti v roli zadavatele, nebo hadače. Je otázka, jak dalece to souvisí s vnímáním rytmů v hudbě, kde se ukazuje, že sudé rytmy dítě vnímá rychleji a lépe se v nich orientuje než v rytmech lichých. Přes zaujetí je tato činnost unavila. Relativně rychle vyžadovaly výměnu rolí, to znamená zpětné zadávání úkolu mně.

Čtyři děti, zřejmě z důvodů potřeby rozsáhlejší koncentrované zkušenosti z pozorování pro přechod od hádání k uvažování, vyžadovaly výměnu rolí, jiné rovněž, ale spíše pro snadnost dané role zadavatele či pro snahu vyhnout se chybě, narušení sociálních vazeb. I výměna rolí může odhalit, jak dítě nad situací uvažuje. Např.:

D18: *Ted' ti to dám těžký!* (věž byla postavena ze 7 kostek).

MK: *Dej mi to ještě těžší!*

Dívka staví novou věž z 11 kostek, pak ze 13 (ale ta padá). Evidentně se zaměřila na lichý počet. Zde je vhodné poznamenat, že učitelky v mateřských školách vědomě na zobecňování necílí, výjimkou je hledání společných vlastností věcí nebo obrázků.

Zdůrazňuji, že dětí, které si nějakým způsobem všimly výhod sudosti, bylo méně než polovina, avšak ne nutně zobecňovaly, hodnocení bylo možná na úrovni dojmu. Některé z dětí se domnívaly, že „kouzlo“ platí „jen někdy“, nebo rozlišovaly zadání „hezky a hnusný hádanky“, jindy

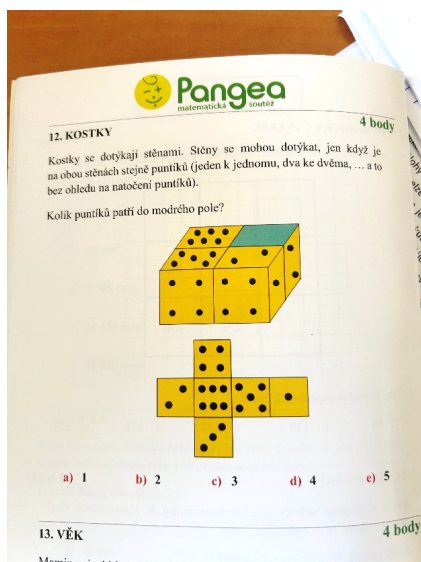
hodnotily obtížnost; to v případě, že jsou hodnoty stejné nahoře i dole „někdy lehčí“. Některé hodnotily emotivně, že věž ze dvou, čtyř (kostek) je „hezka“ a podobně. Dvě děti toužily po samostatné badatelské činnosti, dialog je rušil v zobecňování, např.:

C9: *Nech mi kostky, já si to budu zadávat sám.*

Na prvním stupni ZŠ je v 1. a 2. ročníku situace podobná, avšak mírně narostl počet dětí, které pronikly do podstaty „kouzla“ a mluvní argumentace byla srozumitelnější.

Dominovala strategie sudá–lichá, i když nedokonale a zatím převážně na intuitivní úrovni. V této fázi stále zůstávala otevřená otázka, zda a jak budou žáci u složitějších úloh s kostkami využívat kontextové strategie a jak se vyrovnají se situací, kdy nebude přenos prvních zobecnění z rané zkušenosti plně fungovat.

Nezávisle na tomto sledování byly v letech 2017 a 2018 do soutěže Pangea [13] zařazeny do školních i do finálových kol průřezové úlohy, které řešili finalisté ve věku 10–16 let. Měli na obrázku hranol o čtvercovém půdorysu a výšce $v = 1$, který byl poskládan podle „kouzelnických“ pravidel. Cílem bylo určit počet puntíků na prázdné stěně vybrané kostky (obr. 2a).



Obr. 2a: Úloha ze soutěže Pangea

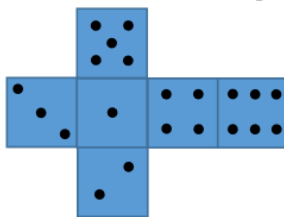
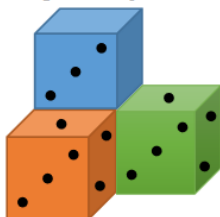
Úspěšnost řešení další úlohy č. 22 2018 (obr. 2b) v 5. r. byla 23 %. To potvrdilo, že problém je nosný, žáky zajímá a že lze daný problém gradovat nejen pro talenty, ale prokazatelně i pro nadprůměrné, i když byl čas řešení limitován.

22. KOSTKY

6 bodů

Máme čtyři kostky: žlutou (tu nevidíme), oranžovou, zelenou a modrou. Dávali jsme je k sobě stěnami podle pravidla: stěny, které se dotýkají, musí mít na sobě stejně puntíků. Umístění puntíků na všech kostkách je stejné jako na síti krychle.

Kolik puntíků je na modré shora a kolik na modré z boku zprava?



a) 4; 1

b) 1; 2

c) 4; 2

d) 5; 1

e) 5; 6

Obr. 2b: Úloha ze soutěže Pangea

4. Šetření 2

Dětem z prvního šetření (2017) a dále žákům vyšší věkové kategorie 6–9 let jsem v obou případech zadala stejný úkol, který měl ověřit, zda a do jaké míry chápou na kostce „pravidlo 7“, a k tomu jsem přidala vlastní pravidla.

Zavedla jsem pojem „hodnota povrchu“, který značím písmenem H . Hodnota H představuje počet všech ok na povrchu tělesa (nikoli stavby), které skládáme dle stejných pravidel jako kouzelníkovu věž. Vzhledem k tomu, že u jednoho tvaru kompozice hracích kostek se mohou v jednotlivých případech H lišit, zavedla jsem pro daný tvar kompozice maximální možné $H_{\max}$ a minimální možné $H_{\min}$.

V prvním šetření jsme se soustředili na věž $1 \times 1 \times v$, kde v je výška věže; zde $v = n$, výška odpovídá počtu n kostek. Nejdříve jsem po řešitelích požadovala, aby přišli na to, jak to udělat, aby postavili věž (ze zadaného n) tak, aby pro dané $n > 1$ byla hodnota H co největší, nebo

naopak co nejmenší. Pro stavbu věže platí stejná pravidla jako v Malém kouzelníkovi. Všichni, až na 6 řešitelů, začali hledat $H_{\max}$ a $H_{\min}$ pro $n = 2$ a následně $n = 3$. Lze samozřejmě hledat všechny různé hodnoty H , nejen minimum nebo maximum, avšak z pohledu nadaných žáků nejde o motivující úlohu. Když jsem se na to vybraných žáků ZŠ zeptala, nejvíce zájem o hledání odpovědi. Např.:

C17: ... *to se dá odvodit od největšího a nejmenšího H .*

Jelikož hledání všech možných hodnot H je zaměřeno na jiné cíle než v dané sérii aktivit, úkol jsem vyloučila. Zde sledujeme schopnost zobecnit, či dokonce dospět k návodu, případně ke vzorci v měnících se podmínkách ve stejném či podobném kontextu. Věnujme se nyní strategiím a procesu zobecňování.

4.1. Strategie čelní šest (pro $H_{\max}$)

Strategie se vyskytla v obou případech, pro $n = 2$ i pro $n = 3$. Po čelní stěně věže na výšku dali někteří 6 a zpravidla kostky natáčeli tak, aby na stěně zprava od ní bylo 5. K velkému překvapení pak odkrývali na zbývajících stěnách 1 a 2, při kontrole objevili porušení pravidla. Toto se sledovaným nadprůměrným nikdy nestalo. To neznamená, že danou strategii nepoužili v představě, ale v tom případě ji před konstrukcí zamítli.

Čelní strategie je volena i proto, že to je nejobvyklejší pohled na trojrozměrný objekt, jak uvádějí vývojová psychologie a didaktika výtvarné výchovy.

Podobné reakce byly u zjišťování hodnoty $H_{\min}$, mohli bychom ji nazvat strategie čelní jedna. Neschopnost řešit současně prostorový problém a respektovat dané podmínky odpovídá dle [12] typu chyby číslo 1, která je, zjednodušeně řečeno, zapříčiněna rozdílem mezi náročností úlohy a úrovní rozvoje mozku, či nedostatečnou předchozí zkušeností žáka. Na rozdíl od nadprůměrných žáků bylo u zbytku žáků nutné nabídnout odstupňovanou pomoc a zadat tentýž úkol pro $n = 1$. Měli zjistit, jaký je na jedné kostce rozdíl mezi $H_{\max}$ a $H_{\min}$, čemuž se nadprůměrní nespolečensky smáli.

4.2. Strategie 7

Strategie použitá pro $H_{\min}$ u nadprůměrných vedla relativně brzy k odlišení sudosti a lichosti (i když terminologii nepoužívají, někteří neznají) a začala převažovat cíleně použitá strategie vycházející ze součtu

ok protějších stěn. Řešitelé začínali pro $n = 2$ a naznačovali možnost opakování situace pro vyšší n , avšak s určitou mírou nejistoty, dokud nestavěli/neřešili věž pro $n = 3$. Stavba pro nadprůměrné zpravidla nepředstavovala nástroj řešení, ale sloužila spíše jako nástroj ověření.

Dobře to ilustruje příklad šestiletého chlapce:

C26: *Aby tam toho (ok) bylo co nejvíc, dám šestku nahoru i dolu a to jde u dvou a čtyř (kostek), jinak je tam sedm, pořád sedm* (chápejme na protějších stěnách hranolu celkem v každém patře, což plynulo z gestikulace žáka).

MK: *Jaké je tedy $H_{\max}$?*

C26: *Přece $6 + 6 + (7 + 7) + (7 + 7) = 40$. Závorku v zápisu chápeme jako pauzu v řeči, kterou naznačuje svůj postup po patrech věže.*

MK: *A $H_{\min}$?*

C26: *To je vlastně stejný.*

MK: *Stejný?*

C26: *Nó, jen... místo šestky je tam jedna,... 30 ($1 + 1 + 4 \cdot 7$). Bude se to střídat? Jo, vlastně jo, jó!!!*

MK (škádlivá provokace): *40 a 30?*

C26: *...těch sedm tam bude podle kostek, jako dvakrát (v každém patře), ...pak buď 12, nebo 2.*

To odpovídá pro přirozené $n > 1$ vzorcům (zápis odpovídá mluvě žáka): $H_{\max} = 2 \cdot 7 \cdot n + 2 \cdot 6$ a $H_{\min} = 2 \cdot 7 \cdot n + 2 \cdot 1$, nebo po úpravě (dospělých či druhostupňových talentů): $H_{\max} = 14n + 12 = 2(7n + 6)$, $H_{\min} = 14n + 2 = 2(7n + 1)$. Toto platí jen pro sudé n , čehož si nadprůměrní všimnou teprve tehdy, když začnou uvažovat i jiná n , než která byla předložením kostek zadána.

První rozpor někteří z nich chápou jako chybu ve výpočtu a přecházejí ke kontrole a experimentování s kostkami. Zde se projevuje závislost zobecňování na vnímání struktury a tomu odpovídá i typ korekce [7].

Pro lichý počet kostek n platí

$$H_{\max} = H_{\min} = 7(2n + 1).$$

Lze to z pohledu práce s povrchem věže pro délku hrany kostek $a = 1$ chápat tak, že $H = 7S : 2$, kde S je povrch krychlového tělesa a platí $S = 4v + 2$ (zde i $S = 4n + 2$). To v tomto věku spíše žáci neodhalí, avšak druhostupňoví nadprůměrní možná ano (zde jeden žák). Co je z pohledu didaktiky významné? Podobné reakce jako u věkové kategorie 5–7 let můžeme vidět i u dospělých, včetně našich i zahraničních studentů [4].

4.3. Strategie dotyková

Slovo dotyková se vztahuje k modelu z kostek a sledujeme, kterými stěnami se v dané kompozici kostky dotýkají, respektive jakou hodnotu tyto stěny mají.

D19: *Abysem tam měla co nejvíc puntíků, musím schovat jedničky (stěny s 1 okem), ... možná i dvojky, to musím vyzkoušet.* Modeluje hranol a dává jedničky k sobě, což pro $n = 2$ ihned vychází. Pro $n = 3$ se její hypotéza hroutí. *Tedka... , ať to dělám, jak chci, vychází mi to pořád stejně, ... protože proti sobě (na horní a dolní podstavě) je pořád (dohromady) sedm puntíků. ... Ale když budu mít čtyři (kostky), tak to zas vyjde... , jako šestky nebo jedničky k sobě, pak zas ne.*

MK: *Takže pro tři (kostky), pět to bude jedno, kolika oky je dám k sobě?*

D19: *Jóó! ... To nemá cenu schovávat (chápej pro sudý počet kostek).*

5. Šetření 3

Zde byli zapojeni žáci ve věku 6–12 let, oproti předchozímu hledání hodnoty H povrchu „věže“ byl časový odstup minimální (buď úkol ihned následoval, nebo byl řešen v tomtéž týdnu). Úkolem bylo sestavit hranol z n kostek o rozměrech $1 \times 2 \times v$, kde $v = n : 2$ pro sudé číslo $n \geq 4$. Představme si dvě stejně vysoké věže ze šetření 1 spojené dle pravidel dotyku. Cílem bylo najít návod na výpočet největší a nejmenší hodnoty povrchu, $H_{\max}$ a $H_{\min}$. Roli zde opět hraje sudost–lichost nebo opora pro součet hodnot protějších stěn, strategie 7. Vedle předchozích strategií dochází u některých se změnou tvaru k obohacení strategií. Jiní se snaží využít předchozího zobecnění, což zcela nejde.

Specifikum této úlohy tkvělo v tom, že obsah podstavy (počet kostek ve stavbě) byl vždy sudé číslo, nehledě na velikost výšky v . Strategie sudosti a lichosti zde ovšem závisí na sudosti či lichosti v a nikoli na sudosti/lichosti n . Byli i žáci, kteří chtěli vyjít z dosud úspěšné strategie sudá–lichá pro n , tabulku si nedělali. Přenos do nové situace se tak nezdařil. Zde působil efekt, nazvěme ho „kontextový přenos“.

5.1. Strategie odčítací

Navazuje na strategii dotykovou. Vychází z hodnoty povrchu jedné hrací kostky: $H = 21$.

Zahajujeme určením součtu hodnot všech n použitých kostek a od něho odečteme dvojnásobek hodnot dotyku:

$$H_{\max} = H_1 + H_2 + \dots + H_n - (2d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_n),$$

kde d je hodnota stěny, kterou se kostka dotýká ve stavbě jiné kostky.

Situace s D13:

D13: *To je 4×21 , ale k sobě jsou dvě, ne čtyři jedničky a čtyři trojky, ne, dvě trojky a dvě čtyřky... Nebo dvakrát sedm. ... Tak si to zapíšu: $84 - 4 - 14 = 66$.*

Zde je ovšem chyba v úvaze plynoucí z mylné představy proto, že neo-
věřovala nápady na kostkách. Jde u $n = 4$ o 4 dotyky, jejichž hodnota se rovná dvojnásobku hodnot dotýkajících se stěn. Správně by bylo odečíst čtyřnásobek jedné a poté čtyřnásobek dvou, $4 \cdot 21 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 72$. Nejvýhodnější je kompozice, kde jsou šestky z boku a ve vodorovných stěnách jsou umístěné pětky. Nyní dívka přechází k tvorbě tabulky, která již neslouží jen k záznamu dat, ale dívce, i když s numerickými chybami, slouží k tvorbě hypotéz a novým zobecněním stojícím na relativně rozvinutém funkčním myšlení.

5.2. (Sub)strategie tabulková

Substrategií ji nazývám proto, že s ní nikdy žák řešení nezačínal, ale po užití jedné z předchozích strategií k ní přešel. Pokračujme s D13:

MK: *A co když máš počítat minimum?*

D13: *Z $H_{\max}$ odvodí rychle $H_{\min}$... místo jedniček dám šest ... $84 - 24 - 14 = 46$.*

Pak počítá a zapisuje pro $n = 6$ a prohlásí, že tam je to jinak, a skočí na $n = 8$, kde jí vyjde poměrně rychle $H_{\max} = 168 - 8 \cdot 1 - 6 \cdot 7 = 118$. Přejde ihned na $H_{\min} = 168 - 8 \cdot 6 - 6 \cdot 7 = 78$, zapisuje. Následně se zamyslí a zkouší dát do vztahu $H_{\max}$ s $H_{\min}$; nejdřív to bylo 66 a 46, teď 118 a 78. To musí ještě promyslet, jsou tam stejná čísla (na místech základních jednotek).

D13 vyslovuje hypotézu: *Pro dvanáct ($n = 12$) bude na konci 0?*

Teprve pak dopočítává sloupeček pro 12. Počítá pro $n = 12$ hodnotu $H_{\max} = 12 \cdot 21 - 12 \cdot 1 - 10 \cdot 7 = 184$ mimo tabulku, čemuž nevěří a rodí se nová strategie pro sudé hodnoty v . Dotváří tabulku, kam zapisuje data odvíjející se z představy modelu. Horní řádek dopisuje v polovině řešení.

Pak si dopisuje (tučně) výpočty do 5. řádku a používá funkční myšlení a využívá odkrytých vztahů mezi čísly v řádcích dřív, než počítá $H_{\max}$, pak vedle (vyznačeno šedou barvou) toho ještě $H_{\min}$ (ale to ji již tolik nezajímá, nebaví jí některé položky opisovat a brblá, že si to načrtla „blbě“ ve smyslu neúspěšně):

2	4	6	8	10	2	4	6
4	8	12	16	20	4	8	12
84	168	252	336	420 (336+84)	84	168	252
4 (4 · 1)	8 (8 · 1)	12	16	20 (16 + 4)	24 (4 · 6) (více o 20)	48 (o 40)	72 (o 60)
14 (2 · 7)	42 (6 · 7)	70 (10 · 7)	98 (14 · 7)	18 · 7 (98 + 28, 136)	14	42	70
66	118	170	222	274 (222 + 52)	46 (méně o 20)	78 (o 40)	110 (o 60)

Opakovaně dochází k „aha efektu“:

D13: *Jé, pro 4 kostky (je to u maximálního možného H) o 40 (víc než u minima), u 6 o 60, to se nemusí počítat* (chápejme zvlášť).

Tato strategie jako jediná přecházela od modelu čistě k práci s čísly.

5.3. Strategie boční

Ze strategie čelem 6 se v kombinaci se strategií 7 odvíjí nová strategie boční jak pro $H_{\max}$, tak pro $H_{\min}$, i když pro matematika možná ne tak zajímavá jako předchozí. Shrňme úvahy úspěšných řešitelů, kteří ji použili: jsou-li na šířku vždy jen dvě kostky, pak „proti 6 bude zase 6“, totéž platí pro počet číslo jedna. Žáci pracují již s konjunkcí a ne s výchozí strategií, která dosud byla dominantní doprovázená korekcemi. Pak nastupuje zkoumání postavení kostek proti sobě pro čtveřici a následně šestici kostek, tedy vztah mezi čelní a zadní stěnou. Ve zbrklých reakcích dochází k unáhlenému zobecnění z první situace pro $n = 4$ na všechny další případy, bez ohledu na to, zda je v sudé nebo liché. U nadprůměrných v diskusi rychle dochází k poznání, že nemá smysl spěchat s odpovědí.

První reaguje C12: *Já myslel, že to bude nuda, zas kostky. Ale je to jiný.*

V prohlášení vidím silnou potřebu prvku novosti v úkolech, odmítání stereotypie, které jsou typické pro nadané. Zahájení strategie je nápadné

v cílené kompozici bočních stěn hranolu, kde $a = 2$, $b = 1$ a v se postupně mění.

6. Šetření 4

Pracují s hranoly se čtvercovými podstavami. Hranoly mají rozměry $a \times a \times 1$ (obr. 3), kde $a \geq 2$ a $v = 1$, hodnota a se liší od šetření 1.

Poměrně záhy se vyskytla opakovaně nová strategie ve snaze maximalizovat hodnotu H . Určíme ji podle postupu a manipulace s kostkami.



Obr. 3: Hranoly s výškou 1

6.1. Strategie rohová

Objevuje se nová strategie, v tomto šetření zatím jen jednou, a bude se objevovat u dalších řešitelů nezávisle na tomto v dalších šetřeních. Nazvěme ji rohová. Je spojena s modelováním pomocí hracích kostek, žák začíná rozvahou o rozích. Kostky se snaží natočit tak, aby rohy měly na povrchu co největší počet ok, respektive aby měla rohová kostka na povrchu stavby co největší hodnotu.

Pro $n = 2$ je obtížné ji identifikovat, ale pokud stejný řešitel pracuje s kostkami i pro $n \geq 3$ takovým způsobem, že otáčí jako první rohové kostky a „schovává“ stěny s jednou a dvěma u $H_{\max}$, pak ji tak máme právo nazvat. Tato strategie se na počátku jeví jako relativně univerzální a vhodná, což se u lichého a nepotvrdí.

Příkladem změn strategií je žák C11, který si nastavil rohové kostky (obr. 3), spočítal $H_{\max}$ počítáním ok, dospěl k číslu 72 a začal modelovat hranol s $a = 3$ tak, že rohové kostky oddálil a vložil mezi ně 5 dalších. Zde zjistil, že nesedí pravidlo dotyku stejným počtem ok a začal rohovými kostkami rotovat, což mu rozhodilo původní systém. Aby mohla být rohová strategie použita, odkryl, že to „asi bude fungovat příště“, u $a = 4$.

Vyslovil pravidlo pro rohovou strategii: vyjdou šestky proti sobě, pětky proti sobě a nahoře i dole šachovnice. Shora se střídaly čtyřky s trojkami ve stejném počtu. C11 usoudil, že „... tak to bude i dole“. Dekor dominoval nad čísly. Nezapojoval strategii 7, ale přešel k nové strategii hodnoty rovnoběžných stěn. Se stejnou hodnotou se dílčím způsobem objevila v šetření 3. Dále spočítal: $2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot (8 \cdot 4 + 8 \cdot 3)$. Pak se zamyslel a začal $4 \cdot 18$ (rohové) + $4 \cdot 12$ (boční je 5) + $4 \cdot 3$ (boční je 6). Když se výsledky rovnaly, byl spokojen.

Pak naznačoval řešení pro $a = 6$. Jak to udělat pro $a = 3$, $a = 5$ hned nevěděl, rohová strategie nešla použít a strategie rovnoběžných stěn se mu nechtěla ověřovat. Řešení ukázalo problémy s přechody od prostoru k číslům a naopak, což řešitele stálo hodně sil.

6.2. Strategie rovnoběžných stěn

Strategie se odvíjí od určování hodnoty jedné stěny jako celku a zkoumání stěny rovnoběžné. Někteří s ní začínají bez ohledu na jejich polohu vzhledem k pozorovateli, jiní k ní přecházejí:

MK: *Co děláš?*

D4: *Jak koukám... (hraje si s kostkami u $a = 3$), je to asi jedno, jak ty kostky natočím. Vždycky naproti stěně s velkejma čísly bude stěna s malejma. Když dám nahoru (horní stěna 3×3) samý šestky, budou dole samý jedničky, když dám nahoru pětky, budou tam (dole) samý dvojky. Třeba by to bylo dobrý na střídačku. To bude to samý, ne když nahoře bude pět šestek, bude dole pět... jedniček. To... je skoro jako u věže!*

Připomíná strategii 7, ale nevyslovuje ji možná i proto, že věž řešili někteří poněkud dětsky bez početního vztahu mezi čísly protějších stěn. Chápali to jako dané dvojice (viz šetření 1): že k 6 patří 1, 5 je s 2, 4 s 3. Někteří začali se strategií boční, ale přešli systematicky ke zkoumání všech rovnoběžných stěn.

7. Šetření 5

Zde zkoumáme $H_{\max}$ a $H_{\min}$ pro krychle o hraně délky a . Z didaktického pohledu obsahuje úskalí, protože se poměrně rychle zvyšují hodnoty H . Původně jsem chtěla zadávat úkol pro $a \geq 2$, ale nakonec jsem připustila nejmenší $a = 1$. První pokusy nebyly pro $H_{\max}$ hned úspěšné (obr. 4). Začneme tabulkou hodnot, posléze zmíníme strategie, přičemž tabulková substrategie se zde vyskytla třikrát.



Obr. 4: Kostková krychle

a	1	2	3
V	1	8	27
$H_{\min}$	21	120	
$H_{\max}$	21	$160 = 8 \cdot 6 + 16 \cdot 7$	

Roli hraje sudost a lichost, ale ti, co začali sestavováním tabulky, se zpočátku nezaobírali ani sudostí ani lichostí. Někteří řešitelé, kteří zahájili řešení manipulací, měli problém s rotací kostky, zůstávali jen u překlopení o 90° , či opakovaného překlopení jedním směrem, vynechali kombinaci rotací, což vedlo k blokaci nalezení správného H . Přecházeli k tabulce dřív nebo později, což vyžadovalo práci s kostkami buď jako s odrazovým můstkem, nebo pro ověření. Práce s krychlí nutila žáky ke změnám strategií, návratu strategií z předchozích šetření, ať již to byla strategie 7, nebo rohová strategie či strategie rovnoběžných stěn či maximální počet šesti na povrchu u $H_{\max}$. Poprvé byla oceněna lichost n , která s oporou o strategii 7 zjednodušila řešení, naopak do řešení pro sudé n se jim poté nechtělo.

7.1. Strategie dělení na věže

Strategie se prokazatelně vyskytla poprvé u krychle pro liché a s oporou o strategii 7. Řešitelé pomyslně řezali kostku na věže a řešili hodnotu H po těchto částech.

Objevila se i kombinace věží ve svislém i vodorovném dělení. Kombinace obou druhů „řezů“ je náročná na koncentraci a nevedla k zobecnění, které by mohli popsat slovy nebo dokonce algebraicky. Tato strategie by byla zřejmě vhodná pro mladší žáky u jednodušších úloh, které by byly

rozděleny do dvou dnů tak, aby byl prostor pro to urovnat si myšlenky. K této strategii se pak někteří v dílčích krocích vraceli, ale nedokázali ji vždy plně využít. Dalším důvodem může být i to, jak zaznělo na konferenci CIEAEM v Malmö 2023, že dnešní generace žáků má výrazně vyšší problém orientovat se ve vertikálním směru.

8. Šetření 6

Jde o stavbu pyramidy systémem stěna na stěnu (nikoli na spáru). První pyramida má dvě podlaží, spodní má 9 kostek, na středové je jen jedna kostka (obr. 5). Takové úlohy známe od osmdesátých let minulého století ze soutěží jako Matematická olympiáda, Dejte hlavy dohromady (Koman, Dřížal), kde se jednalo o určování objemu pyramid (počtu kostek v pyramidě), pokud se dle zadaného systému (mohou být různé) zvyšuje po jednom počet podlaží. Zde se situace poněkud mění, protože počet kostek hraje do jisté míry roli, avšak u určování $H_{\min}$ a $H_{\max}$ vstupují do hry ještě další významné aspekty. Projevila se kontextová strategie: tendence využít zkušeností z šetření 4 nebyly zcela úspěšné, pokud nedošlo ke kombinaci s jinými strategiemi, podobně se objevila strategie dělení z šetření 5. Vyskytly se i nové strategie.



Obr. 5: Pyramida z kostek

8.1. Strategie centrální

Zde žák nejdříve použil stavbu „centrální věže“ odspodu po vrchol, stejně jako se řešil problém v šetření 1, a pak ji začal obkládat. Vzápětí začal uvažovat o sudosti a lichosti počtu podlaží, avšak v první fázi vynechal započítání vrcholu. Rovnou pracoval s pyramidou s hranou spodního podlaží s $a = 7$. Po korekci došel k prvnímu závěru, že je-li na vrcholu pyramidy 6 a sudý počet podlaží, bude celá spodní stěna pokryta šestkami. Nastala třetí fáze, vyřešit problém bočních stěn a plošin. Zde zvažoval, kam umístit 5 při sudém počtu podlaží, zda na bok

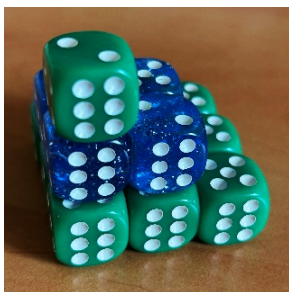
či na plošiny. U druhého podlaží shora mu vycházel počet kostek v jednom směru lichý a dospěl k závěru, že tam půjde o 7. Z toho odvodil, že bude výhodnější mít na plošinách 5, pak přešel k úvaze o 6 a řešil, zda bude možné mít pak zespodu 6. Danou strategii nedotáhl do konce. Problém byl v kombinaci více strategií a neschopnost přejít od modelování k poznámkám. Úloha je náročná, projevovala se únava.

8.2. Strategie plošin

Šlo o úvahu vycházející z pohledu na pyramidu shora. Někteří se takto pokusili pyramidu postavit, ale nebyli si jisti u složitějšího tvaru kompozice, zda dodrželi všechna pravidla při hledání $H_{\max}$. Ani tato strategie nevedla k úspěšnému konci, nikoli protože by nenabízela postup ke správnému řešení. I zde bylo nutné ji následně kombinovat s některou z předchozích strategií a vyžadovalo to značné soustředění a kladlo to vysoké nároky na představivost zejména tehdy, pokud řešitel nepoužil oporu v manipulaci s kostkami.

9. Šetření 7

Předložíme-li po „klasické pyramidě“ pyramidu rohovou, u níž jsou dvě svislé stěny rovné, neustupující (obr. 6), jde o rozdělení strategií v podstatě na tři skupiny: Jedni chtěli využít strategii podobnosti s šetřením 6, respektive nějak modifikovat výpočet, ke kterému naposled dospěli (šetření 6). Zpočátku nevěděli jak, tak je pro ně typická časová prodleva. Druhá skupina většinou začala stavět část oné pyramidy, nebo máchali rukama, v gestikulaci se objevil náznak velké pyramidy předchozího typu a odtud přecházeli ke strategii čtvrtinové. Nazývám ji tak proto, že řešitelé chápou (mylně) tuto novou pyramidu jako čtvrtinu „velké pyramidy předchozího typu“.



Obr. 6: Pyramida rohová

Strategie vycházela z výpočtu hodnot $H_{\max}$, $H_{\min}$ u „velké pyramidy“:

C15: $H_{\max}$, $H_{\min}$ (povrchu) *dělená čtyřmi a k tomu přičteš* (hodnoty) *obou těchtole* („řezových“) *stěn*.

Od čehož většina záhy upustila, jakmile začala pracovat s čísly vzhledem k různě podlažním čtvrtinovým pyramidám.

9.1. Strategie řezové stěny

Žáci začali stavbou jedné „řezové“ stěny (někdy zvané zadní) se zohledněním $H_{\max}$. Zde se častěji než doposud vyskytovaly postesky nad tím, že poloha hrací kostky v kompozici dle kouzelnického pravidla je jednoznačně určena dvěma sousedy, kteří nejsou proti sobě, ale dotýkají se dané kostky na dvou jejích sousedních stěnách (podobně úlohy [13] 2017, 2018). Pokud zahájili práci řešením jen jedné zadní stěny, byli překvapeni, že nelze mít celé stěny z jednoho z čísel 6, 5. To i tuto skupinu nutilo řešit obě stěny najednou.

