Univerzita Hradec Králové – Přírodovědecká fakulta
a Fakulta informatiky a managementu
Královéhradecká pobočka JČMF

Ani jeden matematický talent nazmar 2019

Sborník příspěvků 9. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2021

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Univerzita Hradec Králové
Fakulta informatiky a managementu

Programový výbor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT a VŠE, Praha
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
PhDr. Michal Musílek, Ph.D., PřF UHK, Hradec Králové
Mgr. Iva Vojkůvková, FIM UHK, Hradec Králové

Editor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT a VŠE, Praha

Recenzent:
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7435-846-3

OBSAH

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 24. 5. 2019

10.00	Zahájení
10.00 - 10.30	Jana Zapletalová: Hejného metoda
10.30 - 11.00	Adolf Boček: CTM virtuální škola pro motivované studenty
11.15 - 12.15	Kulatý stůl o Matematickém klokanu
13.30 - 13.45	Kryštof Kozák: Numerix II – Revoluce ve výuce pedagogiky nebo jen další krok stranou?
13.45 - 14.15	Bohumil Vybíral: Technické aplikace fyziky
14.15 - 15.00	Ladislav Kocanda: Důkaz Bealovy domněnky
15.00 - 15.30	Evžen Müller: Hrajeme si s letopočtem
16.00 - 16.30	Jaroslav Zhouf: Matematické soutěže v českých a ruských časopisech
16:30 - 17:00	Josef Rak: Co umí vědecké / grafické kalkulátory Casio
17.00 - 18.00	Jan Veselý: Kalendář aneb Astronomická dimenze velikonočních svátků

Sobota 25. 5. 2019

9.00 - 9.30	Štěpánka Kašová: Kroužek pro nadprůměrné děti v mateřské škole
9.30 - 10.00	Leontýna Břízová: Logické úlohy nejen v matematice
10.00 - 10.30	Michaela Kaslová: Nadprůměrné dítě – škola – rodiče
11.00 - 11.30	Pavel Sovič, Michaela Kaslová: Motivační role kontextu slovních úloh ve finále matematické soutěže Pangea
11.30 - 12.00	Jaroslav Zhouf: Informace o publikacích vydavatelství Portál
12.00 - 12.30	Diskuse
12.30	Zakončení

ÚVODEM

Úvodní slovo k devátému setkání

V letošním roce 2019 proběhl již devátý ročník konference Ani jeden matematický talent nazmar. Jak je známo, jde o konferenci, která je tematicky orientována na talentované žáky v matematice a přírodovědných oborech na základních, středních a vysokých školách a jejich učitelé. Jde o velice důležitou skupinu žáků, kteří v budoucnu budou hybateli pokroku, a to nejen v naší republice.

Konference měla již tradiční průběh. Potřetí v její historii se organizace i finanční podpory ujala Univerzita Hradec Králové, konkrétně Přírodovědecká fakulta, Fakulta informatiky a managementu, a Královéhradecká pobočka Jednoty českých matematiků a fyziků.

Na konferenci zazněla řada zajímavých a podnětných přednášek. Témata byla psychologická, matematická, informatická, z oblastí odborných soutěží. Přednášky byly věnovány věku žáků prvního stupně základní školy až studentům vysokých škol. Určitě přinesly novou inspiraci, nové náměty a podněty učitelům k jejich práci s talentovanými žáky, avšak inspiraci, náměty a podněty i jim samotným pro jejich profesionální rozvoj.

Konference jako obvykle probíhala na vysoké profesionální úrovni a ve výborné přátelské atmosféře v průběhu jednání, ale i při trávení volného času. Nezbývá, než se opět těšit na příští konferenci Ani jeden matematický talent nazmar.

Jaroslav Zhouf

Virtuální škola CTM Online

Adolf Boček, CTM, Hradec Králové

Abstrakt: Článek pojednává o Centru pro talentovanou mládež (CTM) a prezentuje svoji činnost.

1 Úvod

Centrum pro talentovanou mládež vzniklo jako nezisková organizace na míru studentům, kteří potřebují individuální a flexibilní přístup ke vzdělávání. Naše online řešení poskytuje jedinečnou vzdělávací zkušenost všem dětem od druhého stupně základních škol či víceletých gymnázií po maturanty. A to vždy tak, abychom respektovali jejich vlastní učební tempo a chuť se vzdělávat v oboru, který je baví, a přitom se výrazně zlepšit v angličtině.

2 Proč studovat mimo školu?

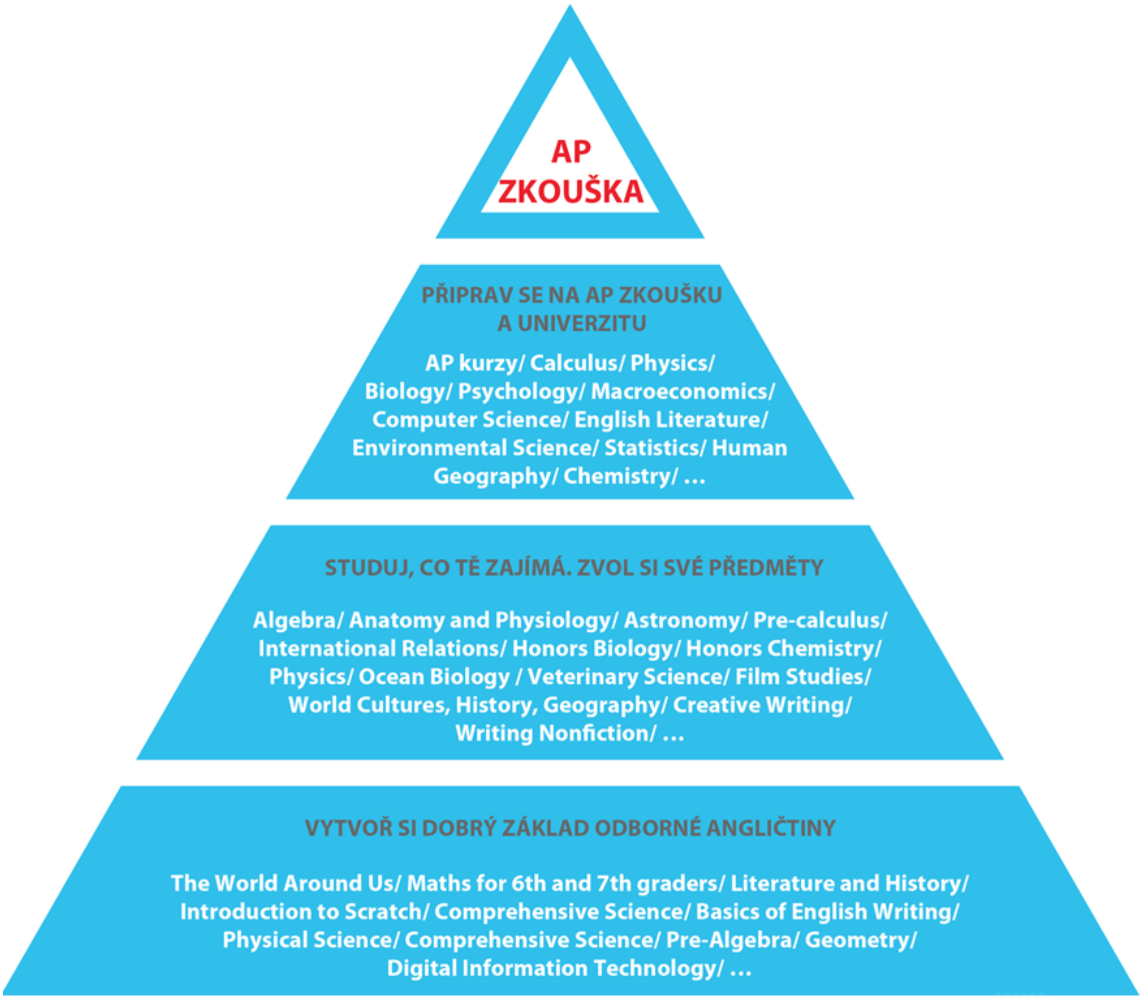
Většina našich studentů míří po střední škole na ty nejprestižnější univerzity v Čechách i v zahraničí. Proto je pro ně důležité dostat se mezi špičky ve vybraném oboru a v angličtině. Studium na CTM Online tyto dvě věci kombinuje v té nejlepší kvalitě. Každému studentovi se věnuje instruktor, který dohlíží na hladký průběh studia, motivuje a podává zpětnou vazbu. Studentům se tak dostane špičkové vzdělání v oboru, který je baví a ve kterém chtějí pokračovat.

3 Příprava na přijímací zkoušky a studium v zahraničí

Díky kurzům CTM Online se studenti připravují na studium v zahraničí. Mezi našimi kurzy najdete i přípravné kurzy na Advanced Placement zkoušky, které uznávají univerzity po celém světě v přijímacím řízení a rozhodně se budou vyjímat v každém životopise (obr. 1).

4 Široká nabídka témat

Nabízíme přes 100 online kurzů v angličtině nejrůznějších zaměření, od matematiky po tvůrčí psaní. Začít doporučujeme jednoduššími kurzy (trvají 3 až 6 měsíců) a dopracovat se až do náročných AP online kurzů (trvají 7 až 12 měsíců), které jsou přípravou na složení mezinárodních oborových Advanced Placement zkoušek.



Obr. 1: Poutač na Advanced Placement zkoušky

Kurzy pro mladší studenty zaberou kolem 2 až 3 hodin týdně. AP online kurzy mohou vyžadovat i 10 hodin týdně studia. Studenti opravdu proniknou do zvoleného oboru a zároveň si osvojí studium v anglickém jazyce. To pak zúročí při studiu v zahraničí nebo ve své profesní dráze.

5 Junior Online program

Se studiem je možné začít už od 11 let. Pro kategorii Junior jsme připravili jednodušší kurzy se základní úrovní angličtiny (obr. 2), například témata Start with Science nebo Creative Writting. Studenti se rozkoukají v prostředí virtuální univerzity, a položí tak základ pro další, náročnější studium. Vzhledem k náročnosti kurzů a způsobu online výuky, který je pro naše juniory nový, očekáváme aktivní spolupráci rodičů, na které se instruktoři obracejí s průběžnými informacemi.

6 Jak studium funguje?

Zajímá vás, jak takový kurz vypadá? Je složený z několika částí a aktivit, přičemž nejdůležitější složkou studia je pravidelná a intenzivní interakce s instruktorem. Ten studenta provází kurzem a poskytuje mu zpětnou vazbu a mentoring.

Do prostředí Junior Online kurzu můžete nahlédnout na [1]. Další ukázky kurzů pro starší studenty najdete na [2].

7 Advanced Placement zkoušky

Studenti před maturitou řeší, na jakou vysokou školu půjdou. Ti, co míří do zahraničí, ocení certifikát ze složení Advanced Placement zkoušky, která je srovnatelná s mezinárodní maturitou. Zkoušky Advanced Placement (AP zkoušky, AP exams) jsou mezinárodní oborové zkoušky na úrovni prvního ročníku americké vysoké školy s celosvětovou platností. Zkoušky pořádá americká College Board každoročně v květnu a skládá je více než dva miliony studentů z celého světa. AP zkoušky jsou uznávané univerzitami po celém světě v přijímacím řízení. Naši studenti, kteří se na zkoušky připravují s CTM online kurzy, si u zkoušek vedou skvěle, a to s průměrným skóre 4,26 z 5 možných. Více o AP zkouškách a přípravě na ně najdete na [3].

8 Spolupracujeme se školami

Centrum pro talentovanou mládež buduje po České a Slovenské republice síť partnerských škol, které zařazují CTM Online do výuky nebo jako podporované mimoškolní aktivity či jako individuální studijní plán pro nadané žáky. Spolupracujeme se školami, které mají v centru zájmu studenta a jeho rozvoj. Přehled škol, se kterými spolupracujeme, najdete na [4].

9 Co o studiu říkají studenti?

Christine C.: „Not only did I learn a lot from this course, it was also done in its own fun way. It‘s done in a very interactive way and there are many interesting facts about the lesson topic added outside of the study material.“

Tereza R.: „Znalosti získané v online kurzu vám usnadní studium nejen na střední škole, ale využijete je ještě na vysoké škole. Jděte do toho!“

Tereza P.: „Kurz AP Biology mi pomohl s přehledem odmaturovat z biologie a poté se i dostat na moji vysněnou fakultu. I na vysokoškolské půdě pro mě

Obr. 2: Přípravné kurzy pro kategorii Junior

byla velká část genetiky a buněčné biologie pouhým opakováním, protože jsem tato témata probírala už na kurzu.“

Zajímá vás víc? Zmapovali jsme cesty některých našich absolventů – od středních škol po univerzitu. Prohlédněte si mapu s úspěchy absolventů na [5].

Literatura

[1] www.ctm-academy.cz/online/jak-vypada-kurz

[2] www.ctm-academy.cz/online/jak-vybrat-kurz/ukazky-ctm-online

[3] www.ctm-academy.cz/mezinarodni-zkousky/advanced-placement-zkousky

[4] www.ctm-academy.cz/pro-skoly

[5] www.ctm-academy.cz/absolventi

[6] www.ctm-academy.cz

Logické úlohy nejen v matematice

Leontýna Břízová, G, Litomyšl; UHK, Hradec Králové

Abstrakt: Článek klasifikuje logické úlohy používané v matematice, které mají inspirovat žáky, a to hlavně nadané žáky, ke hlubšímu studiu a porozumění matematice.

1 Úvod

Při výuce matematiky i jiných přírodovědných předmětů na základní i střední škole se setkáváme s různě nadanými žáky. Proto je nutné výuku diferencovat a přizpůsobit ji každému žáku zvlášť. Což je ovšem ne vždy možné, obzvláště při velkém počtu žáků ve třídě. Nadané žáky tedy musíme nějak zabavit, než látku dovysvětlíme ostatním žákům. Kdybychom nadané žáky však pouze zabavili, například nějakou křížovkou, bez hlubšího významu, nijak by je to nerozvíjelo. Cílem logických úloh uváděných v příspěvku je tak nadané žáky nejen zabavit, ale i rozvíjet jejich zájem o přírodovědné předměty a také prohloubit jejich znalost v daném předmětu.

2 Nejen logické úlohy a jejich řešení

2.1 Matematické úlohy

Úloh, nad kterými si žáci mohou lámat hlavu, existuje velké množství. Hlavu je možné lámat si nad různými matematickými úlohami, jako jsou **algebrogramy**, kde jsou místo číslic buď obrazce, nebo písmena (stejné znaky nahrazují stejné číslice). Někdy jsou z písmen sestavena celá slova nebo dokonce celé věty. Úkolem je dosadit za obrazce a písmena číslice tak, aby řešitel dostal správný výsledek sčítání, odčítání, násobení a dělení. U algebrogramů s tajenkou žáci dosazují místo číslic příslušná písmena. Příklad tohoto typu úloh je na obr. 1.

Dalším typem úloh jsou **číselné doplňovačky**. Úkol při řešení těchto úloh je prostý, a to sice místo teček doplnit správné číslice. Příklad tohoto typu úloh je na obr. 2. Tyto dva typy úloh je možno označit za ryze matematické, kdy je úkolem řešitele pouze dopočítat správně zadanou úlohu.

Dlouhou historii má typ úloh zvaný **magické obrazce**. Magický čtverec 9×9 vytesaný v mramoru se například dochoval už v Římě. V tomto období lidé určitým číslům připisovali zvláštní, až magické, vlastnosti. V 15. a 16. století se magickým obrazcům věnoval německý malíř a grafik Albrecht Dürer.

R E C	−	C I I	=	O S W		5 0 3	−	3 7 7	= 1 2 6
+		:		−		+		:	−
O E L	−	S D	=	I D		1 0 8	−	2 9	= 7 9
W O O	:	O C	=	A I		6 1 1	:	1 3	= 4 7

Tajenka: OSCAR WILDE

Obr. 1: Algebrogram a jeho řešení

U	. . 2
L E S A	× . 2 .
S E	. . 2
P A S E	. . .
S R N E C	. . 2
	2 2 . 2 2

Obr. 2: Číselné doplňovačky

Ten zobrazil magický čtverec 4×4 v pravém horním rohu své měděné rytiny Melancholie. V tomto čtverci jsou rozmístěna čísla 1 až 16 tak, že v kterékoli řadě, sloupci nebo úhlopříčce dávají součet 34. Prostřední dvě čísla spodní řady udávají letopočet vzniku rytiny, tedy rok 1514. Číslo 34 se objevuje ještě jako součet čísel prostředního sloupce 2×2 a také jako součet čísel ve vrcholech čtverce, viz obr. 3. Existují také tzv. latinské čtverce, které toto pojmenování nesou podle písmen latinské abecedy. Zde jsou v každé řadě a sloupci (nebo i úhlopříčce) vždy jiná písmena. Příklad tohoto čtverce je na obr. 3. Úkolem řešitele těchto úloh je doplnit obrazec podle zadání. Do tohoto typu úloh je možné zařadit i úlohy sudoku, kde je úkolem řešitele doplnit chybějící čísla 1 až 9 do předem dané zčásti vyplněné tabulky.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

a	b	c	d	e	f	g	h
c	d	a	b	g	h	e	f
h	g	f	e	d	c	b	a
f	e	h	g	b	a	d	c
d	c	b	a	h	g	f	e
b	a	d	c	f	e	h	g
e	f	g	h	a	b	c	d
g	h	e	f	c	d	a	b

Obr. 3: Magický čtverec a latinský čtverec

Dalším typem úloh je **domino**. Úkolem při řešení těchto úloh je buďto vyznačit v obrazci rozložení všech 28 kamenů, nebo vybrat určitý počet kamenů a rozložit je do určitého obrazce tak, aby se žádné číslo neopakovalo v řádku ani sloupci, uspořádat všechny kameny do uzavřeného řetězu (tzn. kameny na sebe navazují stejnými čísly) atd. Úlohy typu **šachovnice** jsou založeny na různém pohybu figur. Tyto figury mohou ohrožovat pole v různém směru.

Už u malých dětí jsou oblíbené úlohy typu **polymino**. Jedná se o různě početné skupiny čtvercových kostek. Těchto skupin je vždy určitý počet. Úkolem řešitele je kostkami vyplnit různé obrazce. Podle počtu kostek se polymino nazývá domino, jsou-li kostky dvě, trimino, pokud jsou kostky tři, pentamino, když je kostek pět, atd. Pentamino je složeno z dvanácti různých kostek, kde každá má 5 čtvercových kostiček. Pokud nejsou obrazce složeny z pravidelných kostek, ale například z trojúhelníků, čtyřúhelníků atd., úlohy se nazývají tangram. Jsou to obykle sedmidílné skládačky, ze kterých je možno poskládat např. tvar lidské postavy, či zvířete.

Typ úloh podobný předchozímu se nazývá **skládání a dělení obrazců**. V úlohách o skládání je úkolem z různých obrazců poskládat čtverec. Úlohy o dělení jsou přesným opakem a úkolem v nich je rozdělit obrazec na různé díly.

Další typ úloh žáci ve svém volném čase příliš nevyhledávají, ale pro nadané žáky je vhodné je zařazovat i o vyšší obtížnosti. Už od základní školy je tento typ úloh zařazován do výuky matematiky i fyziky. Jedná se o **slovní úlohy**. Zpravidla se jedná o úlohy algebraické či aritmetické, kde je souvislost mezi zadanými a hledanými údaji vyjádřena slovy, může se však jednat i o geometrické (konstrukční) úlohy. Slovní úlohy je možno rozčlenit do různých typů podle zaměření.

Typem úloh, kterým se budeme zabývat dále, jsou **logické úlohy**. Ty je také možné zařadit mezi slovní úlohy, jelikož jsou zadávány slovně. Logických úloh existuje celá řada, úkolem řešitele může být například odhalit viníka zločinu, majitele zebry, zjistit, kdo lže nebo mluví pravdu, kdo pojede na výlet, nebo určit, kdo má v pytlíku dvě švestky, nebo pomoci převozníkovi převést kozu, vlka a zelí přes řeku. Způsob řešení těchto úloh se liší podle typu logické úlohy. Typů logických úloh existuje velké množství, zde se seznámíme pouze s vybranými typy a jejich řešením. Je nutné uvést, že velké množství úloh je možné řešit více způsoby, proto nemusí každý z řešitelů dospět k výsledku stejným způsobem, který je uveden v [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10].