Pokud na jedné „řezové“ stěně byly vidět jen samé 6, na druhé se objevovaly opakovaně 2 puntíky. Pokud z pohledu „řezových“ stěn kombinovali jedno podlaží (zprava 6 a zleva 5), pak se to v následujícím podlaží prošťídalo. Avšak při zkoumání protějších stěn po patrech dospěli u třípodlažní rohové pyramidy ke strategii 7 po patrech. Někteří z nich zkoumali u třípodlažní pyramidy plošiny (strategie 6b)

10. Závěr

Šetření, byť na malém vzorku, ukázalo, že daný typ úloh má požadovaný potenciál: umožňuje zobecnění, vyžaduje od žáků tvořivost s oporou o kombinační schopnosti vzhledem k již objeveným strategiím. Rovněž se ukázalo, že relativně neměnný kontext úloh, kde variuje pouze tvar kompozice a počet hracích kostek v kompozici, svádí i talentované žáky k ekonomizaci procedur, k užití již odkryté strategie řešení, avšak jen talenti na této úrovni neulpívají a relativně rychle chápou nutnost odklonu od daného postupu, respektive nutnost hledání nové cesty buď s oporou o zcela jinou, novou strategii, nebo hledají kombinace již objevených strategií s využitím dosavadních zobecnění zkušeností. Jestliže měli řešitelé na výběr mezi hledáním největší a nejmenší hodnoty povrchu H , volili vždy největší H .

Pokud šetření proběhla u všech žáků, bez ohledu na rozdíl mezi nadprůměrností a talentem, takzvaná nultá fáze práce s hrací kostkou [4],

pak se řešení „projasnila“, žáci pohotověji reagovali, lépe argumentovali. Z didaktického pohledu považuji za vhodné předem řešitele upozornit, že řešení nebude možné vzhledem, že bude vyžadovat čas, trpělivost. Jinak má řešitel pocit, že je neschopný a nenachází řešení rychle, nebo že je úloha neúměrně obtížná. U tohoto typu je vhodné mluvní formu zobecnění společně převádět do grafického algebraicko-aritmetického matematického kódu [8].

Problém těchto úloh vidím zejména na druhém stupni ZŠ, kde má kvalifikovaný učitel [4] tendenci na ně pohlížet skrze své zkušenosti a schopnosti, takže se mu obtížně radí. Pokud radí dle svého, žáka často blokuje. Zde je ideální prostředí pro konstruktivistické postupy obohacené o následné diskuse. V těch by mohl být učiteli oporou přehled užitých strategií řešení. Jsem si vědoma toho, že sledovaný vzorek byl relativně málo početný, takže připouštím existenci i jiných řešitelských strategií či vyšší výskyt nedokončení řešení. Výhodou oproti školnímu prostředí byl neomezený čas, „nevýhodou“ pro některé řešitele bylo, že nepracovali za odměnu, ani na známky. Uvažujeme-li zařazení těchto úloh do výuky, pak jsou vhodné pro práci talentů na celou hodinu, zejména pokud je výuka zbytku třídy věnována prohlubování a fixaci. Chápu je jako vhodné pro individualizaci výuky.

Literatura

- [1] Atkinson, R.: *Psychologie*. Portál, Praha, 2012.
- [2] Brousseau, G.: *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer AP, New York, 2002.
- [3] Kaslová, M.: Otázky v učebnicích matematiky. In: Vondrová, N. (ed.): *Dva dny s didaktikou matematiky*. PedF UK, Praha, 2022, s. 39–44.
- [4] Kaslová, M.: *Prostor a logika*. Přednáška na Jarním mezinárodním semináři didaktiky matematiky, 9. 6. 2022.
- [5] Kaslová, M.: *Generalization process and geometric solids from dice*. Přednáška na Podzimní doktorandské škole, Brandýs nad Labem, 1. 10. 2022.
- [6] Kaslová, M.: Proces zobecňování v různých didaktických situacích, typologie. In: Slavíčková, M. (ed.): *Dva dni s didaktikou matematiky*. MFI UK, Bratislava, 2023.
- [7] Kaslová, M.: *Celek a jeho části*. Text ESF, Pardubice, 2015.
- [8] Kaslová, M.: Transformace mluveného kódu do matematického symbolického kódu a naopak. In: Slavík, J. (ed.): *Multidisciplinární komunikace: problém a princip všeobecného vzdělávání*. PedF UK, Praha, 2006, s. 266–282.

- [9] Kaslová, M.: Développement des constructions chez les enfants agés de 1 à 8 ans. In: *Proceedings CIEAEM 57*. ZČU, Plzeň, 2006, s. 289–292.
- [10] Sarrazy, B.: *Paradoxes tvorby a jejich uplatnění ve výuce matematiky* (překlad M. Kaslová). Arnica, ZČU, Plzeň, 2011.
- [11] Tatsis, K., Maj-Tatsis, B.: *Generalization in mathematics at all educational levels*. WUW, Rzeszow, 2012.
- [12] Tortora, R.: *Very often students' errors are all but mistakes*. Přednáška a PowerPoint na Univerzitě Krakow, konference Mathematical Transgressions, 14. 3. 2019.
- [13] www.pangea.soutez.cz

Jak může být jednodušší řešit nekonečné elektrické obvody než konečné

Karel Kolář, Nakladatelství Prometheus, Praha

ABSTRAKT. Článek je úvodem do nekonečných elektrických obvodů a ukazuje, jak může být jejich řešení v případě jednoduše se opakujících struktur matematicky jednodušší než řešení rozsáhlých konečných obvodů. Typicky totiž na základě pozorování sestavíme jednoduchou rovnici, kterou upravíme zpravidla na kvadratickou rovnici pro určení celkového odporu. Ukážeme podrobně jednu úlohu a náměty na další. Na své si přijdou i čtenáři, kteří vyhledávají zlatý řez.

1. Úvod

Motivací pro zkoumání nekonečných elektrických obvodů je možnost snadnějšího výpočtu celkového odporu, což by pro konečné obvody vyžadovalo rozsáhlé výpočty. U nekonečných obvodů, kde se struktura opakuje, můžeme díky rekurzivním vztahům dosáhnout matematicky jednoduššího řešení, typicky pomocí kvadratické rovnice.

Co se týče takovýchto obvodů, tak jsou pouze fyzikální abstrakcí, protože v našem vesmíru nikdy nemůžeme vytvořit nekonečný obvod. Ale v případě rozsáhlých, opakujících se obvodů, může být tato abstrakce vhodná i pro praktické užití, i když typicky spíše až v rozšíření na střídavý proud, kde se může uplatnit např. v případě dlouhých paralelních vedení. Co se týče matematiky, nebudeme postupovat matematicky zcela rigorózně, ale spíš intuitivně.

Pro pochopení hlavní části článku nám tak budou vlastně stačit fyzikální znalosti základní školy – zapojování sériových a paralelních rezistorů – a pak znalost výpočtu kvadratické rovnice. Pro zobecnění je pak potřeba mít znalosti střídavých obvodů.

Podobné úvody, zase trochu jinak formulované, si můžete přečíst v knihovničce Fyzikální olympiády [1] či Výfuku [2].

2. Základní principy nekonečných obvodů

Nekonečné obvody jsou obecně takové, které obsahují nekonečně mnoho součástek. Zaměříme se zatím na ty, kde jsou pouze rezistory¹⁾ a kde se opakuje nekonečněkrát stejná kombinace „základní buňky“.

Dva nejjednodušší možné případy s nekonečně rezistory jsou ty, kde je nekonečno rezistorů zapojených sériově, respektive paralelně. Podívejme se nejdříve na tyto „triviální“ případy.

2.1. Sériové zapojení nekonečně rezistorů

Připomeňme si nejdříve, že v *sériovém zapojení* (obr. 1) se odpory jednotlivých rezistorů sčítají.



Obr. 1: Dva rezistory zapojené sériově

Pro dva rezistory a jejich celkový sériový odpor R_s platí, že je součtem jednotlivých odporů

$$R_s = R_1 + R_2. \quad (1)$$

Tento vztah můžeme zobecnit na n rezistorů s různými odpory na

$$R_s = R_1 + R_2 + \cdots + R_n. \quad (2)$$

Pokud jsou rezistory identické, pak dostáváme n -násobek odporu jednoho rezistoru

$$R_s = \underbrace{R + R + \cdots + R}_n = nR. \quad (3)$$

¹⁾Rezistor je součástka, která je plně charakterizovaná elektrickým odporem. Nechová se ani jako cívka, ani jako kondenzátor.

Zapojíme-li do schématu nekonečné množství rezistorů sériově, jak je načrtnuto na obr. 2, dostáváme nekonečně velký odpor. Formálně, byť tedy již ne na úrovni základní školy, bychom to mohli zapsat jako

$$R_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} nR = +\infty. \quad (4)$$

Jak by se dalo i intuitivně očekávat, celkový odpor nekonečného množství stejných rezistorů zapojených za sebou je nekonečný.

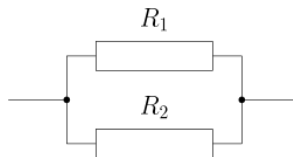


Obr. 2: Nekonečně mnoho identických sériově zapojených rezistorů

2.2. Paralelní zapojení nekonečna rezistorů

V případě *paralelního zapojení* (obr. 3), je převrácená hodnota celkového odporu R_p součtem převrácených hodnot jednotlivých odporů

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (5)$$



Obr. 3: Dva rezistory zapojené paralelně

To můžeme upravit na tento tvar

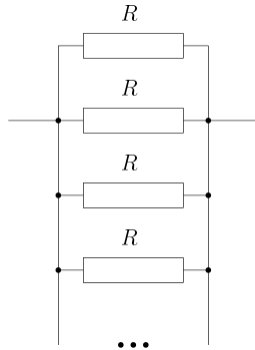
$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad (6)$$

i když pro zobecnění bude intuitivnější zůstat v převrácených (reciprokých) hodnotách. Vidíme, že celkový odpor dvou paralelně zapojených rezistorů je vždy nižší než odpor kteréhokoliv z nich. Podívejme se rovnou na to, jak vypadá vztah pro celkový odpor R_p v případě n rezistorů

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}. \quad (7)$$

V případě stejných rezistorů pak dostáváme

$$\frac{1}{R_p} = \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}_n = n \frac{1}{R} \Rightarrow R_p = \frac{R}{n}. \quad (8)$$



Obr. 4: Nekonečně mnoho identických paralelně zapojených rezistorů

Čím vyšší počet rezistorů zapojíme paralelně, tím menší je celkový odpor. Limitní případ nekonečného množství paralelně zapojených rezistorů, jako ve schématu na obr. 4, pak vede k dělení nekonečně velkým číslem, a tedy celkový odpor je nulový

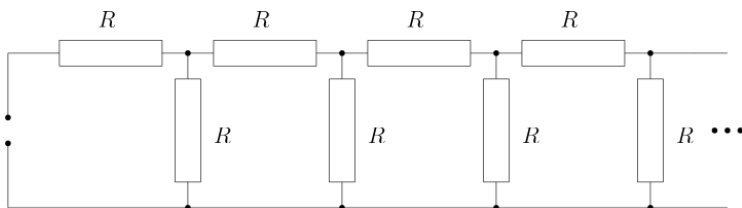
$$R_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R}{n} = 0. \quad (9)$$

3. Nejjednodušší netriviální příklad

Uvažujme obvod, kde se opakují bloky, kde je jeden rezistor sériově a jeden paralelně, jak můžete vidět ve schématu na obr. 5. Všechny rezistory jsou navíc identické co do odporu R . Úlohu zkusíme řešit nejdříve postupně přidáváním rezistorů, abychom si ukázali, že navržený postup v druhé části je o dost rychlejší.

3.1. Postup postupného přidávání rezistorů

Začneme tak, že vezmeme jeden „blok“ a vypočítáme jeho celkový odpor. Pak přidáme další a pak postupně budeme zvyšovat počet bloků. Takto určený celkový odpor se bude blížit nějaké hodnotě.

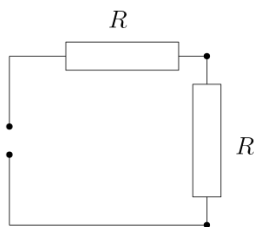


Obr. 5: První netriviální úloha s nekonečným počtem rezistorů

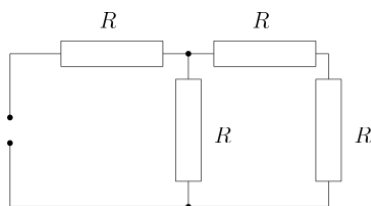
Postupně přidáváme bloky, jako je načrtnuto na obr. 6, 7 a 8. Po řadě dostáváme odpory těchto zapojení jako

$$R_1 = 2R, \quad (10)$$

$$R_2 = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5}{3}R, \quad (11)$$

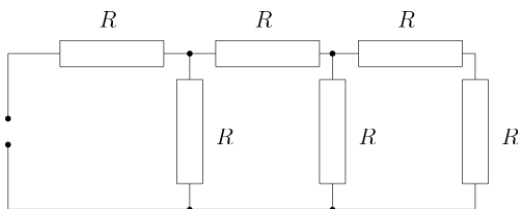


Obr. 6: 1 blok



Obr. 7: 2 bloky

$$R_3 = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{3}{5R} \right)^{-1} = R + \frac{5R}{8} = \frac{13}{8}R. \quad (12)$$



Obr. 8: 3 bloky

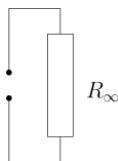
Příznivci zlatého řezu možná již vidí pravidelnost, která se zde objevuje. V dalším kroku bychom se dostali k $R_4 = 34R/21$. Můžeme tedy vypočítat rekursivní vztah, že

$$R_n = \frac{a_n}{b_n} R \Rightarrow R_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{a_n + b_n} R. \quad (13)$$

Nicméně z toho stále nevidí běžný žák střední školy, jaký je konečný výsledek pro R_∞ . Můžeme opakovaně dosazovat do kalkulačky nebo například do tabulky v Excelu, a dostaneme tak číslo pro fyzika dostatečně blízko hledanému. Nicméně tento postup neuspokojí jistě matematika, který by měl zájem o přesnější výsledek. Podívejme se na rychlejší postup.

3.2. Rychlejší postup

Představme si, že celkový odpor celého obvodu má nějakou hodnotu, tedy můžeme ho nahradit schématem na obr. 9.



Obr. 9: Náhradní schéma

Současně ale musí platit i to, že pokud přidáme jeden „blok“ před toto náhradní schéma (viz obr. 10), tak se odpor R_∞ nesmí změnit, pokud skutečně přidávání bloků konverguje k jedné konečné hodnotě. Protože jsou oba obvody ekvivalentní, můžeme sestavit rovnici jejich celkových

odporů

$$R_{\infty} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\infty}} \right)^{-1} = R + \frac{RR_{\infty}}{R + R_{\infty}}. \quad (14)$$

Rovnici upravíme a vyjádříme z ní R_{∞}

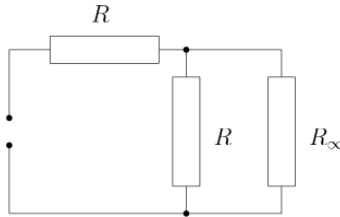
$$RR_{\infty} + R_{\infty}^2 = R^2 + RR_{\infty} + RR_{\infty}, \quad (15)$$

$$R_{\infty}^2 - RR_{\infty} - R^2 = 0, \quad (16)$$

$$R_{\infty 1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} R. \quad (17)$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, jejímž řešením je R násobek zlatého řezu. Respektive máme dvě řešení, ale jedno dává zápornou hodnotu. To není fyzikálně korektní řešení, protože hodnota odporu rezistoru musí být kladná. Dostáváme tedy jediné řešení

$$R_{\infty} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R \doteq 1,618 R. \quad (18)$$



Obr. 10: Náhradní schéma s jedním blokem

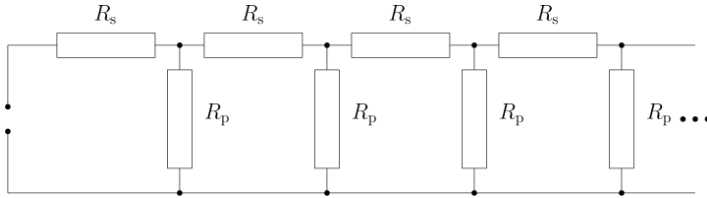
4. Shrnutí hlavních bodů postupu

Obecné kroky postupu by se daly popsat takto:

- Vytvoříme si náčrtek obvodu.
- Uvědomíme si, jaký je základní blok sítě.
- Představíme si, že má celá síť nějakou hodnotu odporu.
- Nahradíme celou síť a přidáme jeden další blok, který by neměl odpor změnit.
- Sestavíme rovnici, která nás obvykle povede na kvadratickou rovnici.
- Rovnici vyřešíme (a zahodíme záporný kořen).

5. Základní zobecnění první úlohy

Postup si můžeme zopakovat na úloze, která je analogická předchozí, pouze s tím rozdílem, že se pravidelně střídají dvě hodnoty rezistorů, viz obr. 11.



Obr. 11: Zobecněná úloha

Obrázky náhradního zapojení budou stejné jako obr. 9 a jenom částečně odlišné v případě obr. 10. Sestavíme analogicky rovnici

$$R_{\infty} = R_s + \frac{R_p R_{\infty}}{R_p + R_{\infty}}. \quad (19)$$

Po prakticky stejných úpravách jako v prvním příkladu dostáváme řešení, z něž si opět ponecháme pouze kladné řešení, které je fyzikálně korektní

$$R_{\infty} = \frac{R_s + \sqrt{R_s^2 + 4R_s R_p}}{2}. \quad (20)$$

6. Rozšíření na obvody střídavého proudu

Stejně metody lze aplikovat i na obvody střídavého proudu. Zkomplikuje se nám to pouze o další parametry a je vhodné umět počítat s komplexními čísly.

Zde celková impedance Z může zahrnovat rezistory (rezistance $X_R = R$), cívky (induktance $X_L = j\omega L$, kde²⁾ ω je úhlová frekvence střídavého proudu a L je indukčnost cívky) a kondenzátory (kapacitance $X_C = -j\omega C$, kde C je kapacita kondenzátoru).

Obecné základy řešení střídavých obvodů je možné nastudovat např. v knihovničce Fyzikální olympiády [3].

²⁾j je komplexní jednotka, která se v elektrotechnice obvykle značí takto a ne jako i, aby se nepletla s okamžitým proudem i .

7. Další úlohy

Další úlohy můžete najít v literatuře i volně dostupné na internetu. Některé jsou aplikací výše zmíněného, některé potřebují ještě úvahu o tom, že se nějaká část obvodu opakuje v menším měřítku (ve fraktálních úlohách). Několik vybraných zde vyjmenujme:

- Úloha EA *nekonečná trávka* v řešení Fyziklání z roku 2017 [4] je pouze mírně zkomplikovanou variantou podrobně rozebírané základní úlohy.
- Úloha FYKOSu [5] řeší fraktální uspořádání ve čtverci.
- Řešení fraktálního trojúhelníku najdete v úloze FYKOSu [6].
- Ve FYKOSu [7] naleznete úlohu, která se zabývá nekonečně se větvícím obvodem se dvěma typy opakujících se rezistorů.
- Obdobná úloha jako předchozí, ale pro případ střídavého proudu řešená v komplexních číslech, je v řešení Fyziklání online 2018 [8] pod číslem FoL.38 (*konečně komplexní nekonečný obvod*).
- Nicméně ne všechny úlohy, které se tváří na první pohled, že budou řešením nekonečného obvodu, skutečně musí být o nekonečném obvodu. Příkladem je úloha FoL.23 *nekonečný obvod* z Fyziklání online 2014 [9].

8. Závěr

Popsaný způsob řešení nabízí elegantní matematický přístup, kterým můžeme jednoduše vypočítat parametry rozsáhlého obvodu s opakujícími se prvky. S použitím rekursivních vztahů a (typicky) kvadratických rovnic dostaneme snadno celkové parametry vysoce symetrického obvodu.

Literatura

- [1] Jarešová, M.: *Knihovnička Fyzikální olympiády: Elektrické obvody (Stejnoseměrný proud)*. <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>
- [2] Výpočty fyzikálních úkolů: *Seriál VII.V Elektrické obvody*. https://vyfuk.org/_media/ulohy/r7/vyfucteni/vyfucteni_5.pdf
- [3] Šedivý, P.: *Knihovnička Fyzikální olympiády: Obvody střídavého proudu s lineárními jednobrany a dvojbrany*. <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>
- [4] Fyzikální korespondenční seminář: *Řešení úloh 11. ročníku FYKOSího Fyziklání*. <https://fyziklani.cz/download/2017/reseni.pdf>

- [5] Fyzikální korespondenční seminář: Tůma, K.: *Úloha 17-III-3: odporová síť*. <https://static.fykos.cz/problems/fykos/17/media/solution3-3.cs.pdf>
- [6] Fyzikální korespondenční seminář: Honzl, K.: *Úloha 13-VI-2: odporová síť*. <https://static.fykos.cz/problems/fykos/13/media/solution6-2.cs.pdf>
- [7] Fyzikální korespondenční seminář: Kolář, K.: *Úloha 32-I-5: zpropadený obvod*. <https://static.fykos.cz/problems/fykos/32/media/solution1-5.cs.pdf>
- [8] Fyzikální korespondenční seminář: *Řešení úloh 8. ročníku Fyziklání online*. <https://online.fyziklani.cz/download/2018/reseni.pdf>
- [9] Fyzikální korespondenční seminář: *Řešení úloh 4. ročníku Fyziklání online*. <https://online.fyziklani.cz/download/2014/reseni.pdf>

Využití GeoGebry při řešení úloh na nalezení množiny všech bodů dané vlastnosti

Soňa Königsmarková, KMT FPE ZČU, Plzeň

ABSTRAKT. *Množiny všech bodů dané vlastnosti patří k obtížným tématům ve školské matematice. Při řešení úloh je pro studenty náročné sestavit rovnice, poté upravit soustavu rovnic, eliminovat určité proměnné a určit, o jakou množinu bodů se jedná. S řešením těchto úloh pomůže matematický software GeoGebra. Ukážeme řešení úloh a jak může pomoci GeoGebra.*

1. Úvod

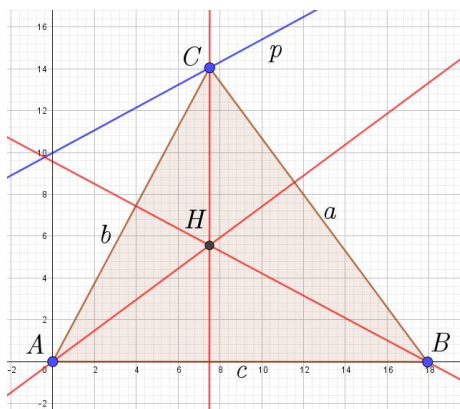
Téma množiny všech bodů dané vlastnosti patří mezi obtížné téma ve školské matematice. Důvodem je nejspíše náročnost úloh. Řešení těchto úloh je efektivnější s využitím počítače – softwaru dynamické geometrie a CAS (Computer Algebra Systems). Je výhodné použít software GeoGebra, pomůže s vizualizací daného problému a s eliminací proměnných. Ukáže nám množinu všech řešení. Studenti mohou s jeho pomocí experimentovat a seznamovat se s novými křivkami. Neřeší stále stejné úlohy, je to pro ně nové a zajímavé. Při řešení úloh na množiny všech bodů dané vlastnosti je nejtěžší sestavit rovnice, pak upravit soustavu rovnic, eliminovat určité proměnné a poznat, o jakou křivku se jedná. S vyřešením

soustavy rovnic a s určením, jak daná množina bodů vypadá, pomůže software GeoGebra.

2. Řešení úloh

Ukážeme řešení úloh na množiny všech bodů dané vlastnosti.

Příklad 1. Sestrojme trojúhelník ABC , bod C leží na přímce p . Označme H průsečík výšek v_a , v_b a v_c . Bodem C pohybujeme po přímce p . Zjistěte, co je množinou všech průsečíků výšek H trojúhelníku ABC (obr. 1).



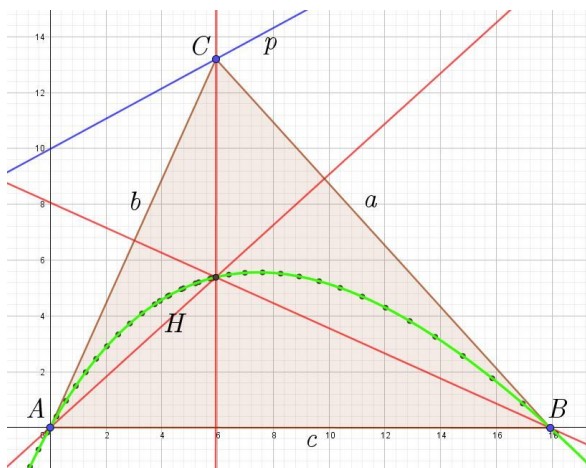
Obr. 1: Zadání příkladu

Řešení. Pro řešení v GeoGebře jsou důležité dva body – **mover** (pohybující se bod) a **tracer** (ten, který vykresluje množinu bodů).

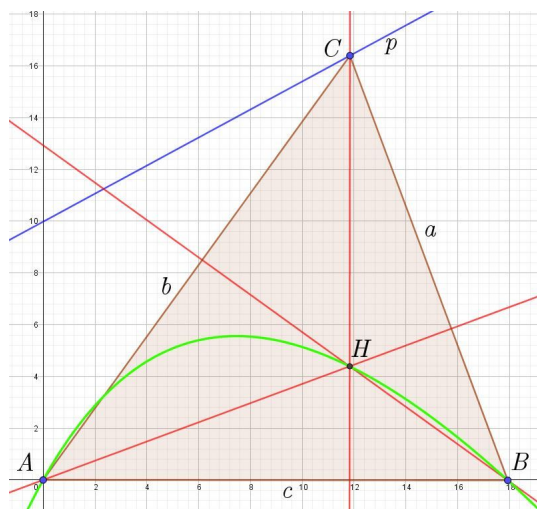
1. Zjistíme množinu bodů pomocí příkazu **Stopa** v GeoGebře. To nám napoví, o jakou množinu bodů by se mohlo jednat (obr. 2).
2. Lze použít i příkaz **Locus** v GeoGebře – také napoví, jak množina bodů, kterou hledáme, vypadá (obr. 3).

Zdá se, že hledanou množinou je parabola. Nemůžeme to ale s jistotou říci, mohla by to být i jiná křivka. Musíme najít její rovnici. Vhodně zvolíme, kam umístíme body, aby se jejich charakteristické vlastnosti a rovnice daly co nejjednodušeji vyjádřit.

3. Provedeme řešení ručně. Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic a sestavíme rovnice.



Obr. 2: Množina bodů – Stopa



Obr. 3: Množina bodů – Locus

Zvolíme $A = [0, 0]$, $B = [c, 0]$, $C = [u, v]$, $H = [x, y]$. Platí:

$$H \in v_c: HC \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow c(x - u) = 0 \Leftrightarrow x - u = 0$$

$$H \in v_a: HA \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x, y)(u - c, v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(u - c) + yv = 0$$

$$C \in p: ku + lv + m = 0$$

Eliminujeme proměnné u, v . Vyjádříme $x = u$ a dosadíme do dalších rovnic:

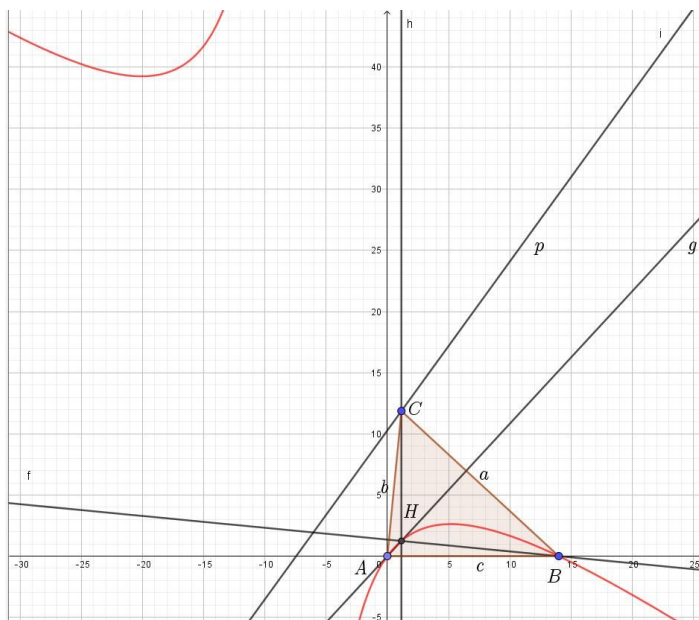
$$lx(x - c) + lvy = 0$$

$$kxy + lvy + my = 0$$

Tyto rovnice odečteme: $lx^2 - lcx - kxy - my = 0$

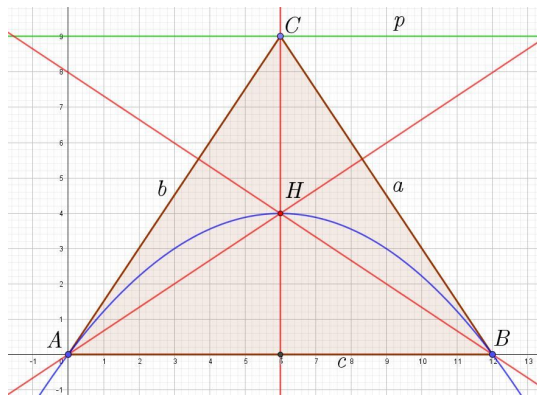
Dostali jsme polynomiální rovnici 2. stupně. Nyní rozebereme jednotlivé polohy přímky p .

1. případ: Přímka p není rovnoběžná se stranou AB ani není kolmá na stranu AB trojúhelníku ABC . Jedná se o *hyperbolu* – jednu její větev, ale bez bodů A a B (obr. 4).



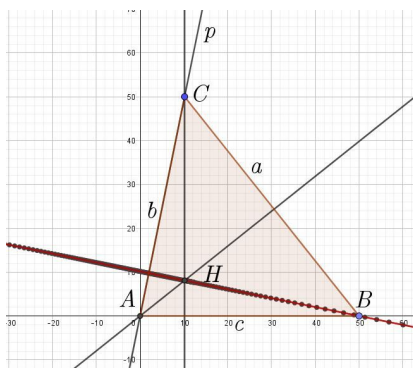
Obr. 4: Hyperbola

2. případ: Pokud je přímka p rovnoběžná s přímkou AB a $p \neq AB$, pak $k = 0$ a $l \neq 0, m \neq 0$, čímž dostaneme rovnici $lx^2 - lcx - my = 0$. V tomto případě se jedná o *parabolu* (obr. 5).



Obr. 5: Parabola

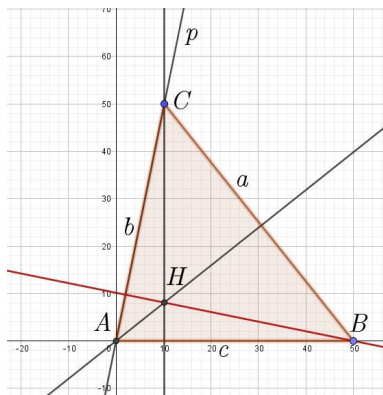
3. případ: Pokud je přímka $p = AC$ a p není kolmá na AB , je množinou bodů přímka (obr. 6 a 7).



Obr. 6: Speciální případ 3 – Stopa

Použijeme:

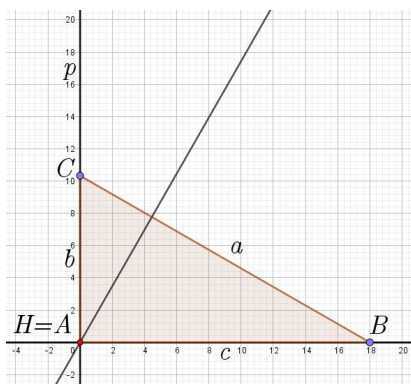
$$\begin{array}{ll}
 HC \perp AB : & x - u = 0 \\
 HA \perp BC : & x(u - c) + yv = 0 \\
 C \in p : & ku + lv = 0 \\
 \hline
 & v = -\frac{k}{l}u, l \neq 0 \\
 & x(lx - lc - ky) = 0
 \end{array}$$



Obr. 7: Speciální případ 3 – Locus

Výsledkem je přímka $lx - ky - lc = 0$ procházející bodem B kolmá k AC .

4. případ: $p = AC$ a je kolmá na AB . (Zde je $l = 0$.) Pak množina bodů H je bod A (obr. 8).

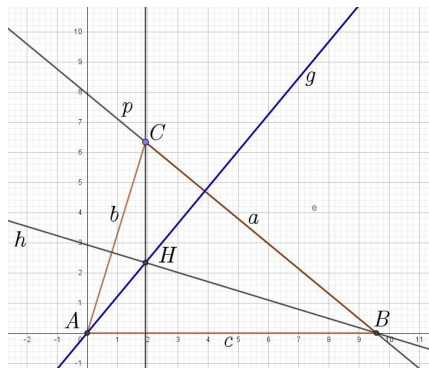


Obr. 8: Množina bodů

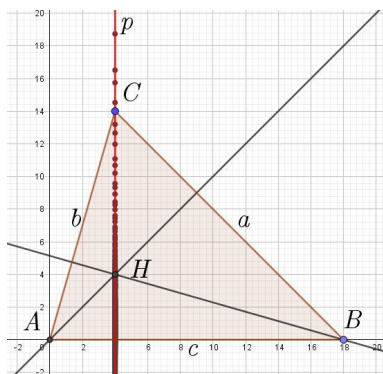
5. případ: Pokud je $p = BC$ a p není kolmicí na AB , pak množinou bodů je přímka (obr. 9).

6. případ: Pokud je $p = BC$ a $p \perp AB$, pak množinou bodů je bod B .

7. případ: Pokud je přímka p kolmá na stranu AB , pak je množinou bodů přímka (obr. 10 a 11), musí se vyloučit $p \perp AB$ v bodě A i v bodě B , kdy to není přímka, ale bod. Pak platí

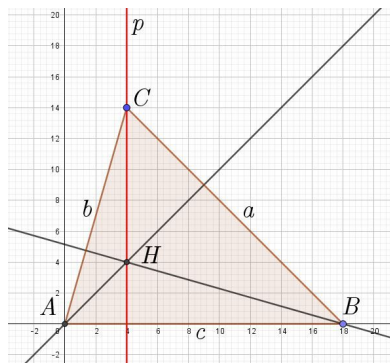


Obr. 9: Množina bodů



Obr. 10: Speciální případ 4 – Stopa

$$\begin{array}{ll}
 HB \perp AC : & u(c-x) - yv = 0 \\
 HA \perp BC : & x(u-c) + yv = 0 \\
 C \in p : & ku + m = 0 \\
 \hline
 u & = -\frac{m}{k}, \quad k \neq 0 \\
 x(u-c) + u(c-x) & = 0 \\
 x\left(-\frac{m}{k} - c\right) - \frac{m}{k}(c-x) & = 0 \\
 -xck - mc & = 0 \\
 kx + m & = 0 \text{ (přímka)}
 \end{array}$$



Obr. 11: Speciální případ 4 – Locus

Závěr: Zde se ukazuje, jak je důležitá rovnice množiny bodů. Bez ní nejsme schopni určit, o jakou množinu bodů se jedná.

Tento příklad může být použit jako motivační příklad, lze jej řešit i s žáky na ZŠ. Žáci sestrojí výšky trojúhelníku a najdou jejich průsečík. Poté pohybují bodem C a vidí hledanou křivku. Mohou využít příkaz Stopa v GeoGebre.

Při řešení úloh na množiny všech bodů dané vlastnosti mohou nastat problémy:

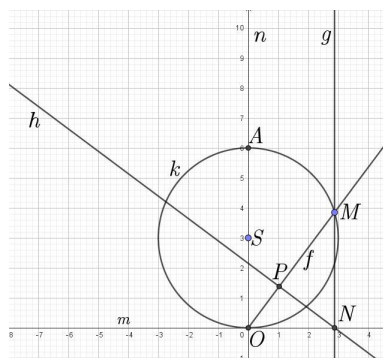
- objeví se navíc jiná množina
- eliminační ideál je roven nule, ale řešení existuje (to znamená, že dostaneme součin nějakých funkcí, který se rovná nule)

Ukážeme dva příklady, kde se setkáme s těmito problémy.

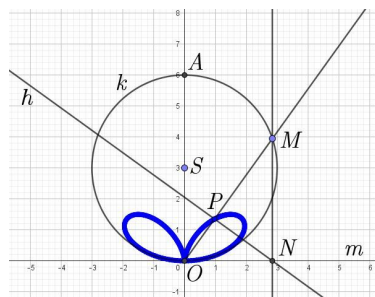
Příklad 2. Jsou dány dvě na sebe kolmé přímky m, n , které se protínají v bodě O . Je dán bod A na n a kružnice k s průměrem OA . Z libovolného bodu M na kružnici k sestrojme kolmici g na m , získáme bod N . Z bodu N sestrojme kolmici g na MO , získáme bod P . Určete množinu všech bodů P , pokud se M pohybuje po kružnici k (obr. 12).

Řešení.

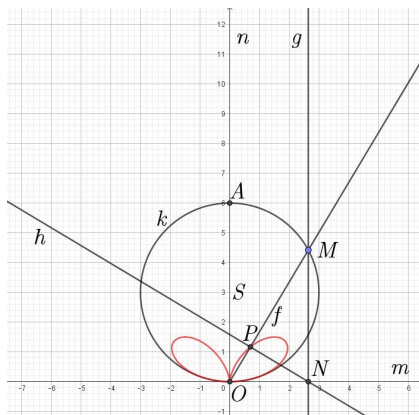
1. Nejprve použijeme příkaz **Stopa** v GeoGebre. Získáme první představu o množině všech bodů, kterou hledáme (obr. 13).
2. Poté příkaz **Locus** – vykreslí nám množinu bodů (obr. 14).



Obr. 12: Zadání příkladu



Obr. 13: Množina bodů – Stopa



Obr. 14: Množina bodů – Locus

3. Provedeme ruční výpočet. Označme $A = [0, a]$, $M = [u, v]$, $P = [x, y]$, $O = [0, 0]$. Platí:

$$M \in k: u^2 + \left(v - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$PN \perp MO: (x - u)u + yv = 0,$$

$$P, M, O \text{ jsou kolineární: } xv - yu = 0.$$

Pro $M \neq O$ a $M \neq A$ vyjádříme $u = \frac{xv}{y}$ a dosadíme:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{xv}{y}\right) \frac{xv}{y} + yv &= 0 \\ \frac{x^2v}{y} - \frac{x^2v^2}{y^2} + yv &= 0 \\ x^2vy - x^2v^2 + y^3v &= 0, \quad \text{jelikož } v \neq 0, x \neq 0, y \neq 0 \\ x^2y - x^2v + y^3 &= 0 \\ v &= \frac{y^3 + x^2y}{x^2} \\ \frac{x^2v^2}{y^2} + \left(v - \frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{4} \\ \frac{x^2v^2}{y^2} + v^2 - 2v \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} &= \frac{a^2}{4} \\ \frac{x^2v^2}{y^2} + v^2 - va &= 0 \\ x^2v + vy^2 - ay^2 &= 0 \\ v(x^2 + y^2) &= ay^2 \\ v &= \frac{ay^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

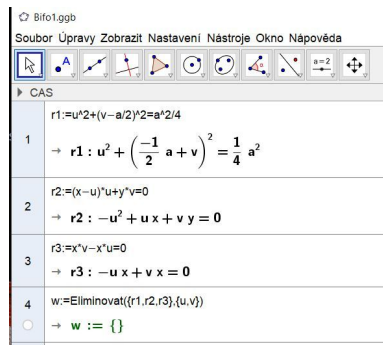
Tedy:

$$\begin{aligned} \frac{y^3 + x^2y}{x^2} &= \frac{ay^2}{x^2 + y^2} \\ (y^3 + x^2y)(x^2 + y^2) &= ay^2x^2 \\ y^3x^2 + y^5 + x^4y + x^2y^3 &= ay^2x^2 \\ y^2x^2 + y^4 + x^4 + x^2y^2 &= ax^2y \\ x^4 + 2y^2x^2 + y^4 &= ax^2y \\ (x^2 + y^2)^2 &= ax^2y \end{aligned}$$

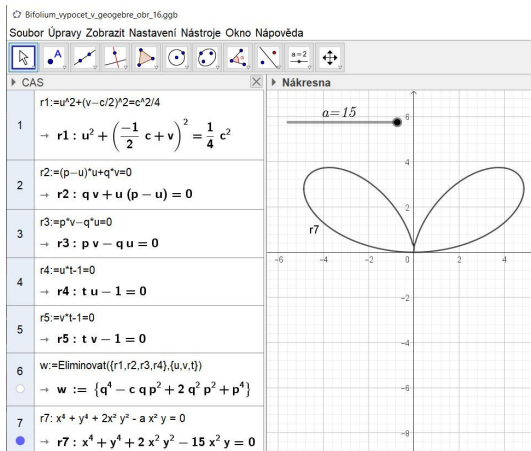
Dostali jsme rovnici množiny bodů, která se nazývá *bifolium* (dvojlist). Provedeme výpočet v GeoGebre (eliminační ideál vyjde roven nule) (obr. 15, 16).

Po přidání podmínky $vt - 1 = 0$ (t je pomocná proměnná), dostaneme rovnici křivky – *bifolium*.

Je-li $M = O$ a $M = A$, je hledanou množinou jen bod $P = O$.



Obr. 15: Výpočet v GeoGebře (Bifolium)

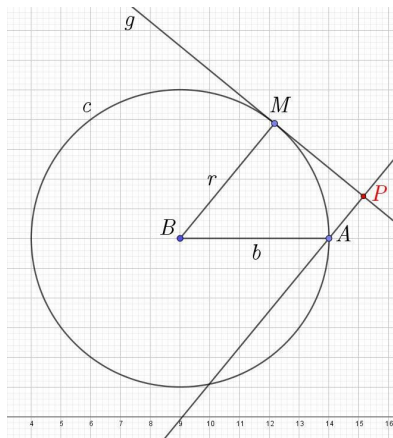


Obr. 16: Výpočet v GeoGebře (Bifolium)

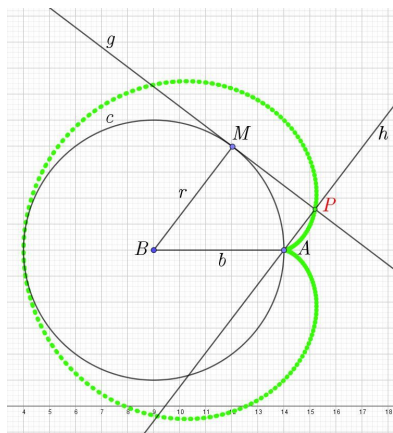
Příklad 3. Necht' je dána kružnice k a bod A , $A \in k$. Necht' t je tečna kružnice v bodě M . Určete množinu všech bodů P , které leží na kolmici z A k tečně t a na tečně t , pokud pohybujete bodem M po kružnici k (obr. 17).

Řešení.

1. Nejprve využijeme příkaz **Stopa** v GeoGebře. Napoví nám, o jakou množinu se jedná (obr. 18).
2. Poté využijeme příkaz **Locus** v GeoGebře (obr. 19).



Obr. 17: Zadání příkladu



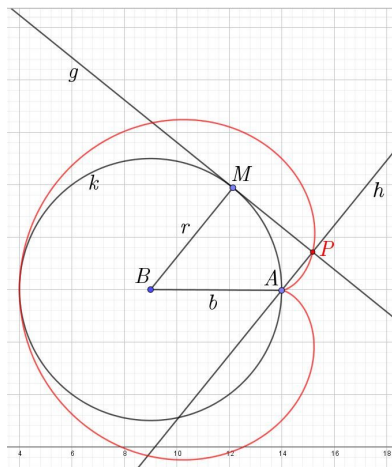
Obr. 18: Množina bodů – Stopa (Kardioida)

3. Ruční výpočet:

Nechť k je kružnice se středem v $B = [b, 0]$, bod $A = [0, 0]$ leží na kružnici k a libovolný bod $M \in k$ je bodem dotyku tečny t . Označme $M = [u, v]$ a $P = [x, y]$. Potom dostáváme:

$$M \in k: (u - b)^2 + v^2 = b^2$$

$$AP \perp MP: x(x - u) + y(y - v) = 0$$



Obr. 19: Množina bodů – Locus (Kardioida)

$$PM \perp BM: (x - u)(u - b) + (y - v)v = 0$$

Budeme eliminovat u, v (souřadnice pohyblivého bodu) ze soustavy rovnic. V GeoGebře dostaneme pomocí příkazu **Eliminovat** rovnici (obr. 20):

$$(x^2 + y^2 - 2bx) ((x^2 + y^2 - bx)^2 - b^2(x^2 + y^2)) = 0$$

Dostat ručním výpočtem výše uvedenou rovnici není snadné.

Jedná se o algebraickou křivku 4. stupně, která se skládá z kružnice

$$x^2 + y^2 - 2bx = 0$$

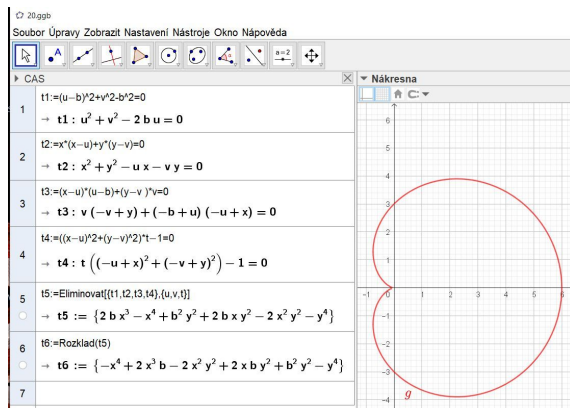
a kardioidy, jež má rovnici

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

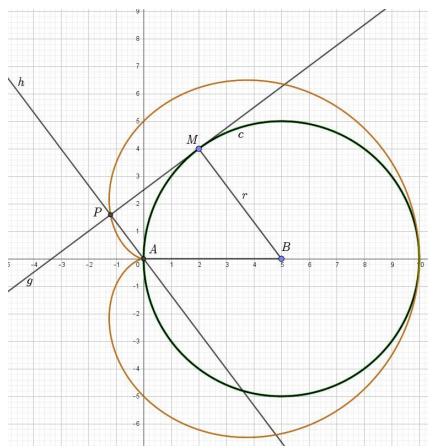
Kružnice se objeví, pokud bod M přejde do bodu A , tedy přímka PM není definována. Jestliže $u = x$ a $v = y$, dostaneme $x^2 - 2bx + y^2 = 0$.

Předpokládejme, že $P \neq A$, pak je

$$((x - u)^2 + (y - v)^2) t - 1 = 0.$$



Obr. 20: Výpočet v GeoGebře (Kardioida)



Obr. 21: Kardioida a kružnice

3. Závěr

Uvedené úlohy jsem řešila s nadanými žáky středních škol a se studenty pedagogické fakulty, budoucími učiteli matematiky. Úlohy činily potíže i studentům učitelství matematiky. Jako problém uváděli zejména sestavení rovnic a eliminaci proměnných. Řešení úloh ručně bývá někdy obtížné, proto je výhodné využití GeoGebry.

Literatura

- [1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms – An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, New York 1997.
- [2] Günzel, M., Hašek, R., Jareš, J., Lombart, J., Pech, P., Šimandl, V., Štěpánová, R., Vaníček, J.: *Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky*. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2022.
- [3] Pech, P.: *Klasické vs. počítačové metody při řešení úloh v geometrii*. JČU, České Budějovice, 2005.

Hodnocení písemek – motivace studentů ke zlepšení

Stanislav Lego, Rakouské gymnázium, Praha

ABSTRAKT. Článek pojednává o způsobu hodnocení opravných písemek, který studenty motivuje k dobrovolnému napsání opravné písemky, a tím i ke zlepšení znalostí.

1. Úvod

V článku budou nejprve ukázány kritéria hodnocení dané podle systému Rakouského školství, poté bude vysvětlen systém výpočtu finální známky z hodnocení původní a opravné písemky a v závěru je pak shrnutí plusů a minusů tohoto přístupu.

Rakouské gymnázium v Praze je šestileté dvojjazyčné gymnázium. Dělí se na nižší dvouleté gymnázium (odpovídající 8. a 9. ročníku základní školy, kde během těchto dvou let mají žáci předměty v českém jazyce a 8 hodin němčiny týdně) a vyšší čtyřleté gymnázium, kde jsou již všechny předměty v němčině (s výjimkou jazyků). V šestém ročníku studenti skládají maturitu odpovídající rakouským i českým požadavkům. Znamená to například, že mají povinnou maturitní zkoušku z matematiky.

2. Kritéria pro udělení známky

Rakouské gymnázium v Praze dle zvyklostí v Rakousku hodnotí písemné práce bodovým systémem [1]. Při dosažení určité procentuální

hodnoty bodů je pak písemné práci přidělena známka dle přehledu níže.

Procentuální hodnoty odpovídající jednotlivým známkám si pro každý předmět stanovuje předmětová komise, obecně se hodnoty příliš neliší od přehledu níže, platného pro matematiku, fyziku a informatiku na nižším gymnáziu.

Na počátku každého školního roku jsou studenti seznámeni s kritérii hodnocení [1]:

- 1 90–100 %
- 2 75–89 %
- 3 60–74 %
- 4 50–59 %
- 5 0–49 %

3. Čeho chceme dosáhnout, pokud umožníme studentům napsat opravnou písemnou práci

Studenti, pokud nejsou spokojeni se svojí známkou z písemné práce, si mohou napsat opravnou písemnou práci. Chceme tak, aby studenti:

- nebáli se písemek,
- věděli, že mají šanci získat lepší známku i na druhý pokus,
- dobrovolně napsali si opravu,
- nestrachovali se, že si opravou známku zhorší,
- opakovaným napsáním písemky si vylepšili znalosti.

4. Způsob výpočtu finální známky

Studenti dopředu vědí, že si písemku mohou opravit, a dopředu znají způsob výpočtu finální známky. Z pohledu matematiky je zde i přínos lepšího pochopení významu váženého průměru a jeho praktické použití.

Finální známka je rovna váženému průměru obou známek (původní i nově získané). Váhy jsou určeny takto:

lepší známka (nezávisle zda první, či druhá) má váhu 80 %

horší známka (nezávisle zda první, či druhá) má váhu 20 %

Důležité je, že vahou 80 % je vážena vždy lepší známka. To odstraňuje časté obavy studentů, že by si opravou výslednou známku ještě zhoršit.

5. Výsledná známka pro varianty původní a opravné známky

V následujících tabulkách je uvedeno, jakou známku získal student z písemné práce (zde je to tzv. „první“ známka). Pokud se mu tato známka nelíbí, může si napsat opravnou písemnou práci (zde je to tzv. „opravná“ známka). Z těchto dvou známek je vypočítána výsledná známka podle vah výše (zde je to tzv. „finální“ známka).

5.1. Pokud je první známka 2

Opravná známka	Vážený průměr	Finální známka
1	1,2	1
2	2	2
3	2,2	2
4	2,4	2
5	2,6	3

Na příkladu si ukažme, jak je tato tabulka vytvořena. Pokud student v opravné práci dostal 1, je vážený průměr roven

$$0,8 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 = 1,2,$$

takže student dostal novou známku 1. Pokud student v opravné práci dostal 3, je vážený průměr roven

$$0,8 \cdot 2 + 0,2 \cdot 3 = 2,2,$$

takže student dostal novou známku 2.

Vidíme, že pouze v jediném možném scénáři, kdy původní známka byla 2 a oprava 5, dochází ke zhoršení výsledné známky na 3. Tato situace je však velmi nepravděpodobná a v mé praxi doposud nikdy nenastala.

5.2. Pokud je první známka 3

Opravná známka	Vážený průměr	Finální známka
1	1,4	1
2	2,2	2
3	3	3
4	3,2	3
5	3,4	3

5.3. Pokud je první známka 4

Opravná známka	Vážený průměr	Finální známka
1	1,6	2
2	2,4	2
3	3,2	3
4	4	4
5	4,2	4

5.4. Pokud je první známka 5

Opravná známka	Vážený průměr	Finální známka
1	1,8	2
2	2,6	3
3	3,4	3
4	4,2	4
5	5	5

6. Závěr

Z praktického hlediska má smysl psát opravné písemky, pokud jejich frekvence není příliš vysoká. Mně se osvědčily opravné písemky pro měsíční a čtvrtletní písemné práce. Pokud je frekvence například týdenní, opravy již ztrácejí smysl. Pokud má žák dost známek (alespoň 3), za lepší variantu považuji například škrtnutí nejhorší známky – každému se může přihodit, že nemá svůj den a počítat známku z průměru je podle mého názoru dosti nespravedlivé.

Výhody této opravné metody jsou:

- písemka není pro studenty tak stresující
- žáci jsou motivováni k opravě
- opakováním písemky si látku procvičí
- nemusejí se obávat zhoršení známky (ke zhoršení může dojít v jediném případě, kdy by původní známka byla 2 a opravná 5, kdy dojde ke zhoršení na 3 – pravděpodobnost tohoto scénáře je však velmi nízká)
- známku 2 i 3 si mohou vylepšit na 1

Nevýhodou této opravné metody je:

- více práce pro učitele

Tento způsob hodnocení žáci velmi oceňují a je na nich vidět, že jsou při výuce více v pohodě a písemek se již tolik neobávají.

Literatura

- [1] Školní řád Rakouského gymnázia v Praze.

Matematické hry v primě osmiletého gymnázia

Evžen Müller, Zemědělská akademie a Gymnázium, Hořice

ABSTRAKT. Článek Matematické hry v primě osmiletého gymnázia se pokouší o odpověď na otázku, zda je vhodné si při hodinách matematiky hrát a co případně to může přinést žákům a učitel. Na příkladu několika her text ukazuje, jakým způsobem je možné zbavovat žáky strachu z matematiky a zároveň napomáhat rozvoji talentovaných. Jako ukázkové hry byly zvoleny upravené Matematické Člověče, nezlob se, Desítka, Nejmenší vyhrává a několik variant hry NIM. Všechny uvedené hry lze také hrát a „zkoumat“ v matematických kroužcích pro nadané žáky nižšího gymnázia.

1. Úvod

Na dnech otevřených dveří každoročně pokládáme žákům přicházejícím do učebny matematiky dvě otázky. První z nich zní: „Co tě napadne, když se řekne matematika? Stačí, když řekneš jedno nebo dvě slova.“ Odpovědi nebývají příliš optimistické:

- Počítání.
- Naše učitelka! (Následovalo líčení nepříjemných zážitků z hodin.)
- Smrt!

Druhá otázka „Hrajete si někdy při hodinách matematiky?“ vzbuzuje povětšinou překvapené pohledy. I v tomto případě jsou odpovědi zpravidla stručné:

- Cože?
- To asi ne. . .
- Nevzpomínám si. . .

Výše uvedené odpovědi byly vyřčeny žáky devátých tříd. Nutno konstatovat, že zájemci o osmileté studium byli k matematice většinou o něco smířlivější. Přesto lze tvrdit, že matematika na základní škole rozhodně nepatří k nejoblíbenějším předmětům a je pouze na učiteli, zda dokáže žákům nabídnout i její zábavnější stránky. Pokusme se tedy zamyslet nad tím, zda je vhodné si v hodinách matematiky hrát a jestli čas takto vynaložený není zbytečně promarněný.

Přestože vzhledem k počtu nejrůznějších akcí a projektů, které často nepříjemně zasahují do výuky, není času nazbyt. Domníváme se, že hry by v hodinách matematiky měly mít svoje pevné místo. V tomto příspěvku se zaměříme na hry, které hrajeme nebo s nimi seznamujeme žáky v primě osmiletého gymnázia. Některé si našly cestu do vyučování, složitějším problémům jsme se věnovali v rámci matematického kroužku.

2. Matematické Člověče, nezlob se (upravené našimi studenty)

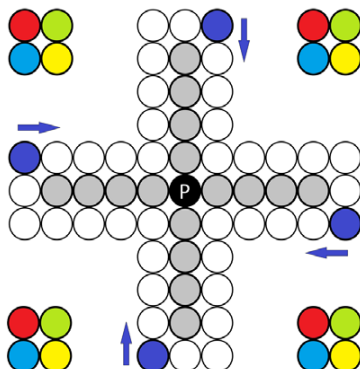
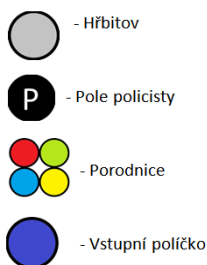
První hra je víceméně oddychová, jedna partie může trvat i více než 45 minut a do běžných hodin matematiky se nehodí. Na druhou stranu Matematické Člověče, nezlob se, jak název napovídá, matematiku více či méně zahrnuje a nabídne i bezpočet zajímavých problémů pro starší a pokročilé. Například výpočet pravděpodobnosti nasazení figurky v nej-různějších situacích může být oříškem i pro maturanty. Primány osmiletého gymnázia však spíše zaujme řada překvapivých situací a pestrost možností, které jim hra nabízí. Přitom si nejspíše ani neuvědomí, že se při hře musí daleko více soustředit než u obvyklé varianty Člověče, nezlob se. A to je jeden z důvodů, proč může být vhodné žáky s touto hrou seznámit. Pravidla, která zde uvádíme, vycházejí z poměrně známého Matfyzáckého Člověče, nezlob se, v průběhu let ale byla našimi studenty postupně upravována a doplňována.

2.1. Matematické Člověče, nezlob se (pravidla)

Počet hráčů: Hru hrají čtyři hráči.

Součástky hry: Potřebujeme hrací kostku (s jedním až šesti oky na stěnách), 4×4 figurky různých barev (každý hráč dostane od každé barvy jednu) + 1 černá (nebo jinak odlišná) figurka – policista, lidově řečeno „policajt“. Barevná hrací deska (obr. 1) je k dispozici ke stažení a vytištění na <https://tempus-skolni-casopis.webnode.cz/>.

HRACÍ DESKA



Obr. 1: Hrací deska Matematického Člověče, nezlob se

Informace úvodem: V úvodu každý hráč jednou hodí kostkou. Hráč, kterému padne nejvyšší počet ok, bude začínat. Při rovnosti počtu ok rozhodují další hody. Dále se hráči na tahu pravidelně střídají v tzv. směru chodu hodinových ručiček. Tento směr lze odpozorovat například na hodinách (ručičkových, ne digitálních!) na chodbě školy; pozor, ručičky se nehýbou plynule, je třeba chvíli počkat.

Nasazení figurky: Pokud hráči během hry padne šestka, může jí využít k nasazení figurky. Vezme z porodnice nenasazenou figurku libovolné barvy a postaví ji na své vstupní políčko na hrací dráze. Nasazování není v průběhu hry povinné.

Nemá-li hráč k dispozici figurku, kterou by mohl táhnout (nejen na začátku, ale i během hry), může házet třikrát – provede tzv. hody naděje. Pokud hodí šestku, nebo je součet dvou po sobě jdoucích nebo všech tří hodů naděje dělitelný šesti, nasadí do hry libovolnou figurku. Další hod po nasazení provede ale pouze v případě, že mu padla šestka.

O možnost nasazení figurky hráč přichází, má-li při některém ze tří hodů naděje možnost tahu na svém hřbitovu, který musí provést (podrobnosti dále v odstavci Tah figurkou).

Pokud hráči při každém ze tří hodů naděje padne jednička, má nárok na další tři hody naděje. Pokud by mu i při nich padly tři jedničky, nasadí figurku na libovolné vstupní pole (tedy nejen svoje).

Tah figurkou: Hráč, který je na řadě, hodí kostkou. Hráč může posunout kteroukoli figurku takové barvy, jakou nemá na svém hřbitovu nebo ve své porodnici. Zvolenou figurku posune o tolik polí, kolik ok padlo na kostce (ve směru chodu hodinových ručiček).

Pokud padne šestka, může hod opakovat tak dlouho, dokud mu padají šestky. Hody musí použít ve správném pořadí, čili nejdříve použije všechny šestky (i pro různé figurky) a teprve nakonec poslední číslo. Hráč také může použít šestky jednotlivě tak, jak mu postupně padají. Tahy jsou povinné, nelze se jich vzdát.

Každý hráč pohybuje figurkami ve směru chodu hodinových ručiček od svého startovního pole směrem ke svému hřbitovu. Pokud má figurku před hřbitovem a padne mu vhodné číslo, zajede s ní dovnitř do příslušného hrobu. Od této chvíle již nemůže hrát žádnou figurkou této barvy (s výjimkou prostoru hřbitova, viz dále). Když ale padne příliš mnoho ok a nemá žádný jiný možný tah, pokračuje dál po hrací dráze a svůj hřbitov mine (což samozřejmě pěkně našťve).

Dotkne-li se při tahu hráč některé z figurek, jimiž může táhnout, musí provést tah touto figurkou (prostě jako v šachách).

Figurky na hřbitově nejsou definitivně pohřbeny a mohou se pohybovat a přeskakovat (obsazené hroby) stejně jako na hrací dráze. Hráč tak musí využít hod naděje, který provádí, když nemůže táhnout figurkou na hrací dráze (protože nemá nasazeno).

Vyhození figurky: Pokud hráč ukončí postup s figurkou (v daném tahu už s ní nebude pohybovat) na poli, kde stojí jiná figurka, pak ji odstraní z hrací dráhy a dá do porodnice kterémukoli hráči, který s ní může hrát. Jinými slovy, dá ji tomu hráči, který nemá figurku stejné barvy ani na hřbitově, ani v porodnici. Nemůže se tedy stát, že by některý z hráčů měl na svém hřbitově nebo v porodnici dvě nebo více figurek stejné barvy.

Poznámka: Může se stát, že za určitých okolností (snad je jasné, za jakých) musí hráč vyhozenou figurku vrátit do své porodnice.

Konec hry (nasazení policisty): Ve hře zvítězí hráč, kterému se jako prvnímu podaří dovést na svůj hřbitov figurky všech čtyř barev. Zbývají hráči pak pokračují v boji o druhé místo. Vítězný hráč po závěrečném tahu okamžitě pokračuje nasazením policisty na libovolně zvolené místo hrací dráhy, hodí kostkou a provede další tah.

Policistou je možno pohybovat oběma směry, pokud ale padne šestka, provede hráč jen jeden z možných tahů a dále nehází. Policistu lze samozřejmě využívat proti neoblíbenému protihráči, který vás vyhazoval a komplikoval vaši hru (to je první důvod, proč je policista zařazen do hry, druhý je prostě ten, aby se vítěz v závěru hry nenudil). Nemůže-li některý hráč táhnout, protože na cílovém poli jeho tahu stojí policista,

musí jít o příslušný počet políček nazpět (provést tah v opačném směru – couvnout).

Hra končí poté, co úspěšně zaplní svůj hřbitov druhý hráč. O třetím místě rozhoduje zaplnění hřbitova v tomto okamžiku. V případě shodného zaplnění končí na třetím místě oba zbývající hráči.

Poznámka: Jakákoli vylepšení a upřesnění stávajících pravidel jsou vítána!

3. Desítka

Také hra Desítka je poměrně dobře známá. Pro začátek stačí znát čtyři základní početní operace a užití závorek. Hrát ji můžeme v celé třídě nebo skupině a můžeme ji vyplnit i několik minut, které zbydou na konci hodiny. V průběhu let lze hru postupně obohacovat o další početní operace (mocniny, faktoriály, kombinační čísla, logaritmy, zbytek po dělení – modulo). My jsme zkusili v matematickém kroužku pro žáky primy zařadit všechny tyto „vyšší“ operace a ukázalo se, že někteří jejich užití úspěšně zvládli.

V Desítce lze také uspořádat třídní či školní turnaj. Následující pravidla jsou určena právě pro tuto variantu.

3.1. Pravidla

Ve hře používáme karty s čísly 1–10 v sadě se 40 kartami (4×10 karet). Hrají proti sobě dva hráči na deset losování – jedno utkání se skládá z 10 úloh. Rozhodčí (žák, který zrovna nehraje) pro každou úlohu vylosuje 4 karty, měří čas (1 min) pro každou úlohu, kontroluje výsledek a zapisuje body. Použité karty rozhodčí odkládá stranou tak, aby nebyly vidět jejich hodnoty.