2.2 Hádanky a chytáky

Úlohy typu Hádanky a chytáky patří mezi osvědčené klasické úlohy, kterými se už pobavilo mnoho generací. Jedná se např. o úlohy, ve kterých je úkolem řešitele určit, kdo je na podobizně, jestliže víme, že autor nemá sourozence a že otec muže na obrázku je syn autorova otce, či hádanka, ve které je úkolem říci, kolik nejméně ponožek musíme vyndat ze zásuvky, pokud chceme dvě ponožky stejné barvy, jestliže je v pokoji tma a my víme, že v zásuvce je dvacet čtyři červených a dvacet čtyři modrých ponožek [8].

2.3 Zábavné logické hry

Zábavné logické hry jsou vhodné, např. pokud chce učitel žáky pobavit ve třídě, na školním výletě, nebo letním táboře. Patří sem tedy úlohy, kdy učitel tahá různé předměty z papírového sáčku a při řečení jistých podmínek ho zajímá, jaký nejkratší postup je možné využít, abychom věděli, co v sáčcích je [10].

2.4 Úlohy řešené tabulkou

U úloh řešených tabulkou může být úkolem řešitele například odhalit viníka zločinu, zjistit, který film se bude promítat, nebo kdo jde do lesa.

Řešení těchto úloh spočívá v užití výrokové logiky, tedy užitím negace, konjunkce, disjunkce, implikace, či ekvivalence. U každého slova ve výrokové logice nás zajímá, jaké pravdivostní hodnoty nabývá pro všechny možné kombinace pravdivostních hodnot výroků, které se v ní vyskytují. Tyto pravdivostní hodnoty jednotlivých slov ve výrokové logice je nejpřehlednější sestavit do tabulky pravdivostních hodnot výroku ve výrokové logice. V záhlaví této tabulky jsou zapsány proměnné, které se v daném slově vyskytují, a pod nimi všechny možné kombinace jejich pravdivostních hodnot. Jestliže výrok obsahuje n proměnných, pak je těchto kombinací právě 2^n a tabulka má tedy 2^n řádků [1].

2.5 Úlohy řešené grafickou metodou

Úlohy řešené grafickou metodou se v mnohém velmi podobají předchozímu typu. Jedná se o velmi obdobné úlohy, ovšem jejich řešení se liší.

Grafická metoda spočívá opět v práci s výrokovou logikou. Pracujeme zde ovšem pouze s jednoduchým výrokem a jeho negací. Můžeme tak využít zákona sporu, protože výrok a jeho negace nemůžou být současně pravdivé nebo nepravdivé, nebo zákona vyloučení třetího, jelikož buď výrok, nebo jeho negace musí být pravdivým výrokem. Dále můžeme využít toho, že máme-li pravdivou implikaci A $\Rightarrow$ B a platí-li výrok A, pak platí i výrok B. Graficky můžeme pravdivý výrok znázorňovat např. plným kroužkem a nepravdivý výrok označit křížkem. Pokud máme pravdivou implikaci A $\Rightarrow$ B a výrok B je nepravdivý, pak je nepravdivý i výrok A [1].

2.6 Lháři a poctivci

V úlohách typu Lháři a poctivci vždy vystupují postavy, které systematickým způsobem lžou, či mluví pravdu. Na základě výpovědí postav je úkolem řešitele zjistit co nejvíce informací. Úlohy se obvykle řeší úvahou, případně se zapíší základní informace.

Obdobou tohoto typu úloh jsou úlohy o Alence v Lese zapomínání, úlohy vytvořené na motivy knih od Lewise Carrolla. Alenka vejde do Lesa zapomínání a zapomene, jaký je den v týdnu. Potkává různé obyvatele lesa, ale jsou mezi nimi tací, kteří lžou každé pondělí, úterý a středu a mluví pravdu v ostatní dny, a tací, kteří lžou ve čtvrtek, v pátek a v sobotu a ostatní dny mluví pravdu (potkává Lva a Jednorožce, Tydlitáka s Tydlitekem, řeší, komu patří řehtačka, nebo jestli existuje třetí bratr Tydlitík).

Další obdoba úlohy nese název Záhada Porciiných skříněk. V Shakespearově Benátském kupci vystupuje dívka Porcie, která má tři skříňky (zlatou, stříbrnou a olověnou). Do jedné ze skříněk ukryla svoji podobiznu a každý z jejich nápadníků musí určit, ve které skříňce je ukrytá podobizna. Když se nápadníkovi podaří podobiznu najít, smí se s Porcií oženit. Každá ze skříněk je opatřena nápisem, ovšem vždy nejvýše jeden z nich je pravdivý. Dcera této dívky opatřila skříňky dvěma nápisy, které se opět různily svoji pravdivostí. Vnučka Porcie si nechávala skříňky vyhotovit od Belliniů a Celliniů. Belliniové skříňky opatřují pravdivými nápisy, Celliniové nepravdivými. Úkolem nápadníků této dívky je vybrat skříňku, ve které není ukryta dýka, nebo skříňku s podobiznou. I těchto úloh je velké množství.

Úlohy o lhářích a poctivcích je možné rozdělit na několik druhů:

2.6.1 Ostrov poctivců a padouchů

Tyto hádanky jsou o ostrově, na kterém žijí dva druhy lidí – poctivci, kteří vždy mluví pravdu, a padouši, kteří vždy lžou. Obyvatel ostrova je vždy buď poctivec, nebo padouch.

2.6.2 Poctivci, padouši a normální lidé

V těchto úlohách vystupují tři typy lidí – poctivci, kteří vždy mluví pravdu, padouši, kteří vždy lžou, a normální lidé, kteří někdy lžou a někdy mluví pravdu. Tyto úlohy se řeší buď úvahou, nebo se vypíší všechny možnosti a poté se jednotlivé vyškrtávají podle úvahy.

2.6.3 Ostrov Bahava

Ostrov Bahava je ostrovem ženské rovnoprávnosti, ženy se zde dělí na poctivce, padouchy a normální lidi. Jistá vládkyně ostrova vydala zákon, podle něhož poctivec může uzavřít sňatek jen s padouchem a padouch jen s poctivcem. Normální člověk poté může uzavřít sňatek jen s normálním člověkem. V každém manželském páru jsou buď obě jeho polovice normální lidé, nebo jedna je poctivec a druhá padouch [1].

2.7 Cesta přes řeku

V úlohách typu Cesta přes řeku se řeší známý problém o koze, vlkovi a zelí. Převozník potřebuje převést přes řeku všechny tři „předměty“. Do převozníkovy loďky se ovšem kromě převozníka vejde pouze jeden „spolucestující“. Tyto úlohy je možné řešit pouhou úvahou, obtížnější úlohy je ovšem lepší si zakreslit na papír, pro lepší představu.

Obtížnější úloha podobná té, který je uvedena níže, podle [7] pochází z Číny, kde se užívá při přijímacích pohovorech do zaměstnání.

> **Úloha 1:** *K řece tentokrát dorazila velká výprava. Jsou tam otec, matka, dva synové, dvě dcery, policista a zloděj. Na břehu stojí loďka, jenže uveze pouze dvě osoby a na druhý břeh se musejí dostat všichni. Je zde ovšem několik omezení. Otec se pohádal s oběma syny a matka si zase úplně nerozumí s dcerami. Proto otec nemůže být bez matky sám se synem a matka nemůže být s dcerou sama bez otce. Zloděj nesmí být bez přítomnosti policisty s nikým s rodiny. Problémem je také to, že pouze matka, otec a policista umějí pádlovat.*

2.8 Úlohy řešené s pomocí teorie grafů

V úlohách řešených pomocí teorie grafů se využívají základní pojmy teorie grafů, jako je bipartitní graf, hamiltonovský graf, eulerovský graf atd. S využitím vlastností těchto pojmů je poté možno úlohy řešit [7], [9]. Asi nejznámějším typem úloh, které využívají schemat teorie grafů, jsou tzv. zebry, jakožto kombinatorické a logické úlohy, patří mezi velmi oblíbený typ úloh. Často se objevují v různých časopisech zaměřených na hlavolamy, v zábavných přílohách novin atd. Úkolem řešitele je na základě indicií o možných a neslučitelných spojeních k sobě přiřadit prvky z několika různých stejně početných množin.

Indicie, nebo též podmínky, které jsou nedílnou součástí zadání a mají řešitele přivést k řešení, můžeme rozdělit do dvou typů: pozitivní (mají tvar kladné oznamovací věty, např. Pudl patří majiteli modrého auta.) a negativní (mají tvar záporné oznamovací věty, např. Pěstitel slunečnic nepije vodu.). Obtížnost těchto úloh závisí na počtu množin a na počtu prvků v nich.

Název tohoto typu úloh pochází z jedné z úloh, která končila otázkou: „Kdo chová zebru?“ Tato úloha byla v šedesátých letech publikována v časopise *Life International*. U nás se objevila o dva roky později v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*. V posledních několika letech úloha putuje po internetu v různých obměněných verzích pod názvem Einsteinova úloha. V zadání se také obvykle píše, že jsou ji schopni vyřešit jen 2 % lidí. Zde je převzata z [5].

Úloha 2: *V ulici cizinecké čtvrti stojí vedle sebe pět domků různých barev. V každém domku je oblíben jiný sport, resp. se nesportuje vůbec a v každém domku chovají jiný druh zvířat. O domcích a jejich obyvatelích známe tyto informace:*

1. *Angličan bydlí v červeném domku.*
2. *Španěl chová psa.*
3. *Káva se pije v zeleném domku.*
4. *Polák pije čaj.*
5. *Zelený domek stojí vpravo vedle domku bílého.*
6. *Fotbalista chová hlemýždě.*
7. *Ve žlutém domku bydlí hokejista.*
8. *Mléko se pije v prostředním domku.*
9. *V prvním domku bydlí Nor.*
10. *Nesportovec bydlí vedle domku, v němž je chována liška.*
11. *Domek hokejisty sousedí s domkem, v němž je chován kůň.*
12. *Zápasník pije džus.*
13. *Japonec je cyklista.*
14. *Nor bydlí vedle modrého domku.*
15. *V jednom domku se pije voda.*
16. *V jednom domku je chována zebra.*

Určete, kdo chová zebru a kdo pije vodu.

Zebry je možné řešit různými metodami. Buď je můžeme řešit pouhým logickým uvažováním, pro obtížnější úlohy je možné použít různé metody řešení a každému řešiteli vyhovuje trochu jiný způsob [1], [3], [5], [12], [13].

3 Logické úlohy v přírodních vědách

3.1 Zebry

Úlohy typu zebra je dosti obtížné vymýšlet, proto je mnohem jednodušší přepracovat do přírodovědné podoby již hotovou klasickou zebru. Takto je možno vytvářet nepřeberné množství úloh, na jednu klasickou zebru můžeme vytvořit několik zeber přírodovědných.

Přírodovědné zebry tvoříme tak, že nejdříve vyřešíme klasickou zebru, poté vytvoříme stejnou tabulku s např. fyzikálními pojmy a do zadání poté dané fyzikální pojmy dosazujeme.

Pro žáky na základní škole je vhodné přizpůsobit nejen fyzikální pojmy, ale i obtížnost logické úlohy dané věkové kategorii. Pokud již mají žáci s řešením logických úloh zkušenosti, můžeme jejich obtížnost postupně navyšovat, ovšem jen do té míry, aby to nepřesáhlo jejich schopnosti. Žákům na střední škole je možno zadávat obtížnější úlohy již od začátku, v opačném případě by se při jejich řešení mohli začít nudit.

Následuje několik příkladů přírodovědných zeber.

Úloha 3: *V knihovně jsou vedle sebe čtyři fyzikální knihy. Každou knihu napsal jiný slavný fyzik, každá se jmenuje jinak, každá pojednává o jiné fyzikální oblasti, kterou se fyzik zabýval. Knihy nejsou seřazeny podle abecedy.*

1. *Kniha Newtona je první zleva a pojednává o mechanice.*
2. *Blaise se zabýval tlakem kapalin a jeho kniha se jmenuje Popis velkého pokusu s rovnováhou kapalin.*
3. *Kniha Johana je vpravo od Blaise.*
4. *Archimédes se zabýval stabilitou těles v kapalině.*
5. *Kepler se zabýval astronomií a jeho kniha se jmenuje Astronomia nova.*
6. *Kniha Isaaca je vedle knihy pojednávající o tlaku kapalin.*
7. *Kniha pojednávající o tlaku kapalin není vedle knihy o rovnováze kapalin.*
8. *Kniha s názvem O plovoucích tělesech je vedle knihy, která pojednává o astronomii.*
9. *Jedna kniha se jmenuje Principia.*
10. *Jeden z fyziků pochází ze Syrakus.*

11. Jeden z fyziků se jmenuje Pascal.

Určete, jaká je poloha knih v knihovně, a ke každé knize určete vše, co můžete.

Řešení:

1.	2.	3.	4.
Newton	Pascal	Kepler	Archimédes
Principia	Popis velkého pokusu s rovnováhou kapalin	Astronomia nova	O plovoucích tělesech
mechanika	tlak kapalin	astronomie	rovnováha kapalin

Úloha 4: *Každá z hvězd Regulus, Vega, Mira a Bellatrix náleží do jiného souhvězdí (Orion, Lev, Velryba, Lyra). Víme také, že každé souhvězdí můžeme na obloze nalézt v jiném ročním období. Víme, že:*

1. *Miru nenalezneme na letní obloze.*
2. *Souhvězdí Velryby nemůžeme pozorovat na jaře.*
3. *Bellatrix se nenachází v souhvězdí Lyry.*
4. *Vegu nenalezneme na zimní obloze.*
5. *Vega ani Bellatrix nepatří do souhvězdí Lva. Ani hvězdy, ani souhvězdí Lva nemůžeme pozorovat na podzim.*
6. *Regulus můžeme na obloze pozorovat dříve během roku než souhvězdí Lyry.*
7. *Miru můžeme na hvězdné obloze pozorovat později v témže roce než Vegu.*
8. *Miru můžeme ve stejném roce pozorovat na obloze dříve než souhvězdí Orionu.*
9. *Miru nenalezneme ani v souhvězdí Lva, ani v souhvězdí Lyry. Žádnou s těchto částí hvězdné oblohy nemůžeme pozorovat v zimě.*

Určete, do jakého souhvězdí hvězdy patří a v kterém ročním období je můžeme pozorovat.

Řešení:

hvězda	Regulus	Vega	Mira	Bellatrix
souhvězdí	Lev	Lyra	Velryba	Orion
roční období	jarní	letní	podzimní	zimní

Úloha 5: *Ve sluneční soustavě můžeme nalézt čtyři planety s kamenným jádrem. Každá planeta má jiný poloměr, jinou dobu oběhu kolem Slunce, je od Slunce jinak vzdálena a má jiný počet měsíců. Víme, že:*

1. *Planeta, jejíž doba oběhu je 88 dní, nemá žádné měsíce.*
2. *Planeta s poloměrem 3 396 km má dva měsíce, které se jmenují Phobos a Deimos.*
3. *Mars nemá poloměr 6 378 km. Ale planeta s poloměrem 6 378 km je od Slunce vzdálena 1 au.*
4. *Planeta, jejíž doba oběhu je 225 dní, má poloměr 6 052 km.*
5. *Země oběhne kolem Slunce za 365 dní, ale není od Slunce vzdálena 0,7 au.*
6. *Venuše nemá dobu oběhu 88 dní a nemá žádné měsíce.*
7. *Planeta, která oběhne kolem Slunce za 687 dní, je od Slunce vzdálena 1,5 au.*
8. *Jedna z planet má pouze jeden měsíc, který se jmenuje Měsíc.*
9. *Merkur je od Slunce vzdálen 0,4 au.*
10. *Poloměr jedné z planet je 2 440 km.*

Určete k planetám vše, co můžete. Výsledek si poté můžete zkontrolovat užitím 3. Keplerova zákona.

Řešení:

planeta	Merkur	Venuše	Země	Mars
poloměr	2 440 km	6 052 km	6 378 km	3 396 km
doba oběhu	88 dní	225 dní	365 dní	687 dní
vzdálenost	0,4 au	0,7 au	1 au	1,5 au
měsíce	žádný	žádný	Měsíc	Phobos, Deimos

Úloha 6: *Ve fyzikálním nebi vedle sebe v jedné ulici bydlí pět slavných fyziků. Chceme o nich zjistit, ve kterém domě bydlí, kdy se narodili a kdy zemřeli, jaké byli národnosti, jakým vynálezem nebo objevem se proslavili a čím se dále zabývali. Víme, že:*

1. *Fyzik skotsko-amerického původu vynalezl fonograf.*
2. *Německý fyzik bydlí vedle fyzika, který se proslavil pokusy s živočišnou elektřinou.*
3. *Ital se proslavil vynálezem zdroje elektrického napětí s užitím kovových elektrod v elektrolytu.*
4. *Georg Simon Ohm se proslavil slavným tvrzením, že elektrický proud je přímo úměrný elektrickému napětí.*
5. *V prostředním domku bydlí fyzik, který se proslavil vynálezem zdroje elektrického napětí s užitím kovových elektrod v elektrolytu.*
6. *Alexandr Graham Bell, který žil v letech 1847 – 1922, se proslavil vynalezením telefonu.*
7. *Alessandro Volta vynalezl elektrickou baterii.*
8. *Fyzik, který se proslavil zdokonalením parního stroje, se dále zabýval vynalézáním různých strojů, například vývěvy. Také zavedl jednotku koňská síla.*
9. *Ten, který žil v letech 1737 – 1798, bydlí v pravém domku.*
10. *Vedle fyzika, který žil v letech 1737 – 1798, bydlí fyzik žijící v letech 1789 – 1854.*
11. *Vynálezce telefonu dále vynalezl fonograf.*
12. *Luigi Galvani bydlí napravo od fyzika, který se zabýval konstrukcí sirén.*
13. *James Watt pocházel ze Skotska.*
14. *Ital žil v letech 1737 – 1798.*
15. *Luigi Galvani se proslavil pokusy se živočišnou elektřinou.*
16. *V domku napravo od Jamese Watta bydlí fyzik, který žil v letech 1847–1922.*
17. *Konstruktér sirén bydlí napravo od fyzika, který žil v letech 1745 – 1827.*

Sestavte tabulku o fyzicích a určete, kdo se zabýval galvanismem a kdo žil v letech 1736 – 1819.

Řešení:

jméno	James Watt	Alexander Graham Bell	Alessandro Volta	Georg Simon Ohm	Luigi Galvani
rok	1736 – 1819	1847 – 1922	1745 – 1827	1789 – 1854	1737 – 1798
národnost	Skotsko	Skotsko, Amerika	Itálie	Německo	Itálie
proslavil se	zdokonalení parního stroje	vynález telefonu	zdroj el. napětí: kovové elektrody v elektrolytu	proud je přímo úměrný napětí	pokusy se živočišnou elektřinou
další vynálezy	vývěva, jednotka koňská síla	fonograf	elektrická baterie	konstrukce sirén	galvanismus

3.2 Hlavolamy

Mezi úlohy tohoto typu je možné zařadit všechny úlohy s na první pohled nelogickým řešením, nebo úlohy, kde je nutné na řešení přijít na první pohled, jinak žák k řešení často vůbec nedojde. Je možné je najít v rozličné literatuře, nebo je možné takového úlohy vymyslet.

Následující úlohy jsou volně inspirovány úlohami v [15].