Vyložená čísla mají hráči za úkol zkombinovat s použitím povolených matematických operací, libovolného přeskupování a závorek tak, aby výsledek byl vždy 10. Lze vytvářet také čísla dvojciferná a používat zlomky a mocniny (viz dále).

Povolené matematické operace jsou sčítání, odčítání, násobení, dělení, dále lze použít mocniny, logaritmy, kombinační čísla, faktoriály a celočíselný zbytek po dělení (mod).

Hru velmi zjednodušuje používání mocnin $1^n = 1$ a $1^0 = 1$ (o výraz 0^0 se nikdo pokoušet asi nebude). Proto smí každý z hráčů využít každou z těchto možností během celého zápasu pouze jednou, rozhodčí využítí těchto mocnin hlídá.

Hráč, který dospěl k řešení úlohy, to oznámí zřetelně vysloveným „Mám!“. Rozhodčí řešení zkontroluje – je-li správné, přidělí hráči bod, je-li chybné, získává bod soupeř.

Poznámky:

1. Druhá odmocnina není v hře přímo povolena, lze ale umocňovat základ na exponent $\frac{1}{2}$.

2. Například pro vylosovaná čísla 1, 2, 7 a 9 máme k dispozici řešení $9^{\frac{1}{2}} + 7 = 10$.

3. Hra má celkem 715 kombinací, s operacemi povolenými ve výše uvedených pravidlech lze všechny vyřešit.

3.2. Příklady vyřešených úloh

- Čísla 1, 6, 7 a 10 – řešení: $6! - 10 \cdot 71 = 10$
- Čísla 1, 3, 6 a 8 – řešení: $6 + \log_3 81 = 10$ (pokud se vám to nelíbí, tak $8 + 6 - 1 - 3 = 10$)
- Čísla 1, 6, 6 a 7 – řešení: $(6 \cdot 7) \bmod 16 = 10$
- Čísla 5, 7, 7 a 8 – řešení: $\binom{8}{7} + 7 - 5 = 10$
- Čísla 6, 7, 7 a 8 – řešení: $(67 \bmod 8) + 7 = 10$

4. Nejmenší číslo vyhrává

Hru je třeba hrát v početnější skupině, nejlépe v celé třídě. Pravidla jsou celkem jednoduchá: Žáci si připraví papírek, na který budou psát čísla. V každém kole hry pak napíší nějaké přirozené číslo. Vyhrává žák s nejmenším číslem, které ale současně neměl nikdo jiný. Při vyhodnocování hry učitel postupně říká přirozená čísla od čísla jedna směrem nahoru. Pokud žák uslyší číslo, které má napsané, musí se přihlásit. Ostatní soutěžící vidí, kdo jaké číslo zvolil, kolikrát se to či ono číslo opakovalo, a mohou se podle toho zařídit v dalších kolech hry. I po určení vítěze je vhodné orientačně zjistit, jaká větší čísla se ve hře objevila. Po ukončení kola všichni své číslo přeškrtnou a začíná se znovu.

Na ukázkou uvádíme tabulku s výsledky 10 her, kterých se účastnilo 28 žáků a jejich učitel (E. M.). Žáci volili různé strategie, zatímco například Míša (dvojnásobná vítězka) psala stále číslo 5, Vojta už od začátku střídal čísla od 7 do 9. Někteří se snažili naopak zpočátku psát čísla malá (1 až 3), ti ale vzhledem k počtu hráčů úspěšní nebyli, jen jednou uspěl s číslem 2 učitel. Ten měl nakonec i nejmenší aritmetický průměr z čísel, která napsal (3,2).

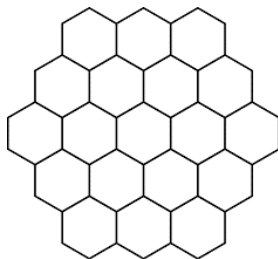
Hra	Vyhrávající číslo	Výherce	Vynechaná čísla
1	5	Míša	
2		–	1 a 5
3	5	Míša	
4	9	Matěj	
5	4	Julča	
6	7	Emča	2
7	6	Lucka	
8	6	Anežka	
9	2	E. M.	
10	8	Vojts	

Doporučení:

- Hru je třeba opakovat vícekrát.
- Učitel hraje společně s žáky.
- Učitel zapisuje na tabuli vítězná čísla a vítěze.
- Na závěr můžeme provést rozbor výsledků a strategií jednotlivých žáků.

5. Hry s vítěznou strategií – NIM a hry podobné

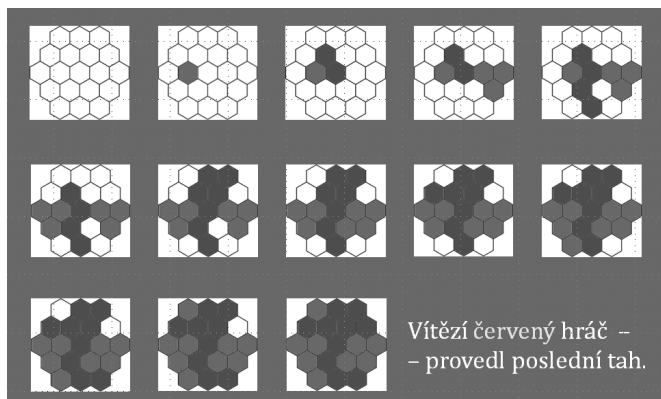
Méně známou variantou hry je NIM 19, jehož hrací plochu tvoří 19 buněk – šestiúhelníků (obr. 2).



Obr. 2: Hrací plocha hry NIM 19

Základní varianta má následující pravidla:

- Všechny buňky jsou na začátku prázdné.
- Hráči se v tazích pravidelně střídají.
- Hráč na tahu vybarví jednu až tři buňky.
- Jednu buňku může vybarvit kdekoli;
- dvě v jednom tahu vybarvené buňky musí spolu sousedit;
- tři buňky může v tahu vybarvit, když tvoří (rovnostanný) „trojúhelník“.
- Vítězí hráč, který vybarví poslední buňku (obr. 3)



Obr. 3: Příklad hry (začíná „modrý“ – světlejší šedivá barva, vítězí tmavší „červený“)

Hra nabízí poměrně jednoduchou vítěznou strategii pro hráče, který začíná, a je v možnostech primánů ji najít. Nejprve je třeba vybarvit prostřední pole a poté vždy reagovat na tah protihráče tahem středově souměrným (to není problém, ta políčka jsou vždy volná, a tudíž k dispozici).

Obdobná varianta hry vychází z hrací desky obsazené kameny (figurkami), které se podle výše uvedených pravidel odebírají. Vítězí hráč, který odebere poslední kámen. Poněkud složitější je varianta, při které vybarvujeme buňky podle stejných pravidel, avšak ten, který vybarví poslední buňku, hru prohrává.

6. Číselný NIM – základní varianta

Jednoduchá varianta hry NIM s přirozenými čísly nabízí již v primě rozsáhlé možnosti jejího zkoumání a zobecňování.

Hráči se dohodnou na hraničním (přirozeném) čísle h (mohou si ho například vylosovat z kartiček s připravenými čísly 51 až 100). Hráči se dále také „dohodnou“ na největším (přirozeném) čísle n , se kterým mohou při hře hrát – určí množinu použitelných čísel $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

První hráč vykopává – vybere číslo z množiny M . Druhý hráč zvolí opět číslo z M (může i stejné jako soupeř) a přičte k prvnímu – vytvoří mezisoučet. Hráči se na tazích pravidelně střídají, každý vybírá číslo z množiny M a o toto číslo navyšuje mezisoučet. Tahu se nelze vzdát. Hráč (poslední), po jehož tahu dosáhne mezisoučet hranice h (nebo ji překročí), prohrává.

6.1. Příklad hry

Nechť je například hranice $h = 60$ a $M = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$. Najít výherní strategii není příliš složité. Hráč s výchozím číslem 59 je zcela jistě v prohrané pozici (PP). Hráč s čísly 52 až 58 ale vyhraje (označme tato čísla VP – vyhrané pozice), bez problémů posune soupeře do pozice prohrané. Číslo 51 je špatné (PP), čísla 44 až 50 jsou naopak příznivá (VP). Snadno lze dojít k závěru, že prohrané pozice jsou 59, 51, 43, 35, 27, 19, 11 a 3. Hráč, který začíná, musí tedy (chce-li mít jistotu výhry) začít číslem 3 a držet soupeře na prohraných pozicích. Soupeř je zcela bez šance.

Pro bystřejšího žáka primy není problém takto tuto hru analyzovat a dojít k uvedenému závěru. Jak ale řešení zobecnit způsobem, který pomůže rychle určit pro daná čísla h a n vítěznou strategii a hlavně číslo, kterým je třeba začít (má-li vítěznou strategii začínající)?

Nechť je hranice h a $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Je zřejmé, že hráč s číslem $n - 1$ je v prohrané pozici (PP). Prohrané pozice vytvoří klesající aritmetickou posloupnost s diferencí $n + 1$ a my musíme najít její konec. (Poznamenejme, že pochopit zmiňované pojmy – aritmetická posloupnost a její difference – nečinilo primánům žádný problém.)

Vypočítáme zbytek při dělení $(h - 1) : (n - 1)$, výsledek označíme z . Vidíme, že pro $0 < z \leq n$ vyhraje začínající hráč, pokud začne číslem z a poté bude držet soupeře na prohraných pozicích. K tomu stačí v každém kole doplňovat čísla soupeře na součet $n + 1$. Pro $z = 0$ je (obdobná) vítězná strategie na straně hráče, který hraje jako druhý.

Hra nabízí množství nejrozumnějších variant ke zkoumání a hledání vyhrávacích strategií. Jen některé jsou ale svojí obtížností přiměřené věku žáků primy, zmiňme alespoň jednu z těch jednodušších:

- Necht' je hranice h společná pro oba hráče.
- Hráči mají k dispozici množiny

$$A = \{1, 3, 5\},$$

$$B = \{2, 4, 6\},$$

$$C = \{3, 5, 7\} \text{ apod.}$$

Je zřejmé, že prohrané pozice jsou pro oba hráče různé. Jednoduchou analýzou pozic zjistíme, že například pro $h = 25$ a hráče A a B jsou prohrávající pozice (v tabulce tučně) rozloženy následovně:

	$h = 25$									$A = \{1, 3, 5\}$									$B = \{2, 4, 6\}$								
A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

Obdobná tabulka pro hráče B a C vypadá takto:

	$h = 25$									$B = \{2, 4, 6\}$									$C = \{3, 5, 7\}$								
B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

Tato verze hry, jak se ale ukazuje, příliš zvýhodňuje jednoho z hráčů (menší počet PP) a přímo vybízí k tvorbě vyrovnanější varianty. Můžeme se tak pustit do dalšího výzkumu a pokusit se o sestavení příslušných pravidel. Příklad takové hry může vypadat takto:

- Definujeme dvě různé tříprvkové množiny A, B k výběru (množiny obsahují jednociferná přirozená čísla, jedno mohou mít společné).
- První z hráčů vybere svoji a soupeřovu množinu.
- Druhý z hráčů stanoví hranici h .
- Los rozhodne, kdo bude zahajovat hru.

Následně můžeme hledat odpovědi na následující otázky (a případně si klást i další):

- Jaké možnosti nabízí volba množin A a B?
- Má druhý hráč šanci zvítězit a jak případně stanovit hranici h ?

7. Závěrem

Výše uvedené hry jsou pouze střípkem z rozsáhlé mozaiky her, které lze využít při hodinách nebo matematických kroužcích.

Z našich zkušeností vyplývá, že matematické hry v primě:

- mohou pomoci vytvořit pozitivní vztah žáků k matematice;
- umožňují nenásilně odhalovat nadání a vlohy;
- motivují žáky k aktivitě a ke snaze prosadit se mezi spolužáky;
- umožňují zpřístupnit žákům složitější matematiku;
- mohou být prospěšné i učitelům jako prevence před vyhořením.

Zkrátka a dobře, nejen hrami, ale i matematikou se můžeme bavit. A kdo hraje a zkoumá matematické hry, nejenže nezlobí, ale nezřídka se i něco naučí.

Literatura

- [1] <https://tempus-skolni-casopis.webnode.cz/>
- [2] <http://www.deskovehry.info/pravidla/matfyz.htm>
- [3] <https://abaku.org/metodika-abakarty>
- [4] <https://www.musilek.eu/michal/nim.html>
- [5] *Jak se hraje NIM19.* <https://www.youtube.com/watch?v=fxWNMs-Wcpg>
- [6] Kuncová, K.: *Hra NIM a její varianty.* Závěrečná práce, MFF UK, 2014.

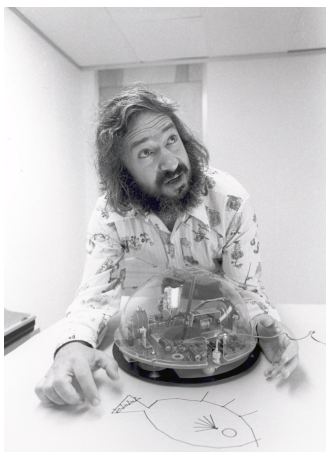
Želví geometrie a programovací jazyk Python

Michal Musílek, UHK, Hradec Králové

ABSTRAKT. Článek je věnován želví geometrii, stručně historii jejího vzniku, implementaci na čtyřech různých úrovních abstrakce a obecnosti ve webové aplikaci XLogoOnline, konstrukci jednoduchých geometrických obrazců (pravidelné n -úhelníky, pyramida z obdélníků) a programovacím jazykům LOGO a Python. V současnosti se jeví jako nejvíce intuitivní a současně velmi výkonná varianta programování želvy využitím modulu Turtle v rámci jazyka Python. Možnosti tohoto spojení jsou demonstrovány na konstrukci posloupností geometrických útvarů vedoucích k fraktálům s názvy von Kochova vložka, Sierpiňského koberec, či Hilbertova křivka.

1. Popis Želví geometrie a jazyk Python

Želví geometrii navrhl jako interaktivní vývojové prostředí pro rozvoj tvůrčího myšlení žáků a studentů a jejich schopnosti řešit rozmanité matematické problémy profesor Massachusettského technologického institutu Seymour Papert (1928–2016), významný propagátor a spoluvůdce pedagogického směru nazvaného konstruktivismus založeného Jeanem Piagetem (1896–1980). K počítači připojil již v roce 1967 malého robota, kterého nazval *Turtle*, tj. želva, a který svým pohybem po kreslicí ploše (velký arch balicího papíru) a spouštěním či zvedáním kreslicího pera umístěného uprostřed těla želvy umožňoval kreslení geometrických útvarů zcela novým přístupem (obr. 1).



Obr. 1: Seymour Papert se svým želvím robotem (zdroj: Wikipedia)

Zajímavé je, že Seymour Papert sám neprogramoval interpret jazyka *LOGO*, jehož součástí byla první verze želví geometrie. Tým vývojářů jazyka první implementace *LOGO* tvořili Daniel Bobrow (1935–2017), Wallace Feurzeig (1927–2013) a Cynthia Solomon (*1938). Jazyk *LOGO* vychází ve své syntaxi z jazyka *LISP* (z angl. *List Processor*), který byl používán již v 60. letech minulého století jako favorizovaný jazyk k programování umělé inteligence a je zajímavý tím, že jak programový kód, tak data jsou strukturovány jako uspořádané seznamy.

Nad rámec syntaxe vycházející z jazyka *LISP* jsou do jazyka *LOGO* přidány právě příkazy želví geometrie a při zpětném pohledu je to největší originální přínos projektu jazyka *LOGO*. Později byla želví geo-

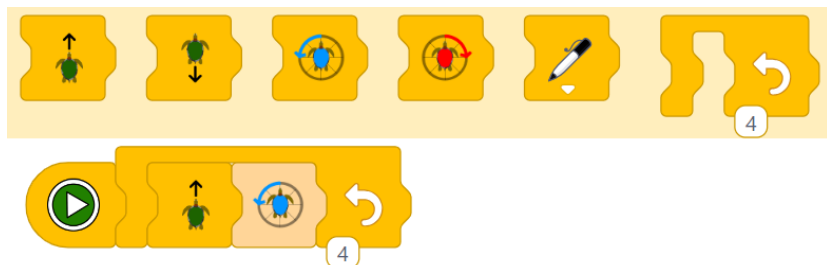
metrie implementována do řady jiných jazyků, z nichž velké rozšíření do výuky tematického okruhu *Programování a algoritmizace* vyučovacího předmětu *Informatika* v aktuální verzi rámcových vzdělávacích programů mají jazyky *Scratch* a *Python*.

Velmi zajímavý pohled na možnosti želví geometrie poskytují čtyři různá online prostředí na webu [8]. První dvě úrovně (nazvané *Mini* a *Midi*) představují blokové programování, program se zde sestavuje z bloků, které do sebe zapadají podobně jako kostky stavebnice. Třetí úroveň *Maxi* vychází z použití syntaxe jazyka LOGO a nejvyšší, čtvrtá úroveň *Mega* vychází ze syntaxe jazyka Python (obr. 2).



Obr. 2: Interaktivní prostředí želví geometrie XLogoOnline [8]

1.1. Úroveň Mini



Obr. 3: Želví geometrie XLogoOnline, úroveň Mini

První úroveň programování, nazvaná Mini, je použitelná už v rámci předškolního vzdělávání, protože spočívá pouze v sestavování programo-

vých bloků do řady, kterou čte interpret jazyka zleva doprava. Jediný symbol, který není čistě obrázkový, je číslice 4, která znamená počet opakování příkazů (programových bloků) vložených dovnitř bloku řídicího opakování. Jiné hodnoty, např. délka pohybu želvy vpřed, či úhel otočení želvy jsou pevně dány. Podívejme se na obr. 3 a pokusme se odhadnout, jaký obrazec nakreslí želva po spuštění programu.

Na horní řádce vidíme zleva doprava bloky pro posun želvy vpřed, posun želvy vzad, otočení želvy (na místě) o 90° vlevo, otočení želvy (na místě) o 90° vpravo, zapnutí, nebo vypnutí kreslicího pera (tento blok nemusíme v programu využít, protože implicitně je kreslení zapnuto) a řídicí blok pro opakování bloků vložených dovnitř řídicího bloku. Program v dolní řádce se spustí kliknutím na zelené tlačítko s bílou šipkou. Za ním je řídicí blok, který čtyřikrát zopakuje dva po sobě jdoucí příkazy: pohyb želvy vpřed a otočení želvy (na místě) o 90° vlevo. Želva tedy nakreslí čtyři na sebe navazující úsečky stejné pevně dané délky, kdy sousední úsečky svírají pravý úhel. Jaký geometrický obrazec nakreslí želva?

1.2. Úroveň Midi



Obr. 4: Želví geometrie XLogoOnline, úroveň Midi

Druhá úroveň programování, nazvaná Midi, je ideální pro žáky 1. stupně ZŠ. Programování opět spočívá pouze v sestavování programových bloků do řady, kterou čte interpret jazyka zleva doprava, ale na rozdíl od předchozí úrovně umožňuje měnit parametry jednotlivých programových bloků. Např. délka pohybu želvy vpřed či vzad není pevně 100 kroků, ale je možné tuto výchozí hodnotu libovolně změnit. Podobně úhel otočení želvy vlevo či vpravo již není pevně nastaven na 90° , ale tuto výchozí hodnotu lze libovolně měnit. Měnit je samozřejmě možné také počet

opakování, výchozí hodnota je 4. Podívejme se na obr. 4 a pokusme se odhadnout, jaký obrazec nakreslí želva po spuštění programu tentokrát.

Na horní řádce obr. 4 vidíme opět bloky pro posun želvy vpřed, či vzad, otočení želvy (na místě) o 90° vlevo, či vpravo, zapnutí, nebo vypnutí kreslicího pera a řídicí blok pro opakování bloků vložených dovnitř řídicího bloku. Oproti prostředí Mini má nyní většina bloků číselné parametry, jejichž hodnoty můžeme měnit během sestavování programu v dolní řádce. Program se opět spustí kliknutím na zelené tlačítko s bílou šipkou. Za ním je řídicí blok, který šestkrát zopakuje dva po sobě jdoucí příkazy: pohyb želvy vpřed o délce 75 kroků a otočení želvy (na místě) o 60° vlevo. Želva tedy nakreslí šest na sebe navazujících úseček délky 75 kroků. Na konci každé z úseček se pootočí o 60° , takže sousední úsečky svírají úhel $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Jaký geometrický obrazec nakreslí želva?

1.3. Úroveň Maxi

Třetí úroveň programování se jmenuje Maxi a hodí se pro talentované žáky 2. stupně základní školy, středoškoláky nebo univerzitní studenty. Programování už není grafické, ale je potřeba znát syntaxi programovacího jazyka LOGO, tedy základní příkazy zejména želví geometrie, včetně významu jejich parametrů, ale také základní řídicí příkazy. Zkušenost s výukou univerzitních studentů ukazuje, že netypická a abstraktní syntaxe příkazů programovacího jazyka LOGO je často náročná i pro studenty bakalářských studijních programů. Tak například parametry procedur a další dříve deklarované proměnné se vždy volají identifikátory začínajícími znakem *dvojtečka*. V rámci přiřazení pomocí příkazu *make* se však jméno proměnné, do níž přiřazujeme hodnotu, chová jako řetězec a začíná znakem uvozovky. Na rozdíl od většiny programovacích jazyků jsou však uvozovky pouze na začátku řetězce, ale nejsou na jeho konci. Příkaz *make* je jedním z mnoha příkazů s velmi neobvyklou syntaxí. Tato třetí úroveň tak může být nečekaně vůbec nejobtížnější pro pochopení. Na druhou stranu syntakticky zcela odpovídá historické podobě programovacího kódu z doby, kdy želví geometrie vznikla. Podívejme se na obr. 5. Vidíme, že želva v tomto případě nakreslila osmiúhelník. Program se ve verzi Maxi spustí zapsáním jména procedury deklarované názvem uvedeným za klíčovým slovem *to* a hodnot parametrů v řádku hlavičky funkce. Tedy osmiúhelník mohla želva nakreslit po odeslání příkazu *polygon 8 75*. Zamysleme se, co přesně vykoná procedura *polygon*

`:n :a` a také co umí vypočítat a zobrazit procedura `clinking :n` (v tomto případě nejde o geometrii).



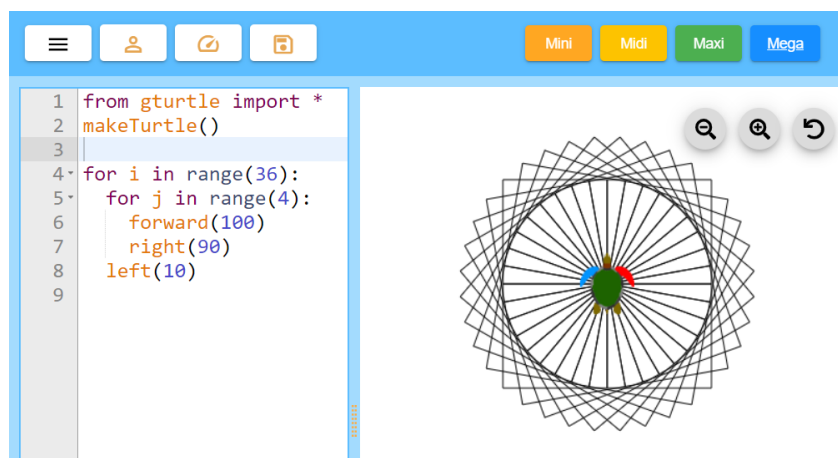
Obr. 5: Želví geometrie XLogoOnline, úroveň Maxi – jazyk LOGO (výřez snímku obrazovky aplikace) [8]

Okno aplikace Maxi je rozděleno na levou část pro zápis kódu v jazyce LOGO a na pravou část, kde se zadávají a provádějí příkazy. Může jít o příkazy, které jsou součástí jazyka, např. příkaz `forward 100` řekne želvě, aby šla 100 kroků dopředu, příkaz `back 50` ji pošle 50 kroků dozadu, příkaz `left 90` znamená otočení (na místě) o 90° doleva (tj. proti směru hodinových ručiček), `right 60` otočení o 60° doprava. Častěji se však do okénka vkládají volání procedur naprogramovaných v levé části. Příkaz `polygon 8 75` způsobí, že želva nakreslí pravidelný osmiúhelník o délce strany 75 kroků. Příkaz `clinking 8` vypočítá, kolik cinknutí se ozve na oslavě, kde si při přípitku přitukne skleničkami každý s každým 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lidí. Výstupem programu je tedy seznam hodnot 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28.

1.4. Úroveň Mega

Čtvrtá úroveň programování se jmenuje Mega a stejně jako předchozí se hodí jednak pro talentované žáky 2. stupně základní školy, jednak pro středoškoláky a univerzitní studenty. Pro středoškoláky je v současném novém pojetí výuky tematického okruhu Programování a algoritmizace v rámci nového pojetí vzdělávací oblasti Informatika doporučeným programovacím jazykem Python. Je nutné znát syntaxi programovacího jazyka Python, který však je, na rozdíl od jazyka LOGO, velmi intuitivní a přehledný. Ovládnout základní řídicí příkazy a několik příkazů pro pohyb želvy je velmi snadné. V akademickém roce 2023–2024 část studentů

studijního programu Informatika se zaměřením na vzdělávání na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové pilotně řešila úlohy zadané ve skriptech Didaktika programování (viz [3]) v jazyce Python místo v jazyce LOGO, a to na základě dobrovolnosti (zadání bylo stejné, ale část studentů řešila úlohy určené původně pro prostředí xLOGO v prostředí modulu *turtle* jazyka Python). Zkušenosti ukázaly, že pro příští akademický rok bude vhodné přejít na jazyk Python, protože studenti zapojení do pilotního ověřování na bázi dobrovolnosti hodnotí toto prostředí jako intuitivnější. Mohou se lépe zapojit do řešení problému místo toho, aby pečlivě hlídali neobvyklou syntaxi jazyka LOGO.



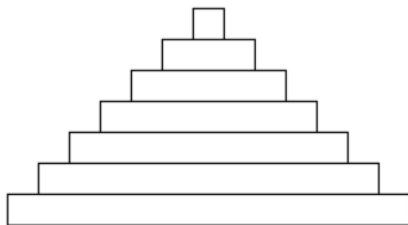
Obr. 6: Želví geometrie XLogoOnline, úroveň Mega – jazyk Python (výřez snímku obrazovky aplikace) [8]

Na obr. 6 vidíme ukázkou geometrického útvaru složeného z vůči sobě pootočených čtverců, které mají jeden vrchol totožný. Kolem tohoto vrcholu se čtverce natáčí pokaždé o 10° a všech 36 čtverců dohromady vytvoří kresbu podobnou květu slunečnice.

2. Ukázky využití jazyka Python

Ukažme si nyní některé zajímavé konstrukce s využitím jazyka Python. Kód programu lze zapsat do modulu Mega na stránce, se kterou jsme dosud pracovali, nebo použít v rámci vhodného vývojového prostředí pro jazyk Python, se kterým pracujete na vaší škole.

2.1. Pyramida z obdélníků



Obr. 7: Pyramida z obdélníků

V tomto projektu využijeme dvě procedury. První procedura *rectangle(a,b)* narýsuje obdélník o stranách délek a a b . Druhá procedura využívá první proceduru a z obdélníků sestaví pyramidu, která má n stupňů s výškou s (obr. 7). Nejvyšší stupeň je čtverec o straně délky s , každý nižší má šířku o $2s$ větší. Tato procedura má název *pyramid(n,s)*. Kreslit se začíná od pravého dolního rohu pyramidy. Pokud budeme pracovat v IDLE Pythonu, bude kód vypadat takto:

```
from turtle import *

def rectangle(a,b):
    for i in range(2):
        forward(b)
        left(90)
        forward(a)
        left(90)

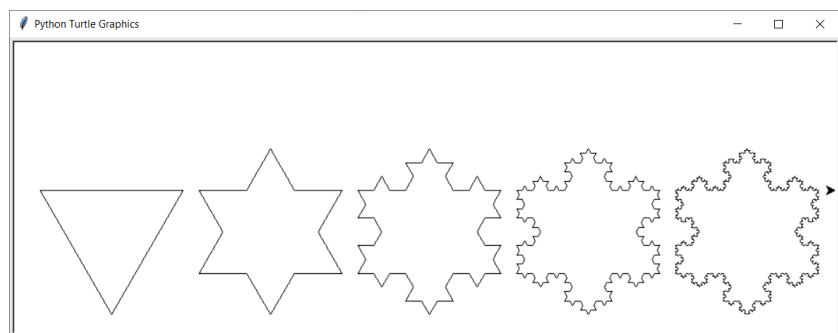
def pyramid(n,s):
    for k in range(n):
        z = (2*(n-k)-1)*s
        rectangle(z,s)
        forward(s)
        left(90)
        forward(s)
        right(90)

left(90)
pyramid(7,20)
ht()
```

2.2. Von Kochova křivka a von Kochova vločka

Útvary popsal v roce 1904 švédský matematik Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924). Jeho záměrem bylo sestrojít křivku, která je spojitá, ale přitom nemá v žádném svém bodě tečnu. Von Kochova křivka je fraktální útvar, který je limitou posloupnosti křivek, je určena rekurentně. První člen je úsečka dané velikosti. Každý další člen získáme z předchozího tak, že všechny úsečky, z kterých se skládá, rozdělíme na třetiny, obě krajní části ponecháme, zatímco prostřední nahradíme dvěma úsečkami stejné velikosti, jako je nahrazovaná úsečka (jako kdybychom sestrojili nad prostřední třetinou rovnostranný trojúhelník a jednu z jeho stran nahradili oběma zbývajících stranami).

Spojíme-li tři von Kochovy křivky, vznikne von Kochova vločka. Zatímco délka hraniční křivky von Kochovy vločky roste nade všechny meze (stačí si uvědomit, že posloupnost délek jednotlivých křivek je geometrická posloupnost s kvocientem $q = 4/3$), obsah plochy obrazce ohraničeného touto křivkou je evidentně konečný (obr. 8).



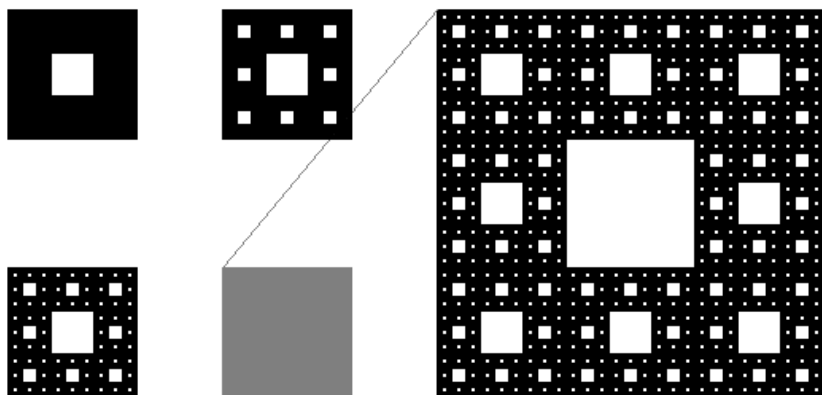
Obr. 8: Posloupnost Kochových vloček (prvních pět členů) – výstup programu v jazyce Python

Programovací jazyk Python tím, že umožňuje programovat algoritmy pro rýsování želví geometrií, je ideálním nástrojem pro kreslení křivek či ploch, které představují prvky geometrických posloupností, jejichž limitou jsou objekty nazývané fraktály. Francouzský matematik Benoît Mandelbrot (1924–2010) o nich píše v úvodu své knihy [4]: „... fraktály jsou tvary, u nichž – nezávisle na smyslu, který těmto slovům dáme – detail reprodukuje část a část reprodukuje celek...“ A jen o několik odstavců dále cituje slova Eugène Delacroix: „... větve stromů jsou samy malými úplnými stromy, úlomky skal se podobají skalním masivům, částčky

půdy obrovským shlukům půdy. Jsem přesvědčen, že najdeme množství takových analogií. Ptačí péro je složeno z milionů per.“

2.3. Sierpińského koberec a Sierpińského trojúhelník

Sierpińského koberec je fraktální útvar, který nevychází z křivek, ale z plošného obrazce, v tomto případě čtverce. Vznikne rekurzivním odstraňováním menších čtverců z dané čtvercové plochy. Jeho konstrukci popsal polský matematik Waclaw Franciszek Sierpiński (1882–1969) v roce 1916. Daný čtverec rozdělíme na 3×3 menších čtverců. Prostřední „vystřihneme“, tedy odstraníme, a se zbylými 8 čtverci naložíme stejně jako s původním velkým čtvercem (obr. 9).



Obr. 9: Posloupnost útvarů vedoucí k Sierpińského koberci (první čtyři členy)

O rok dříve, v roce 1915 popsal Waclaw Franciszek Sierpiński jiný útvar nesoucí jeho jméno, a to Sierpińského trojúhelník, který vznikne odstraňováním menších trojúhelníků z dané trojúhelníkové plochy. V daném rovnostranném trojúhelníku narýsujeme střední příčky, čímž jej rozdělíme na čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky s poloviční délkou strany. Prostřední „vystřihneme“, tedy odstraníme, a se zbylými třemi trojúhelníky naložíme stejně jako s původním velkým trojúhelníkem.

Kód programu pro vykreslení Sierpińského koberce:

```
from turtle import *

def serp_carpet(a,n):
```

```

if n>0:
    for j in range(4):
        for k in range(2):
            serp_carpet(a/3,n-1)
            forward(a/3)
        forward(a/3)
        right(90)
if n==0:
    for j in range(4):
        for k in range(2):
            fillcolor('black')
            begin_fill()
            for l in range(4):
                forward(a/3)
                right(90)
            end_fill()
            forward(a/3)
        forward(a/3)
        right(90)

penup(); setx(-200); sety(-200)
setheading(90); color('black');
speed(0); pendown()
serp_carpet(405,3)

```

2.4. Hilbertova křivka

Křivku, která se snaží co nejlépe vyplnit danou čtvercovou plochu, sestrojil roku 1891 německý matematik David Hilbert (1862–1943). Rekurze je tentokrát složitější, protože každá další Hilbertova křivka v posloupnosti se skládá ze dvou typů L a P Hilbertových křivek (vyplňujících prostor vlevo, nebo vpravo od spojnice výchozí a cílové pozice želvy), ze spojovacích úseček a otočení o 90° (obr. 10 a 11).

Celý program je tentokrát definován pomocí dvou vzájemně provázaných procedur *hilbert_left(a,n)* a *hilbert_right(a,n)*.

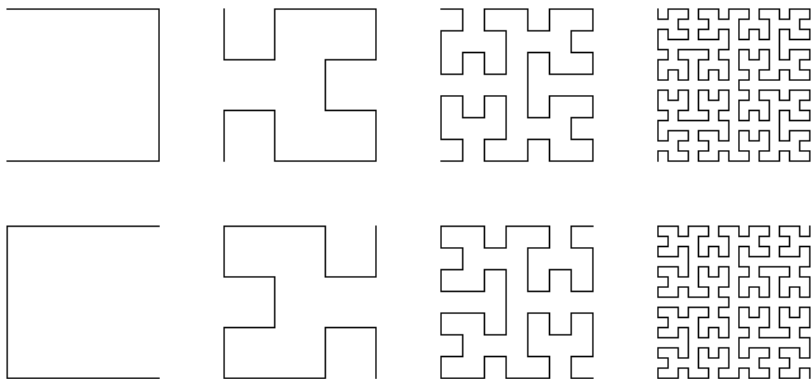
Kód pro vykreslení Hilbertovy křivky:

```

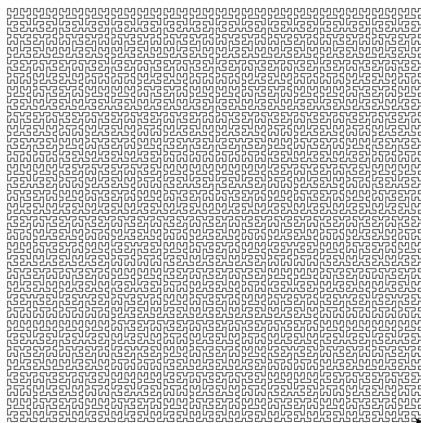
from turtle import *

def hilbert_left(a,n):

```

Obr. 10: Posloupnosti prvních čtyř Hilbertových křivek typu P (nahore) a L (dole)



Obr. 11: Sedmý člen posloupnosti Hilbertových křivek

```

if n>0:
    left(90)
    hilbert_right(a,n-1)
    forward(a)
    right(90)
    hilbert_left(a,n-1)
    forward(a)

```

```

        hilbert_left(a,n-1)
        right(90)
        forward(a)
        hilbert_right(a,n-1)
        left(90)

def hilbert_right(a,n):
    if n>0:
        right(90)
        hilbert_left(a,n-1)
        forward(a)
        left(90)
        hilbert_right(a,n-1)
        forward(a)
        hilbert_right(a,n-1)
        left(90)
        forward(a)
        hilbert_left(a,n-1)
        rt(90)

penup(); setx(-350); sety(-350)
speed(0); pendown()
hilbert_left(5,7)

```

3. Závěrem

Želví geometrii, která je tu s námi už více než půl století, vdechlo nový život propojení s moderním programovacím jazykem Python. Protože Python je doporučeným jazykem pro výuku Algoritmizace a programování v rámci nového pojetí vzdělávací oblasti (a vyučovacího předmětu) Informatika na gymnáziích a středních odborných školách – viz učebnice Python pro střední školy [2] – máme příležitost zařadit do výuky matematiky nebo informatiky netradiční geometrická témata. Velký motivační potenciál mají fraktální útvary, jejichž konstrukce je popsána v článku. Díky Pythonu je možné realizovat konstrukce, jejichž ruční rýsování by ve škole nebylo prakticky realizovatelné kvůli neúměrné časové náročnosti. Želví geometrie realizovaná počítačovým programem poskytuje nové možnosti vytváření komplexních obrazců a tím rozvíjí geometrickou tvořivost studujících.

Literatura

- [1] Bernardo, A., Mocvhetti, A. C., Carboncini, C., Zambelli, D.: *Matematica C3, Algebra dolce 1 – prima edizione*. Matematicamente.it, 2014. https://www.matematicamente.it/staticfiles/manuali-cc/algebra1_dolce_1ed.pdf
- [2] Blaho, A., Salanci, Ľ., Šimandl, V.: *Programování v jazyce Python pro střední školy*. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, České Budějovice, 2020. <https://imysleni.cz/ucebnice/zaklady-programovani-v-jazyce-python-pro-stredni-skoly>
- [3] Horník, T., Musílek, M., Milková, E.: *Didaktika programování*. Skripta v rámci projektu iMyšlení. Hradec Králové, 2019. https://imysleni.cz/images/vyukove_materialy/UHK_Didaktika_programovani.pdf
- [4] Mandelbrot, B.: *Fraktály. Tvar, náhoda a dimenze*. Mladá fronta, Praha, 2003.
- [5] Musílek, M.: *Dětské programovací jazyky*. Gaudeamus, Hradec Králové, 2012.
- [6] Pilgrim, M.: *Ponořme se do Python(u) 3*. CZ.NIC, Praha, 2010. <https://knihy.nic.cz/cs/detail/3/>
- [7] Python 3.11.5 Documentation » The Python Standard Library » Program Frameworks » turtle – Turtle Graphics. <https://docs.python.org/3/library/turtle.html>
- [8] <https://xlogo.inf.ethz.ch/release/latest/#/>

GeoGebra a úloha lineárního programování

Pavel Pražák, UHK, Hradec Králové

ABSTRAKT. Program GeoGebra je na různých typech škol využíván především pro řešení geometrických úloh. Lze ho tak velmi výhodně využít i při grafickém řešení úlohy lineárního programování se dvěma proměnnými. Tímto způsobem je možné obohatit výklad problematiky řešení rovnic a nerovnic s více neznámými a jejich soustavy a také ukázat praktické použití těchto matematických konceptů.

1. Úvod

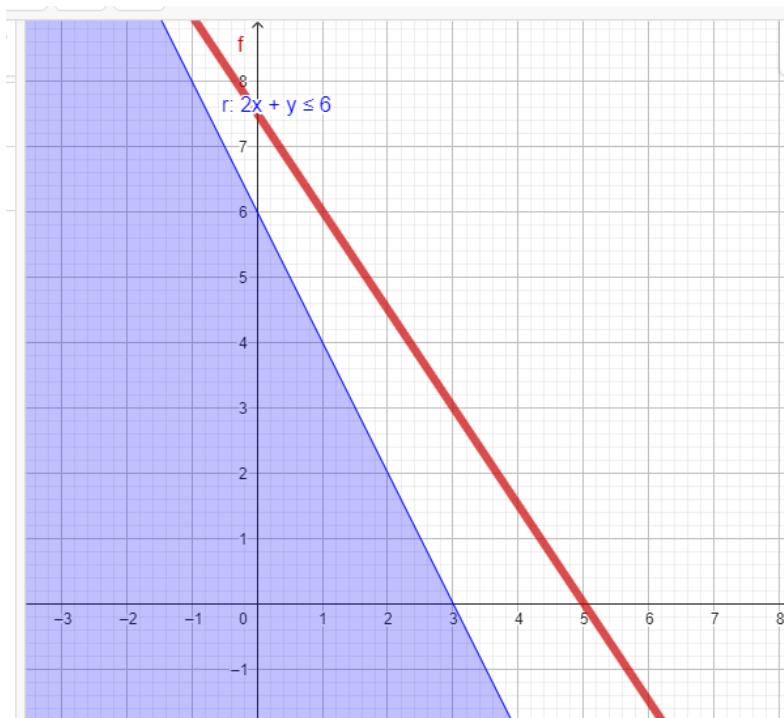
Termínem *optimalizační úloha* se v matematice rozumí problém, při kterém je třeba nalézt maximální nebo minimální hodnotu dané reálné

funkce na dané množině. Studenti středních škol se s takovými úlohami setkávají při studiu kvadratické funkce nebo při studiu diferenciálního počtu. Lze na ně však narazit i v případě výuky lineárních rovnic a nerovnic dvou neznámých, pomocí kterých lze formulovat úlohy lineárního programování. Takové úlohy jsou typické pro řešení manažerských problémů a souvisí s optimálním rozhodováním v průmyslu, zemědělství, dopravě nebo jiných ekonomických odvětvích. Souhrnně se takovými problémy zabývá obor nazývaný *operační výzkum*. Je-li možné úlohy tohoto typu do výuky matematiky na střední škole zařadit, lze očekávat, že osloví a zaujme i studenty, kteří jsou více humanitně zaměřeni. Vzhledem k omezené časové dotaci pro výuku matematiky na různých typech středních škol lze grafické řešení úlohy lineárního programování vysvětlit a ukázat poměrně rychle pomocí programu GeoGebra, např. [5], jak bude krátce představeno v tomto příspěvku.

2. Metody

Připomeňme poznatky z [1]. Geometrickým obrazem lineární rovnice $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se dvěma neznámými $x, y \in \mathbb{R}$ a alespoň jedním nenulovým parametrem a nebo b je přímka. Jsou-li dány dvě lineární rovnice, jedná se o soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými a geometrický obraz řešení této soustavy je průnikem přímek, které tvoří obrazy obou lineárních rovnic tvořících soustavu. Geometrickým obrazem lineární nerovnice $ax + by \leq c$ s alespoň jedním nenulovým parametrem a nebo b je jedna z polorovin s hraniční přímkou $ax + by = c$. Jsou-li dány dvě lineární nerovnice, jedná se o soustavu dvou lineárních nerovnic se dvěma neznámými a geometrický obraz řešení této soustavy je průnikem polorovin, které tvoří obrazy obou lineárních nerovnic tvořících soustavu. V programu GeoGebra (Grafy) lze takové relace snadno zakreslit – část poloroviny na obr. 1.

Budeme-li uvažovat pouze levou stranu lineární rovnice $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, získáme lineární funkci dvou reálných proměnných x a y ve tvaru $f: z = ax + by$. Lineární rovnici lze pak zapsat ve tvaru $z = c$. Pro dané hodnoty parametrů a, b , z nichž je alespoň jeden nenulový, lze pro různé hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$ získat rovnoběžné přímky. Takovým přímkám, pro které má lineární funkce dvou neznámých konstantní hodnotu c , se říká vrstevnice funkce. Takové vrstevnice lze pak v programu GeoGebra zakreslit – část přímky na obr. 1.



Obr. 1: Zadání a obrazy lineární algebraické rovnice se dvěma neznámými (přímka) a lineární algebraické nerovnice se dvěma neznámými (polorovina) v programu GeoGebra

3. Úloha lineárního programování

Pro motivaci a vysvětlení úlohy lineárního programování lze použít například následující úlohu se dvěma proměnnými, viz [2].

Úloha. V malé truhlářské dílně se vyrábí *skřínky* a *stolky*. Z výroby jedné skřínky lze dosáhnout zisku 3 tisíce Kč. Z výroby jednoho stolku lze dosáhnout zisku 2 tisíce Kč. Výrobu stolků a skříněk v truhlářské firmě zajišťují *truhlář* a *pomocník*. Truhlář pracuje 6 hodin denně, na výrobu jedné skřínky potřebuje 2 hodiny a na výrobu jednoho stolku 1 hodinu. Pomocník pracuje 8 hodin denně, na výrobu jedné skřínky potřebuje 2 hodiny a na výrobu jednoho stolku také 2 hodiny. V dílně hledají rozvržení výroby stolků a skříněk tak, aby byl dosažen maximální možný denní zisk za výrobních omezení truhláře a pomocníka.

Je-li $x \geq 0$ počet vyrobených skříněk za den a $y \geq 0$ počet vyrobených stolků za den, pak lze za jeden den (za předpokladu, že vše vyrobené se prodá) dosáhnout zisku (v tisících Kč) daného hodnotou následující lineární funkce (nazývané účelová funkce)

$$f(x, y) = 3x + 2y.$$

Protože truhlář pracuje 6 hodin denně, na výrobu jedné skřínky potřebuje 2 hodiny a na výrobu jednoho stolu 1 hodinu, platí omezení

$$2x + 1y \leq 6.$$

Pomocník pracuje 8 hodin denně, na výrobu jedné skřínky potřebuje 2 hodiny a na výrobu jednoho stolu také 2 hodiny, tj. platí omezení

$$2x + 2y \leq 8.$$

Přípustná množina M pro výrobu stolků a skříněk je dána soustavou uvedených lineárních algebraických nerovnic. Hledá se maximum účelové funkce. Krátce lze formulovanou úlohu, která je příkladem úlohy lineárního programování, zapsat ve tvaru $\max(3x + 2y)$ za podmínky

$$2x + y \leq 6,$$

$$x + y \leq 4,$$

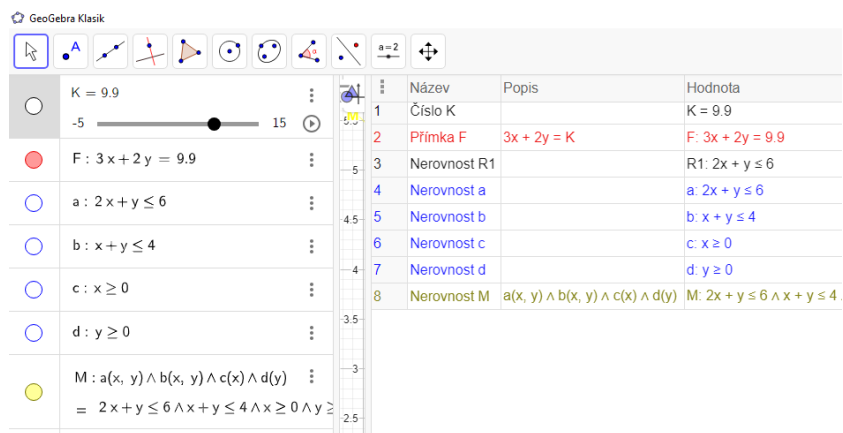
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

4. Řešení v GeoGebra

Představenou úlohu lze řešit grafickou metodou, jejíž podrobný popis lze nalézt např. v [3]. Stručně lze takový postup pro grafické řešení úloh lineárního programování shrnout v těchto bodech:

- a) zakreslíme přímku reprezentující nějakou vrstevnici, na které má účelová funkce konstantní hodnotu – např. hodnotu 0 (nulová vrstevnice/izokvanta),
- b) graficky znázorníme přípustnou oblast,
- c) nalezneme rovnoběžnou vrstevnici s nejvyšší možnou hodnotou, která ještě protíná přípustnou oblast,
- d) každý průsečík této vrstevnice s přípustnou oblastí je optimálním řešením.

V programu GeoGebra lze nejdříve připravit vrstevnice pro účelovou funkci. Pomocí posuvníku lze nastavit hodnotu vrstevnice. Následnou změnou této hodnoty lze kreslit různé vrstevnice dané účelové funkce. V další fázi je třeba zakreslit všechna omezení ve tvaru lineárních algebraických nerovnic. Pomocí operace konjunkce lze pak sestavit přípustnou oblast úlohy. Pohybem posuvníku lze nakonec nalézt optimální hodnotu zadané úlohy i optimální řešení. Jednotlivé kroky zadání je možné sledovat na obr. 2.



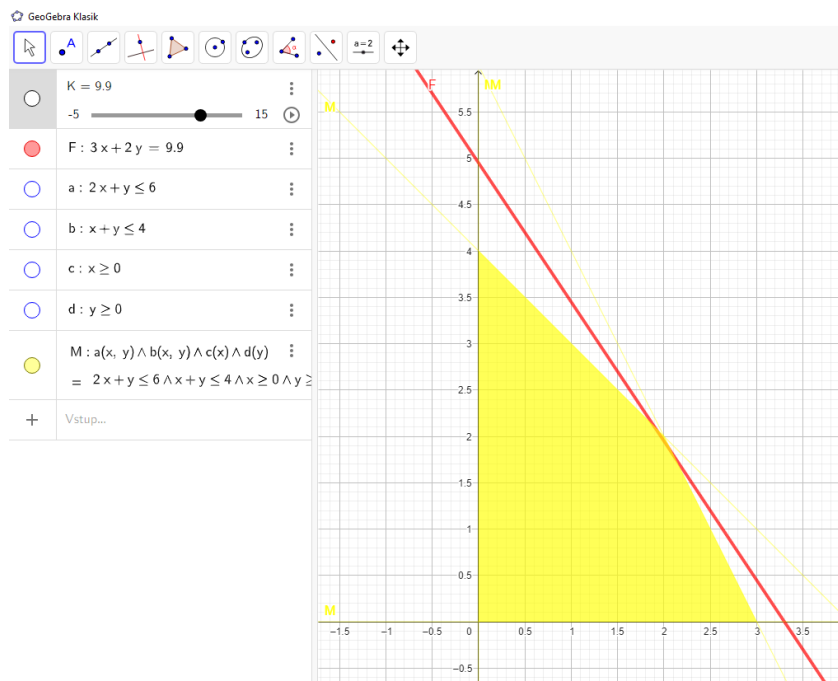
Obr. 2: Zadání úlohy lineárního programování v programu GeoGebra

Grafické znázornění úlohy je na obr. 3, z něhož vyplývá, že optimální řešení se nachází ve vrcholu přípustné oblasti se souřadnicemi $[2, 2]$, tj. optimální je výroba dvou kusů skříněk (údaj na ose x) a dvou kusů stolků (údaj na ose y). Z hodnoty vrstevnice procházející uvedeným bodem lze nalézt optimální hodnotu 10, která představuje zisk firmy v tisících Kč za jeden den.

5. Závěr

Shodou okolností je optimální řešení zadané úlohy celočíselné, což umožňuje jeho dobrou interpretaci. V jiných podobných úlohách tomu tak být nemusí a je vhodné se studenty diskutovat, jaké další možnosti pro řešení úloh lineárního programování se nabízí. Možné otázky jsou např. tyto: Je řešení jednoznačné? Existuje vždy řešení? Jak nalézt celočíselné řešení? Jak řešit úlohy o minimu? Lze tímto způsobem řešit úlohu

s více proměnnými? Pokračovat lze pak podrobnější diskusí zaměřenou na simplexovou metodu (pro zvláště motivované a nadané studenty) nebo počítačovým řešením obecnějších úloh, viz např. [4].



Obr. 3: Vrstevnice účelové funkce, přípustná oblast úlohy lineárního programování a její optimální řešení

Literatura

- [1] Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. Prometheus, Praha, 1999.
- [2] Pelikán, J., Chýna, V.: *Kvantitativní management*. VŠE, Praha, 2011.
- [3] Šubrt, T. a další: *Ekonomicko-matematické metody*. Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, s.r.o., Plzeň, 2011.
- [4] Pražák, P., Pražáková, B.: Základní použití Řešitele v Excelu. *Matematika–fyzika–informatika*, 18 (2009), s. 433–441.
- [5] <https://mat.geogebra.org/>

Cèvovy věty

Martina Škorpilová, MFF UK, Praha

ABSTRAKT. V textu představíme život a dílo italského matematika Giovanniho Benedetta Cèvy. Poté vyslovíme tzv. Cèvovu větu, díky níž se proslavil, a poukážeme na její různé formulace u nás a v zahraničí. Po uvedení tzv. Cèvovy věty o kružnici prezentujeme využití zmíněných vět při důkazu jiných teorémů.

1. Giovanni Benedetto Cèva

Giovanni Benedetto Cèva se narodil 1. září 1647 v Miláně do rodiny Carla Francesca Cèvy (1610–1690) [10]. Otec během svého života pracoval na více pozicích. Zaměstnán byl například jako prodejce nemovitostí a pozemků či jako výběrčí daní pro milánského vévodu, což rodinu řadilo mezi bohatou společenskou vrstvu. V manželství s Paolou Columbo, které započalo roku 1639, se v rozpětí pouhých dvanácti let narodilo celkem osm dětí (narozené v letech 1640, 1642, 1644, 1645, 1647, 1648, 1650, 1652). Matematik Giovanni Benedetto Cèva byl pátým dítětem v pořadí. Matematikou se profesně zabýval rovněž jeho ani ne o šestnáct měsíců mladší bratr Tommaso (1648–1737), po němž je pojmenována tzv. *Cèvova cykloida* [14] a který je dnes znám také jako básník a humanista [11].

Ačkoliv Giovanni Benedetto Cèva během studia na Collegio di Brera v Miláně projevils své nadání pro matematiku, po absolvování školy se pracovní věnoval obchodním a administrativním aktivitám a zapojoval se do komunální politiky. Současně ale pokračoval jeho zájem o přírodní vědy (především o geometrii a hydrauliku), který zpočátku sytil samostudiem. Roku 1670 se však vrátil do školního prostředí. Započal totiž svá studia na univerzitě v Pise, kde se díky svým učitelům a další podpoře z matematické komunity věnoval vlastní odborné práci. Roku 1678 vydal své výsledky ve spisu *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* [1], který pojednává o geometrických otázkách a který se stal jeho stěžejním dílem (více viz dále).

V té době žil v Mantově, která je mnohými považována za nejromantičtější město Itálie. V tomto městě, v jehož okolí se narodil římský básník Publius Vergilius Maro (70 př. Kr.–19 př. Kr.) a které je zmiňované například v Shakespearově hře *Romeo a Julie* či Verdiho opeře *Rigoletto*, převzal po svém otci funkci auditora a komisaře. Jednalo se o adminis-

trativní pozici, v níž byl odpovědný za ekonomiku Mantovy. Při své práci se i nadále věnoval matematickému výzkumu a korespondoval s předními matematiky té doby. Roku 1682 dokončil práci *Opuscula mathematica de potentiis obliquis, de pendulis, de vasis et de fluminibus* [2], která je věnována geometrii a hydrodynamice.

Patnáctý den roku 1685 se oženil s Cecilií Vecchi a v následujícím desetiletí se stal otcem sedmi dětí (narozené v letech 1687, 1688, 1689, 1690, 1692, 1693, 1694), z nichž však dvě zemřely do tří let věku.

Rok po sňatku byl jmenován profesorem matematiky na univerzitě v Mantově a tuto pozici zastával až do konce svého života. Odborně se věnoval především geometrii, současně však publikoval i texty z hydrauliky či ekonomie. Kromě již výše uvedených textů *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* a *Opuscula mathematica de potentiis obliquis, de pendulis, de vasis et de fluminibus* je autorem následujících prací: *Geometria motus, opusculum geometricum in gratiam aquarum excogitatum* [3] (1692, studium křivek), *Tria problemata geometricis proposita* [4] (1710, geometrie), *De re nummeraria quod fieri potuit, geometricè tractata* [5] (1711, aplikace matematiky v ekonomii) či *Opus hydrostaticum* [6] (1728, hydrostatika).

I během svého působení v akademické sféře se stále angažoval v politickém dění Mantovy. Na základě svých znalostí hydrauliky se například postavil proti projektu, jehož cílem bylo svést tok řeky Reno do řeky Pád. Ve sporu s oponentem Eustachiem Manfredim uspěl až po několika letech, přičemž své názory postupně obhajoval v několika svých spisech. Skeny některých stran dvou takových textů z let 1716, resp. 1717 jsou dostupné na [16], resp. [17].

Giovanni Benedetto Cèva zemřel 13. května 1734 v Mantově.

2. Cèvova věta

Věnujme se nyní poznatku, který dnes nese jeho jméno – tzv. *Cèvově větě*. Je však nutné upozornit, že teorém je často mylně připisován Cèvovi, ale větu dokázal již v 11. století Abū Āmir Yūsuf ibn Ahmad ibn Hūd (též Yusuf al-Mu'taman ibn Hud; ?–asi 1085), král Zaragozy, matematik a mecenáš přírodních věd, filozofie a umění. Giovanni Benedetto Cèva větu publikoval přibližně o šest století později zcela nezávisle, a to v již zmíněné knize *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* z roku 1678. Skeny jednotlivých stran práce jsou dostupné na webové adrese [18].

Jeho dílo, v němž zveřejnil i Cèvově větě velmi blízkou (duální) větu Meneláovu, nebylo tehdy příliš ceněno. Pro tento fakt svědčí například skutečnosti, že v něm obsažené poznatky byly později znovu objevovány a že světlo světa spatřilo jeho jediné vydání. Doceněno bylo až v 19. století, kdy na něj poukázal francouzský matematik Michel Floréal Chasles (1793–1880).

Protože u nás je Cèvova věta nejčastěji zformulována pomocí dělicího poměru tří bodů, definujme nejprve tento pojem.

Definice 1. Necht' A, B, C ($A \neq B, C \neq B$) jsou tři kolinární body. *Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B* (v tomto pořadí) je reálné číslo $\lambda = (ABC)$, pro které platí

$$|(ABC)| = \frac{|AC|}{|BC|}$$

a přitom λ je záporné, pokud bod C je vnitřním bodem úsečky AB , λ je kladné, pokud bod C není bodem úsečky AB , a λ je nulové, pokud $C = A$.

Například dělicí poměr (ABS_{AB}) středu S_{AB} úsečky AB vzhledem k bodům A, B je $\lambda_1 = (ABS_{AB}) = -1$. Je-li bod D středem úsečky CE , je dělicí poměr (CDE) bodu E vzhledem k bodům C, D roven $\lambda_2 = (CDE) = 2$. Je-li bod F bodem úsečky GH a leží-li v jedné třetině její délky blíže bodu G , resp. H , je dělicí poměr (GHF) bodu F vzhledem k bodům G, H roven $\lambda_3 = (GHF) = -\frac{1}{2}$, resp. $\lambda_4 = (GHF) = -2$.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci teorému:

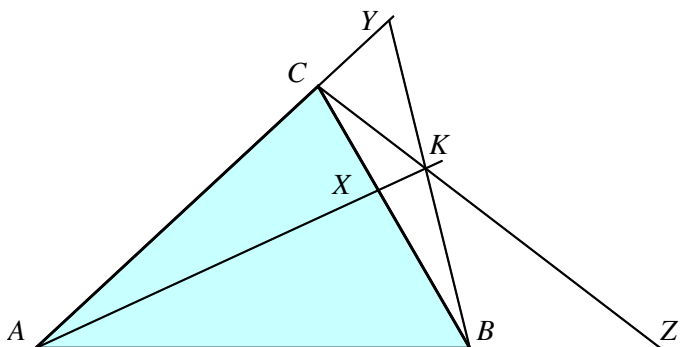
Věta 1 (Cèvova věta). *Necht' je dán trojúhelník ABC a necht' X, Y, Z jsou body po řadě na přímkách BC, CA, AB , které nespĺývají s žádným z vrcholů trojúhelníku (viz obr. 1). Potom přímky AX, BY, CZ procházejí jediným bodem, nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když*

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1.$$

Důkaz věty viz [13].

Poznamenejme, že ač jsme teorém zformulovali ve tvaru ekvivalence, v některých zdrojích se Cèvovou větou rozumí následující implikace:

Necht' je dán trojúhelník ABC a necht' X, Y, Z jsou body po řadě na přímkách BC, CA, AB , které nespĺývají s žádným z vrcholů trojúhelníku.



Obr. 1: Cèvova vèta

Jestliže přímky AX , BY , CZ procházejí jediným bodem, nebo jestliže jsou rovnoběžné, potom

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1.$$

Následně se poté uvádí samostatně následující věta (obrácená implikace):

Nechť je dán trojúhelník ABC a nechť X , Y , Z jsou body po řadě na přímkách BC , CA , AB , které nesplývají s žádným z vrcholů trojúhelníku. Jestliže platí

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = -1,$$

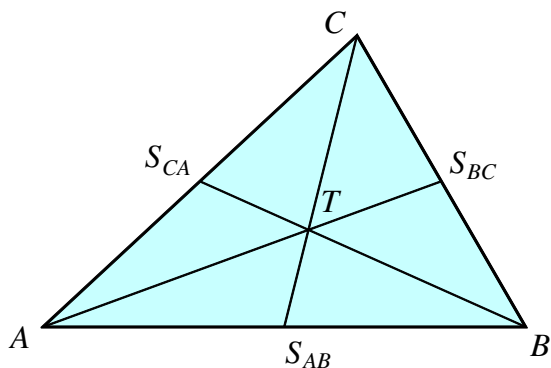
potom přímky AX , BY , CZ procházejí jediným bodem, nebo jsou navzájem rovnoběžné.

Upozorníme, že existuje jiný přístup k definici dělicího poměru bodů, který umožňuje Cèvovu větu zformulovat prostředky afinní geometrie, tj. bez pojmu vzdálenost dvou bodů – viz např. práce [8].

Cèvovu větu můžeme využít k důkazu řady poznatků o tzv. *ceviánech*, tj. o úsečkách, které spojují vrchol trojúhelníku s libovolným vnitřním bodem protilehlé strany. Ověření si ukážeme na dvou tvrzeních, přičemž první z nich je notoricky známé.