Úloha 7: *Máte dvě krychle, rozměr obou je 10 cm. Která krychle bude mít větší hmotnost, jestliže jedna z krychlí je naplněna malými ocelovými kuličkami a druhá velkými? Záleží na tom, že se do stejného prostoru vejde více malých kuliček?*

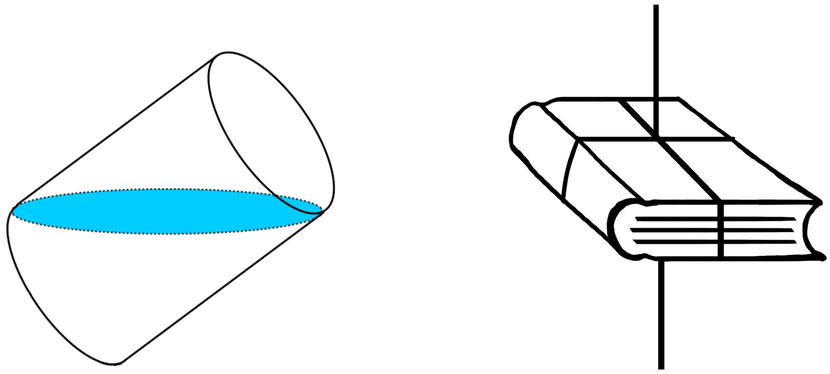
Řešení: Dokud bude velikost kuliček v porovnání s velikostí krychle zanedbatelná, nebude na velikosti kuliček záležet. Přestože jsou mezery mezi menšími kuličkami menší, je těchto míst dohromady více. Proto budou mít obě krychle stejnou hmotnost.

Úloha 8: *Určete, jak se možné odlít přesně půlku vrchovatě naplněného hrníčku.*

Řešení: Řešení je na obr. 4.

Úloha 9: *V uzavřené láhvi je několik much. Určete, kdy bude mít sklenice umístěná na váhu největší hmotnost. Když budou mouchy sedět na dně nádoby, nebo když budou všechny v láhvi létat?*

Řešení: Hmotnost sklenice bude v obou případech shodná. Obsah sklenice je stále stejný. Když mouchy létají, jejich tíhová síla se na



Obr. 4: K úlohám 8 a 10

sklenici přenáší vzdušnými proudy, které mouchy vytvářejí při mávání křídly.

Úloha 10: *Kolem těžké knihy je uvázán provázek, viz obrázek 4. Jak je možné zajistit, aby se nám podařilo přetrhnout horní provázek při jednom zatáhnutí a dolní provázek při druhém?*

Řešení: Pokud za spodní provázek zatáhneme plynule, na horní provázek působí tíhová síla knihy a tahová síla, kterou vyvoláváme my. Pnutí na horním provázku je větší než na spodním, proto se první přetrhne horní provázek. Pokud zatáhneme za spodní provázek prudkým trhnutím, působíme na spodní provázek pouze tahovou silou. Pnutí je větší na dolním provázku a ten se přetrhne jako první.

4 Průzkum názorů na logické úlohy

4.1 Forma dotazníku

Anonymní dotazník, který byl žákům předložen, vyplnilo 172 žáků středních škol a víceletých gymnázií. Většina respondentů navštěvuje Gymnázium Aloise Jiráska v Litomyšli, zbytek odpovědí pochází z různých středních škol a víceletých gymnázií Pardubického a Královéhradeckého kraje. Cílem dotazníku bylo zjistit, zda by z pohledu žáků bylo vhodné logické úlohy zařadit do výuky a využívat je při výuce fyziky na základní či střední škole.

V dotazníku je celkem 13 otázek, rozdělených do několika sekcí. Do první části byly zařazeny otázky na pohlaví respondentů, a to, zda navštěvují základní školu, víceleté gymnázium, či střední školu. Jedná se o uzavřené otázky.

V další sekci respondenti odpovídali, jaký ročník v dané škole navštěvují. Žáci základní školy mohli vybírat mezi ročníky druhého stupně, u zbylých druhů škol byly poté na výběr všechny ročníky.

Další sekce byla již přímo zaměřena na logické úlohy. Žáci odpovídali, zda se s logickými úlohami již v minulosti setkali. Pokud byla odpověď na tuto otázku kladná, žáci dostali několik doplňujících otázek. Byly to tyto:

- **Kde jste se s logickými úlohami setkali?** S možnostmi Ve škole, V časopisu, Na internetu, V knize, resp. Jiné, kde vypsali krátkou odpověď.
- **Řešíte někdy logické úlohy ve volném čase?** Pokud žáci na následující otázku odpověděli ano, následovala doplňující otázka: Kde úlohy vyhledáváte? S možnostmi Na internetu, V časopisu, V knihách a opět Jiné.
- **Baví vás řešení takovýchto úloh?**

Na další otázky opět mohli odpovídat všichni respondenti. Otázky byly následující:

- **Vzbudily by logické úlohy váš zájem o přírodní vědy?** Žáci mohli vybírat možnosti Ano, Ne, Nevím.
- **Chtěli byste logické úlohy řešit ve škole?** S možnostmi Ano, Ne, Nevím. Pokud žáci na tuto otázku odpověděli Ano, dostali doplňující otázku: **Do jakého předmětu se podle vás řešení těchto úloh nejvíce hodí?** Žáci mohli vybírat z odpovědí Matematika, Fyzika, Informatika, Biologie, Chemie a Jiné, kde mohli žáci vypsat odpověď podle vlastního uvážení.

Většina otázek dotazníku byla uzavřená. Žáci dotazník vyplňovali on-line na internetu, dotazník byl zcela anonymní a málo časově náročný, žákům v průměru zabral okolo dvou minut.

4.2 Vyhodnocení průzkumného šetření

Z celkového počtu respondentů bylo 55,2 % ženského a 44,8 % mužského pohlaví. Většina respondentů, konkrétně 72,1 %, uvedla, že navštěvuje víceleté gymnázium. Zbytek, čili 37,9 % uvedl, že navštěvuje střední školu. V tab. 1 je uvedeno věkové rozložení respondentů s tím, že není rozlišeno, zda navštěvují střední školu či víceleté gymnázium.

Dále 89,5 % respondentů uvedlo, že se s logickými úlohami již setkali, 2,9 % se s nimi nikdy nesetkalo a zbytek, tedy 7,6 % odpovědělo, že nevědí. Ti, kteří se s úlohami setkali, dostali několik doplňujících otázek. Zajímalo mě, kde se s úlohami setkali, jestli je řeší ve volném čase, a pokud ano, tak kde je vyhledávají a jestli je řešení takovýchto úloh baví.

ročník	počet žáků
prima	18,0 %
sekunda	12,0 %
tercie	3,0 %
kvarta	2,4 %
kvinta/první ročník	29,7 %
sexta/druhý ročník	16,9 %
septima/třetí ročník	16,3 %
oktáva/čtvrtý ročník	1,7 %

Tab. 1: Věkové rozložení respondentů

Většina respondentů se s logickými úlohami setkala ve škole, další velmi častá odpověď byla, že úlohy viděli na internetu, v časopise, případně v knize. Vyskytovaly se i ojedinělé odpovědi, že se s úlohami setkali v přijímacích zkouškách na střední školu, v logické olympiádě, v počítačových hrách, nebo jiných hrách, na přednášce, či o nich slyšeli doma od rodičů nebo od přátel.

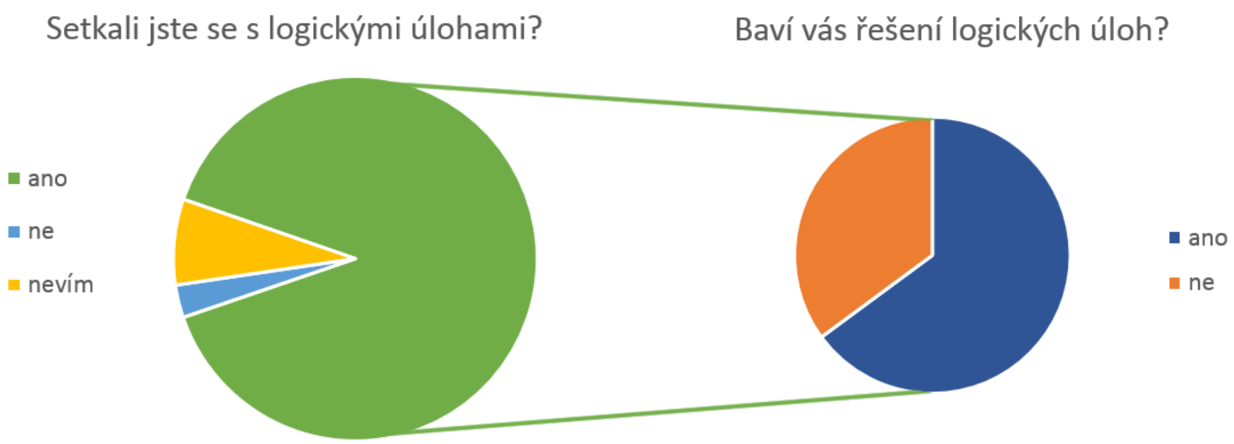
U otázky, zda žáci logické úlohy řeší ve volném čase, nejsou odpovědi příliš jednoznačné; 46,1 % z těch, kteří se s logickými úlohami setkali, odpověděli, že je ve volném čase řeší, 53,9 % že nikoli. V případě, že respondenti úlohy ve volném čase řeší, nejčastěji je vyhledávají na internetu, mnohem méně žáků je hledá v časopise nebo v knihách. Jednotlivci poté úlohy získají ve škole, od kamarádů či spolužáků, hrají logické hry nebo na ně mají mobilní aplikaci.

Většina z těch, kteří se s logickými úlohami setkali, konkrétně 64,9 % respondentů odpovědělo, že je řešení logických úloh baví, zbytek, tedy 35,1 % odpovědělo, že je řešení takovýchto úloh nebaví, viz graf na obr. 5.

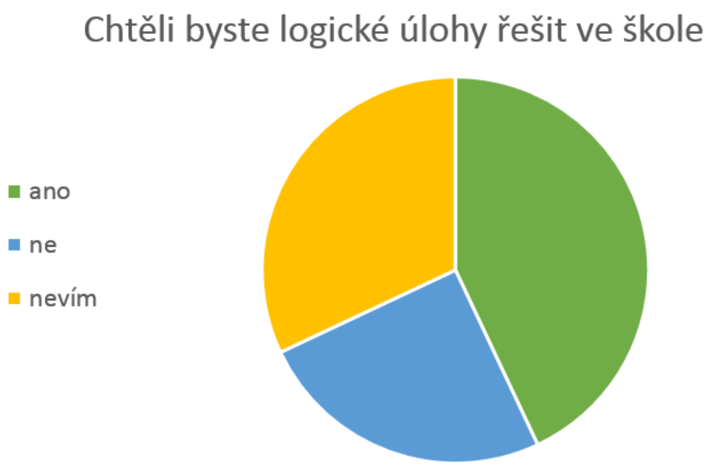
Všech respondentů jsem se následně ptala, jestli by řešení logických úloh vzbudilo jejich zájem o přírodní vědy. Kladně na tuto otázku odpovědělo 34,9 % žáků, záporně 37,2 %, zbytek žáků, tedy 27,9 % uvedlo, že jejich názor na přírodní vědy nelze změnit.

Na poslední otázku, tedy zda by žáci chtěli logické úlohy řešit ve škole, kladně odpovědělo 43,0 % žáků, záporně 25 % žáků, 32,0 % žáků odpovědělo, že neví, zda by ve škole tyto úlohy chtěli řešit, viz graf na obr. 6.

Žáci, kteří by řešení logických úloh ve škole uvítali, dostali doplňující otázku, do kterého školního předmětu se úlohy nejvíce hodí. Studenti nejčastěji uváděli, že se úlohy nejvíce hodí do matematiky, méně pak, že do fyziky a informatiky, někteří žáci také uváděli, že se úlohy hodí do biologie, chemie, či českého jazyka.



Obr. 5: Výsledky dotazníkového šetření



Obr. 6: Řešení logických úloh ve škole

Z dotazníkového šetření vyplývá, že názory žáků korespondují se všeobecným trendem, který je možno pozorovat na internetu, tedy že veřejnost řešení logických úloh baví. I když z dotazníkového šetření vychází ne zcela jednoznačné výsledky ohledně toho, zda je možné vzbudit zájem žáků pomocí logických úloh, motivaci žáků k dalšímu studiu přírodních věd by jejich řešení vzbudit mohlo. Zejména vhodné je tyto úlohy používat při dalším vzdělávání nadaných žáků.

Literatura

[1] Francová, L.: *Studijní text k předmětu Metody řešení matematických úloh.*

[2] Pěnčík, J., Pěnčíková, J.: *Lámejte si hlavu.* Prometheus, Praha, 1995, 383 s.

[3] Krejčová, E., Volfová, M.: *Didaktické hry v matematice.* Vyd. 3. Gaudeamus, Hradec Králové, 2001, 120 s.

[4] Mezinárodní soutěže: *Sudokualogika.cz* [online]. Hráčská asociace logických her a sudoku, o. s., Brno, 2017. http://sudokualogika.cz/node/42

[5] Volfová, M.: *Metody řešení matematických úloh.*. Gaudeamus, Hradec Králové, 2000, 134 s.

[6] Kowal, S.: *Matematika pro volné chvíle (zábavou k vědě).* Státní nakladatelství technické literatury, Polytechnická knižnice, Praha, 1975, 401 s.

[7] Pelánek, R.: *Jak to vyřešit? Logické úlohy a hry.* Portál, Praha, 2011, 158 s.

[8] Smullyan, R. M.: *Jak se jmenuje tahle knížka?* ÚV SSM, Praha, 1986. https://is.muni.cz/el/1441/podzim2013/MA2MP_SMR2/um/Smullyan--Jak-se-jmenuje-tahle-knizka.pdf

[9] Milková, E.: *Teorie grafů a grafové algoritmy.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2013.

[10] Smullyan, R. M.: *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy.* Portál, Praha, 2004, 212 s.

[11] Volfová, M.: *Jak na zebry?* http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/03/JAK-NA-ZEBRY.pdf

[12] Novák, S.: *O zebrách.* RVP, Praha, 2012. http://clanky.rvp.cz/clanek/c/z/15431/O-ZEBRACH.html/

[13] Pavelka, R.: *Hlavolam ti hlavu nepoláme.* Votobia, Olomouc, 2000, 93 s.

[14] Suková, Z.: Zebry ve fyzice. In: *Sborník příspěvků z Národní konference doktorského studijního programu Teorie vzdělávání ve fyzice.* Katedra fyziky PřF UHK, Hradec Králové, 2016, s. 48 – 53.

[15] Moscovich, I.: *Skvělá kniha hlavolamů: rébusy, hádanky, logické hry, optické klamy.* Perfekt, Bratislava, 2010, 135 s.

Potenciální talent a (ne)vhodné strategie jeho raného rozvoje

Michaela Kaslová, PedF UK, Praha

Abstrakt: Příspěvek je zaměřen na problematiku práce s nadprůměrnými dětmi/žáky. Kazuistiky ukazují, že se jedná o problematiku stále aktuální. Vychází z dlouhodobých pozorování jedinců od předškolního či raného školního věku po jejich vstup na 2. stupeň ZŠ, případně na střední školu. Popsané kazuistiky odhalují rezervy, respektive systémové nedostatky v péči o nadprůměrné žáky, poukazují na potřebu komplexního řešení dané problematiky.

1 Úvod

Historie Evropy nám ukazuje nejrůznější snahy podporovat či vyhledávat nadprůměrné děti, žáky. Zapojovali se rodiče, církev, učitelé, různé spolky. K další podpoře lze řadit státní instituce. Zde můžeme vystopovat tři hlavní přístupy:

a) *selekce* – speciální školy, kroužky, soustředění, tábory pro skupiny nadprůměrných
b) *individualizace programu vzdělávání* v rámci kolektivů běžné populace
c) *zvýšení zátěže pro veškerou populaci* s tím, že se při této strategii nadprůměrní vyselektují a prosadí

Zbývající strategie uplatňované v praxi do určité míry pomíjejí potřebu rozvoje nadprůměrných žáků tím, že:

a) tvrdí, že každý je nadprůměrný a je jen potlačen z předchozích stupňů vzdělávání
b) ponechávají rozvoj takových žáků na rodině, ve škole přistupují ke všem „stejně“, případně zohledňují pouze žáky se specifickými poruchami učení

V jiných strategiích, ne příliš frekventovaných, je zdůrazňováno, že talent se prosadí sám a nepotřebuje ani proces odhalování, ani průběžnou stimulaci; v krajním případě ví sám od sebe, kterou cestou a jak se ubírat.

Nechoďme k příčinám, pracujme s fakty a podívejme se na kazuistiky, které vycházejí z dlouhodobých pozorování a ve kterých hrají roli ve větší či menší míře čtyři složky: *žák*, *pedagogicko-psychologická poradna*, *rodina*, *učitel*. Jedná se především o výběr kazuistik, které jsou svým způsobem typové a mohou nám pomoci pojmenovat některé příčiny neúspěchu v práci s žáky, kteří byli někým označení jako talenty. Volba případů z pohledu genderového odpovídá proporci dlouhodobě sledovanému vzorku případů. Druhým důvodem k výběru daných případů je celkem všeobecně přijímané tvrzení, že ztrácíme talenty na druhém stupni základního vzdělávání. Kazuistiky naznačují tedy i podíl různých složek na ztrátě talentů či jejich „poškození“.

Domnívám se, že je třeba se péčí o talenty zabývat komplexněji bez věkového omezení na žáky starší 12 let. Argument, že v tomto věku se nadprůměrný žák prokazatelně pohybuje na úrovni abstrakce, je poněkud zkreslený. Řada sledovaných žáků vykazovala řešení problémů na úrovni abstrakce již na prvním stupni, i když ne vždy plošně či zcela stabilně, na druhé straně ti, kteří by se v této rovině měli dle předpokladů pedagogicko-psychologických poraden pohybovat, se do této úrovně někdy dostávají obtížně, aniž se zjišťuje proč.

Kazuistiky poukazují rovněž na systémovou chybu, že k označení matematického talentu dochází jednorázově, tedy postačí diagnostikovat bez opakování, a odhalují, jaký to má dopad na vývoj jedince. V kazuistikách se odráží vliv rodiny a její izolace od poraden, problém nesystematického sledování posunů či stagnace a jejich příčin. Péče o dítě se specifickými poruchami učení připouští opakovaná vyšetření i průběžné konzultace s rodiči, avšak u talentů se o tom vůbec neuvažuje. V současnosti se v zahraničí rozjíždí takzvaná „kolektivní práce s dítětem“ (Kanada, Belgie), kde opakovaně zasedají pracovník poradny, učitel, rodič(e) a žák a opakovaně společně vyhodnocují posun žáka, efektivitu zvolených strategií ze strany dospělých. Do hodnocení efektivity svým způsobem zasahuje i žák sám v momentě, kdy se případně vyjadřuje k tomu, zda se závěry souhlasí. Hodnotí se i součinnost všech v rozvoji žáka. Jsem plně přesvědčena, kdyby takové podmínky byly vytvořeny aspoň pilotně u nás, že by k některým níže popsaným případům nemuselo dojít, což by bylo především v zájmu žáka. Vybrané kazuistiky se opírají především o dlouhodobé pozorování, rozhovory (s rodiči, žáky, učiteli) a analýzu žákovských řešení včetně písemných projevů.

2 Příklady potenciálních talentů

2.1 Případ ALMP

Chlapec již v mateřské škole vykazoval nadprůměrnou rychlost v chápání. Na počátku prvního stupně ZŠ prošel pedagogicko-psychologickou poradnou, která konstatovala nadprůměrnost chlapce v oblasti intelektové. Ve škole rovněž vykazoval vyšší pohybovou učenlivost (dobře četl pohyb, rychle ho napodoboval, chyby relativně rychle odstraňoval). Díky otci, který v něm podporoval ctižádostivost, se chlapec zapojil do dvou kroužků, které si vybral: jeden byl zaměřen na pohyb, druhý na matematiku.

Již na konci třetího ročníku nebyl mezi nejlepšími v matematice, ve škole v ostatních předmětech rovněž klesl mezi mírný nadprůměr. Při upozornění rodiny třídní učitelkou, že „zvolnil úsilí“, bylo rodinou argumentováno, že chlapec není chápán, přece je nadprůměrný, což má i v dokumentaci z poradny. Rodinná výchova stála na filosofii, že „dítě nejlépe ví, co potřebuje“. V důsledku toho chlapec začal dávat pozor selektivně jen „na něco“ v souladu s názory rodičů („ve škole se musí žák bavit“ – citoval rodiče) a vyhýbal se všemu, kde **nevystačil s řešením vhledem**. Na prvním stupni žák postupně polevoval, avšak při vyšším nátlaku ze strany rodiny nebo učitele se relativně snadno dostal ze dvojky zpět na jedničku z matematiky.

Tato strategie mu již na druhém stupni nestačila. V tutéž dobu polevil ještě více dozor ze strany rodičů (otec dr., matka bc.), kteří mu místo učení začali tolerovat hodiny trávené na internetu a počítačových hrách. V sedmém ročníku se jeho výkonnost pohybovala mezi 2 a 3, vykazoval problém hlouběji se zamyslet nad problémy, které řešili jeho spolužáci. Správný výkon byl podle něho rychlý výkon (zřejmě pod vlivem počítačových her založených na zvyšování reaktibility v oblíbeném typu her). **Co nešlo hned, to odkládal**. Pokud něco vyřešil bez chyb, nesnažil se pochopit princip, argumentovat, specifikovat podmínky a podobně, i když ve dvojici s učitelkou při individuálním doučování své chování měnil, prokazoval, že za jiných podmínek (pod mírným nátlakem) je schopen pochopit i složitější zadání, avšak chyběly mu k dořešení často znalosti a dovednosti z dřívějších let.

Doba nepřetržité koncentrace ve škole stagnovala a na konci školní docházky se dokonce zkracovala. Ochabovala jeho schopnost hlubšího pochopení mimo čistě logické úlohy. Rodina stále argumentovala vyšetřením z prvního stupně ZŠ, omlouvala syna, nechtěla připustit chlapcovu závislost na počítačích, která se ve škole projevovala zvýšenou ospalostí, neschopností soustředit se po delší dobu, přenést dosavadní zkušenosti a znalosti do podobného matematického prostředí, vyskytovala se ukvapená zobecnění, chlapec často nezvládal řešit úlohy s konjunkcí podmínek, což byla regrese v oblasti logiky oproti prvnímu stupni. Pokud bylo učení přizpůsobeno experimentálně typu her, které hrál, byl ochoten se určitou dobu snažit (dostat se do „vyššího levelu“), avšak ne vše lze v učivu takto stavět, navíc ani v rámci individualizace učebního stylu. Přijímací zkoušky z matematiky na gymnázium neudělal, byl přijat na průmyslovou školu, kterou však nedokončil.

2.2 Případ BBVB

Chlapec vykazoval již v mateřské škole nadprůměrnou slovně akustickou paměť, měl nadprůměrnou slovní zásobu a byl více závislý na matce než na otci. Matka se k chlapci chovala specificky, za cokoli, v čem se pozitivně lišil od vrstevníků, byl neúměrně výkonu chválen, až „vynášen do nebes", na což si chlapec rychle zvykl a vyžadoval podobné odezvy i od učitelek a svého okolí nejen v mateřské škole bez ohledu na to, co udělal. Matka si takto získala zvláštní postavení a počala chlapce doma trénovat; usoudila, že chlapec zaslouží zvláštní obdiv a její trénink, provázen citovým vydíráním, stál na paměťovém učení látky, která patří do učiva třetího ročníku ZŠ.

Pak se obracela na mateřskou školu a vyžadovala od učitelek speciální péči pro syna s poukazováním na to, že syn je schopen jít nejméně do druhého ročníku ZŠ. Na doporučení paní učitelky navštívili pedagogicko-psychologickou poradnu.

Závěry vyšetření zněly v tom smyslu, že je chlapec v řadě parametrů jen mírně nadprůměrný až na vynikající slovně akustickou paměť a že jeho výkony jinak odpovídají většinové míře zrání dětí jeho věku.

S tím se matka nespokojila a zvýšila své domácí tréninkové úsilí do té míry, že si již doma chlapec volně nehrál, omezily se vycházky s rodiči. Po mateřské škole bylo vyžadováno rodiči, aby dostával **pracovní listy zaměřené na školní matematiku včetně násobení.** Chlapec měl problém držet tužku. Jeho manipulativní úroveň postupně stagnovala, začal se uzavírat do sebe. Při testování dítěte mimo poradnu i mateřskou školu se ukázalo, že chlapec má problém popsat jakoukoli situaci proběhlou v dané místnosti, rovněž popsat kompozici objektů pozorovatelnou v rámci jednoho zorného pole. Celková (časo-)prostorová orientace byla spíše podprůměrná. Chlapec sice věděl, kolik je třikrát čtyři, avšak nejen že nedokázal ukázat/vybrat dvanáct objektů, ale dokonce ani čtyři či tři drobné předměty. Slovní zásoba byla sice široká, pokud ji posuzujeme z monologů dítěte, avšak z dialogů plyne, že řada slov je ukotvena pouze na úrovni akustické bez propojení na představy (jde o dominanci prázdných pojmů).

Po vstupu dítěte do školy, kde o předchozím procesu nic nevěděli, byl na počátku údiv, který postupně vymizel. Od prvního ročníku byla snaha rodiny i chlapce přesvědčit okolí, že umí více než ostatní. Během prvního pololetí se však ukázalo, že vytěsnění aktivit, kterými by dítě mělo projít v předškolním věku, zredukovalo chlapcovy zkušenosti a že ho tréninkem rodina ochudila o čas, ve kterém by se rozvíjely dalších schopnosti potřebné pro nástup školní matematiky. Snaha tedy vývoj dítěte nějak obejít, uspěchat měla za následek zvýšení handicapu dítěte.

Problém byl ovšem nejen na úrovni intelektového rozvoje, ale i v oblasti osobnostního zrání dítěte. V důsledku toho se chlapec sám začal extrémně „nálepkovat“ a zmítat se mezi těmito extrémy v průběhu vyučování (jsem nedostižný / jsem na tom špatně). Psychické rozhození se projevilo v míře úsilí v procesu učení.

Rodina klade vinu za průměrný výkon dítěte škole, viní ji za nedocenění chlapce podobně jako psychologicko-pedagogickou poradnu a další konzultanty. Rodina se kloní k názoru, který si našla na internetu, že škola ubíjí talenty. Podobné případy jsem popisovala v publikacích (např. 2005, 2010).

2.3 Případ CTTP

Holčička vykazovala nadprůměrné reakce ve všech intelektově náročnějších aktivitách mateřské školy. Rodina návštěvu pedagogicko-psychologické poradny nerealizovala. Děvčátko ve vyučování matematiky na prvním stupni excelovalo nejen v matematice, ale ve všech předmětech. Nedostávalo zvláštní úkoly navíc, bylo ovšem třídou i učitelkou respektováno, nebylo vyvyšováno. Dívenka si však svoji výjimečnost plně uvědomovala a očekávala někde potvrzení své výjimečnosti aspoň tím, že by její touha po obtížnějších problémech byla uspokojena. Excelovala i mezi staršími spolužáky na kroužku matematiky, což jí mezi staršími zrovna přátele nevytvořilo.

Doma o matematice nemohlo být řeči. Dle názoru otce by se měla dívka věnovat tanci, hudbě a zpěvu, a tak kroužek matematiky byl nahrazen jinými, odlišnými kroužky. Děvče sice po celý první stupeň bez problému vždy všechny přesvědčilo o své výjimečnosti, ale nedostávalo obtížnější úlohy, ani zvláštní úkoly. Z úspěchů ve škole děvče nevykazovalo onu radost jako předtím v kroužku matematiky, v práci nebylo takové nadšení jako na počátku, i když bylo ve třídě „bezchybné a nejrychlejší“ i mimo úlohy opírající se o kalkulus. Rodiče zrovna neoceňovali její školní výkony, brali to jako samozřejmost. Jejich postoj k matematice se nezměnil. Je otázka, do jaké míry šlo o rodinnou tradici, o **předsudek,** o sociální tlak (např. médií).

Na druhém stupni se dívka v hodinách stále řadila mezi špičku, avšak volání k matematice jí poněkud ochladlo. Škola po celou dobu její školní docházky na rodiče nijak nepůsobila ve prospěch dívky.

Takových děvčat registruji více, jako např. Zuzka (měla by číst beletrii a poezii a ne dělat matematiku), Maruška (měla by malovat). Svým způsobem jsou blízké této situaci dva chlapci romské národnosti, kteří vykazovali svoji výjimečnost nejen v kalkulu, ale i v úlohách opírajících se o časoprostorovou představivost, dokázali snadno propojit svět prostoru a svět čísel výrazně dříve než jejich spolužáci, avšak jejich komunita byla přesvědčena, že oni nemohou být dobří na matematiku a mají se rozvíjet především v bojových uměních, která budou potřebovat.

Ve všech zmíněných případech rodina působila ve prospěch **potlačení výjimečnosti dítěte**. Ani v jednom z případů škola nezapůsobila tak, aby žáky směřovala k hlubšímu rozvoji jejich potenciálu. V zahraničí jsem se setkala s dvěma podobnými případy, kdy učitelé zakládali svá tvrzení na tom, že daní žáci nemohou být výjimeční pro odlišnosti jejich barvy pleti (arabská dívka, konžský chlapec). Pod vlivem hodnocení ze strany školy začali měnit svůj pohled na děti i jejich rodiče. Srážení matematického sebevědomí chlapce probíhalo na úrovni poznámek, že to někde slyšel, opsal, někdo ho to učil předem, u dívky šlo o hlasité opakované komentování průběhu jejího řešení úlohy učitelkou, že to řeší jinak, tedy chybně.

2.4 Případ DMKP

Chlapec byl zaměřen od mateřské školy na „vysoká čísla“. Když rodina viděla tento zájem, podobně jako učitelka v mateřské škole, jeho zájem podněcovala. Čím víc se zájem dítěte o čísla projevoval, tím více mu vycházelo okolí vstříc, tím víc si chlapec navykl je dirigovat. Zájem o čísla pak pro něho byl „vyzkoušeným argumentem“, proč si neprohlížet knížky, proč nepracovat s modelínou, nekreslit, nepsat tužkou (lze na počítači) a podobně. Již trochu četl.

Na počátku školní docházky mu bylo naměřeno výrazně nadprůměrné IQ. Jeho vstup do školy byl provázen obtížemi plynoucími ze zúžené předškolní zkušenosti, z nerozvinutí některých potřebných schopností, např. orientace ve větším prostoru, haptické vnímání tvarů a jejich propojování na vizuální představy. Rozdíly mezi svou úrovní a úrovní spolužáků v některých školních aktivitách postřehl, ale snažil se je zakrýt. Samozřejmě si chlapec uvědomoval jistou **disproporčnost svých výkonů v matematice**, nešlo o intuitivní reakce, ale protože byl zvyklý, že se mu okolí přizpůsobovalo, „nepovedené výkony“ skrýval. I zde se pokoušel odvádět pozornost od činností tím, že vyžadoval práci s čísly.

Tato strategie u učitelky neuspěla. Brzy přišel na to, že stěžovat si doma na to, že ho učitelka „neposlouchá“, je neefektivní (musí se jí podřídit, a ne dělat aktivity selektivně). Změnil strategii v domácím chování, inspirován internetem, argumentoval, že učitelka učí špatně, protože „on si má ve škole hrát“, protože „škola je hra a má ho bavit (ve smyslu divadla)“.

Matka tedy zajistila změnu školy. Škola přihlédla v hodnocení spíše k potenciálu než k výkonu žáka, protože některé úlohy za podpory rodiny prostě neřešil (nešlo o práci s velkými čísly). Totéž se opakovalo ve druhém ročníku, rodina mu zajistila draze hrazené doučování, kde opět dělal, co chtěl, především aritmetické učivo 4. ročníku (žádné slovní úlohy, žádné problémové úlohy, žádnou geometrii).

Rozdíly v hodnocení domácím učitelem spolupracujícím s rodiči a školou vedly opět ke změně školy. V průběhu třetího ročníku si rodiče na základě synových stížností stěžovali vedení školy na učitelku. Pozorování chování chlapce v hodinách matematiky ukázalo, že má problém spolupracovat s ostatními ve skupině, že má problém řešit úlohy, které nejsou dle jeho představ (např. slovní). On sám rozhodoval, zda jde o matematiku, či ne, přičemž v jeho představách, podobně jako u jeho rodičů, byla matematika redukována na počty, či počínající aritmetiku (hodnotím dle míry a úrovně zobecňování). Při samostatné práci nebyl schopen provádět korekční aktivity, komparativní aktivity, kreativní aktivity vně světa čísel, obtíže vykazoval v aktivitách vyžadujících prostorovou představivost především proto, že dosud nebyl stavěn do situací, kdy by musel překonávat nějaké překážky, respektive řešit i to, co si sám nevybral.

Jeho vysoké sebevědomí se projevovalo v držení těla, hlavy, v gestech, v mluvě i dikci. Pocit nadřazenosti a projevy chování ho vždy rychle izolovaly od ostatních. Četl relativně málo, i když začal číst brzy, avšak jeho čtenářská úroveň díky vynechávání beletrie (četl jen odstavečky u encyklopedií či kreslených seriálů) se postupně propadla na průměr třídy s odůvodněním, že jeho přece zajímá matematika. To vše v rozporu s diagnostikovaným potenciálem.

Na kroužku matematiky se mu najednou nepodařilo tyto „redukční strategie“ uplatňovat. Ač nerad, připustil, že matematika je širší, než se domníval. Platily na něho „dospělé argumenty“ a jasně daná pravidla s důsledným vyžadováním jejich dodržování, trpělivé opakování požadavků na chování, takže si zde nedovolil provádět selekci úloh nebo řešení předem vzdávat. Úsilí v jeho rozvoji jak ve škole, tak v kroužku bylo směřováno k trpělivosti a vytrvalosti, což se ovšem ve třídě příliš nedařilo, protože tam zasahovala stále rodina.

Na konci prvního stupně se dostal na osmileté gymnázium, i když nikoli prestižní. První dva roky si výrazně stěžoval, že něco ve třídě „musí“, avšak nic mu nezbývalo, pokud se nechtěl vrátit na ZŠ. Dle hodnocení gymnázia byl velký rozdíl mezi potenciálem a mírou rozvinutí některých schopností. Výraznější problém se ukázal v geometrii, protože mu chyběly manipulativní zkušenosti nejen z mateřské školy a prvního stupně, ale i z domova, kde „nic“ nemusel, protože měl z poradny „papír, že je nadprůměrný“. Jeho zkušenosti s větším prostorem byly rovněž omezeny, neboť dle rodiny se talent rozvíjí v práci s knihou (obrázkovou – komiksy, encyklopedie) a počítačem; tedy nepraktikoval žádný sport, zažil málo vycházek, nečetl knížky s delším souvislým textem.

Rovněž se obtížně odstraňovaly některé problémy u řešení slovních úloh. Jeho redukované zkušenosti z běžného života a oslabená schopnost číst delší texty s pochopením (číst na prvním stupně patřilo dle rodičů do češtiny, tedy chápali to za méně podstatné) se podepsaly na obtížích v řešení slovních úloh, které by jinak matematicky zvládl, kdyby nemuselo docházet k matematizaci skrze výběr a strukturaci dat. Pokud zadání pochopil (vytvořil si představu) a porozuměl mu (strukturoval vědomě informace), neměl problém ani s matematizací, ani s volbou a s použitím matematických metod řešení. Rodina nechtěla přijmout to, že textu se musí rozumět v tom smyslu, že ho musí umět vysvětlit, převyprávět či převést ve schéma, tabulku, nějaký model. Nejevil příliš snahu obtíže odstraňovat, poněvadž měl v rodičích ochránce, kteří slovní úlohy do matematiky neřadili a učitelce do hodnocení slovních úloh zasahovali. Obtíže se objevovaly i v argumentaci, chyběly mu komunikativní zkušenosti, i když na prvním stupni všechny učitelky podporovaly práci ve dvojicích a skupinách. Na 1. st. ZŠ nebyl ochoten se zapojovat do diskusí, do spolupráce, a to za podpory rodiny s argumentem, že on je talent, a tak jeho vyjadřování bylo na nevyvážené úrovni (záleželo na kontextu). Pro dořešení badatelsky pojatých úloh, které vzbudily jeho zájem, mu chyběla trpělivost, takže někdy k zobecnění ani dojít nemohl pro nedostatek dat.

V konkurenčním prostředí na nižším gymnáziu se probudila jeho ctižádostivost, vadilo mu, že by byl mezi posledními. Na rozdíl od prvního stupně začal psát i domácí úkoly, dokonce se i na matematiku začal připravovat tak, že si prohlížel úlohy, které řešili ve škole, vyhledával si i jiné úlohy na internetu, avšak aniž by o tom rodiče věděli. Jeho vztah k matematice ochladl zčásti proto, že již nemohl řešit úlohy vhledem, nemohl si vybírat, musel akceptovat, že matematika zahrnuje i další látku kromě čistě aritmetické, ve které dokázal zobecňovat, obecné uplatnit. V bývalé škole si stěžoval, že musí na gymnáziu „makat“. Rodiče již do výuky na gymnáziu nezasahovali, protože jde o výběrovou školu a „hrozí“ návrat do ZŠ.

2.5 Případy EHJP a FJZC

Oba případy se shodují v jednom, že se obě děti učily sčítat a odčítat zpaměti již v předškolním věku. Oběma dětem (každé z jiné lokality) vyhovovalo, že si hrají na školu, aniž by musely čísla modelovat. Operace probíhaly (podobně jako u BBVB) na úrovni slovně akustické s oporou o mechanickou paměť. Nikdo z okolí nepochyboval o tom, že děti vše chápou, protože v pěti letech byla u nich oficiálně diagnostikována nadprůměrnost (četly jak písmena, tak číslice, zvládaly i psát a číst i dvojslabičná slova, chápaly „rytmus“ grafických znaků a byly schopné v něm pokračovat, popsat ho i tvořit nový).

V mateřské škole si mohly vybírat stolní hry. Nebyl na ně vyvíjen tlak věci dokončovat, okolí se spokojilo s náznaky řešení problémů. První problémy se začaly vyskytovat u složených slovních úloh na porovnání rozdílem, které na nátlak rodiny řešily mechanicky: když je otázka „o kolik víc/míň“, tak odčítej od většího menší číslo a nic si nekresli.

Podceňování modelů ze strany rodičů a tlak na práci se symboly se podobně jako u Honzíka (v [5]) ukázaly kontraproduktivní u řešení náročnějších či výběrových slovních úloh, kdy oba žáci měli pocit, že užití modelu je pro řešitele degradující, že tím dávají najevo svoji neschopnost problém řešit, nicméně stále patřili mezi špičku celého ročníku. Rodiče je oba tlačili k řešení aritmetických úloh z vyšších ročníků. V geometrii žáci pohlíželi na obrázky, modely podobně a tvrdili, že „si to musí kreslit jen hlupák“, chytrý to nepotřebuje. Po vyšším nátlaku na tvorbu modelů či schémat na druhém stupni se postupně přizpůsobovali, avšak představovalo to pro ně překážku navíc oproti těm, kteří na to byli zvyklí. V tvořivých úkolech vynikali především v aritmetickoalgebraických partiích, v geometrii jim chyběla určitá zkušenost, podobně jako u tvorby slovních úloh, avšak zde se zapojili do tvorby dříve, poněvadž rodina akceptovala „tlak“ na zvýšenou čtenářskou zkušenost. Tvorba slovních úloh po dlouhou dobu nebyla vůbec spjata s geometrií ani v oblasti míry geometrického útvaru.