Věta 2. *Těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě.*

Důkaz. Uvažujme trojúhelník ABC (viz obr. 2). Středy jeho stran BC , CA , AB označme po řadě S_{BC} , S_{CA} , S_{AB} a vypočítejme součin dělicích poměrů (ABS_{AB}) , (BCS_{BC}) a (CAS_{CA}) :

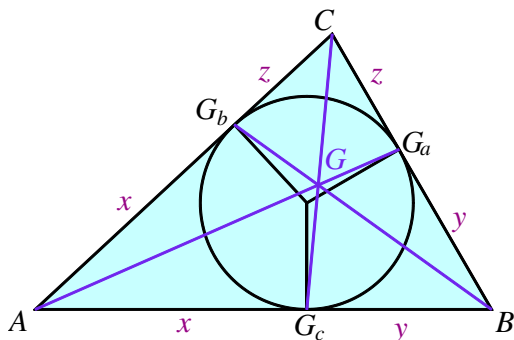


Obr. 2: Průsečík těžnic

$$\begin{aligned}
 & (ABS_{AB}) \cdot (BCS_{BC}) \cdot (CAS_{CA}) = \\
 & = \left(-\frac{|AS_{AB}|}{|BS_{AB}|} \right) \cdot \left(-\frac{|BS_{BC}|}{|CS_{BC}|} \right) \cdot \left(-\frac{|CS_{CA}|}{|AS_{CA}|} \right) = \\
 & = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1
 \end{aligned}$$

Podle Cèvovy věty se těžnice skutečně protínají v jediném bodě. $\square$

Věta 3. *Nechť je dán trojúhelník ABC (viz obr. 3). Jeho strany ležící proti vrcholům A, B, C označme po řadě a, b, c. Označíme-li G_a , G_b , G_c body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě s jeho stranami a, b, c, potom se úsečky (ceviány) AG_a , BG_b , CG_c protínají v jednom bodě.*



Obr. 3: Gergonnův bod

Důkaz. Označíme-li $x = |AG_c|$, $y = |BG_c|$ a $z = |CG_a|$, potom je i $x = |AG_b|$, $y = |BG_a|$ a $z = |CG_b|$.

Nyní určíme součin dělicích poměrů (ABG_c) , (BCG_a) a (CAG_b) :

$$(ABG_c) \cdot (BCG_a) \cdot (CAG_b) = \left(-\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{y}{z}\right) \cdot \left(-\frac{z}{x}\right) = -1$$

Z Cèvovy věty vyplývá, že se ceviány AG_a , BG_b , CG_c protínají právě v jednom bodě. $\square$

Definice 2. Průsečík G úseček AG_a , BG_b , CG_c z věty 3 se nazývá *Gergonnův bod*.

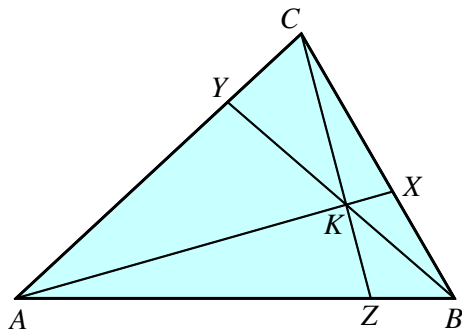
Joseph Diez Gergonne (1771–1859), po němž je bod pojmenován, byl francouzský matematik, který se věnoval geometrii. Byl rovněž zakladatelem časopisu *Annales de mathématiques pures et appliquées* (familiárně nazýván *Annales de Gergonne*), který byl věnován geometrii a vycházel v letech 1810 až 1831.

Především v zahraničních textech (viz např. materiály pro [15]) se však Cèvova věta nejčastěji formuluje jen pro speciální případ, v němž se spojují vrcholy trojúhelníku pouze s vnitřními body stran trojúhelníku (tj. neuvažují se všechny body na přímkách, s nimiž incidují strany trojúhelníku) a neuvažují se dělicí poměry bodů, ale pouze poměry vzdáleností. Jelikož jsou vzdálenosti vždy čísla nezáporná, má tvrzení následující podobu:

Věta 4 (Cèvova věta – speciální případ). *Nechť je dán trojúhelník ABC (viz obr. 4) a nechť X , Y , Z jsou vnitřními body po řadě stran BC , CA , AB , které nespĺývají s žádným z vrcholů trojúhelníku. Potom úsečky AX , BY , CZ procházejí jediným bodem právě tehdy, když*

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

Důkaz. Ověření tohoto speciálního případu je velmi jednoduché – využívá obsahů trojúhelníků. Obsahy dále uvažovaných trojúhelníků označíme S_Δ , přičemž na místě indexu Δ napíšeme název konkrétního trojúhelníku.



Obr. 4: Cěvova věta – speciální případ

Protože se obsah trojúhelníku rovná polovině součinu délky jedné jeho strany a výšky na tuto stranu, je poměr obsahů dvou trojúhelníků, které mají stejné výšky, roven poměru délek příslušných stran. Proto

$$\begin{aligned}\frac{S_{AZK}}{S_{ZBK}} &= \frac{|AZ|}{|ZB|}, & \frac{S_{AZC}}{S_{ZBC}} &= \frac{|AZ|}{|ZB|}, \\ \frac{S_{BCK}}{S_{CKY}} &= \frac{|BX|}{|XC|}, & \frac{S_{BKA}}{S_{CKA}} &= \frac{|BX|}{|XC|}, \\ \frac{S_{CYA}}{S_{YAK}} &= \frac{|CY|}{|YA|}, & \frac{S_{CYB}}{S_{YAB}} &= \frac{|CY|}{|YA|}.\end{aligned}$$

Uvědomme si, že pokud se dva zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ rovnají, platí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, kde k je reálné číslo. Proto $a = kb$, $c = kd$ a následně $\frac{a-c}{b-d} = \frac{kb-kd}{b-d} = k$. Tedy z rovnosti dvou zlomků plyne, že se jim rovná i podíl rozdílu jejich čítelů a jmenovatelů. Odtud dostáváme vztahy

$$\begin{aligned}\frac{|AZ|}{|ZB|} &= \frac{S_{AZC} - S_{AZK}}{S_{ZBC} - S_{ZBK}} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}}, \\ \frac{|BX|}{|XC|} &= \frac{S_{BKA} - S_{BCK}}{S_{CKA} - S_{CKY}} = \frac{S_{BKA}}{S_{CKA}}, \\ \frac{|CY|}{|YA|} &= \frac{S_{CYB} - S_{CYK}}{S_{YAB} - S_{YAK}} = \frac{S_{CKB}}{S_{AKB}},\end{aligned}$$

které implikují rovnosti

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{S_{AKC}}{S_{BKC}} \cdot \frac{S_{BKA}}{S_{CKA}} \cdot \frac{S_{CKB}}{S_{AKB}} = 1,$$

a tedy i platnost věty 4. □

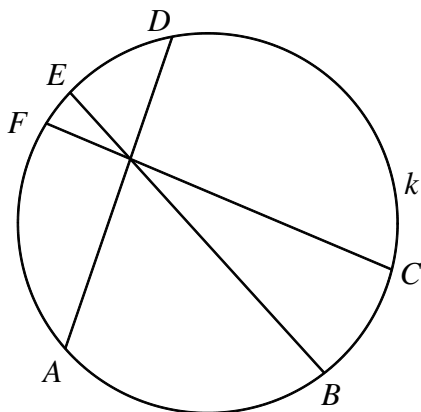
Jiný důkaz téže věty může čtenář nalézt např. v práci [9].

3. Cèvova věta o kružnici

Všechny předchozí teoremy pojednávaly o trojúhelníku. Nyní uvedeme další z Cèvových vět, která se však – na první pohled překvapivě – týká kružnice. Po jejím uvedení bude zřejmé, že je analogií věty 4.

Věta 5 (Cèvova věta o kružnici). *Nechť je dána kružnice k (viz obr. 5) a nechť A, B, C, D, E, F jsou navzájem různé body, které na ní leží v uvedeném pořadí. Tětiny AD, BE, CF kružnice k procházejí jediným bodem právě tehdy, když*

$$\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = 1. \quad (21)$$

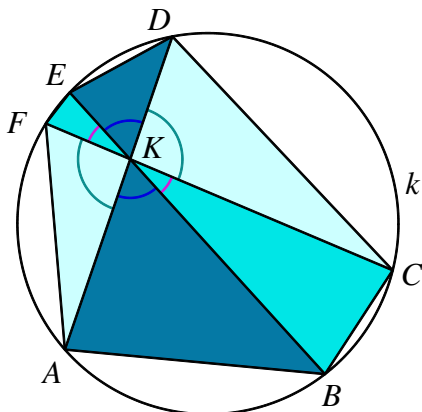


Obr. 5: Cèvova věta o kružnici

Důkaz. Jelikož je věta ve formě ekvivalence, stačí dokázat obě implikace.

Předpokládejme nejprve, že se tětiny AD, BE, CF protínají v jednom bodě, který označíme K (viz obr. 6).

Sestrojíme-li šestiúhelník $ABCDEF$, dostaneme celkem šest trojúhelníků, mezi nimiž nalezneme (díky vlastnostem vrcholových a obvodových



Obr. 6: Cèvova věta o kružnici – důkaz 1. implikace

úhlů) tři dvojice podobných trojúhelníků. Jedná se o dvojice trojúhelníků ABK a EDK , BCK a FEK , CDK a AFK . Z podobnosti trojúhelníků plynou vztahy

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|KA|}{|KE|}, \quad \frac{|FE|}{|BC|} = \frac{|KF|}{|KB|}, \quad \frac{|CD|}{|AF|} = \frac{|KC|}{|KA|}, \quad \frac{|KC|}{|KE|} = \frac{|KB|}{|KF|}.$$

Vynásobíme-li jejich levé a pravé strany, dostáváme rovnost

$$\frac{|AB|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|FA|} \cdot \frac{|KC|}{|KE|} = \frac{|KA|}{|KE|} \cdot \frac{|KF|}{|KB|} \cdot \frac{|KC|}{|KA|} \cdot \frac{|KB|}{|KF|}$$

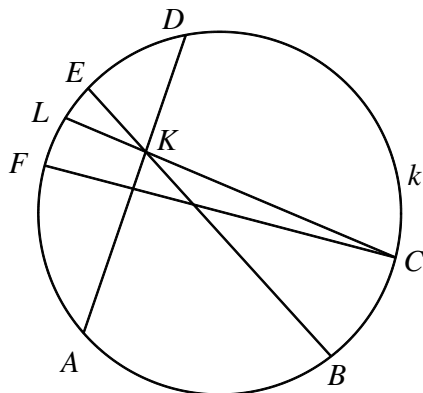
a po její úpravě i požadovaný vztah (21).

Nyní dokážeme druhou implikaci. Předpokládejme naopak, že pro šesti navzájem různých bodů A, B, C, D, E, F kružnice k platí vztah (21), a dokažme, že se tětiny AD, BE, CF protínají v jediném bodě. Důkazem sporem ověříme platnost obměněné implikace: budeme předpokládat, že se tětiny v jediném bodě neprotínají a dojdeme ke sporu s rovností (21), kterou lze napsat ve tvaru

$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|. \quad (22)$$

Předpokládejme tedy, že se tětiny AD, BE protínají v bodě K , kterým neprochází tětina CF (viz obr. 7). Označíme-li L průsečík kružnice k s přímkou CK ($L \neq C$), jsou body F a L různé. Vzhledem k předpokladu platí pro tětiny AD, BE, CL procházející jediným bodem vztah

$$|AB| \cdot |CD| \cdot |EL| = |BC| \cdot |DE| \cdot |LA|. \quad (23)$$



Obr. 7: Cèvova věta o kružnici – důkaz 2. implikace

Podělením levých a pravých stran rovností (22) a (23) získáme vztah

$$\frac{|EF|}{|EL|} = \frac{|FA|}{|LA|}. \quad (24)$$

Bod L náleží kružnicovému oblouku EA , na němž leží bod F . Bod L buď náleží kružnicovému oblouku EF , nebo kružnicovému oblouku FA . V prvním případě je $|EL| < |EF|$ a zároveň $|LA| > |FA|$, ve druhém případě $|EL| > |EF|$ a zároveň $|LA| < |FA|$. Proto v prvním, resp. ve druhém případě dostáváme nerovnost

$$\frac{|EF|}{|EL|} > \frac{|FA|}{|LA|}, \quad \text{resp.} \quad \frac{|EF|}{|EL|} < \frac{|FA|}{|LA|},$$

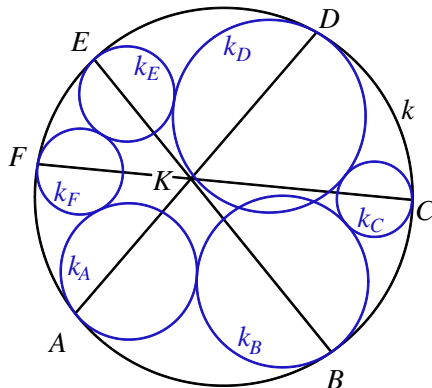
čímž docházíme ke sporu se vztahem (24). Tím jsme dokázali (obměněnou) 2. implikaci, a tedy i větu 5. $\square$

Na závěr článku ukážeme využití Cèvovy věty o kružnici k důkazu následující věty, která byla poprvé publikována v knize [7]. Na začátku jejího ověření sice bude nutné vyjádřit délku tětiny kružnice, ale poté již bude důkaz díky Cèvově větě o kružnici spět velmi rychle ke svému ukončení.

Textem, který se podrobně věnuje tomuto teorému, je článek [12], v české literatuře je téma zpracováno v práci [9].

Věta 6 (věta o sedmi kružnicích). *Nechť je dána kružnice k (viz obr. 8) a nechť A, B, C, D, E, F jsou navzájem různé body, které na ní leží*

v uvedeném pořadí. Existuje-li šest kružnic $k_A, k_B, k_C, k_D, k_E, k_F$, které mají vnitřní dotyk s kružnicí k po řadě v bodech A, B, C, D, E, F a zároveň má každá z nich vnější dotyk se dvěma „sousedními“ kružnicemi (kružnice k_B se dotýká kružnic k_A a k_C , kružnice k_C se dotýká kružnic k_B a k_D atd. až konečně kružnice k_A se dotýká kružnic k_F a k_B), potom se tětiny AD, BE, CF protínají v jediném bodě.



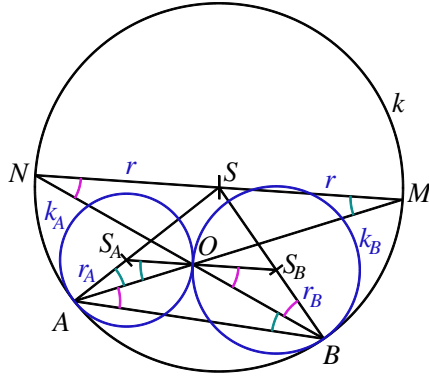
Obr. 8: Věta o sedmi kružnicích

Důkaz. Nejprve vyjádříme délku $|AB|$ tětiny AB kružnice k (viz obr. 9). Střed, resp. poloměry kružnic k, k_A, k_B označme po řadě S, S_A, S_B , resp. r, r_A, r_B . Dále nechť O značí bod dotyku kružnic k_A a k_B , M značí průsečík kružnice k s přímkou AO , $M \neq A$, a N značí průsečík kružnice k s přímkou BO , $N \neq B$. Sestrojíme úsečky SM, SN, AB, AS (prochází bodem S_A), BS (prochází bodem S_B) a S_AS_B (prochází bodem O).

Protože $r = |SA| = |SM|$, $r_A = |S_AS| = |S_AO|$, jsou trojúhelníky SAM a S_AAO rovnoramenné a navzájem podobné. Z toho plyne, že úsečky SM a S_AO jsou rovnoběžné.

Obdobně lze pomocí podobných trojúhelníků SBN a S_BOO odvodit, že jsou rovnoběžné rovněž úsečky SN a S_BO . Úsečky SM, SN jsou proto rovnoběžné se střednou S_AS_B , a tudíž jsou body M, N, S kolineární (MN je průměrem kružnice k).

Úhly ABN, AMN jsou shodné, neboť jsou obvodovými úhly příslušnými kružnicovému oblouku AN kružnice k . Jelikož jsou shodné také vrcholové úhly AOB a NOM , jsou podobné i trojúhelníky AOB a NOM .



Obr. 9: Čèvova vèta o kružnici – důkaz

Z podobnosti trojúhelníků AOB a NOM , resp. SAM a S_AAO , resp. SBN a S_BBO plyne

$$\frac{|AB|}{|NM|} = \frac{|OA|}{|ON|} = \frac{|OB|}{|OM|}, \quad (25)$$

resp.

$$\frac{|OA|}{|OM|} = \frac{|S_AA|}{|S_AS|}, \quad (26)$$

resp.

$$\frac{|OB|}{|ON|} = \frac{|S_BB|}{|S_BS|}. \quad (27)$$

S využitím vztahu (25) a následně rovností (26), (27) dostáváme

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AB| \cdot |AB| = \frac{|OA|}{|ON|} \cdot |NM| \cdot \frac{|OB|}{|OM|} \cdot |NM| = \\ &= 4r^2 \cdot \frac{|OA|}{|OM|} \cdot \frac{|OB|}{|ON|} = 4r^2 \cdot \frac{|S_AA|}{|S_AS|} \cdot \frac{|S_BB|}{|S_BS|} = 4r^2 \cdot \frac{r_A}{r - r_A} \cdot \frac{r_B}{r - r_B}, \end{aligned}$$

a tudíž

$$|AB| = 2r \cdot \sqrt{\frac{r_A}{r - r_A}} \cdot \sqrt{\frac{r_B}{r - r_B}}.$$

Analogicky bychom odvodili, že

$$|BC| = 2r \cdot \sqrt{\frac{r_B}{r - r_B}} \cdot \sqrt{\frac{r_C}{r - r_C}},$$

$$|CD| = 2r \cdot \sqrt{\frac{r_C}{r - r_C}} \cdot \sqrt{\frac{r_D}{r - r_D}}$$

atd., z čehož dostáváme rovnosti

$$\begin{aligned} & |AB| \cdot |CD| \cdot |EF| = \\ &= 8r^3 \cdot \sqrt{\frac{r_A}{r - r_A}} \cdot \sqrt{\frac{r_B}{r - r_B}} \cdot \sqrt{\frac{r_C}{r - r_C}} \cdot \sqrt{\frac{r_D}{r - r_D}} \cdot \sqrt{\frac{r_E}{r - r_E}} \cdot \sqrt{\frac{r_F}{r - r_F}} = \\ &= |BC| \cdot |DE| \cdot |FA|. \end{aligned}$$

Podle Cèvovy věty platí, že se tětivy AB , CD , EF skutečně protínají v jediném bodě, tj. platí věta o sedmi kružnicích. $\square$

Literatura

- [1] Cèva, G. B.: *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*. Ludouici Montiaë, Milán, 1678.
- [2] Cèva, G. B.: *Opuscula mathematica de potentiis obliquis, de pendulis, de vasis et de fluminibus*. Ludouici Montiaë, Milán, 1682.
- [3] Cèva, G. B.: *Geometria motus, opusculum geometricum in gratiam aquarum excogitatum*. Bologna, 1692.
- [4] Cèva, G. B.: *Tria problemata geometris proposita*. 1710.
- [5] Cèva, G. B.: *De re nummeraria quod fieri potuit, geometricè tractata*. Alberto Pazzoni, Mantova, 1711.
- [6] Cèva, G. B.: *Opus hydrostaticum*. Alberto Pazzoni, Mantova, 1728.
- [7] Evelyn, C. J. A., Money-Coutts, G. B., Tyrrell, J. A.: *The Seven Circles Theorem and Other New Theorems*. Stacey International, London, 1974.
- [8] Kundratová L.: *Významné věty afinní geometrie*. Bakalářská práce, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Praha, 2022, <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/174236/130333962.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [9] Nováková K.: *Kružnice v širších souvislostech*. Diplomová práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2024.
- [10] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *Giovanni Benedetto Ceva*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ceva_Giovanni/
- [11] O'Connor, J. J., Robertson, E. F.: *Tommaso Ceva*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ceva_Tommaso/
- [12] Rabinowitz, S.: The Seven Circles Theorem. *Pi Mu Epsilon Journal*, 8 (1987), s. 441–449.

- [13] Švrček, J.: *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka*. Karolinum, Praha, 1998.
- [14] Weisstein, E. W.: *Cycloid of Ceva*. MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/CycloidofCeva.html>
- [15] 57. ročník International Mathematical Olympiad, Hongkong, 2016.
- [16] https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE7864312
- [17] https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE1714651
- [18] <https://archive.org/details/ita-bnc-mag-00001346-001/page/n74/mode/2up>

Platonium

Jan Šmíd, Viscodes, Finksburg, USA

ABSTRACT. *Platonium is a new geometric object based on a well-known compound of five tetrahedra. Platonium features extraordinary symmetry which makes it into an excellent pedagogical and esthetic object.*

1 Introduction

A Platonium wireframe can be defined as a wireframe (edge skeleton) of the compound of five tetrahedra with a superimposed wireframe of the icosahedron. Fig. 1 shows a 3D printed model that can be assembled/disassembled and serve a variety of educational and esthetic purposes. In the following are presented basic properties of a Platonium and suggestions for its educational usage.

2 The Compound of Five Tetrahedra

The compound of five tetrahedra is a symmetric arrangement of interpenetrating tetrahedra. It was first described by Edmund Hess, a German mathematician (1843–1903), in 1876.

The wireframe of five tetrahedra is not stable, see fig. 2a. An adjective non-stable, in this context, means that a topologically identical interweaving of the tetrahedron legs can result in relatively different cartesian coordinates of the tetrahedron vertices. This problem is bypassed by origami paper builders by creating thick segments, see fig. 2b.

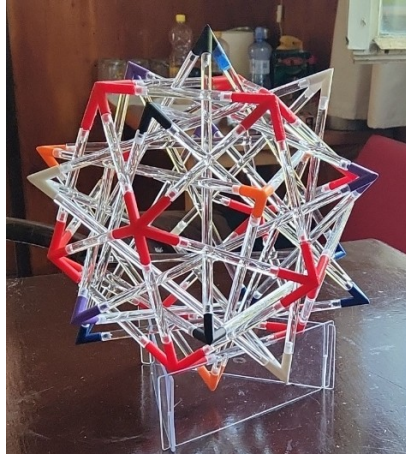


Fig. 1: 3D Printed Platonium

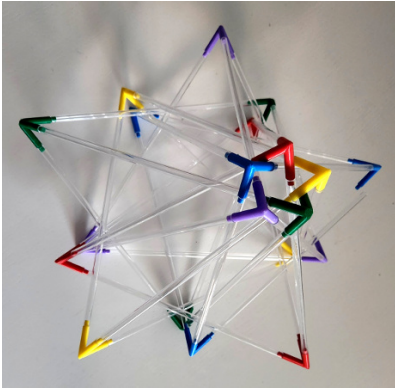


Fig. 2a: A Collapse Of The Compound Of Five Tetrahedra Edge-skeleton



Fig. 2b: Five Tetrahedra Origami Frame

We present a solution without this requirement on the size of the tetrahedra legs. In Platonium a wireframe is made stable by a special icosahedron wireframe. In the following we outline this stabilizing procedure. We also outline in the section “Icosahedron Platonium” the mathematical proof that the proposed procedure is correct mathematically, and not just an engineering convenience.

3 Platonium Dodecahedron

Vertices of a compound of five tetrahedra define a dodecahedron wire-frame. A Schlegel diagram of this dodecahedron is shown at fig. 3a. Notice that the vertices labeled with the same number define the vertices of the compound of five tetrahedra, and their mutual distance in the diagram is exactly 3.

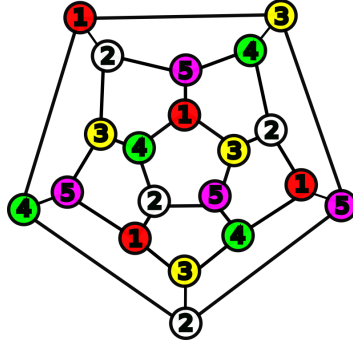


Fig. 3a: Dodecahedron Schlegel Diagram

A general dodecahedron can be built on a cube with vertices $c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8$, see fig. 3b. A roof, see fig. 3c, attached with a proper orientation relative to the six faces of the cube, results in a dodecahedron, see fig. 4a.

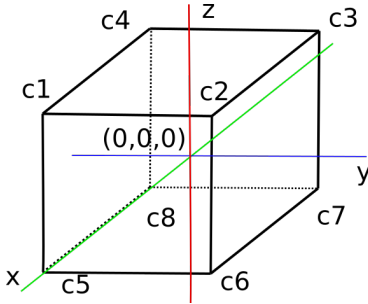


Fig. 3b: Dodecahedron Cube

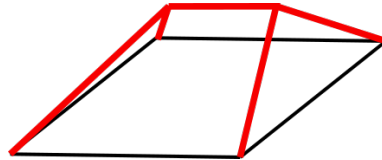


Fig. 3c: A Dodecahedron Roof

A dodecahedron built on this cube, see fig. 3b, with coordinates $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, centered at $(0, 0, 0)$, has vertices $(0, \pm 1/\tau, \pm \tau)$, $(\pm \tau, 0, \pm 1/\tau)$, $(\pm 1/\tau, \pm \tau, 0)$, τ is the golden ratio, $\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$.

4 Platonium Icosahedron

The main feature of the Platonium design is that dodecahedron individual vertices are used to define supporting icosahedron vertices. Specifically, the coordinates of this supporting icosahedron are defined as the centroids of a Platonium dodecahedron's twelve pentagon faces I1, I2, I3, ..., I11, I12, see fig. 4a.

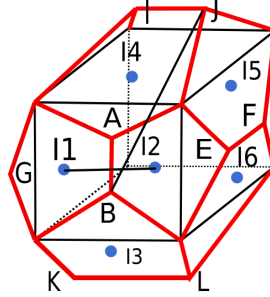


Fig. 4a: Dodecahedron and Icosahedron Vertices

For example, using notations of fig. 3b and fig. 4a, four out of twelve icosahedron vertices and their coordinates are as follows:

$$I1 = (c5 + B + A + c1 + G)/5$$

$$I2 = (A + B + c6 + E + c2)/5$$

$$I3 = (c5 + K + L + c6 + B)/5$$

$$I4 = (c1 + A + c2 + J + I)/5$$

5 Mathematical Proof Outline

For a segment BJ (a tetrahedron edge), see fig. 4a, the endpoints coordinates are $B = (\tau, 0, -\tau^{-1})$, $J = (0, \tau^{-1}, \tau)$. The parametric equations for the same segment BJ are then

$$(x, y, z) = B + (J - B)t,$$

or

$$\begin{aligned} x &= \tau + (0 - \tau)t, \\ y &= 0 + (\tau^{-1} - 0)t, \\ z &= -\tau^{-1} + (\tau + \tau^{-1})t. \end{aligned}$$

The parameter value t at $z = 0$ is given by an equation

$$0 = -\tau^{-1} + (\tau + \tau^{-1})t, \quad \text{or} \quad t = \tau^{-1}/(\tau + \tau^{-1}).$$

This means that a segment BJ intersects the $z = 0$ plane at a point with an x coordinate

$$x = \tau^2/(\tau + \tau^{-1}).$$

An icosahedron edge I1I2 is defined by two points

$$I1 = (2 + 2\tau + \tau^{-1}, -2 - \tau, 0)/5, \quad I2 = (2 + 2\tau + \tau^{-1}, 2 + \tau, 0)/5.$$

Parametric equations of this edgeline through the points I1 and I2 is

$$(x, y, z) = I1 + (I2 - I1)t,$$

or in terms of the x, y, z coordinates

$$\begin{aligned} x &= (2 + 2\tau + \tau^{-1})/5, \\ y &= (-2 - \tau)/5 + (4 + 2\tau)t/5, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

The x coordinate is constant (the edge line I1I2 is parallel to the y -axis). The following equality, of an x coordinate of the intersection IJ and the $z = 0$ plane and an x coordinate of I1I2,

$$\tau^2/(\tau + \tau^{-1}) = (2 + 2\tau + \tau^{-1})/5$$

holds for the value of the golden ratio

$$\tau = (\sqrt{5} + 1)/2.$$

This equality indicates that an intersection point of the icosahedron edge and an tetrahedron edge exists. This type of reasoning can be applied for any Platonium icosahedron edge. It means that an icosahedron wireframe defined this way will intersect each of the tetrahedra exactly and exactly at four points. From the practical point of view the icosahedron wireframe makes the compound of five tetrahedra wireframe stable.

6 Platonium For Education

The compound of five tetrahedra is one of the most beautiful compound polyhedra. See e.g. [2], chapter 5, and [1] for an insight into basic geometry and symmetries of platonic solids. The next section outlines suggestions for educational usage of the Platonium, specifically in the areas of basic geometry, theory of graphs, theory of groups (symmetries), and 3D print technologies.

6.1 Basic Geometry

Platonium can be used to demonstrate geometric concepts ranging from the concepts of triangle similarity, Pythagorean theorem, the golden ratio to the concept of discrete groups for classification of 3D symmetries. A portable class of Platonium models are relatively (compared to custom-made models) inexpensive and can be owned by individual users and this fact makes the learning and entertaining aspect of the process convenient and more intense. For example, to make a CAD drawing and 3D-printed platonic connectors (see fig. 6a) a basic geometry (see fig. 6b and fig. 6c) can be used to derive an object vertical axis-object leg angle.



Fig. 6a: 3D Printed Platonic Connectors

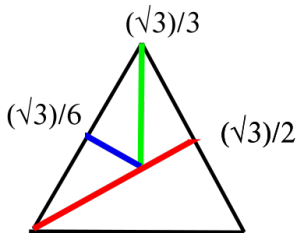


Fig. 6b: Equilateral Triangle

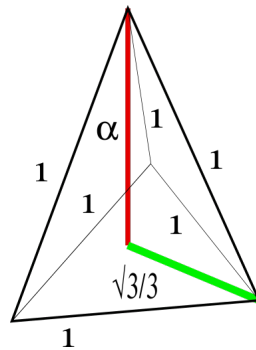


Fig. 6c: Vertical Axis-Leg Angle

For example this angle for tetrahedron happens to be

$$\alpha = \sin^{-1}(\sqrt{3}/3) = 0.6155 \text{ rad} = 35.2644 \text{ deg.}$$

6.2 Theory of Graphs

Introduction into theory of graphs, see e.g. [3], can be demonstrated by presenting Schlegel diagrams for platonic solids. Any platonic solid can be represented by a Schlegel diagram. For example fig. 3a shows a Schlegel diagram of a dodecahedron. 3D models of platonic solids can help substantially to visualize corresponding Schlegel diagrams. Schlegel diagrams are planar polygonal graphs for which holds the famous Euler polyhedral rule

$$\text{Faces} + \text{Vertices} - \text{Edges} = 2.$$

The components of Platonium provide hands-on exercise for verification of the Euler rule.

6.3 Symmetries

Introduction into theory of groups can be demonstrated by visualization of tetrahedron isometry rotations, see fig. 6d and fig. 6e.

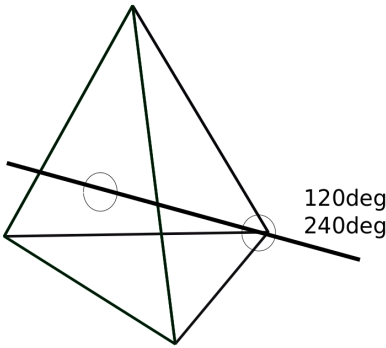


Fig. 6d: 3-Fold Symmetry

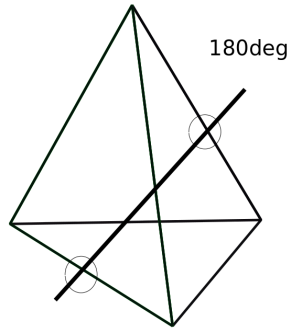


Fig. 6e: 2-Fold Symmetry

More generally all the 3D finite subgroups of direct isometries (tetrahedral, octahedral and icosahedral groups) can be illustrated using Platonium.

Even more basic abstract group-theoretic concepts, such as actions, orbits, stabilizers and the (Burnside) counting theorem [4] are native

concepts for Platonium. For example the symmetry group of Platonium is the rotational icosahedral group and the stabilizer of a chosen tetrahedron is the rotational tetrahedral group.

Perhaps even more importantly, the counting theorem and associated definitions allow to gain an insight and prove that a finite subgroup of SO_3 is isomorphic either to a cyclic group, a dihedral group, or the rotational symmetry group of one of the platonic solid.