2.6 GŠMS

Chlapec vykazoval nadměrný zájem o čísla v nejširších souvislostech, jako jsou peníze, rychlosti, vzdálenosti, rozměry objektů, dále o vztahy mezi čísly, mezi prostorovými objekty. Rodina, na rozdíl od mateřské školy, to chápala jako urychlení ve vývoji a zvýšenou zvídavost, aniž postřehla, že chlapec již čte. Nebyla schopna mu odpovídat na dotazy typu: „Jak daleko je od Země Venuše? Kolik let poletím k další galaxii?“ Ani nikoho nezajímalo, jak se chlapec k takovým pojmům jako galaxie, meziplanetární lety, rok a světelný rok dostal, dokud jsem v rozhovoru s chlapcem nezjistila, že si čte v encyklopedii o vesmíru, kterou mají v mateřské škole. Tam se domnívali, že si jen prohlíží obrázky. Pokud učitelka četla pohádku, chtěl sedět vedle ní a koukat jí přes rameno na text, což bylo zařazeno mezi odměny, pokud byl v mateřské škole ten den hodný. Nikdo netušil, že jde o tiché souběžné čtení části textu.

Pravo-levá orientace u něho nebyla před vstupem do školy ukotvena, protože ho nezajímala, a svým způsobem takto v mateřské škole projevoval vzdor v rozlišování pravé a levé proto, že se mu nedostávalo odezvy na to, co ho zajímalo. Jeho dotazy byly brány tak, že opakuje dotazy po dospělých, že ho to ve skutečnosti nezajímá. Pravo-levou orientaci se byl nucen „doučit“ ve čtvrtém ročníku ve vlastivědě, což bral jako degradaci.

Ve škole byl považován za dítě, kterého zajímají jen velká čísla, tak nakonec rezignovali a úlohy s jednocifernými čísly měnili na úlohy s čísly nejméně dvojcifernými. To nečinilo problém, pokud se u sčítání a odčítání nejednalo o přechod přes desítku. Pro chlapce bylo číslo především redukováno na zápis, čím delší, tím lepší. Přechod přes desítku zvládal nerad a pamětně, avšak přirozeně zvládl užít analogii. např. když zvládl pamětně 24 + 7, odvozoval na 34 + 7, 24 000 000 + 7 000 000 především proto, že součty nepsal, ale mluvil u nich: *dvacet čtyři plus sedm, dvacet čtyři milióny plus sedm miliónů.*

Tím, jak vynechal práci s modely, měl od třetího ročníku problém s rozlišováním modelů pro operace sčítání, násobení, včetně modelů k úlohám „na porovnávání rozdílem a podílem“. Učitelka nenašla strategii, jak mu proces pochopení usnadnit, příklady na „malých číslech“ mu nic neříkaly, nebyl navíc zvyklý odvozovat pochopení od modelů a začínat proces učení na malých číslech. Situaci ztěžovalo to, že práce s malými čísly byla „pro mrňata“.

Otec od jeho vstupu do školy po jisté době vyhověl jeho zájmům o velká čísla a během druhého ročníku ZŠ ho začal učit druhé mocniny čísel, ale bez modelování. To sice urychlilo přístup k velkým číslům, ale ve svém důsledku se později ukázal problém přeskočení násobilky a modelů v tom, že chlapci tento skok neumožnil pochopit vztah mezi opakovaným sčítáním a násobením, mezi násobením stejných čísel a mocninou. Deficit těchto zkušeností mu bránil účinněji využívat těchto vztahů. Relativně snadno pracoval brzy s desetinásobky libovolného čísla, od druhého ročníku s přímou úměrností v oboru $\mathbf{N}$ ($y = nx$) pro n v podobě libovolné mocniny čísla 10 u převodů jednotek délky.

Školní ani domácí matematika ho neuspokojovaly, v obou případech byla volena „živelná strategie skoků“, dle situace a nikoli dle nějakého systému.

Otec ho začal učit i jednotky obsahu plochy (hektary a kilometry čtverečné) v zeměpisných souvislostech, aniž se tyto jednotky vázaly na zkušenost chlapce. Chlapec je ukládal jako data, kde se opět vyskytují zajímavá velká čísla, či to, co za velká a významná považují dospělí (např. v intonaci a gestice). Uměl na požádání sdělit rozlohy států, obsahy ploch rybníků, které nikdy neviděl.

Od druhé mocniny se přešlo doma k druhé odmocnině a práci s „malými“ desetinnými čísly. Objevil kouzlo růstu desetinných míst za desetinnou čárkou; zajímal se o to, jak se to čte, jak napsat ještě menší číslo, a to vše v době, kdy jeho spolužáci „trénovali“ násobení a dělení s využíváním slovních úloh evokujícími různé modely.

Místo domácích úkolů nosil „své domácí úkoly z pilnosti“. Babička ho naučila, že jedna čtvrtina se zapíše jako 0,25. Nikdo mu nevysvětlil, proč. Ve čtvrtém ročníku ho provokovalo číslo nula a problém, jak zapsat nekonečně mnoho; rozdíl mezi nekonečně a nekonečno.

První stupeň pro něho představoval dva matematické paralelní světy: svět školní matematiky a svět velkých či velmi malých čísel. Násobení a dělení nakonec zvládl mechanicky bez hlubšího pochopení. Jeho úsudková myšlenková schémata byla výborná, avšak takové úlohy nedostával. Nebyla u něho rozvíjena zvlášť ani časoprostorová orientace, ani prostorová představivost, svět geometrie byl redukován v jeho představách na rýsování nebo črtání ve čtvercové síti bez silnější vazby na svět čísel.

Strategie (rodiny a školy) se podepsaly na typech jeho obtíží na druhém stupni. Odstranění deficitů bylo podmíněno racionálním zdůvodňováním (v rodině se učil „pro školu" často pod nátlakem s oporou o citové vydírání). Problémy byly nejen v aplikačních úlohách. Tolerance k přeskakování některé látky, omlouvání chlapce jeho zájmem o vyšší čísla, než s kterými pracují jeho spolužáci, vyzdvihováním jeho talentu – všechny tyto argumenty nakonec vedly v procesu učení ke zbytečným zpětným krokům, bez kterých by se dál nemohl rozvíjet.

Takových dětí jsem registrovala více než 10, avšak ne všem bylo možné poskytnout doplňkové strategie pro rozvoj jejich talentu s přihlédnutím k jejich zájmům a dosavadními vývoji.

2.7 HHHP, CHDŠP

Oba chlapci, byť jiného ročníku narození, měli shodný vývoj od raného dětství. Jakmile začali vykazovat první nadprůměrnost v oblasti intelektu, rodina je směrovala bez jejich velkého zájmu (zájem o okolí byl dosud všestranný) k přirozenému číslu. Převažovalo číslo bez významu kvantity, **číslo jako slovo**, ať v mluvené nebo psané podobě. Pokud se oba ptali po významu či příkladech, zpravidla byli okolím umlčeni, že to je jen „pro mrňata/hlupáky" a ne pro chytré kluky. Oběma chlapcům to začalo raně „logicky myslet", takže jistý deficit modelování byli občas schopni doplnit pozorováním okolí.

Při řešení finančních úloh rozlišovali počítání sumy od nominální hodnoty platidel. Odděleně od úloh s penězi pracovali s počtem objektů ve svém okolí, aniž by reálné objekty byly nahrazovány jinými (prsty, kamínky, . . .), tedy aniž by aktivity směřovaly k pochopení zástupnosti modelu. Jinými slovy z úloh tohoto typu vytrhávali čísla (registrace a abstrahování číslovek v mluvě, číslic v textu slovní úlohy). Ve škole se vyhýbali aktivitám typu „kolik jablek - tolik puntíků, kolik lízátek - tolik čárek" s argumenty, že „to je pro malý" (opakování po rodině). Ve škole rychle uplatňovali naučené „říkanky" z domova, že „dva plus tři je pět" a podobně.

Vycházeli brzy ze zkušenosti, že „následující číslo je o jednu vyšší než výchozí, tak druhé následující je o dvě větší" s využitím úsudkových schémat, aniž by užívali aspoň v argumentaci nebo u slovních úloh nějaký grafický či reálný model. Úspěšně se jim dařilo vyhýbat diskusím argumentem, že je to jasné. Tato strategie jim vydržela čtyři roky bez problému s přenosem prvních zkušeností na práci s desítkami a stovkami; násobení a dělení v oboru násobilky šlo opět bez modelů i ve škole, poněvadž učitelka používala modely opravdu jen u žáků podprůměrných, a ještě k tomu do jisté míry formálně. Slovní úlohy řešili snadno s minimem námahy „sociálním úsudkem“: pokud se probírá násobení a dělení, tak se i slovní úloha bude řešit jednou z těchto operací.

Matematika u nich byla redukována na práci s číslem na bázi mluvy (slovně akustická paměť) a na bázi práce s číslicemi (opora o vizuální paměť) s mírnou podporou o logické myšlení. Hodnocení obou vycházelo z minima chyb a z rychlosti reakcí, kde stále vynikali ve třídě.

První problémy se začaly vyskytovat na druhém stupni, kde obě vyučující matematiky zadávaly úlohy, ve kterých bylo nutné vyjít z modelu, grafu. Nezvyk brát matematický model jako rovnocenný způsob prezentace dat byl pro ně více překážkou psychickou než intelektovou, což se ukázalo v dialozích s učitelkami. Jedna z nich vydržela a s důsledností přivedla individualizovanou strategií žáka D k modelování v aritmeticko-algebraickém učivu, což se u H nevyskytlo.

Problémy se, dle mého zbytečně, vyskytovaly v geometrickém učivu, kde stále „obrázek“ pro ně znamenal něco degradujícího. Chyběla zkušenost propojující svět prostorových představ a světa čísel. Tam, kde dosud tvořili představy snadno, řešili úlohy zpaměti a verbálně, aniž črtali, aktivně používali geometrickou symboliku i v prvních krocích ke konstrukčním úlohám.

U D zapůsobila opět učitelka, která spojila konstrukční úlohy s prvky programování, a tím D „přitáhla ke geometrii“, využila úloh z matematických soutěží, aby mu odkryla další partie matematiky. Individualizovaný přístup k H nebyl, byl jen dle aktuálních výkonů zařazen mezi mírně nadprůměrné, nevyvážené a trochu líné. H byl výborný v čistě algebraických úlohách a čistě aritmetických, u čistě logických úloh, rytmizací, závislostí a řad, avšak nevyrovnané výkony měl u slovních úloh a v geometrických úlohách, s výjimkou úloh „na převody“ jednotek.

V chemii u řešení rovnic neměli oba problémy, zájem vzbuzený o chemii u D směřoval ke zvýšenému úsilí v oblasti tvorby modelů molekul u složitějších vzorců, které jim chemikářka nabízela. Tato stimulace nebyla H nabízena. Ve fyzice zvládali oba vzorce ne vždy s plným pochopením, avšak rychle pochopili, co a kam dosazovat. Menší míra pochopení se projevila v okamžiku, kdy měli sami tvořit úlohy tak, aby se daná fyzikální úloha řešila zadaným postupem. Postoj k jednotlivým partiím učiva – přecenění a podcenění, neproporčnost ve vznikajících zkušenostech, (ne)individualizovaný přístup k jejich rozvoji, (ne)pochopení příčin obtíží a (ne)řešení daného stavu poznamenaly rozvoj těchto žáků na druhém stupni. Svůj podíl měli rovněž rodiče, kteří uznávali především práci s číslicemi, písmeny, řešení rovnic než cokoli jiného.

Rodiče více než techniky a metody řešení zajímala rychlost a správnost dosažení výsledku. Tak ovlivnili postoj k partiím matematiky, tedy i k matematice jako takové.

Žáků daného typu jsem zaznamenala víc, avšak ne všechny jsem mohla soustavně sledovat i po dobu jejich studia na druhém stupni, respektive na nižším gymnáziu.

3 Závěr

Shrneme-li zkušenosti z práce s talenty, vidíme, jak velkou roli zde hrají rodiče a učitelé prvního stupně, jejich pohled na matematiku. Můžeme sledovat, jaký vliv může představovat neprofesionální práce s potencionálním talentem.

Kazuistiky naznačují ještě něco dalšího. Většina dětí, které se dříve či později ve škole projeví jako talenti, již v předškolním věku vykazuje raný zájem o čísla (viz kognitivní psychologie, např. Vágnerová). Tento zájem je dle mých zkušeností natolik nápadný, že mu podléhá i okolí a začne zanedbávat všestranný rozvoj dítěte, redukuje ho na to, co si dítě přeje, a tím se nerozvíjejí některé další schopnosti potřebné pro školní matematiku (zájem o číslo vytěsňuje vznik nových zkušeností typických pro předškolní věk, např. manipulativních). Přeceňování rychlého rozšiřování číselného oboru na úkor pochopení významu a rolí čísla směřuje často k povrchnímu přístupu v procesu učení; číslo a číslice splývají (forma zaměňována za obsah), což poměrně dlouho za určitých okolností na prvním stupni „nevadí“, ale projeví se jako blokátor při nástupu algebry.

Prostorová představivost je schopnost, která se rozvíjí poměrně déle, než je vnímání zpracování množství (hodně, málo, víc než … apod.) nebo kvantity určité (číslo v roli počtu, v roli veličiny, v roli ceny a podobně). Rozvoj prostorové představivosti vyžaduje práci jak v mikro- nebo mezzoprostoru, tak v makro- nebo megaprostoru [4, 5, 6] v propojení na jazyk a na transformace především polohové a velikostní [9]. Vynechání těchto aktivit produkuje nedostatečný rozvoj schopnosti potřebné pro nástup školní geometrie a neusnadňuje pak propojení světa čísel se světem prostoru/roviny, což se u nadprůměrných ukazuje např. u nástupu funkcí.

Transformace jednotlivých komunikačních kódů napomáhají pochopení toho, že jednu a tutéž myšlenku lze prezentovat různými komunikačními kódy. Neschopnost propojit zadání funkce předpisem, tabulkou nebo grafem se projevuje u jednostranně rozvíjených žáků tak, že se upnou jen k jednomu přístupu a další z nejrůznějších důvodů „neuznávají“, i když u nich jsou příčiny jiné než u průměrných či slabších žáků. Vynechání rozvoje časoprostorové orientace a na to propojených představ se u většiny sledovaných nadprůměrných váže **na**

rychlou strategii „upnutí se ke vzorcům“ za vysoké podpory rodiny (např. úlohy o pohybu), **na obtíže argumentovat, modelovat, vysvětlovat** i tam, kde evidentně žáci neřešili úlohu vhledem.

Vynechání manipulativních zkušeností či jejich výrazná redukce na práci s „nehaptickými modely“ (např. na PC) se projevuje jak u složitějších prostorových úloh na bázi kompozice či dekompozice – řezů na tělesech (např. „Kterým krychlovým tělesem z nabídky musíme doplnit dané těleso, aby vznikla krychle?“, „Vyznač v obrázku, jak musíme vést řez na krychli, aby vznikl čtyřstěn?“), pokud tito žáci nemají mezi svými koníčky aktivity typu modelářství a podobně.

V přednášce k předškolnímu věku se vyskytla poznámka, ve které byla zařazena mezi kritická místa v přípravě dětí na školu práce s kostkami a její „vnucování“ dívkám, s doporučením, aby se hry selektovaly na hry chlapecké a hry dívčí, podobně jako to propaguje reklama na hračky. Můj opakovaný výzkum a jeho následná retroanalýza ukázala, že není pravda, že se dívky o práci s kostkami/stavebnicemi nezajímají. Rozdíl je v tom, že kostky používají v jiných rolích a ve větším množství než chlapci, i když se jedná o kompozice v obou případech [3, 9].

U Besta s Neihartem najdeme typologii a charakteristiky nadprůměrných jedinců: 1. *úspěšný a přitom nadaný, avšak s problémy v chování*, 2. *značně tvořivý nadaný*, 3. *nadaný zakrývající své výjimečné schopnosti*, 4. *odpadlý nadaný*, 5. *nadaný s nějakou vývojovou poruchou*, 6. *autonomně nadaný.*

Ve výčtu, jak je patrné z kazuistik, dnes chybí „**poničený talent**“ (ubitý). Podíl na tom u nás má především rodina či laická veřejnost. Svým způsobem se na daném stavu podepisuje i přetížený učitel, který má ve vzdělání (v péči o talenty) jistý deficit, či je k takovému žáku méně vnímavý. Práce s talentem ve třídě vyžaduje speciální přípravu od učitele, mnohem náročnější, než je například příprava na práci s žákem dyslektikem, dyspraktikem. Z šetření v roce 2018 – 2019 (mezi 250 učiteli prvního a druhého stupně zapojenými do dalšího vzdělávání učitelů) vyplynulo, že ne všichni mohou s klidným svědomím tvrdit, že (ne)mají ve třídě matematický talent. Přibližně třetina z nich v diskusi připustila, že by na takového žáka v současném pojetí inkluze stejně neměli dost času/energie.

Zhouf s Novotnou (2005) uvádějí výčet projevů talentu v matematice: „vnímavost a zvědavost v matematice; rychlé pochopení matematických myšlenek; tvořivé a pružné řešení matematických úloh; schopnost využívat získané vědomosti v jiných matematických situacích; vnitřní motivace, zájem o matematiku; vyšší stupeň samostatnosti při řešení úloh; vyšší schopnost soustředit se na problém a chuť vyřešit ho; navrhování různých strategií řešení úloh“. Skladbu a míru rozvoje jednotlivých komponent daného výčtu, jak ostatně plyne z kazuistik, ovlivňuje zejména v dětství prostředí dítěte. To může některé komponenty utlumovat, některé dokonce blokovat. Do prostředí řadím především vliv rodiny.

Nevytváření podmínek (pro rozvoj jedince v těchto komponentách a ve složkách matematiky) především ze strany rodiny a školy spatřuji v několika bodech:

a) **Zanedbání rozvoje osobnosti** (rozmazlování, nevedení k samostatnosti, neposilování vůle, trpělivosti a podobně), současně jeho **nadhodnocování/podhodnocování ve smyslu nálepkování**. Nálepkování jako uzavření budoucnosti, blokování rozvoje zdůrazňoval Matějček již v osmdesátých letech minulého století a dnes to potvrzují další výzkumy (jak např. uvedl prof. Koukolík na své přednášce v lednu 2019 na PedF UK).

b) Rádoby **urychlování rozvoje** dítěte doprovázené **zúžením jeho zkušeností**, **redukcí matematiky** na počty, bránění v užívání matematických modelů, vynechávání geometrické složky, **skoky** i v rámci tematických celků, malý důraz na **práci s jazykem**, **podcenění** argumentace, dokazování, diskuse, systemizace a hlubšího porozumění, **přeceňování role počítačových her** a nebezpečí vytvoření závislosti na nich (Koukolík, Aberkane), a tím ochuzení o další matematické podněty.

c) **Oslabení fyzického rozvoje** celkově, navíc i jemné motoriky, redukce percepčního rozvoje (například přeceněním práce na PC). V důsledku toho chybí zpracování podnětů za pohybu, či podnětů z velkých otevřených prostorů. Trávení delší doby u obrazovek se projevuje i na kvalitě vizuální percepce (Dostálek, Kolář).

d) Sociální aspekty, v nichž lze vyčlenit specificky **deformovaný genderový či sociokulturní** přístup při vyhledávání či vyhodnocování talentů, či v plánování jejich dalšího rozvoje: např. s chlapci se pracuje jinak než s dívkami již v předškolním a mladším školním věku (dívka nemůže být talent na matematiku a pokud ano, pak „je to divné").

e) Výběr aktivit pro potencionální talent je často dělán nezávisle na tom, co dítě kontextově zajímá, úlohy potřebné pro rozvoj dítěte jsou „ **kontextově odpudivé**" (např. slovní úlohy jsou umělé, pro talent příliš dětské, viz např. [16]), nebo **postrádají smysl** (viz např. [7]), minimálně pro řešitele.

f) Vytváření **tlaku rodičů na školu** a **podléhání školy laickým pohledům** na práci s jedincem; to souvisí s deficitem profesionální spolupráce rodina – škola – poradna.

Závěry nelze absolutizovat. Domnívám se, že uvedené kazuistiky jsou vhodným podnětem pro diskusi a případně pro zamyšlení se nad systémovými změnami v našem školství, kam řadím i cílené vzdělávání učitelů a posílení jejich pravomocí, podobně jako nutnost kooperace poraden s širším okolím dítěte se zaměřením na jeho vývoj, progres.

Literatura

[1] Aberkane, I.: *Libérez votre cerveau.* PUF, Paris, 2018.

[2] Betts, G. T., Neihart, M.: Profiles of gifted and talented. In *Gifted Child Quarterly*, Vol. 32, Issue 2, 1998, s. 248–253.

[3] Kaslová, M.: Development of child constructions - interconnection of research and students' training at school. In Povstenko, J. (ed.) *Mathematics XII.*, J. Dlugosz University, Czenstochowa, 2007, s. 249–255.

[4] Kaslová, M.: Hodnocení nadprůměrných žáků rodiči. In. Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2009.* JČMF, Hradec Králové, 2009, s. 126–133.

[5] Kaslová, M.: *Předmatematické činnosti.* RAABE, Praha, 2010.

[6] Kaslová, M.: Talent na jazykové škole. In Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2011*, JČMF. Hradec Králové, 2011, s. 50–68.

[7] Kaslová, M.: Smysluplné aktivity v mateřské škole. In. Chytrý, V. (ed.) *Trendy a perspektivy předškolního vzdělávání.* UJEP, Ústí nad Labem, 2015a, s.34–43.

[8] Kaslová, M.: Transformace v předmatematické gramotnosti. In Fuchs, E. a kol (eds.), *Rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku.* Texty ESF, Praha, 2015b, s. 102–119.

[9] Kaslová, M.: *Malí šikulové.* Texty ESF, CDVPP, Mladá Boleslav, 2015c.

[10] Kolář, P., Červená, M.: *Labyrint pohybu.* Vyšehrad, Praha, 2016.

[11] Lišková, H., Nováková, E., Zelendová, E.: *Rozvíjíme matematické nadání žáků.* NÚV, Praha, 2017.

[12] Novotná, J., Zhouf, J.: Identifikace, motivace a podpora matematických talentů v evropských školách. In Zhouf, J. (ed.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2005*, PedF UK, Praha, 2005. s. 94–101.

[13] Portešová, Š.: Některé problémy spojené s identifikací nadaných žáků. In Lišková, H. (ed.), *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let.* SUMA JČMF, Praha, 2014, s. 247–256.

[14] Vágnerová, M.: *Vývojová psychologie.* Karolinum, Praha, 2012.

Další zdroje

[15] Dostálek, T.: *Tablety v mateřské škole.* Centrum dětské oftalmologie, Litomyšl, 2019.

[16] Kaslová, M.: *Nadprůměrné dítě v mateřské škole, jeho identifikace, možnosti rozvoje a jeho vstup do školy.* Studijní text pro seminář dalšího vzdělávání učitelů, 2019.

[17] Kaslová, M.: *Les structures didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* Přednáška na Université Bordeaux, 2019.

[18] Kaslová, M.: *Allievo talentoso.* Přednáška na Universita di Parma, 2014.

[19] Koukolík, F.: *Motivace a plánování.* Přednáška na Pedf UK, 2019.

Kroužek pro nadprůměrné děti v mateřské škole

Štěpánka Kašová, PedF UK, Praha

Abstrakt: V příspěvku je popsán průběh a zaměření kroužku pro nadprůměrné děti v mateřské škole. Dále jsou zde uvedeny diagnostické aktivity zaměřené na korekční procesy u strukturovaných celků a srovnání výsledků v těchto diagnostických aktivitách u dětí navštěvujících kroužek pro nadprůměrné děti a dětí, které na kroužek nechodí.

1 Úvod

Kroužek vznikl v naší mateřské škole před čtyřmi lety a je určen pro děti v posledním roce předškolního vzdělávání (věk 5–7 let), o nichž si rodiče myslí, že jsou „výjimečné“. Kroužek děti navštěvují jednou týdně. Časová dotace kroužku je 1,5 hodiny a jeho maximální kapacita je 10 dětí. Díky tomu mají děti zajištěný individuální přístup, mají na práci klid, dostatek času a prostoru. Vzhledem k technickému zaměření kroužku navštěvují kroužek převážně chlapci i přesto, že je zde také vybavení určené přímo pro děvčata.

Ve školním roce 2018/2019 se nám podařilo ve spolupráci s MAS (místní akční skupinou) zřídit a vybavit „technický kroužek“ pro děti na 1. stupni ZŠ, který je vybaven konstrukčně složitějšími stavebnicemi a děti zde mají možnost ve svém zaměření pokračovat i po přestupu na základní školu.

2 Zaměření, průběh a vybavení kroužku

Vzhledem k mému předchozímu vzdělání architekta má kroužek technický charakter. Primárně se zaměřuje na práci s konstruktivními stavebnicemi, kdy se děti učí stavět s využitím plánku (předlohy); sekundárně zde s dětmi děláme přírodovědné pokusy a pracujeme s robotickými hračkami a výpočetní technikou.

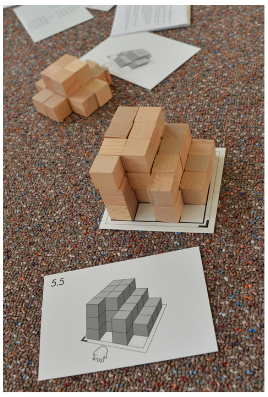
Díky získání dotace na nákup stavebnic v celkové hodnotě 90 tisíc korun máme nyní na kroužku vybavení již za více než 130 tisíc korun a stále dokupujeme další (obr. 1). Toto vybavení umožňuje tematické zaměření hodin, protože je dostatek stejného typu stavebnic pro všechny děti, které kroužek navštěvují. Každá hodina je zahájena komunikačním kruhem, kde se děti seznámí s tématem a organizací hodiny, zopakují si kroužková pravidla, rozdělí se do skupin

Obr. 1: Stavebnice získané z grantu

a vyberou si stavebnici a předlohu. Převážně děti pracují ve dvojicích, aby se učily mezi sebou vzájemně domlouvat, prosazovat a obhajovat si své názory a postupy a učily se mezi sebou spolupracovat. Dle zaměření hodiny děti také někdy pracují samostatně, nebo jako celá skupina. Každá skupina má v učebně vždy vymezený svůj prostor, ve kterém pracuje, a tento prostor by jí ostatní děti neměly narušovat. Pravidlem také je, že děti nejprve dokončí na začátku vybraný záměr a až poté mohou stavět něco jiného, případně jít pomoci kamarádům, když jim to dovolí. Hodinu zakončujeme opět v kruhu, kde děti představí svoji stavbu a provedou své sebehodnocení (co se jim dařilo/nedařilo, zda potřebovaly s něčím pomoci, jestli pro ně bylo něco složité, nebo zda jim naopak dnes šlo vše bez problémů atd., následně zhodnotí, zda se jim dařilo dodržovat „kroužková pravidla“). Tím si děti určí, zda dostanou jednoho „smajlíka“ za stavění a druhého za dodržování pravidel, nebo zda to dnes na dva „smajlíky“ není.

Děti se učí prostřednictvím práce se stavebnicemi transformovat 2D do 3D, rozvíjí svoji prostorovou představivost, orientaci v ploše a prostoru, učí se logicky myslet, rozvíjí si jemnou motoriku, zrakovou percepci, učí se spolupracovat a vzájemně mezi sebou komunikovat, učí se pracovat s chybou atd.

Obr. 2



Obr. 3

Obr. 4

Obr. 5

Obr. 6

Obr. 7

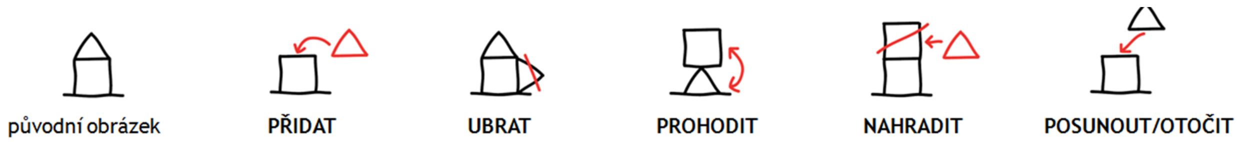
Obr. 8

Obr. 9

Obr. 10

Začínáme krychlovými stavbami, na kterých se děti učí základy práce s plánkem a transformaci z 2D do 3D a naopak. Na prvních hodinách děti pracují s dřevěnými kostkami, nejprve s klasickými obrázkovými (obr. 2), které jsou větší, později s dřevěnými kostkami o straně délky 2 cm (obr. 3). Dále pak pracujeme s dřevěnou stavebnicí KAPLA (dřívka s poměrem délek stran 1:3:5).

Postupně se dostáváme k práci s konstrukčně složitějšími stavebnicemi s různorodými částmi. Např. magnetické stavebnice – Geomag, Magformers, Smartmax – tato stavebnice je vhodná již pro děti od dvou let. Logické stavebnice („hlavolamy“) iGEO-Cube – zaplnění plochy, iGEO, iGEO-N, Architecto, Equilibrio – práce s těžištěm (obr. 4). Šroubovací stavebnice – Merkur, Quercetti Tecno, Multicar Stiefel, Heros Constructor – tato stavebnice má velice pěkně zpracované předlohy (obr. 5). Dále pak máme různé druhy klasické stavebnice SEVA (obr. 6) a Lego, ale i nestandardní stavebnice, jako např. Zoob Midi (obr. 7), ROTO, Morphun (obr. 8), Malý architekt (obr. 9) atd. Dále máme soupravu pro pokusy v MŠ a ZŠ – Tajemství přírody, která obsahuje návody na provedení sta přírodovědných pokusů. Z IT vybavení a robotických hraček máme na kroužku k dispozici interaktivní tabuli, dva počítače s dotykovými monitory, tablet a Robomyš (obr. 10).



Obr. 11

3 Diagnostické aktivity

Cílem diagnostických aktivit bylo zjistit, zda a za jakých podmínek je dítě v posledním roce předškolního vzdělávání schopné identifikovat chybu ve strukturovaném celku a zda je schopné identifikované chyby opravit.

Pro výzkum bylo zvoleno pět skupin diagnostických aktivit, z nichž každá aktivita se skládá ze tří až dvanácti gradovaných úkolů. Množství a typy aktivit byly voleny tak, aby bylo možné sledovat u dětí korekci chyb v zadaných strukturovaných celcích, ale i v strukturovaných celcích, které děti samy vytvořily. Aby bylo možné sledovat korekci manipulací, ale i grafickou formou, a dále aby bylo možné identifikovat všechny typy korekcí dle Kaslové, a to korekce na principu: prohodit, nahradit, posunout/otočit, přidat a ubrat [1] (obr. 11).

A aby bylo možné klasifikovat všechny 4 typy chyb dle Tortory, které Tortora označuje úrovněmi [2]:

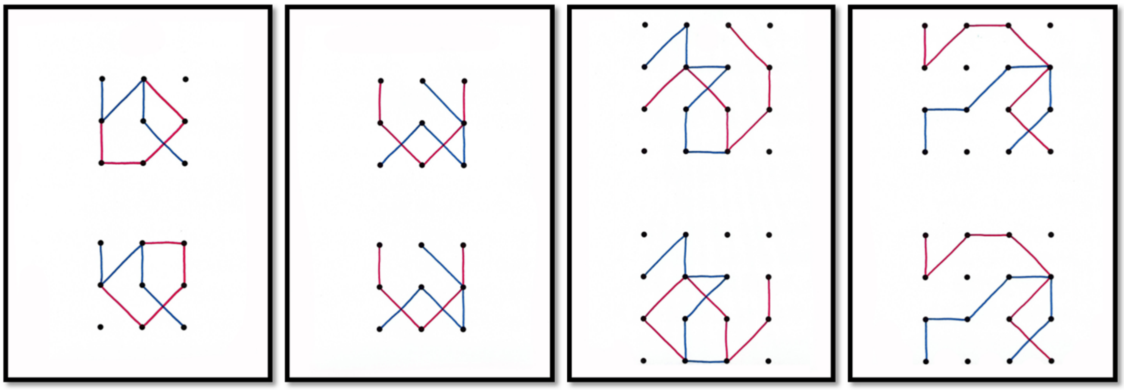
- úroveň 0 – chyby jako důkazy o tom, že někdo něco nepochopil nebo ignoroval,
- úroveň 1 – chyby dítěte jako důsledek vzdělávací chyby,
- úroveň 2 – chyby považované za nenahraditelnou fázi učení,
- úroveň 3 – chyby jako různé pohledy.

Výzkumu se účastnilo 30 předškolních dětí ve věku 5-7 let, z toho 15 dívek a 15 chlapců, z nichž 10 navštěvovalo jeden rok kroužek pro nadprůměrné děti.

Když děti prováděly jednotlivé diagnostické aktivity, byl patrný rozdíl mezi dětmi, které nenavštěvují kroužek a učitelky na třídách s nimi běžně podobné aktivity nedělají, a kroužkovými dětmi. Děti z kroužku jsou zvyklé pracovat podle předlohy, orientovat se v ploše i v prostoru a jsou zvyklé pracovat s chybou, protože se běžně stává, že nějaké části spojí, nebo smontují jinak, než měly, a musí pak část rozebrat a složit znovu.

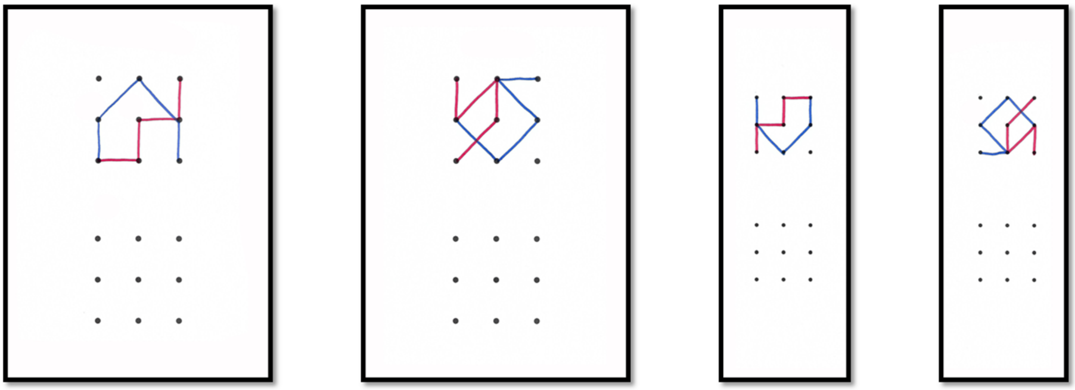
Pro příklad rozebereme podrobněji jednu z pěti aktivit, kde je nejvíce patrný rozdíl v práci „kroužkových“ a „nekroužkových“ dětí. Tato aktivita nesla pracovní název TEČKY.

Na obr. 12 je vidět první část aktivity, kterou zvládla bez problému vyřešit většina dětí. Zde šlo pouze o to, rozhodnout, zda jsou, nebo nejsou dva obrazce úplně stejné a pokud ne, ukázat nebo slovně popsat, v čem se liší.



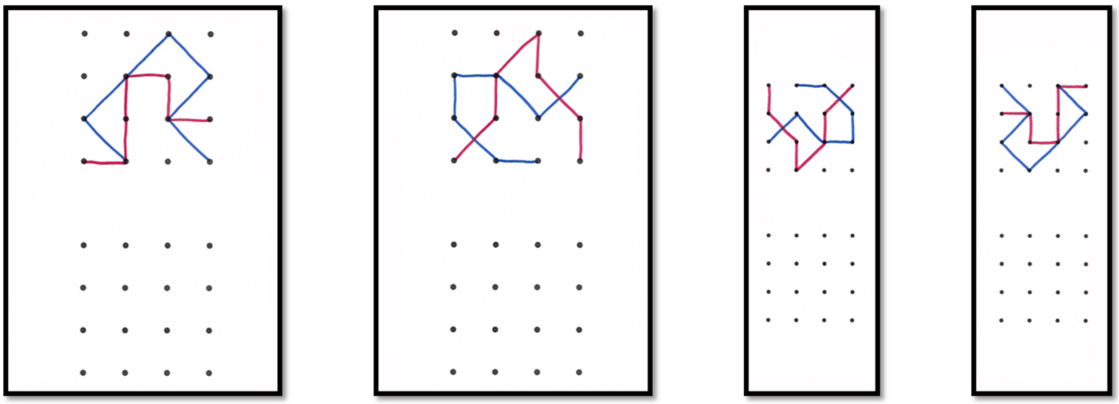
Obr. 12

Na obr. 13 je vidět druhá část aktivity, kde měly děti za úkol překreslit obrazec z horní puntíkové sítě do té spodní. Nejprve dvakrát ve větším měřítku a pak ty samé obrazce, jen otočené o 180°, v menším měřítku.



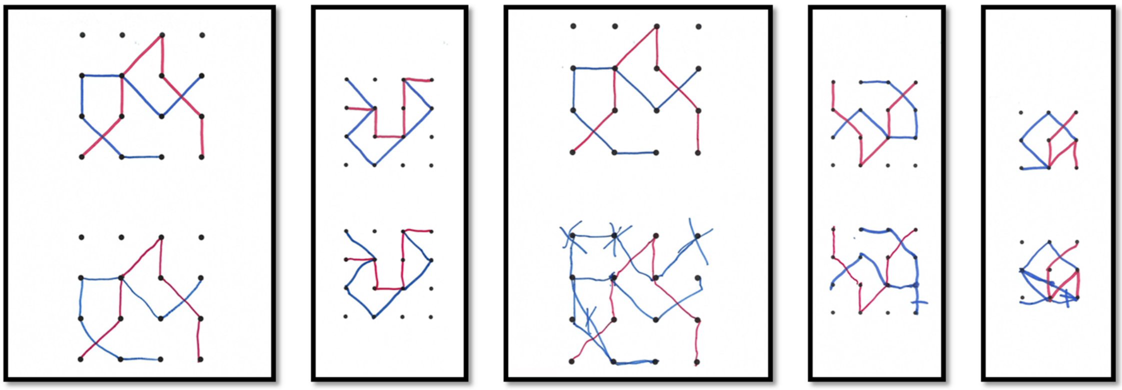
Obr. 13

Na obr. 14 je již třetí a poslední část této aktivity, která měla stejné zadání jako ta předchozí, jen s tím rozdílem, že předtím pracovaly děti v síti 3×3 puntíky a zde již měla síť 4×4 puntíky.



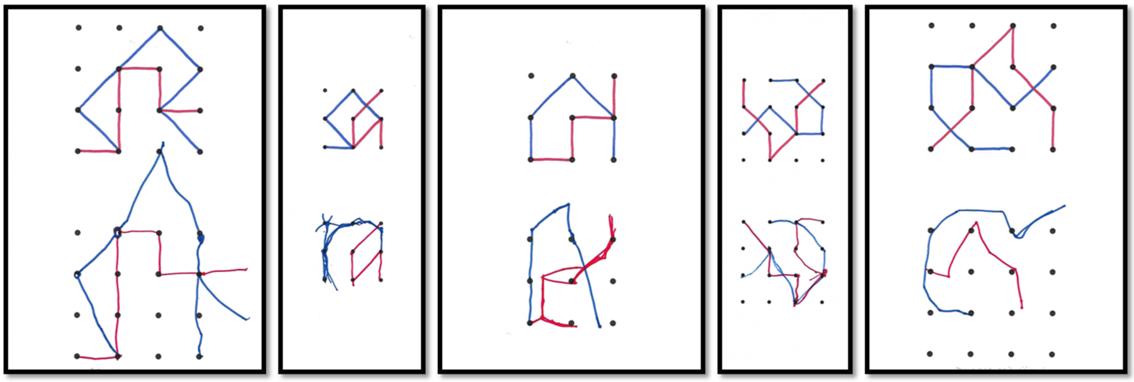
Obr. 14

Na obr. 15 jsou vybrané typické reakce kroužkových dětí. Ty pracovaly buď zcela bezchybně, nebo chybu identifikovaly a nedělalo jim problém ji škrtnout a opravit.