6.4 STEM

STEM is a well-known abbreviation Science, Technology, Engineering and Mathematics. A Platonium kit provides a platform for demonstrating a deep STEM concept. A presentation can start with abstract ideas of geometry. Then abstract ideas can be captured using a Computer Aided Design (CAD) software. A CAD system represents geometric objects mathematically. This representation is translated, behind the scenes, into a mesh of triangles (STL-Standard Tessellation Language). Next this triangular representation of an object is translated by a slicer software into a set of instructions (a gcode) for a machine (e.g. a 3D printer). 3D printer kits allow an additional insight into an engineering machinery besides providing a satisfying printed object, see e.g. [5].

References

- [1] Agricola, I., Friedrich, T.: *Elementary Geometry*. American Mathematical Society, 2007.
- [2] Toth, G.: *Glimpses of Algebra and Geometry*. Springer-Verlag, 1998.
- [3] Ore, O.: *The Graphs and Their Uses*. The Mathematical Association of America, 1990.
- [4] Armstrong, M. A.: *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, 1988.
- [5] Coward, C.: *3D Printing*. Alpha Books, 2015.

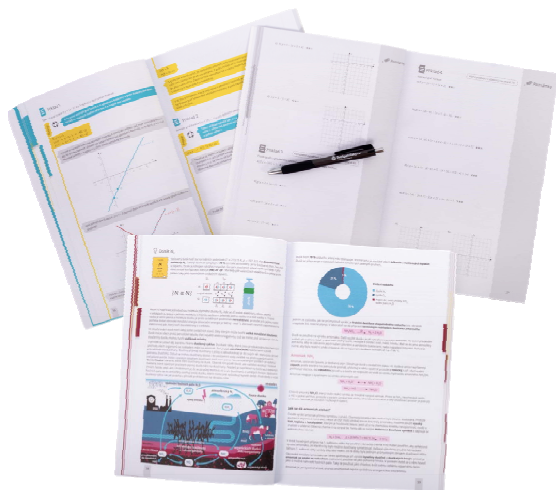
ForClassmates: Revoluce ve výuce nejen matematiky

Martina Teislerová, ForClassmates, Hradec Králové

ABSTRAKT. *ForClassmates je inovativní online vzdělávací platforma, která navazuje na úspěšné tištěné učebnice Matika a Chemie pro spolužáky. Přináší do výuky nové technologie a spoustu interaktivních funkcí, a představuje tak moderní řešení pro vzdělávání široké veřejnosti.*

1. Úvod

Matematika často bývá strašákem a noční můrou studentů a troufám si říci, že leckterému vyučujícímu přidá nejednu vrásku snaha matematiku studentům zpřístupnit. Přesto je neoddělitelnou součástí vzdělávání a otevírá dveře nejen k technickým oborům, ale i k rozvoji logického myšlení a analytických schopností. Jak tedy udělat matematiku přístupnější a atraktivnější? Právě na tuto otázku odpovídá tým ForClassmates (dříve ProSpolužáky.cz) pod vedením Marka Lišky prostřednictvím své nové vzdělávací aplikace ForClassmates [1]. Tato platforma navazuje na úspěch tištěných učebnic *Matika a Chemie pro spolužáky* (obr. 1) a přináší do výuky inovativní technologie, které usnadňují práci učitelům a zvyšují motivaci studentů.



Obr. 1: Učebnice Matika a Chemie pro spolužáky

2. Vznik projektu ForClassmates

Projekt ForClassmates vznikl postupně na základě zkušeností s tvorbou vzdělávacích materiálů. Prvotním nápadem Marka Lišky bylo sdílení vlastních poznámek a nezištná pomoc spolužákům ještě na gymnáziu, což posléze vyústilo v tisk prvních učebnic *Matika pro spolužáky* [2] a založení vlastního nakladatelství. Od první tištěné učebnice v roce 2015 až po současnou digitální platformu, která propojuje učitele, studenty, tvůrce obsahu (nakladatelství), ale i rodiče, prošel projekt obrovským vývojem [3].

3. Charakteristika tištěných učebnic

3.1. *Od studentů ke studentům*

Co se týče původních tištěných učebnic nyní kompletně dostupných v online verzi [4], je jejich hlavním charakteristickým znakem, odlišujícím ForClassmates od tradičních učebnic, používání moderního „studentského jazyka“, který je studentům blízký a snadno pochopitelný. Přístup „od spolužáků pro spolužáky“ dává obsahu přátelskou a přístupnou formu a studenti získávají dojem, že jim látku vysvětluje zkušenější spolužák, který rozumí jejich potřebám a otázkám. Obsahově je velký důraz kladen na detailní a srozumitelná vysvětlení, vždy doplněná o názorné příklady. Každý krok je podrobně popsán, aby studenti snadno pochopili jednotlivé fáze řešení a pokud něčemu nerozumí hned, mohou se kdykoliv vrátit zpět a znovu si projít celý postup.

3.2. *Propojení teorie s praxí*

Dalším klíčovým prvkem je snaha propojit teorii s praxí. Studenti často netuší, jak probíraná látka souvisí s běžným životem, což snižuje jejich motivaci a chuť se učit. Matika pro spolužáky proto doplňuje každou kapitolu o kontextové informace – například, jak se daný princip využívá v praxi, v jakých dalších předmětech se s ním studenti setkají nebo jak jim může pomoci při výběru budoucí kariéry [2].

3.3. *Od učebnic k online platformě*

Přestože učebnice byly jako projekt úspěšné a na mnohých školách jsou stále velmi oblíbené, autorům chyběla zpětná vazba, se kterou by bylo možné dále pracovat, a zároveň chtěli oslovit širší veřejnost a nabídnout jiný pohled na vzdělávání s daleko většími možnostmi. Proto

vznikla již zmíněná aplikace ForClassmates [1], nabízející širokou škálu interaktivních funkcí a šikovných nástrojů, které posunou klasickou výuku do moderní a dynamické podoby.

4. Online platforma ForClassmates

4.1. Cílové skupiny

ForClassmates [1] je tedy platforma pro kohokoliv se zájmem o vzdělávání, nicméně cílové skupiny jsou, de facto, tři. První skupinou jsou tvůrci vzdělávacího obsahu a nakladatelství. Platforma jim umožňuje převést tištěné učebnice do digitální interaktivní podoby. Druhou cílovou skupinou jsou učitelé, kteří s aplikací můžou pracovat přímo v hodinách, využijí ji jako skvělého pomocníka při přípravě na vyučovací hodiny, mohou vytvářet a sdílet vlastní vzdělávací obsah, využívat materiály od jiných autorů a sledovat pokroky svých žáků pomocí statistických nástrojů. Třetí skupinou jsou studenti, které ForClassmates motivuje ke studiu pomocí herních prvků, jako jsou denní bonusy a série. Aplikace sleduje jejich silné a slabé stránky, přizpůsobuje výuku na míru jejich potřebám a pomáhá jim zlepšovat se v oblastech, kde je to třeba.



Obr. 2: Domovská stránka aplikace ForClassmates

4.2. Klíčové funkce

Jednou z nejvýraznějších funkcí aplikace je interaktivní video, které studenty aktivně zapojuje prostřednictvím otázek s okamžitou zpětnou vazbou. Studenti tak udržují pozornost a z videa si odnesou mnohem více než při pouhém pasivním sledování. Vytvoření otázek k videu je

velmi snadné a s využitím AI zabere jen několik minut. Dalším nástrojem je OCR technologie pro snadnou digitalizaci poznámek z různých formátů, včetně obrázků, což umožňuje snadno tvořit, publikovat a sdílet vzdělávací obsah v rámci aplikace. Za zmínku stojí také intuitivní matematická klávesnice, usnadňující zadávání matematických vzorců nebo interaktivní grafy. Pro dlouhodobou motivaci studentů a budování pozitivních vzdělávacích návyků využívá platforma prvky gamifikace. Za přihlášení a pohyb v aplikaci studenti získávají odznaky a sbírají zkušenosti, a celý proces učení se tak stává zábavnějším. Aplikace je tedy vhodná jak pro samostatné studium, tak práci ve třídě (obr. 2).

4.3. Funkce pro učitele

Přímo pro nás, učitele, přináší ForClassmates řadu dalších užitečných nástrojů, které šetří čas a zefektivňují přípravu na hodiny. Zmíněné statistiky výuky umožňují sledovat pokrok studentů a určovat jejich silné i slabé stránky, zatímco AI plánovač výuky generuje návrhy hodin na míru konkrétním potřebám třídy. Možnost tvorby kvízů, které budou také brzy dostupné, navíc poskytne učitelům další způsob, jak efektivně ověřit znalosti studentů. Aplikace je neustále vylepšována a zdokonalována, tudíž další funkce jako např. AI asistent budou časem přibývat.

5. Závěr

Závěrem je nutno říci, že ForClassmates je více než jen aplikace vycházející ze sady učebnic. Je to komplexní nástroj, který propojuje učitele, studenty a moderní technologie do jednoho funkčního celku. Od svého vzniku v roce 2010 ušla společnost dlouhou cestu. Dnes jejich učebnice a aplikaci využívá více než 50 000 studentů a 300 škol v Česku a na Slovensku. Pokud tedy hledáte způsob, jak oživit výuku nejen matematiky, zvýšit zapojení studentů a zároveň si ulehčit práci, staňte se také součástí ForClassmates.

Literatura

- [1] www.forclassmates.com/cs
- [2] www.prospoluzaky.cz/vyhody-knih/vyhody-knih-matika/
- [3] www.prospoluzaky.cz/o-nas/
- [4] www.forclassmates.com/cs/explore/courses?categories=mathematics

Návrh nového „matematicko–zubařského“ slovníku

Vladimír Tesař, Abaku, Praha

ABSTRAKT. *Obsah příspěvku reaguje na neustále se zhoršující dentální hygienu u žáků základních škol, která znásobuje nutnost častější komunikace se zubními lékaři za ztížených podmínek (mluvení s otevřenou ústní dutinou). To se ovšem týká i pedagogiky matematiky, jelikož žáci musí označovat číslem zuby dole i nahoře.*

1. Úvod

Autor tohoto článku je autorem deskové hry Abaku. Jeho vystoupení se zpočátku věnovalo této hře – seznamoval účastníky s podstatou hry a odkazoval na webové stránky [1], kde je možné získat další informace. Metodu Abaku autor prezentoval jako nejfunkčnější metodu výuky aritmetiky (počítání z hlavy) na našem trhu.

Závěr svého vystoupení chtěl autor odlehčit, takže prezentoval jakýsi „matematicko–zubařský“ slovník. Nesdělil posluchačům, že se jedná o vtip.

2. Návrh slovníku pro výuku na prvním stupni ZŠ

Slovník je dílem autora článku a prý vznikl po dlouhodobém testování. Jeho smysl je ten, že se děti mají naučit vyslovovat čísla zubů a pocity, když mají při zubní prohlídce otevřenou pusu. Sjednocením výslovnosti základních číslovek pak již nebude docházet k omylům na zubařském křesle.

Cílem autora je verifikovat slovník a doporučit jeho schválení orgánům MŠMT a MZD. Jako přílepek ho autor doporučuje přidat do připravovaných kurikul.

Takže tento slovník má podobu:

dobře = hohe

špatně = hahe

bolí = hohí

nebolí = nehohí

nahoře = ahohe

dole = hoe

vlevo = eo

vpravo = ao

1 = ea
2 = ha
3 = hy
4 = hyhy

5 = eh
6 = heh
7 = heheh
8 = ohu

9 zub je neobvyklý,
přesto navrhuje =
hehed či hehet

3. Závěr

Po promítnutí příspěvku na tabuli a jeho popisu autor zjistil ke svému nemalému údivu, že někteří přítomní účastníci jeho příspěvek vzali vážně. Za to se autor následně omluvil.

Literatura

[1] www.abaku.cz

Isaac Newton a Principie

Karel Vašíček

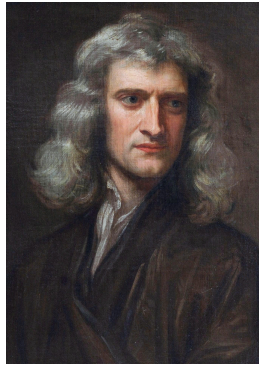
ABSTRAKT. Článek se zabývá spisem Isaaca Newtona Matematické principy přírodní filosofie. Tato publikace nebyla po dlouhou dobu přeložena do češtiny. Autor článku popisuje historii překladů publikace (a to i do více jazyků), hlavně však sděluje, jak se v nedávné době překladu publikace zúčastnil on sám.

1. Úvod

Isaaca Newtona zná asi každý, ale kdo od Isaaca Newtona něco četl? Do nedávna od něj česky ani slovensky nevyšla ani čárka. V poslední době vyšly česky a slovensky tři různé překlady jeho nejvýznamnějšího spisu Matematických principů přírodní filozofie. Všechny tři překlady vyšly dokonce už ve dvou vydáních.

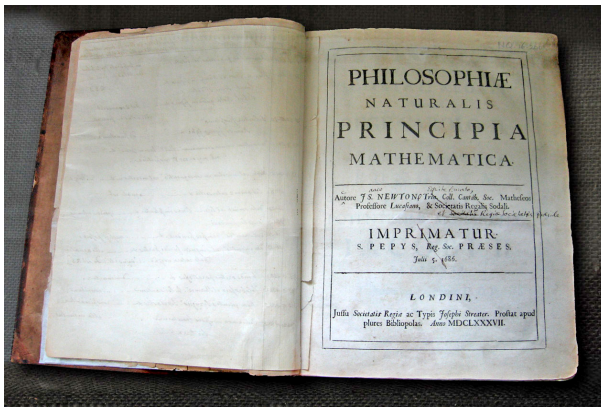
2. Isaac Newton a Principie

Isaac Newton, jeden z nejvýznamnějších vědců a fyziků, se zapsal do dějin nejen vynálezem diferenciálního a integrálního počtu, zasáhl i do optiky, alchymie a kupodivu i do teologie (obr. 1).



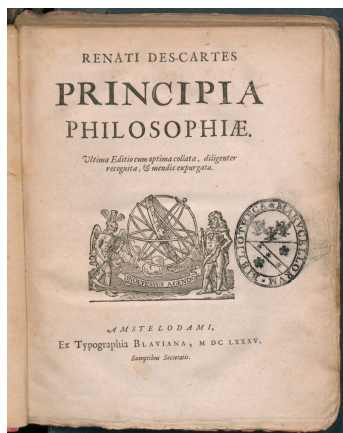
Obr. 1: Portrét Isaaca Newtona (1642–1727) – kopie obrazu Sira Godfreye Knellera (1689) (zdroj: wikipedia)

Newton sepsal spis, který je považován za nejvýznamnější vědecký spis moderní historie. *Matematické principy přírodní filozofie* se skládají ze tří knih a jsou zkráceně označovány jako *Principie* (obr. 2).



Obr. 2: Titulní stránka Principií, 1. vyd, Londýn, 1687 (zdroj: wikipedia)

Pokud se ptáte, jak přišel Isaac Newton na název svého spisu, tak se uvádí, že název je odvozen od názvu spisu René Descarta *Principy filosofie*. Tento Descartův text vyšel před několika lety ve vydavatelství Filosofia. Nevyšel však česky kompletní, část věnovaná fyzice v této knize chybí. Uvádí se, že Descartes kvůli svému vlivu zpozdil či zbrzdil vývoj fyziky, a rovněž se uvádí, že se Newton tak trochu posmíval Descartovu pojetí fyziky.



Obr. 3: Titulní stránka Descartova spisu (zdroj: wikipedia)

3. Historie vydávání Newtonových Principií na českém území

Před lety jsem se dozvěděl, že tento vědecký spis nikdy česky nevyšel, a pojal jsem plán zkusit přeložit alespoň nějakou smysluplnou část tohoto spisu.

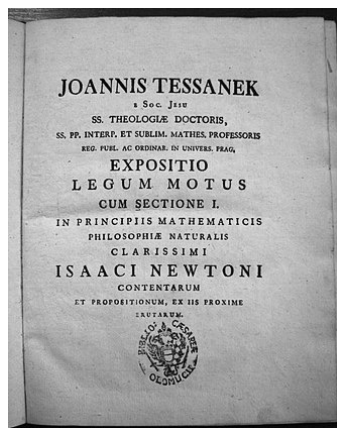
Nejprve si ale připomeňme pokusy vydat tento Newtonův text na našem území.

3.1. Latinské vydání Jana Tesánka

Co se týká historie na českém území, tak Jan Tesánek vydal latinsky první dvě knihy Principií, které jsou digitalizovány v Národní knihovně Praha (obr. 4).

Jan Tesánek (29. 12. 1728, Brandýs nad Labem – 22. 6. 1788, Praha), latinsky Cannes Tessanek, křtěný Jan Baltazar, byl katolický kněz, matematik, fyzik a astronom. Vystudoval gymnázium a filozofickou fakultu v Praze. Nejdříve byl zastáncem aristotelovské filozofie, ale díky Steplingovu¹⁾ vlivu se seznámil s diferenciálním počtem, integrálním počtem a newtonovskou fyzikou, kterou se později zabýval ve svých dílech komentujících Newtonovy Principie.

¹⁾Joseph Stepling (29. 6. 1716, Řezno – 11. 7. 1778, Praha) byl česko-německý jezuitský kněz, fyzik, astronom, matematik, meteorolog a pedagog [14, 15, 16].



Obr. 4: Faksimile Tesánkova textu

Tesánek v roce 1745 vstoupil do jezuitského řádu. Získal doktorát z teologie a byl vysvěcen na kněze. Stal se profesorem fyziky na pražské univerzitě. Dva roky musel pobývat v Olomouci, kde se stal ředitelem teologického konviktu a učitelem matematiky. Poté se opět vrátil zpět do Prahy, kde byl po smrti J. Steplinga jmenován ředitelem matematicko-fyzikálních studií. V rodině nebyl jediným, kdo by se zabýval přírodními vědami. Jeho bratr Francisce (1730 – ?) sepsal učebnici fyziky pro Filozofickou fakultu v Olomouci, na které také vyučoval řadu předmětů.

Tesánek si během života dopisoval s J. L. Lagrangem²⁾ a J. III. Bernoullim³⁾. Mezi jeho žáky v oboru vyšší matematiky patřil F. J. Gerstner⁴⁾, který se pak o něj na sklonku života staral. Na univerzitě mohl

²⁾ Joseph-Louis Lagrange (25. 1. 1736, Turín – 10. 4. 1813, Paříž), původním jménem Giuseppe Lodovico Lagrangia, či Joseph-Louis Lagrange, byl francouzský matematik italského původu, který vynikal ve všech oblastech analýzy a teorie čísel a analytické a nebeské mechaniky. Je obvykle považován za francouzského matematika, ale italská encyklopedie Enciclopedia Italiana XX (Rome, 1933), s. 380–381, ho nazývá Giuseppe Luis a označuje ho jako italského matematika. Byl jedním z největších matematiků 18. století, podobně jako Leonhard Euler. Od roku 1797 přednášel na École polytechnique.

³⁾ Bernoulliové byla nejvýznamnější vědecká rodinná dynastie historie. Po zadání hesla „Bernoulli“ v Souborném katalogu Národní knihovny Praha získáme cca 396 titulů, např. [1–11, 33].

⁴⁾ František Josef Gerstner (22. 2. 1756, Chomutov – 25. 6. 1832, Mladějov), německy Franz Joseph Gerstner, od roku 1810 Ritter von Gerstner (rytíř Gerstner), byl matematik, fyzik a inženýr. Roku 1806 založil Královské české stavovské technické učiliště v Praze, předchůdce dnešního Českého vysokého učení technického (ČVUT).

působit i po zrušení jezuitského řádu, podobně jako jeho učitel Stepling. Byl jedním z prvních členů Učené společnosti. Jeho znalost matematiky a fyziky mu přinesla označení český Newton. Tesánkovo jméno bylo umístěno pod okny Národního muzea v Praze spolu s mnoha dalšími.

Více o J. Tesánkovi se můžeme dočíst v publikacích [17, 18, 19, 20].

3.2. Překlad Luboše Nového

Jak jsem se před lety dozvěděl od Jaroslava Foltý, jeho kolega a spolupracovník Luboš Nový (obr. 5) zřejmě před lety přeložil první knihu Principií do češtiny. Luboši Novému jsem tehdy poslal dopis ohledně jeho překladu. Odpovědi jsem se nedočkal. Vydavatel Michal Hanzelín, spolupracovník Petra Vopěnky se pokoušel Luboše Nového zastihnout v místě bydliště, bohužel neúspěšně. Jaroslav Foltá i Luboš Nový jsou po smrti, osud tohoto překladu je tak neznámý.



Obr. 5: Luboš Nový

Luboš Nový (13. 11. 1929, Praha – 6. 1. 2017) absolvoval gymnázium v Praze a poté studoval matematiku a fyziku na univerzitě, kde v roce 1953 obhájil disertaci Bolzanova logika. V roce 1957 se stal kandidátem věd za práci věnovanou učebnicím praktické geometrie v Čechách v 1. polovině 18. století, celkovému stavu matematiky v Čechách ve 2. polovině 18. století a základům matematické analýzy u Bolzanových současníků. V roce 1956 se stal vedoucím oddělení dějin přírodních věd a techniky nově se formujícího Historického ústavu ČSAV. V čele tohoto pracoviště stál do roku 1985, kdy byl jmenován ředitelem ústředního archivu ČSAV. Na tomto místě působil do roku 1989. Od roku 1968 byl šéfredaktorem časopisu Dějiny věd a techniky. Působil jako člen redakční rady časopisu *Historia Mathematica*.

Navrhl výstavbu koněspřežné dráhy z Českých Budějovic do Lince [12, 13].

Pod vedením Luboše Nového vznikla v roce 1961 publikace Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století. Jeho pozornost se pak obrátila k problematice teorie grup, jakožto důsledku předchozího rozvoje algebry. Kniha *Origins of Modern Algebra* (1973) se stala podkladem pro získání titulu doktora věd v roce 1977. V roce 1974 se Nový zasloužil o publikaci kolektivní práce Dějiny techniky v Československu.

Počátkem 80. let se jeho vědecké záměry obrátily k obecnějším problémům revolucí ve vědě a vytváření vědeckých disciplín, k úloze nacionalismu ve vývoji vědy na počátku 20. století, k vědě jako formě společenské komunikace, k problémům obecného, teritoriálního a národního vývoje vědy a k aspektům širšího pojetí vědy jako sociálního jevu se vši svou provázaností s životem společnosti.

Projekt širokého autorského kolektivu dovedl k obhajobě a posléze i k dalšímu doplnění, dokončení a redakční přípravě k tisku. Na základě jeho návrhu byl Národnímu technickému muzeu přiznán výzkumný záměr Dějiny věd a techniky na léta 1999–2003. Nejvýznamnějším publikačním výstupem tohoto výzkumného záměru se staly třísvazkové *Studie o technice v českých zemích* oceněné zvláštní cenou Gloria musæalis v kategorii Muzejní publikace roku 2003.

Sepsal také např. knihy Dějiny matematiky I a Vývoj výpočetní techniky. Obě tyto knihy vydalo Národní technické muzeum. Jaroslav Folta⁵⁾ a Luboš Nový přeložili legendární knihu Dirka J. Struika Dějiny matematiky.

3.3. *Projekt Daniela Špeldy*

Před cca 3 lety vyšel český překlad *Principií* z projektu Daniela Špeldy, na kterém se podílel Jan Novotný a další (obr. 6).

Tento překlad zahrnuje překlad předmluv, definic, axiomů, zákonů a výběr textů 3. knihy *Principií* [23]. Na Pedagogické fakultě Masarykovy

⁵⁾Jaroslav Folta (2. 4. 1933, Plzeň – 25. 3. 2011, Praha) v letech 1951–1955 absolvoval Matematicko-fyzikální fakultu University Karlovy v Praze. V letech 1955–1959 působil coby aspirant a následně v letech 1959–1993 jako vědecký pracovník Historického ústavu ČSAV v Praze. V roce 1961 na MFF UK obhájil Kandidaturu fyzikálně matematických věd. Od roku 1993 působil jako vedoucí oddělení dějin techniky Národního technického muzea v Praze. V letech 1993–1995 dokončil započatou přípravu vydání *Studíí o technice v českých zemích* 1918–1945, navrhl koncepci další etapy této práce a v letech 1996–1998 sestavil osnovu zpracování dějin techniky v českých zemích pro léta 1945–1992. Jaroslav Folta obdržel od prezidenta Václava Klause Medaili za zásluhy.

univerzity vznikla v souvislosti s projektem vydání Principií i bakalářská práce Možnosti využití Newtonových Principií pro výuku Daniela Jandory pod vedením Jindřišky Svobodové [33]. V rámci projektu Daniela Špeldy vyšly i další knihy: Nová astronomie od Johanese Keplera, Prubíř od Galilea Galileie, Umění odhadu od Jacoba Bernoulliho, Rozhovory o mnohosti světů od Fontenelleho.



Obr. 6: Daniel Špelda a Jan Novotný

Téměř všechny knihy, které vyšly v rámci tohoto projektu, jsou vyprodané. K datu sepsání tohoto příspěvku máme na e-shopu většinu těchto titulů minimálně v několika výtiscích. Nicméně projekt by měl mít pokračování či opakování.

3.4. Překlad Jiřího Šolera

Na Internetu se dá najít překlad části textu Principií [30], jehož autorem je Jiří Šoler, bývalý poslanec za SPR-RSČ, neboli republikány Miloslava Sládka.

Jiří Šoler (20. 4. 1947 – 2018), český politik (obr. 7), v 90. letech 20. století poslanec České národní rady a Poslanecké sněmovny za SPR-RSČ, později za Liberálně sociální unii a Českomoravskou unii středu, pak člen různých mimoparlamentních radikálně pravicových formací. Vystudoval Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy. Nastoupil pak na pozici vědeckého stipendisty do Ústavu makromolekulární chemie ČSAV. Čelil podle svých slov кадровým problémům, protože odmítl vstup do KSČ. Přешel proto od roku 1976 na profesi programátora, kterou vykonával i počátkem 21. století [32].



Obr. 7: Jiří Šoler

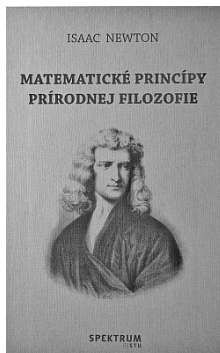
Zůstává otázkou, proč Jiří Šoler svůj částečný překlad nerozšířil a nepublikoval knižně.

3.5. Úplné slovenské vydání

Na Slovensku vyšel přibližně ve stejné době jako vydání *Principií* z projektu Daniela Špeldy úplný slovenský překlad Juraje Šebesty [22] (obr. 8).



Obr. 8: Juraj Šebesta



Obr. 9

Tento překlad je již více než rok a čtvrt vyprodaný a nesehnal jsem ani výtisk pro sebe a zřejmě jej nemá žádná česká hlavní knihovna, jak jsem zjišťoval na webu NKP.

3.6. Různá zahraniční vydání *Principií*

V Národní knihovně Praha je kniha Newton's *Principia* for the common reader indického fyzika, laureáta Nobelovy ceny za fyziku Chan-

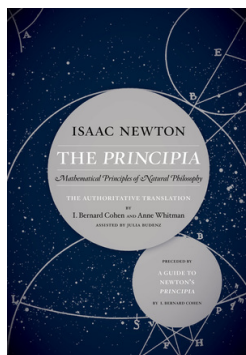
drasekhara, Subrahmanyana [21]. Autor strávil zřejmě dva roky, aby zpracoval Principie Isaace Newtona do srozumitelnější podoby.

Zřejmě nejnovějším anglickým vydáním je překlad *The mathematical principles of natural philosophy* (1. vydání, Cambridge University Press, Cambridge) C. R. Leedham-Greena [24].

My jsme v následně uvedeném výtisku čerpali jednak z ruského překladu z roku 1989 *Математические начала натуральной философии* od A. N. Krylova [26] (obr. 10), jednak z anglického vydání *The Principia: mathematical principles of natural philosophy* z roku 1999 od I. Bernarda Cohena a Anne Whitmanové (University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London) [25] (obr. 11).



Obr. 10



Obr. 11

Polské vydání z roku 2011 *Matematyczne zasady filozofii przyrody*, které vytvořil a komentářem opatřil Jarosław Wawrzycki, zřejmě není v žádné veřejné české knihovně [27].

Německé vydání *Mathematische Principien der Naturlehre* je z roku 1872 od J. Ph. Wolferseho [28]. Moderní německé vydání má na svědomí Volkmar Schiller z roku 1999 [29].

Také rumunsky vyšly *Principiile matematice ale filozofiei naturale*. Také toto vydání je v Národní knihovně v Praze [31].

4. Náš překlad první knihy Principií

Náš překlad zahrnuje úplný překlad 1. knihy. Po 13 letech příprav a cca 4 letech hrubé práce na tomto překladu jsem 28. 3. 2023 konečně uspořádal křest této Newtonovy knihy (obr. 12).

MATEMATICKÉ PRINCIPY PŘÍRODNÍ FILOZOFIE

Isaac Newton

úplný překlad první knihy, 2. rozšířené vydání



Leonardo Pisánský Fibonacci

LIBER ABACI - překlad prvních pěti kapitol

Felix Klein

O tzv. neeukleidovské geometrii

Michal Řepík

*K objemu a povrchu koule
Kružosečky v obecné poloze
Od Laméových křivek po superelipsoidy*

František Koutný

*Newton a calculus a minimalizace
Carl Friedrich Gauss
(30. 4. 1777 - 23.2. 1855)*

Karel Vašíček

*Jak vydat knihu
Krátko o fotografii a její historii
Newton a Principie*

*Finanční, bankovní a internetová bezpečnost
a podvody na Internetu
Matematika na Internetu*

Překlady Patrika Příbyla

*Carl F. Gauss - Aritmetická zkoumání
Peter G. Dirichlet - Přednášky o teorii čísel
Adrien M. Legendre - Esej o teorii čísel*

*Lagrange - Elementární aritmetika
Isaac Newton - Univerzální aritmetika*

S předmluvou prof. Jana Novotného, CSc.

Přeložil a vydal: Karel Vašíček, Vybrané části přeložil: Patrik Příbyl

Korektura překladu: Vladimír Ladma, Jazyková korektura: František Just

Obr. 12

Knihu osm měsíců opravoval Vladimír Ladma, jazykovou korekturu provedl František Just.

Požádal jsem Jiřího Grygara a Jana Novotného, zda by nesepsali nějakou krátkou předmluvu. Bohužel Jiří Grygar byl podle mých informací na akutní operaci, takže nestihl předmluvu sepsat. Jan Novotný sepsal krátkou předmluvu. Součástí knihy je stať Františka Koutného o Newtonovi a některých jeho pracích. Dále je v knize překlad prvních čtyř kapitol knihy Liber abaci (spíše Kniha výpočtů než Kniha o abaku) od Leonarda Pisana Fibonacciho a stručný životopis Fibonacciův. Spis Fibonacciův byl dosud přeložený jen do angličtiny jako jediného moderního cizího jazyka. Dále jsou součástí knihy texty Michala Řepíka (obr. 13).

MATEMATICKÉ PRINCIPY PŘÍRODNÍ FILOZOFIE

Isaac NEWTON

úplný překlad první knihy

LIBER ABACI

Leonardo Pisánský FIBONACCI

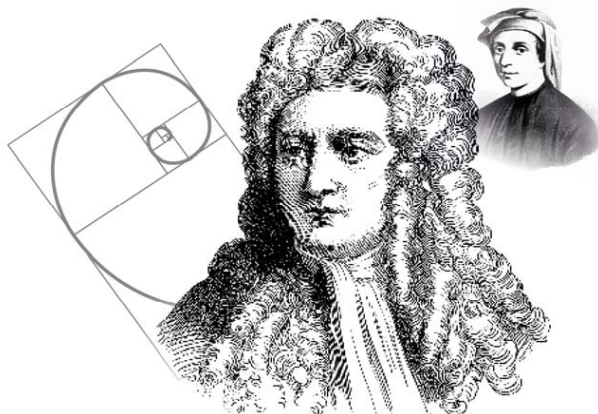
překlad prvních čtyř kapitol

Michal ŘEPÍK

*K objemu a povrchu koule
Kruželosečky v obecné poloze
Od Laméových klívek po superelipsoidy*

Karel Vašíček

*Jak vydat knihu?
Kratce o fotografii a její historie*



Přeložil a vydal: Karel VAŠÍČEK, Korektura překladu: Vladimír LADMA,
Jazyková korektura: František JUST, Předmluva: prof. Jan NOVOTNÝ, CSc.