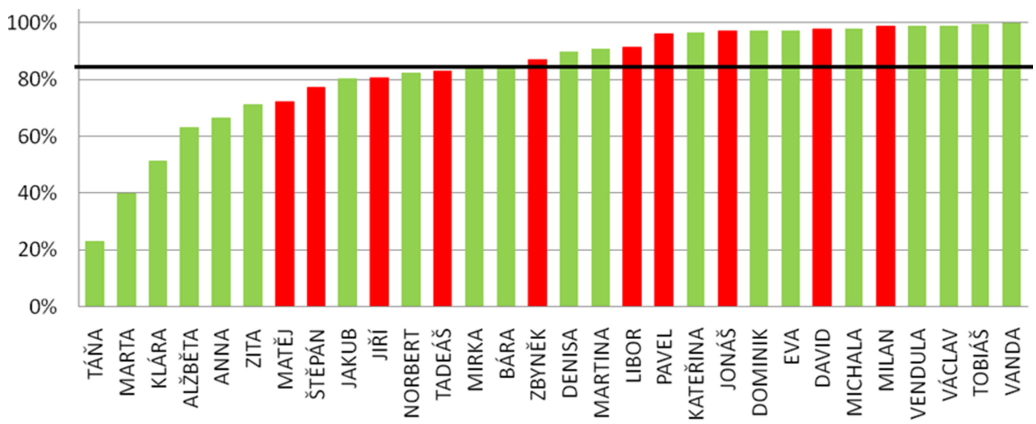
Obr. 15

Na obr. 16 jsou vybrané typické reakce dětí, které kroužek nenavštěvují. Často chybu neviděly, nechtěly si ji připustit nebo nebyly schopné ji opravit. Škrtání se v jejich práci objevovalo podstatně méně než u kroužkových dětí.



Obr. 16

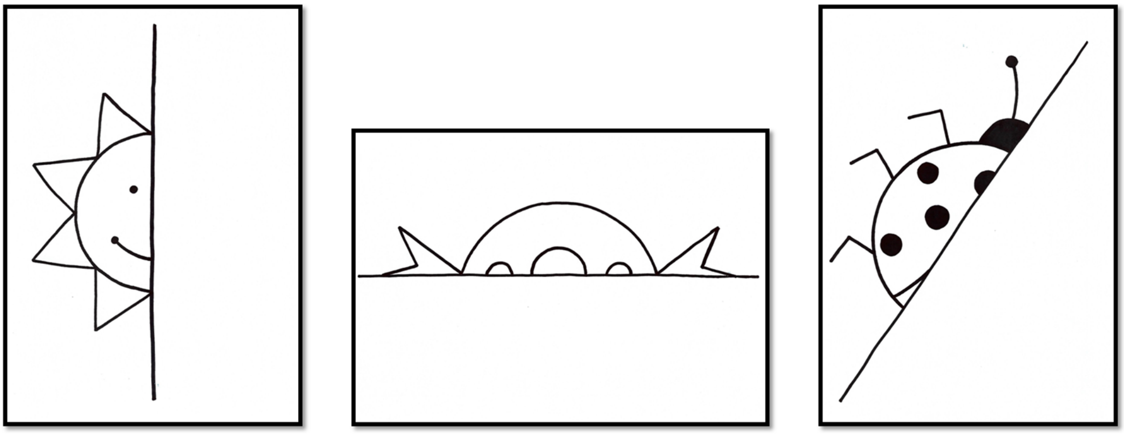
Na grafu 1 je vidět úspěšnost jednotlivých dětí ve vybrané aktivitě TEČKY. Červeně (v černobílém provedení tmavou barvou) jsou označené děti navštěvující kroužek. Jak můžeme pozorovat, vycházejí v této aktivitě spíše nadprůměrně nebo se pohybují okolo průměru (označen černou čarou).



Graf 1

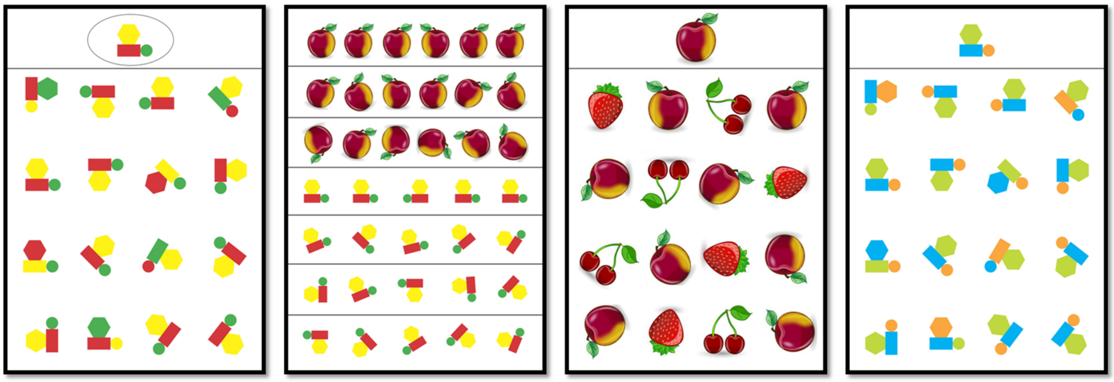
Zde uvádím zadání zbylých čtyř diagnostických aktivit:

Aktivita OSOVÁ SOUMĚRNOST – úkol – dokreslit druhou polovinu obrázku tak, aby byly obě poloviny souměrné podle osy (obr. 17).



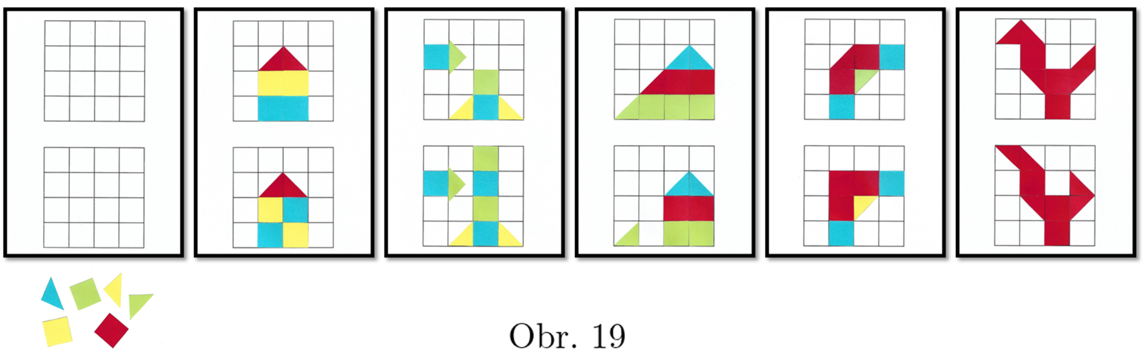
Obr. 17

Aktivita ROTACE – úkol – najít stejné/rozdílné objekty, které mohou být různě otočené, ale ne osově převrácené (obr. 18).



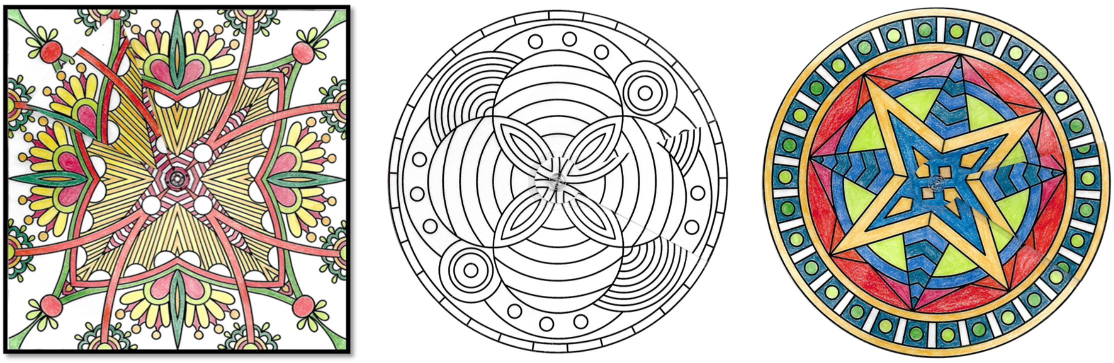
Obr. 18

Aktivita TANGRAMY – úkol – a) poskládat obrázek z barevných tvarů a pod něj složit úplně stejný, b) rozhodnout, zda jsou nebo nejsou dva strukturované celky úplně stejné a pokud ne, opravit chybu (obr. 19).



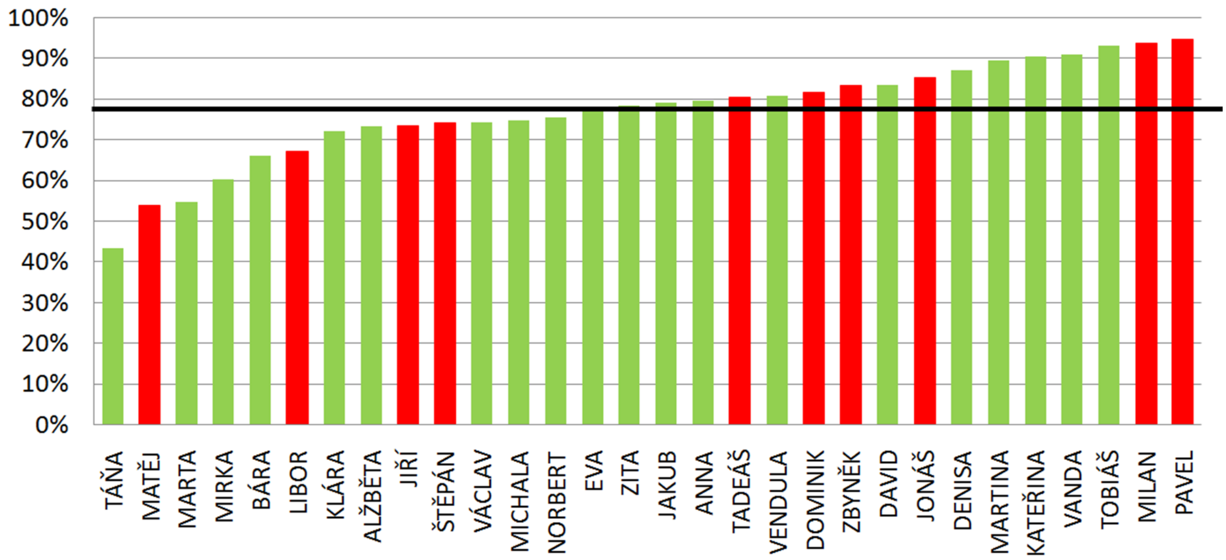
Obr. 19

Aktivita MANDALY – úkol – posunout výseč do takové polohy, aby navazovala tvary a barvami na pozadí, a najít co nejvíce možností umístění výseče (obr. 20).



Obr. 20

Na grafu 2 je vidět celková úspěšnost dětí ve všech diagnostických aktivitách. Zde je opět vidět, že kroužkové děti se pohybují s úspěšností plnění aktivit spíše nad průměrem (označen černou čarou). Jediný Matěj má velice nízkou úspěšnost ve většině aktivit, což je dáno tím, že kroužek navštěvují i děti, které rodiče bez rozmyslu přihlašují na většinu kroužků a vůbec nepřihlíží k zájmům dítěte.



Graf 2

4 Shrnutí

Kroužkové děti vycházejí v diagnostických aktivitách spíše nadprůměrně, případně se jejich výsledky pohybují okolo průměru. Vzhledem k tomu, že kroužkové děti vycházely většinou v diagnostických aktivitách lépe než děti, které kroužek nenavštěvují, můžeme usuzovat, že je to i díky činnostem prováděným s dětmi v kroužku, protože kroužkové děti jsou zvyklé manipulovat s předměty, orientovat se v ploše a prostoru a jsou zvyklé pracovat s chybou. Běžně se stává, že spojí nebo smontují některé části stavebnice jinak, než uvádí předloha, a dříve nebo později na chybu narazí a musí ji opravit, aby mohly pokračovat dále ve stavbě a dosáhly požadovaného cíle.

Více informací o výzkumu a podrobných výsledcích jednotlivých dětí v ostatních aktivitách lze získat v diplomové práci [4].

Literatura

[1] Kaslová, M.: Individuální konzultace. PedF UK, Praha, 2018.

[2] Tortora, R.: 'Si fa presto a dire ERRORE'. In: D'Amore B., Sbaragli S. (eds) *La didattica della Matematica, disciplina per l'apprendimento.* Pitvora, Bologna, 2015.

[3] Tortora, R.: Very often students' errors are all but mistakes. Presentation at: *IV Interdisciplinary scientfic conference mathematical transgressions.* Pedagogical University of Cracow, 2019.

[4] Kašová, Š.: *Korekční procesy u strukturovaných celků* [online]. Diplomová práce. Praha, 2019. `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/201293/41808198/`.

Důkaz pravdivosti Bealovy domněnky

Ladislav Kocanda, Veselí nad Lužnicí

Abstrakt: Aby mohla být Bealova domněnka dokázána, objasníme několik nových vztahů. Mezi ně patří rozklad trojice na součet, existence dvou druhů nesoudělných trojic, jiný pohled na Velkou Fermatovu větu, v rovnici $X^a+Y^b =$ $= Z^c$ objasníme vztahy mezi mocněnci a mocniteli. V celém článku se budeme pohybovat v oboru čísel přirozených. Na malé výjimky upozorníme.V závěru ukážeme tvorbu trojic nesoudělných i trojic soudělných.

1 Bealova domněnka

Při zkoumání Velké Fermatovy věty sestavil roku 1993 Andrew Beal následující odhad. Jestliže $X^a + Y^b = Z^c$, kde X, Y, Z, a, b, c jsou kladná celá čísla, přičemž a, b, $c > 2$, pak X, Y, Z musejí mít společného dělitele ve svém prvočíselném rozkladu.

Domněnka je také známa ve tvaru: Rovnice $X^a + Y^b = Z^c$ nemá řešení v přirozených číslech X, Y, Z, a, b, c, kde a, b, c jsou větší nebo rovna 3 a čísla X, Y, Z jsou navzájem nesoudělná.

2 Předpoklad P1

Nechť v následujícím textu je $[x, y, z] \in \mathbf{N}^3$, $gcd\ (x, y, z) = 1$, $x \leq y < z \leq$ $\leq x + y$, d, $v \in \mathbf{N}$, p, $k \in \mathbf{N}_0$.

2.1 Rozklad číselné trojice na součet

V souladu s P1 platí:
Je-li z, $y \in \mathbf{N}$, existuje $d \in \mathbf{N}$ tak, že $z = y + d$.
Je-li z, $x \in \mathbf{N}$, existuje $v \in \mathbf{N}$ tak, že $z = x + v$.
Je-li $x + y$, $z \in \mathbf{N}$, existuje $p \in \mathbf{N}_0$ tak, že $x + y = z + p$.

Z uvedených rovností vyplývají rovnosti $x = p+d$, $y = p+v$, $z = p+d+v$. Rozklad trojice $[x, y, z]$ tedy je

$$d = z - y, \quad v = z - x, \quad p = x + y - z, \tag{1}$$

$$x = p + d, \quad y = p + v, \quad z = p + d + v. \tag{2}$$

Příklad. Rozložte trojici [5, 12, 13] na součet podle vzorců výše.

Řešení: Je $d = z - y = 13 - 12 = 1$, $v = z - x = 13 - 5 = 8$, $p = 5 + 12 - 13 = 4$. Známe-li $p = 4$, $d = 1$, $v = 8$, rozložíme x, y, z následovně:

$$5 = p + d = 4 + 1,\ 12 = 4 + 8,\ 13 = 4 + 1 + 8.$$

2.2 Dva druhy nesoudělných trojic 1

Ze vztahů (2) nahlédneme, že

$$p = x - d = y - v, \tag{3}$$

$$d_1 = gcd\,(x, d), \quad x = d_1 w_1, \quad d = d_1 w_2, \quad gcd\,(w_1, w_2) = 1, \tag{4}$$

$$v_1 = gcd\,(y, v), \quad y = v_1 g_1, \quad v = v_1 g_2, \quad gcd\,(g_1, g_2) = 1, \tag{5}$$

$$d_1 = gcd\,(x, z - y) = gcd\,(x, x + y - z), \tag{6}$$

$$v_1 = gcd\,(x, z - x) = gcd\,(y, x + y - z), \tag{7}$$

$$p = d_1(w_1 - w_2) = v_1(g_1 - g_2). \tag{8}$$

V souladu s P1, kde $gcd\,(x, y, z) = 1$, je $gcd\,(d_1, v_1) = 1$. Podle (8) a podle Eukleidova lemmatu platí

$$d_1 | (g_1 - g_2) \ \text{ a } \ v_1 | (w_1 - w_2),$$

takže

$$g_1 - g_1 = d_1 \cdot k,\ w_1 - w_2 = v_1 \cdot k,$$

kde rozdíly $w_1 - w_2$, $g_1 - g_2$ mohou být nulové. Platí

$$gcd\,(w_1 - w_2, g_1 - g_2) = gcd\,(gcd\,(y, x + y - z) \cdot k, gcd\,(x, x + y - z) \cdot k) =$$
$$= k \cdot gcd\,(gcd\,(y, x + y - z), gcd\,(x, x + y - z)) = k \cdot 1 = k.$$

Trojici $[x, y, z]$ rozlišíme podle toho, zda $k = 1$, nebo $k \neq 1$.

2.3 Dva druhy nesoudělných trojic 2

Definice 1. Trojici $[x, y, z] \in \mathbf{N}^3$, kde $gcd\,(x, y, z) = 1$, nazýváme **primitivní** číselnou trojicí, právě když

$$k = \frac{x + y - z}{gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z)} = 1. \tag{9}$$

Vztahy (6), (7) a (9) definují číslo $p = d_1 v_1$, vztahy (1) a (2) tvar primitivní trojice $[x, y, z]$, kde

$$x = d_1 v_1 + d, \quad y = d_1 v_1 + v, \quad z = d_1 v_1 + d + v \tag{10}$$

a

$$p = x + y - z = d_1 v_1 = gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z).$$

2.4 Existují primitivní trojice? Jak je tvoříme? Jaký je jejich počet?

Celý důkaz je uveden v článku [3].

Nechť pro přirozená čísla d, v platí $gcd\,(d, v) = 1$ a počet dělitelů čísla d je t a počet dělitelů čísla v je q, pak z čísel d, v a jejich dělitelů lze vytvořit $t \cdot q$ primitivních číselných trojic.

Důkaz. Primitivní trojice je trojice *přirozených* nesoudělných čísel x, y, z a platí

$$k = \frac{x + y - z}{gcd(x, x + y - z)gcd(y, x + y - z)} = 1,$$

$$x = d_1v_1 + d,\;\; y = d_1v_1 + v,\;\; z = d_1v_1 + d + v,\; d = z - y,\;\; v = z - x,$$

$$p = x + y - z = d_1v_1 = gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z).$$

Podle (6) a (7) je

$$x = d_1w_1,\;\; d = d_1w_2,\;\; y = v_1g_1,\;\; v = v_1g_2.$$

Zda bude trojice primitivní, rozhodují čísla $d = z - y$ a $v = z - x$. Nesoudělná čísla d, v, zaručují i nesoudělnost čísel d_1, v_1.

Kolik primitivních trojic lze vytvořit z nesoudělné dvojice čísel d, v?

Pracujeme v oboru přirozených čísel. Dělitelé čísla d jsou $a_1, a_2, a_3, ..., a_t$, jejich počet je t. Dělitelé čísla v jsou $b_1, b_2, b_3, ..., b_q$, jejich počet je q. Proto lze vytvořit $t \cdot q$ primitivních trojic.