Obr. 13

Děkuji všem, kteří se na knize podíleli, nebo mi nějak přispěli, ať finančně, prací nebo materiálně.

5. Přípravovaná vydání uvedených publikací

Doplňili jsme 5. kapitolu textu Liber abaci, článek Františka Koutného Carl Friedrich Gauss, texty Karla Vašíčka Počítačová, finanční, bankovní a internetová bezpečnost a gramotnost a Isaac Newton a Principie. Toto druhé vydání Principií by mělo být k dispozici zřejmě v říjnu 2024. Předmluvu tohoto vydání slíbil sepsat i Jiří Grygar.

Literatura

- [1] Bernoulli, J.: *Umění odhadu (část čtvrtá)*. Masarykova univerzita, Brno, 2020.
- [2] Proks, I.: *Celok je jednoduchší ako jeho časti, vybrané kapitoly z histórie exaktných prírodných vied*. Veda, Bratislava, 2012.
- [3] Livio, M.: *Je Bůh matematik?* Argo, Praha, 2010.
- [4] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Jacob/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/)
- [5] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Daniel/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Daniel/)
- [6] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Jacob\(II\)/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob(II)/)
- [7] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Johann/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann/)
- [8] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Johann\(II\)/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann(II)/)
- [9] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Johann\(III\)/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Johann(III)/)
- [10] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Nicolaus\(I\)/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Nicolaus(I)/)
- [11] [https : / / mathshistory.st - andrews.ac.uk / Biographies / Bernoulli_Nicolaus\(II\)/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Nicolaus(II)/)
- [12] Streit, J.: *Fr. J. Gerstner*. Orbis, Praha, 1947.
- [13] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gerstner/>
- [14] Šišma, P.: Joseph Stepling. <https://web.math.muni.cz/biografie/>
- [15] Kolomý, R.: Josef Stepling – matematik, fyzik a astronom. *Matematika a fyzika ve škole*, č. 9, 1978-79, s. 293–296.

- [16] Jáchim, F.: Josef Stepling a jeho doba. *Matematika, fyzika, informatika*, č. 7, 1997–98, s. 631–633.
- [17] Šišma, P.: Jan Tesánek, <https://web.math.muni.cz/biografie/>
- [18] Jáchim, F.: Jan Tesánek a matematika 18. století. *Matematika a fyzika ve škole*, 1986–1987, s. 590–592.
- [19] Nový, L.: Jan Tesánek a Newtonova Principia Mathematica Philosophie Naturalis. *Dějiny věd a techniky*, č. 1, 2002, s. 1–21.
- [20] Newton, I.: Philosophiae Natvralis Principia Mathematica. Liber Secvndvs / Avctore Isaaco Newtono Eqvite Avrato, Illvstrata Commmentationibvs Potissimvm Ioannis Tessanek Philosophiae, Pragæ. Litteris Caes. Reg. Scholae Normalis Factore Wenceslao Piskaczek, 1785. https://www.manuscriptorium.com/apps/index.php?direct=facsimile&pid=NKCR_-NKCR_49B0001042_319MQLA-csIMG00000001
- [21] Chandrasekhar, Subrahmanyan: *Newton's Principia for the common reader*. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [22] Šebesta, J.: *Newton Isaac, Matematické principy přírodní filozofie*. Bratislava, 2021.
- [23] Newton, I.: *Matematické principy přírodní filozofie (výběr z díla), dopisy Isaaca Newtona Richardu Bentleymu*. Praha, 2020.
- [24] Newton, I.: *Principia. The mathematical principles of natural philosophy*. Cambridge University, Cambridge, 2021.
- [25] Newton, I.: *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Berkeley; Los Angeles, London, 1999.
- [26] Newton, I.: *Matematiceskije načala natural'noj filosofii*. Nauka, Moskva, 1989.
- [27] Newton, I.: *Matematyczne zasady filozofii przyrody*. WSE, Krakow, WSiZ, Rzeszow, WSZiA, Zamoście.
- [28] Newton, I.: *Mathematische Principien der Naturlehre*. Berlin, 1872. http://digital.onb.ac.at/OnbViewer/viewer.faces?doc=ABO_%2BZ25324980X
- [29] Newton, I.: *Die mathematischen Prinzipien der Physik*. Berlin, New York, 1999.
- [30] Šoler, J.: *Vybrané části Principů Isaaca Newtona přeložené do češtiny*. <https://web.archive.org/web/20131220150904/http://jirisoler.wz.cz/principia.html>
- [31] Descartes, R.: *Principy filosofie. Výbor doplněný dvěma Descartovými dopisy princezně Alžbětě Falcké*. Praha, 1998.
- [32] <https://cs.wikipedia.org/hesloJiříŠoler>
- [33] Jandora, D.: *Možnosti využití Newtonových Principií pro výuku*. Bakalářská práce, Masarykova univerzita, Brno, 2019.

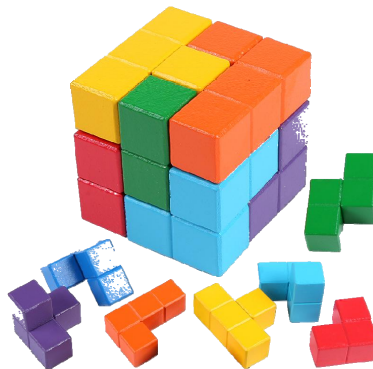
Soma a jiné kostky

Alena Vávrová, ZŠ Karla Čapka, Praha

ABSTRAKT. *Soma kostka (Soma Cube) patří v současnosti k běžným a hojně rozšířeným 3D hlavolamům a skládačkám. Jedná se o jakousi prostorovou verzi Tangramu. Obě skládačky mají sedm dílků a z obou lze vytvořit kromě základního obrazce/tělesa tisíce dalších tvarů.*

1. Úvod

Soma kostka vznikla teprve v roce 1933. Vymyslel ji dánský vědec a spisovatel Piet Hein během přednášky o kvantové mechanice. I když přednášel nositel Nobelovy ceny fyzik Werner Heisenberg, Hein byl myšlenkami očividně jinde. Zajímavé je, že postupoval obráceně – z 27 krychlíček vytvářel dílky tak, aby jejich složením vznikla krychle $3 \times 3 \times 3$. Po skončení přednášky poslepoval těch 27 kostek do 7 tvarů (obr. 1) a pustil nápad mezi lidi.



Obr. 1: Soma kostka [1]

Předpokládá se, že úspěch Soma Cube byl způsoben především její jednoduchostí. Na první pohled to vypadá jako jednoduchá skládačka, koneckonců je to jen sedm dílků. Je zábavné sledovat na akcích rodiče s dětmi různého věku, jak si tahají dílky z ruky, protože to přece není problém poskládat.

Bohužel málokdo se pouští opakovaně do hledání řešení, současná generace dětí chce výsledky hned a bez námahy. Trochu ironické, když

si uvědomíme, jak byla kostka pojmenovaná. V roce 1932 vyšla kniha Aldouse Huxleyho *Brave New World* (v češtině *Konec civilizace*), děsivě depresivní román o futuristické společnosti, kde je hlavní se bavit, nevázat se a mít „právo“ na štěstí. A každý v knize ujíždí na droze soma. Ta byla známá z indických zápisků Rgvéda z doby starých Árijů. Tehdy somu tvořily halucinogenní rostliny jako prostředník pro styk s bohy – patří tam třeba muchomůrka červená.

Kostku si lze snadno vyrobit, ale je i v nabídce různých firem a v různých podobách, barvách i materiálech (a cenách). Ideální je dřevo s kostičkami cca 2 cm.

Samotná schopnost řešit kostku Soma kopíruje křivku rozložení inteligence, ale se zajímavými výchylkami na obou stranách křivky.

A pokud je chceme využít při práci ve třídě s větší skupinou dětí, je dobré mít pro každé dítě jeho kostku. Kromě rozvoje jemné motoriky při manipulaci s dílky kostky dále

- trénujeme prostorovou představivost,
- podporujeme hravý přístup k prostorové geometrii,
- rozvíjíme schopnosti řešit problémy,
- podporujeme koncentraci a trpělivost,
- při diskusi vytváříme a zdůvodňujeme předpoklady řešení,
- učíme děti popis faktů a procesů,
- diskutujeme o postupech a výsledcích,
- učíme je vytvářet kostkové konstrukce podle návodu a popisovat polohové vztahy objektů.

2. Složitější skládačky ze Soma kostky

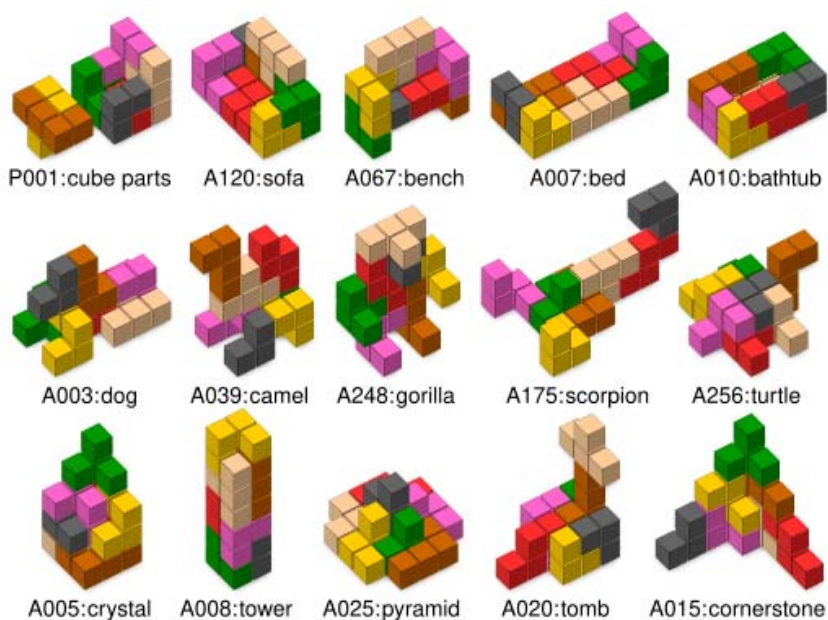
Náročnější už jsou další tvary, např. ty na obr. 2.

3. Můj přínos do hry se Soma kostkou

Jako výzvu do vedené tematiky jsem vytvořila varianty Soma kostky. Některé z nich jsou známé a mají své vlastní názvy, např. číslo 8 je Mikusinski cube (obr. 3).

Literatura

- [1] https://img.joomcdn.net/fc7300c3280675d3fc9922cb1857edc8731b5609_original.jpeg
- [2] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soma_cube_figures.svg



Obr. 2: Útvary a jejich názvy vytvořené ze Soma kostky [2]



Obr. 3: Další varianty skládání Soma kostky

Chybí/nechybí komplexní čísla v RVP?

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

ABSTRAKT. *Rámcové vzdělávací programy (RVP) procházejí inovacemi. Těmi inovacemi je hlavně škrtání témat, která by měli středoškoláci umět a použít v praxi. Článek se konkrétně věnuje vypuštění komplexních čísel z RVP. Ukazuje, že znalost komplexních čísel v mnoha případech pomůže ulehčit řešení matematických problémů.*

1. Úvod

Komplexní čísla již několik let nejsou v RVP. Je to dobře, nebo špatně? My učitelé jsme je ve škole měli a také je učili. A podobně je to s dalšími školskými tématy, připomeňme si např. analytickou geometrii v prostoru. Je jejich vypuštění dobře, nebo špatně?

Věnujme se dál pouze komplexním číslům. Na podporu jejich existence v RVP si uveďme několik úloh, kde je vidět, že by se ve škole hodily. Jde o úlohy z matematických soutěží, což je předmětem této konference. Studenti řeší některé planimetrické úlohy pomocí analytické geometrie – bývá to ale většinou složité. Právě komplexní čísla zjednoduší tento analytický způsob řešení.

2. Úloha 1

Zadání: Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Dokažte, že platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 \Leftrightarrow AC \perp BD.$$

2.1. Řešení v eukleidovské rovině

Označme souřadnice vrcholů $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, $C[c_1; c_2]$, $D[d_1; d_2]$. Levou stranu ekvivalence přepíšeme pomocí vektorů a upravujeme:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ (b_1 - a_1; b_2 - a_2) \cdot (b_1 - a_1; b_2 - a_2) + (d_1 - c_1; d_2 - c_2) \cdot (d_1 - c_1; d_2 - c_2) &= \\ = (d_1 - a_1; d_2 - a_2) \cdot (d_1 - a_1; d_2 - a_2) + (c_1 - b_1; c_2 - b_2) \cdot (c_1 - b_1; c_2 - b_2) &= \\ (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2 &= \\ = (d_1 - a_1)^2 + (d_2 - a_2)^2 + (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 a_1 + b_2 a_2 + d_1 c_1 + d_2 c_2 &= d_1 a_1 + d_2 a_2 + c_1 b_1 + c_2 b_2 \\
c_1(d_1 - b_1) - a_1(d_1 - b_1) + c_2(d_2 - b_2) - a_2(d_2 - b_2) &= 0 \\
(c_1 - a_1)(d_1 - b_1) + (c_2 - a_2)(d_2 - b_2) &= 0 \\
(c_1 - a_1; c_2 - a_2) \cdot (d_1 - b_1; d_2 - b_2) &= 0 \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \Leftrightarrow AC \perp BD
\end{aligned}$$

Tím je úloha vyřešena.

2.2. Řešení v Gaussově rovině, tj. pomocí komplexních čísel

Souřadnice vrcholů čtyřúhelníku $ABCD$ zapíšeme pomocí komplexních čísel a, b, c, d a analogicky jako výše řešíme:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
(b - a) \cdot (b - a) + (d - c) \cdot (d - c) &= (d - a) \cdot (d - a) + (c - b) \cdot (c - b) \\
a \cdot b + c \cdot d &= a \cdot d + b \cdot c \\
(c - a) \cdot (d - b) &= 0 \\
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \Leftrightarrow AC \perp BD
\end{aligned}$$

Tím je úloha opět vyřešena.

2.3. Porovnání metod řešení úlohy 1

Viděli jsme řešení úlohy 1 jak v eukleidovské rovině, tak v Gaussově rovině. Je vidět, že v tomto případě je druhé řešení zapsáno kratším způsobem, což je důležité i pro větší přehlednost.

Jak by tedy zde mohla znít odpověď na otázku, zda jsou komplexní čísla užitečná, či nikoli?

3. Úloha 2

Představme si nyní úlohu z Rumunské MO v roce 1994 [1, s. 91–92].

Zadání: Necht' M, N, P, Q, R, S jsou postupně středy stran AB, BC, CD, DE, EF, FA konvexního šestiúhelníku. Dokažte, že platí:

$$|MQ|^2 = |NR|^2 + |PS|^2 \Leftrightarrow NR \perp PS$$

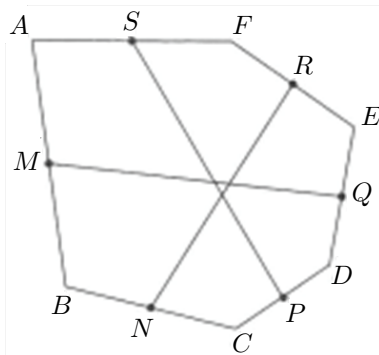
3.1. Řešení v Gaussově rovině

Souřadnice vrcholů šestiúhelníku $ABCDEF$ zapíšeme pomocí komplexních čísel a, b, c, d, e, f . Středy M, N, P, Q, R, S stran šestiúhelníku

$ABCDEF$ zapíšeme pomocí komplexních čísel

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{b+c}{2}, \quad p = \frac{c+d}{2}, \quad q = \frac{d+e}{2},$$

$$r = \frac{e+f}{2}, \quad s = \frac{f+a}{2}.$$



Obr. 1

Levou stranu ekvivalence přepíšeme pomocí vektorů a upravujeme:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{NR} \cdot \overrightarrow{NR} + \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PS} \\ (d+e-a-b)^2 - (e+f-b-c)^2 &= (f+a-c-d)^2 \\ (d-a-f+c) \cdot (d+2e-a+f-2b-c) &= (f+a-c-d)^2 \\ (f+a-c-d)^2 - (f+a-c-d) \cdot (d+2e-a+f-2b-c) &= 0 \\ (f+a-c-d) \cdot (2e+2f-2b-2c) &= 0 \\ \left(\frac{f+a}{2} - \frac{c+d}{2} \right) \cdot \left(\frac{e+f}{2} - \frac{b+c}{2} \right) &= 0 \\ (s-p) \cdot (r-n) &= 0 \\ \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{NR} = 0 &\Leftrightarrow PS \perp NR \end{aligned}$$

Ekvivalentními úpravami jsme dospěli k tvrzení, že přímky NR a PS jsou vzájemně kolmé.

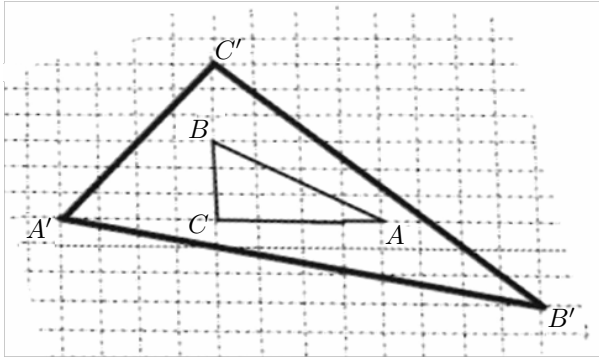
4. Úloha 3

Tato úloha je z České MO, rok 2023/24, domácí kolo Z9 [2]. Jejím autorem je autor tohoto článku. Toto propojení mezi úlohou a článkem

má právě zdůraznit vhodnost ponechání komplexních čísel v RVP.

Zadání: Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C . Body A' , B' , C' jsou obrazy bodů A , B , C ve středových souměrnostech se středy C , A , B . Dokažte, že platí

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14 \cdot |AB|^2.$$



Obr. 2

4.1. Syntetické řešení

Označme $|AC| = b$, $|BC| = a$. Pak je

$$\begin{aligned} |A'B'|^2 &= a^2 + (3b)^2 = a^2 + 9b^2, \\ |B'C'|^2 &= (3a)^2 + (2b)^2 = 9a^2 + 4b^2, \\ |A'C'|^2 &= (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2, \end{aligned}$$

takže je

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14(a^2 + b^2) = 14|AB|^2.$$

4.2. Řešení v Gaussově rovině

Souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC zapíšeme pomocí komplexních čísel A , B , C , aby se to nepletlo s délkami stran a , b . Souřadnice vrcholů trojúhelníku $A'B'C'$ zapíšeme A' , B' , C' . Mezi těmito čísly platí vztahy:

$$\begin{aligned} A &= \frac{B+B'}{2} & B &= \frac{C+C'}{2} & C &= \frac{A+A'}{2} \\ A' &= 2C - A, & B' &= 2A - B, & C' &= 2B - C \end{aligned}$$

V trojúhelníku ABC platí Pythagorova věta:

$$\begin{aligned}(A - B)^2 &= (A - C)^2 + (B - C)^2 \\ C^2 &= AC + BC - AB\end{aligned}$$

A nyní již dokážeme požadované:

$$\begin{aligned}&|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = \\&= (2A - B - 2C + A)^2 + (2B - C - 2A + B)^2 + \\&\quad + (2C - A - 2B + C)^2 = \\&= (3A - B - 2C)^2 + (-2A + 3B - C)^2 + (-A - 2B + 3C)^2 = \\&= 14(A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - AC) = \\&= 14(A^2 - 2AB + B^2) = 14(B - A)^2 = 14|AB|^2\end{aligned}$$

5. Závěr

Na několika úlohách jsme si ukázali, jak se dají řešit některé matematické úlohy. Na nich je dobře vidět, že pro každou úlohu je vhodná některá z prezentovaných metod řešení. A je zde jasně vidět, že je mnohdy velmi užitečná metoda využívající komplexní čísla. Proč je tedy vypouštět z RVP?

Literatura

- [1] Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ... Z. Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2006.
- [2] Zhouf, J.: Úloha MO, kategorie C. 1995.

Informace o publikacích vydavatelství Portál III

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

ABSTRAKT. V článku je prezentována jedna populární matematická publikace vydavatelství Portál. Z této publikace jsou prezentovány konkrétní problémy, jejich řešení je ale ponecháno na čtenáři.

1. Úvod

Tento článek je pokračováním článků [2, 3]. Jedná se již tradičně o prezentaci publikace vydavatelství Portál. Na dvou minulých konferencích byly prezentovány publikace *Jakou barvu má medvěd*, *Přijdou tři logici do baru* a *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*.

Nyní je prezentována publikace *Vedle nul je jednička velké číslo* [1], jejímž obsahem jsou např. Početní triky a číselné hříčky, O ciferných součtech a pohádkových číslech, Jak zůstávají čísla v hlavě, Kouzla s čísly a roky narození, Magie s kostkami, kartami a papírem a řada dalších témat.

Obálka knihy, z jejíž první kapitoly *Početní triky a číselné hříčky* je v tomto článku čerpáno, je na obr. 1.



Obr. 1

2. Početní triky a číselné hříčky

Kapitola je nazvána poněkud nadneseně, její obsah ve skutečnosti pojednává o obyčejných číselných operacích, které jsou ale málo známé, a tudíž i málo používané. Proto jejich prezentace může následně usnadnit číselné počítání.

2.1. Druhá mocnina čísel končících pětkou

Tuto poučku známe ze školy:

$$\begin{aligned}35 \times 35 &= 3 \times 4|25 = 12|25 = 1225 \\135 \times 135 &= 13 \times 14|25 = 182|25 = 18225\end{aligned}$$

Rozdělovník ve formě svislé čáry je tu jako úvod k zápisům dalších výpočtů.

2.2. Součin čísel, která mají stejné desítky a mají součet jednotek roven deseti

Výpočty jsou v podstatě shodné jako v předchozí kapitole:

$$\begin{aligned}32 \times 38 &= 3 \times 4|2 \times 8 = 12|16 = 1216 \\131 \times 139 &= 13 \times 14|1 \times 9 = 182|09 = 18209\end{aligned}$$

Sem patří tedy i tento součin:

$$45 \times 45 = 4 \times 5|5 \times 5 = 20|25 = 2025$$

2.3. Součin čísel, která mají stejné jednotky a mají součet desítek rovný deseti

Ze zde uvedených příkladů je jasné, jak se tyto operace provádějí:

$$\begin{aligned}32 \times 72 &= 3 \times 7 + 2|2 \times 2 = 23|04 = 2304 \\55 \times 55 &= 5 \times 5 + 5|5 \times 5 = 30|25 = 3025\end{aligned}$$

Rozšíření na víceciferná čísla není tak jednoduché, takže to není tak zajímavé, tudíž ani tak hezké. Proto tuto situaci zde neprezentujeme.

2.4. Součin víceciferných čísel s jednociferným číslem

I zde si, doufejme, čtenář sám zdůvodní tyto operace:

$$\begin{aligned}523 \times 3 &= 5|23 \times 3 = 15|69 = 1569 \\2113 \times 8 &= 21|13 \times 8 = 168 + 1|04 = 169|04 = 16904 \\34588 \times 5 &= 3|45|88 \times 5 = 15|225|440 = 15 + 2|25 + 4|40 = \\&= 17|29|40 = 172940\end{aligned}$$

nebo (jen při násobení pěti)

$$\begin{aligned}34588 \times 5 &= 34|58|8 \times 5 = 17|29|40 = 172940 \\34598 \times 5 &= 34|59|8 \times 5 = 34|58 + 1|8 \times 5 = 34|58|18 \times 5 = \\&= 17|29|90 = 172990\end{aligned}$$

3. Závěr

Ukázali jsme si několik zajímavých případů, jak lze násobit speciální dvojice přirozených čísel. Něco známe ze školy, ale většinou jde o u nás neprezentované operace. Zajímavé jsou i zápisy čísel s oddělovacím znakem ve tvaru svislé čáry.

Snad každý čtenář pochopí uvedené operace. Kdo by měl nějaké problémy, ať si zapíše čísla v dekadickém rozvoji. Tam je jasně vidět zdůvodnění uvedené operace.

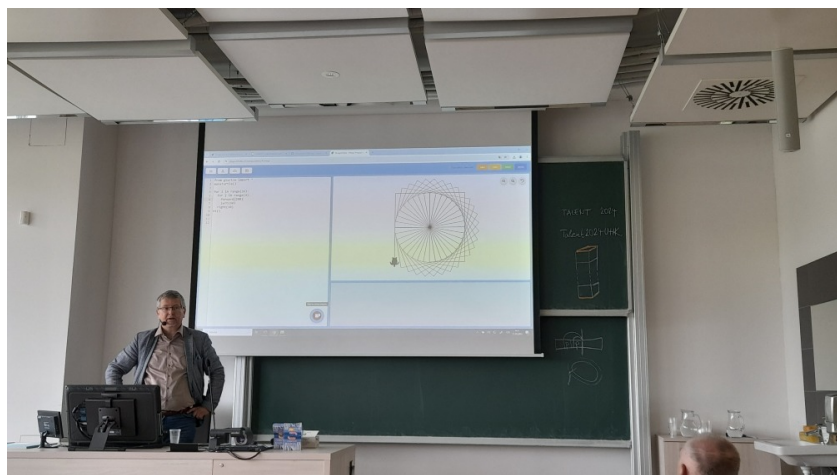
Jako příklad této aktivity uveďme tento příklad:

$$\begin{aligned}32 \times 72 &= 3 \times 7 + 2|2 \times 2 = 23|04 = 2304 \\32 \times 72 &= (3 \cdot 10 + 2) \times (7 \cdot 10 + 2) = \\&= 3 \cdot 7 \cdot 10^2 + (3 + 7) \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 = \\&= (3 \times 7) \cdot 10^2 + 2 \times 10^2 + 2 \times 2 = [(3 \times 7) + 2] \cdot 10^2 + 2 \times 2\end{aligned}$$

Literatura

- [1] Dambeck, H.: *Vedle nul je jednička velké číslo*. Portál, Praha, 2020.
- [2] Zhouf, J.: Informace o publikacích vydavatelství Portál. In: Zhouf, J. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar 2019*. Gaudeamus, Univerzita Hradec Králové, 2021.
- [3] Zhouf, J.: Informace o publikacích vydavatelství Portál II. In: Zhouf, J. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar 2022*. Gaudeamus, Univerzita Hradec Králové, 2023.

FOTOGALERIE







SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Beránková Eliška* e-mail: eliska.berankova01@upol.cz
PřF UPOL, 17. listopadu 1192/12, Olomouc
2. *Bureš Jan* e-mail: jan.bures@faster.cz
FAST ČR, a.s., U Sanitasu 1621, Říčany
3. *Dančanin Pavol* e-mail: dancanin@gmail.com
Trenčanská Teplá 443/21
4. *Dreval Maksym* e-mail: maksym.dreval@fjfi.cvut.cz
FJFI ČVUT, Trojanova 13, Praha 2
5. *Dvořáková Lubomíra* e-mail: lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz
FJFI ČVUT, Trojanova 13, Praha 2
6. *Hanzalová Pavla* e-mail: hanzalovapavla@gmail.com
G F.M.Pelcla, Hrdinů odboje 36, Rychnov n. Kněžnou
7. *Hoza Karel* e-mail: hoza@hav.cz
Trojské G, Trojská 110, Praha 7
8. *Huclová Miroslava* e-mail: huclovam@kmt.zcu.cz
FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
9. *Janeček Karel* e-mail: info@science21.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
10. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
11. *Kolář Karel* e-mail: kolar@prometheus-nakl.cz
Prometheus, sro, Čestmírova 148, Praha 4
12. *Königsmarková Soňa* e-mail: skonig@kmt.zcu.cz
FPE ZČU, Klatovská 51, Plzeň
13. *Kovář Marek* e-mail: pangea.cz@gmail.com
Pangea, Meridium, Frýdlantská 1350/1, Praha 8
14. *Králová Kateřina* e-mail: kralova@trojskegymnazium.cz
Trojské G, Trojská 110, Praha 7
15. *Lego Stanislav* e-mail: stanislav.lego@gmail.com
Rakouské G, Na Cikorce 2166/2b, Praha 4
16. *Liška Marek* e-mail: liska@zskarlacapka.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9

17. *Mazouch Radek* e-mail: mazouch@seznam.cz
Šafaříkova 484/3, Hradec Králové
18. *Müller Evžen* e-mail: muller@gozhorice.cz
Zemědělská akademie a G, Riegrova 1403, Hořice
19. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
PřF UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
20. *Pražák Pavel* e-mail: pavel.prazak@uhk.cz
FIK UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
21. *Procházková Radka* e-mail: prochazkova@spn.cz
SPN, a.s., Ostrovní 126/30, Praha
22. *Rak Josef* e-mail: peparak@gmail.com
G, Dašická 1083, Pardubice
23. *Ringel Jiří* e-mail: jiri.ringel@seznam.cz
G, Hradební 218, Broumov
24. *Samková Soňa* e-mail: samkova@spn.cz
SPN, a.s., Ostrovní 126/30, Praha
25. *Stejskalová Markéta* e-mail: marketastejski@gmail.com
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
26. *Škorpilová Martina* e-mail: stepanov@karlin.mff.cuni.cz
MFF UK, Sokolovská 83, Praha 5
27. *Šmíd Jan* e-mail: jsmid@viscodes.us
Viscodes, 2402 Appaloosa way, Finksburg, USA
28. *Špáta Miloš* e-mail: milos.spata@seznam.cz
Truhlářova 23, Ústí nad Labem
29. *Teislerová Martina* e-mail: teislerova@forclassmates.com
Forclassmates s r.o., Evropská 516/10, Praha 6
30. *Tesař Vladimír* e-mail: tesar@vcelicka.cz
Abaku, Vyšehradská 320/49, Praha 2
31. *Tláškal Jakub* e-mail: jtlaskal@spselitdobruska.cz
SPŠ elit, Čs. odboje 670, Dobruška
32. *Tláškalová Ivana* e-mail: itlaskalova@spselitdobruska.cz
SPŠ elit, Čs. odboje 670, Dobruška
33. *Trnečka Marek* e-mail: trnecka@forclassmates.com
Forclassmates s r.o., Evropská 516/10, Praha 6

- 34. *Trousilová Aneta* e-mail: trousilovaaneta@seznam.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
- 35. *Vašíček Karel* e-mail: dr.vasicek@atlas.cz
Hlaváčova 82, Pardubice
- 36. *Vávrová Alena* e-mail: vavrova@zskarlacapka.cz
ZŠ Karla Čapka, Kodaňská 658, Praha 10
- 37. *Vojkůvková Iva* e-mail: vojkuvkova@gjkt.cz
GJKT, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové
- 38. *Zhouf Jaroslav* e-mail: zhouf@seznam.cz
FIT ČVUT, Thákurova 9, Praha 6

PODĚKOVÁNÍ

Organizátoři konference děkují sponzorům, díky kterým mohl být vysázen a vytištěn tento sborník. Jsou jimi:



ALEF NULA, a.s.

<https://www.alefnula.com/>



ForClassmatesTM

ForClassmates, s. r. o.

<https://www.forclassmates.com/cs>

ZA PODPORY
Janeček
Foundation

Nadace Janeček Foundation

<https://www.janecekfoundation.cz/>

Název: Ani jeden matematický talent nazmar 2024. Sborník příspěvků.

Editor: Jaroslav Zhouf

Sazba systémem $\text{\TeX}$: Miloslav Závodný

Vydalo nakladatelství Univerzity Hradec Králové, Gaudeamus
jako svou 1889. publikaci

Rok vydání: 2025

Vydání: první

Text neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7435-955-2

ISBN 978-80-7435-954-5 (brožovaná vazba)