Když $p = d_1v_1$, pak při

$d_1 = a_1$, $v_1 = b_1$ získáme $p = a_1b_1$, což spolu s dvojicí d, v tvoří trojici

$$x = a_1b_1 + d,\; y = a_1b_1 + v,\; z = a_1b_1 + d + v,$$

$\vdots$

$d_1 = a_t$, $v_1 = b_q$ získáme $p = a_tb_q$, což spolu s dvojicí d, v tvoří trojici

$$x = a_tb_q + d,\; y = a_tb_q + v,\; z = a_tb_q + d + v.$$

Protože nesoudělných dvojic d, v je nekonečně mnoho, je také nekonečně mnoho primitivních trojic.

Co není primitivní trojice? Negace říká: Je to trojice $[X, Y, Z] \in \mathbf{N}$, která je buď soudělná, nebo platí $k \neq 1$.

Označení. Primitivní trojice označíme malými písmeny, trojice, které nejsou primitivní, písmeny velkými.

Definice 2: Trojici $[X, Y, Z] \in \mathbf{N}$, kde $gcd\,(X, Y, Z) = 1$, nazýváme **posunutou** trojicí primitivní trojice $[x, y, z]$, právě když

$$\frac{X + Y - Z}{gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z)} = k, \tag{11}$$

kde $k \in \mathbf{N}_0 \wedge k \neq 1$.

Vztahy (6), (7) a (11) definují číslo $P = k \cdot d_1 v_1$, vztahy (1) a (2) tvar posunuté primitivní trojice $[X, Z, Y]$, kde

$$X = k \cdot d_1 v_1 + d, \quad Y = k \cdot d_1 v_1 + v, \quad Z = k \cdot d_1 v_1 + d + v \tag{12}$$

a

$$P = X + Y - Z = k \cdot d_1 v_1 = k \cdot gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z).$$

2.5 Zdůvodnění názvu posunutá trojice

Porovnáme-li (10) a (12), dostaneme

$$X - x = kd_1v_1 + d - d_1v_1 - d = (k-1)d_1v_1 = u,$$
$$Y - y == kd_1v_1 + v - d_1v_1 - v = (k-1)d_1v_1 = u,$$
$$Z - z = kd_1v_1 + d + v - d_1v_1 - d - v = (k-1)d_1v_1 = u.$$

Číslo $u = (k-1)d_1v_1$ udává velikost posunutí primitivní trojice.
Posunutou trojici lze také zapsat ve tvaru

$$X = x + u, \quad Y = y + u, \quad Z = z + u, \tag{13}$$

kde $[x, y, z]$ je trojice primitivní a $u = (k-1)d_1v_1$ je velikost posunutí.

2.6 Primitivní nebo posunutá trojice?

Je trojice $[x, y, z] = [39, 80, 89]$ primitivní nebo posunutá?
Podle odstavce 2.1 dostaneme

$$p = 39 + 80 - 89 = 30, \quad d = 89 - 80 = 9, \quad v = 89 - 39 = 50,$$
$$d_1 = gcd\,(x, d) = 3, \quad v_1 = gcd\,(y, v) = 10, \quad d_1v_1 = 30 = p.$$

Podle definice z odstavce 2.3 dostaneme

$$p = 39 + 80 - 89 = k \cdot gcd\,(39, 30) \cdot gcd\,(80, 30) = k \cdot 3 \cdot 10.$$

Z rovnosti $p = 30 = 30 \cdot k$ plyne $k = 1$, což znamená, že trojice je primitivní.

Je trojice $[21, 28, 29]$ primitivní nebo posunutá?
Podle odstavců 2.1 a 2.4 dostaneme

$$P = 21 + 28 - 29 = 20, \quad d = 29 - 28 = 1, \quad v = 29 - 21 = 8,$$
$$d_1 = gcd\,(21, 1) = 1, \quad v_1 = gcd\,(28, 8) = 4,$$
$$k = \frac{P}{d_1v_1} = \frac{20}{4} = 5, \quad p = d_1v_1 = 4, \quad u = (k-1)p = (5-1)4 = 16.$$

Trojice $[x, y, z] = [21, 28, 29]$ je tedy trojice posunutá.

S využitím vztahu (13) má primitivní trojice $[x, y, z]$ tvar

$$x = X - u = 5, \quad y = Y - u = 12, \quad z = Z - u = 13.$$

3 Předpoklad P2

V následujícím textu budeme pracovat s nesoudělnými trojicemi, které jsou součástí rovnic. Proto dochází ke změnám v předpokladu.

Nechť exponenty rovnic
$$x^n + y^n = z^n, \;\; X^c + Y^b = Z^a$$
jsou čísla přirozená.

Bude-li $z \geq x + y$, pak při $n > 1$ je
$$z^n \geq (x+y)^n > x^n + y^n = z^n,$$
což vede ke sporu.

Nechť trojice $[x, y, z] \in \mathbf{N}$ je po dvou nesoudělná a nechť
$$max\,(x, y) < y < z < x + y \;\text{ a }\; p, d, v \in \mathbf{N}.$$
Pak je trojice $[X, Y, Z] \in \mathbf{N}$ také po dvou nesoudělná, $X < Y < Z \leq X + Y$ a trojice P, d, v je z oboru čísel celých.

3.1 Lemma 1

Nechť α, β, γ, k jsou daná kladná reálná čísla taková, že platí $\alpha^k + \beta^k = \gamma^k$. Pak pro reálné číslo $u \in (-k, 0)$ je výraz
$$F(\alpha, \beta, \gamma, k, u) = \alpha^{k+u} + \beta^{k+u} - \gamma^{k+u}$$
kladný a pro reálné číslo $u > 0$ je výraz $F(\alpha, \beta, \gamma, k, u)$ záporný. Při stejné trojici α, β, γ nemůže rovnost $\alpha^k + \beta^k = \gamma^k$ nastat pro dvě různé hodnoty k.

Je-li $x^n + y^n - z^n = 0$ a $x, y, z, n \in \mathbf{N}$, pak v souladu s P2 a Lemmatem 1 platí
$$...\, x^{n-1} + y^{n-1} - z^{n-1} > 0, \;\; x^n + y^n - z^n = 0, \;\; x^{n+1} + y^{n+1} - z^{n+1} < 0\, ... \tag{14}$$

Poznámka: Lemma 1 je jedním z cvičení matematické analýzy. Důkaz je uveden v [1].

3.2 Rozkladem k pythagorejské trojici

V souladu s P2 platí
$$x^2 + y^2 - z^2 = (p+d)^2 + (p+v)^2 - (p+d+v)^2 = p^2 - 2dv = 0.$$

Nechť jsou přirozená čísla d, v opačné parity. Dále nechť pro přirozená čísla r, s, platí, že r je liché, s je libovolné a $gcd\,(r, s) = 1$.

Je-li $r < s$, $d = r^2$, $v = 2 \cdot s^2$, pak $x < y < z < x + y$.

Příklad: Nechť $r = 3$, $s = 5$, pak $d = r^2 = 9$, $v = 2s^2 = 50$, $p = \sqrt{2dv} = 30$. Trojice má tvar $x = p + d = 30 + 9 = 39$, $y = p + v = 30 + 50 = 80$, $z = 30 + 9 + 50 = 89$.

Je-li $r > s$, $d = 2s^2$, $v = r^2$, pak $x < y < z < x + y$.

Příklad: Nechť $r = 3$, $s = 1$, pak $d = 2s^2 = 2$, $v = r^2 = 9$, $p = \sqrt{2dv} = \sqrt{2 \cdot 18} = 6$. Trojice má tvar $x = p + d = 6 + 2 = 8$, $y = p + v = 6 + 9 = 15$, $z = 6 + 2 + 9 = 17$.

Závěr: Nalezneme-li přirozené číslo p takové, že pro vhodně zvolená nesoudělná přirozená čísla d, v opačné parity platí $p = \sqrt{2dv}$, pak čísla p, d, v vytvoří pythagorejskou trojici $x = p+d, \ \ y = p+v, \ \ z = p+d+v$, pro kterou $x^2 + y^2 = z^2$.

3.3 Jaká je trojice, která řeší rovnici $x^2 + y^2 = z^2$?

Nechť v souladu s P2 platí $x = r^2 - s^2, \ y = 2rs, \ z = r^2 + s^2$, čísla r, s jsou opačné parity, $r > s$ a $gcd\,(r, s) = 1$. Pak

$$x + y - z = r^2 - s^2 + 2rs - r^2 - s^2 = 2rs - 2s^2 = 2s(r - s),$$
$$gcd\,(x, x + y - z) = gcd\,(r^2 - s^2, 2s(r - s)) = r - s,$$
$$gcd\,(y, x + y - z) = gcd\,(2rs, 2s(r - s)) = 2s.$$

Podle odstavce 2.3 platí

$$x + y - z = k \cdot gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z),$$
$$2s(r - s) = k \cdot (r - s)2s.$$

Protože $k = 1$, jde o primitivní trojici.

3.4 Je-li $n > 1$, pak posunutá trojice rovnici $X^n + Y^n = Z^n$ neřeší

Důkaz: Definice primitivní trojice říká: Trojice je nesoudělná a $k = 1$. Trojice, která není primitivní, je její negací, což znamená, že jde o trojici, která je buď soudělná, nebo $k \neq 1$. Podle Definice 2 z odstavce 2.3 je takovou trojicí trojice posunutá. Proto se primitivní a posunutá trojice navzájem vylučují.

Primitivní trojice, při $p = \sqrt{2dv}$, řeší rovnici $x^2 + y^2 = z^2$. Posunutá trojice ji neřeší.

Zkoumejme trojici X, Y, Z v rovnici s $n = 1$. Zde je $X + Y = Z$. Podle (1) je $P = 0$, $P = X + Y - Z = k \cdot gcd\,(X, 0) \cdot gcd(Y, 0)$. Proto je $k = 0$. Protože $k \neq 1$, je trojice X, Y, Z posunutá.

Nalezli jsme přirozená čísla $X, Y, Z, 1$, která rovnici řeší. Podle Lemmatu 1 přirozená čísla $n > 1$, ani $n < 1$ rovnici neřeší.

3.5 Jiný pohled na Fermatovu hypotézu

Podle odstavce 3.4 posunutá trojice rovnici s $n > 1$ neřeší. Rovnici $x^n + y^n = z^n$, pokud řešení pro $n > 1$ existuje, řeší pouze trojice primitivní.

3.5.1 n je liché prvočíslo

Nechť trojice $[x, y, z]$ splňuje v P2 uvedené předpoklady. Dále nechť $z^n = x^n + y^n$ a $[x, y, z] \in \mathbf{N}$ je primitivní trojice. Pak $z^n = (x+y) \cdot (-1)^{k+1} x^{n-k} y^{k-1}$.

Protože je $x + y > 1$, existuje přirozené číslo $z_1 > 1$, pro které podle Eukleidova lemmatu platí $z_1|x + y$, $z_1|z$, $z_1|x + y - z$ a podle odstavce 2.3 platí $z_1|gcd\,(x, x + y - z) \cdot gcd\,(y, x + y - z)$. Je patrné, že z_1 dělí jedno z čísel $gcd\,(x, x + y - z)$, $gcd\,(y, x + y - z)$. Nechť $z_1|gcd\,(y,\ x + y - z)$, pak $z_1|y$. Protože $z_1|z$ a $z_1|y$, je $gcd(z, y) > 1$, což je spor s P2.

3.5.2 $n = 4$, x je liché, y je sudé

Nechť trojice $[x, y, z]$ splňuje v P2 dané předpoklady. Dále nechť $z^4 = x^4 + y^4$ a $[x, y, z] \in \mathbf{N}$ je primitivní trojice. Pak je $x^4 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2) = (z^2 - y^2)(2y^2 + z^2 - y^2)$, $gcd\,(z^2 - y^2, z^2 + y^2) = 1$, $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) > 1$.

Nechť liché číslo $\beta > 1$ je součástí prvočíselného rozkladu čísla $z^2 - y^2$, pak $\beta|(z^2 - y^2)$ a $\beta|x$. Existují $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$, kde $x = \beta \cdot m_1$, $z^2 - y^2 = \beta \cdot m_2$.

Nechť liché číslo $\pi > 1$ je součástí prvočíselného rozkladu čísla $z^2 + y^2$, pak $\pi|x$, $\pi|(z^2 + y^2)$. Existují $u_1, u_2 \in \mathbf{N}$, kde $x = \pi \cdot u_1$, $z^2 + y^2 = \pi \cdot u_2$.

Takže je $x^4 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2) = \beta \cdot m_2 \cdot \pi \cdot u_2$.

Nechť liché číslo $m_2 > 1$ je součástí prvočíselného rozkladu čísla $z^2 - y^2$, pak $m_2|(z^2 - y^2)$ a $m_2|x$. Protože $\beta|x$ a $m_2|x$, existují $m_1, q \in \mathbf{N}$, kde $x = \beta \cdot m_1$, $x = m_2 \cdot q$, tedy $x^2 = \beta \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot q$. Pak je

$$x^4 = \beta^2 \cdot m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot q^2 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2) = (z^2 - y^2)(2y^2 + z^2 - y^2),$$

$$\beta^2 \cdot m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot q^2 = \beta \cdot m_2 \cdot (2y^2 + \beta \cdot m_2),$$

$$\beta \cdot m_2 \cdot m_1^2 \cdot q^2 = 2y^2 + \beta \cdot m_2,$$

$$2y^2 = \beta(m_2 \cdot m_1^2 \cdot q^2 - m_2). \tag{15}$$

Liché číslo $\beta > 1$ nedělí číslo 2, dělí sudé číslo y. Proto $\beta|y$, $\beta|x$ a $gcd\,(x, y) > 1$, což je spor s P2.

Závěr: Pro $n \geq 3$ neexistuje primitivní trojice, která by řešila rovnici $z^n = x^n + y^n$.

3.6 V rovnici $Z^c + X^a = Y^b$ je nad největším mocněncem nejmenší exponent, nad nejmenším mocněncem je exponent největší

Důkaz: Nechť trojice $[X, Y, Z]$ splňuje v P2 uvedené předpoklady. Pak $Z > Y > X$ a z trojice $(q, m, h) \in \mathbf{N}$ vybereme jeden z exponentů.

Je-li $Z > Y$, je $Z^m > Y^m$. Pak existuje $u_1 \in \mathbf{N}$ takové, že $Z^m = Y^m + u_1$. Existuje-li $u_2 \in \mathbf{N}$ ve vztahu $0 < u_2 < u_1$ takové, že $Z^m = Y^h + u_2$, pak $Z^m > Y^h$ a $h > m$.

Je-li $Y > X$, je $Y^h > X^h$. Pak existuje $w_1 \in \mathbf{N}$ takové, že $Y^h = X^h + w_1$. Existuje-li $w_2 \in \mathbf{N}$ ve vztahu $0 < w_2 < w_1$ takové, že $Y^h = X^q + w_2$, pak $Y^h > X^q$ a $q > h$.

Z předpokladu $Z > Y > X$ jsme dospěli ke vztahu $m \leq h \leq q$.

Poznámka: Nemusí vždy platit $Z^m > Y^h > X^q$, např. v případě $2^5+7^2 = 3^4$, kde je $X^q < Z^m < Y^h$.

Podle existence přirozených čísel u_2, w_2 platí pro exponenty jeden ze vztahů

a) $q > h > m$, b) $q \geq h > m$, c) $q > h \geq m$, d) $q = h = m$.

Poznámka: V rovnici $Z^c + X^a = Y^b$ platí pro exponenty a, b, c nerovnosti $c \leq b \leq a$.

3.7 Nejmenší exponent v rovnici $X^c + Y^b = Z^a$ je nejvýše 2

Důkaz: Nechť trojice $[X, Y, Z]$ splňuje v P2 uvedené předpoklady a $a = min\,(a, b, c)$.

Je-li $a = 1$, pak primitivní trojice rovnici $x^n + y^n = z^1$ neřeší. Podle odstavce 3.4 rovnici řeší posunutá trojice $[X, Y, Z]$, kde $X^c + Y^b = Z^1$.

Je-li $a = 2$, pak rovnici $x^2+y^2 = z^2$ řeší primitivní trojice. Podle odstavce 3.4 posunutá trojice rovnici $X^2 + Y^2 = Z^2$ neřeší.

Je-li $a > 2$, pak podle odstavce 3.3 primitivní trojice rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ neřeší. Podle odstavce 3.6 v posunuté trojici $[X, Y, Z]$ je nejmenší exponent nad největším mocněncem. Pozorujme postupně, že

$$0 = X^c + Y^b - Z^a = X^a + Y^a - Z^a + X^a(X^{c-a} - 1) + Y^a(Y^{b-a} - 1),$$
$$X^a + Y^a - Z^a = -X^a(X^{c-a} - 1) - Y^a(Y^{b-a} - 1) \leq 0.$$

Rovnost nastane, je-li $a = b = c = 1$ nebo $a = 2$, což platí v rovnici $2^c + Y^2 = (2 + Y)^2$, kde $c \geq 3$ a $Y = 2^{c-2} - 1$. Důkaz je v odstavci 3.8.
Je-li $a > 2$, pak posunutá trojice rovnici $X^a + Y^a = Z^a$, v souladu s Lemmatem 1, neřeší.

3.8 Řešení rovnice $X^c + Y^b = (X + Y)^2$

Nabízí se otázka, zda může být v rovnici $X + Y = Z$ nad největším z čísel X, Y, Z nejmenší exponent 2.

Zkoumejme rovnici $X^c + Y^b = (X + Y)^2$. Pak

$$X^c + Y^b = X^2 + 2XY + Y^2 \quad \text{a} \quad X^2(X^{c-2} - 1) + Y^2(Y^{b-2} - 1) = 2XY.$$

Položme $X = 2$ a $b = 2$. Pak $2^2(2^{c-2} - 1) + Y^2(Y^{2-2} - 1) = 2 \cdot 2 \cdot Y$.
Zde $2^2(2^{c-2} - 1) = 2 \cdot 2 \cdot Y$ a $(2^{c-2} - 1) = Y$. Trojice $[2, Y, 2 + Y]$ je trojicí posunutou, pro kterou platí $2^c + Y^2 = (2 + Y)^2$, kde $Y = 2^{c-2} - 1$.

Z nekonečného množství alespoň čtyři příklady:
$2^3 + 1^2 = 3^2$, $2^5 + 7^2 = 9^2$, $2^7 + 31^2 = 33^2$, $127^2 + 8^3 = 129^2$.

3.9 Tvorba nesoudělné trojice

Pouze následující první řádek – primitivní pythagorejská trojice, a devátý řádek – posunutá trojice, umožňují tvorbu nesoudělné trojice podle vzorce:

$$x^2+y^2=z^2,\ p=\sqrt{2dv},\ x=p+d,\quad y=p+v,\quad z=p+d+v$$
$$X+Y=Z,\ Z=X+Y,\ 1+3^3=28$$
$$X^n+X^n=Z,\ Z=X^n+Y^n,\ 2^3+3^3=35$$
$$Z+X^n=Y^n,\ Z=Y^n-X^n,\ 117+2^3=5^3$$
$$X^n+Z=Y^n,\ Z=Y^n-X^n,\ 1^4+15=2^4$$
$$X^c+Y^b=Z^a,\ 5^4+6^3=29^2$$
$$X^c+Z^a=Y^b,\ 2^5+7^2=3^4$$
$$Y^b+Z^a=X^c,\ 1414^3+2213459^2=65^7$$
$$2^c+Y^2=(2+Y)^c,\ Y=2^{c-2}-1,\ 2^5+7^2=(2+7)^2$$

3.10 Tvorba soudělné trojice obecně

Nechť v rovnici $X^c+Y^b=Z^a$ je trojice $[X,Y,Z]$ po dvou nesoudělná a $a=min(a,b,c)\leq 2$. Vynásobením rovnice číslem Z^{bc} dostaneme $(XZ^b)^c+(YZ^c)^b=Z^{a+cb}$.

3.11 Tvorba soudělné trojice – příklady

Ukažme si několik příkladů, jak se dají tvořit soudělné trojice:
$$x^2+y^2=z^2;\quad 3^2+4^2=5^2\ \ /\cdot(45^6)^4\ \Rightarrow\ (45^4\cdot 3)^6+(45^6\cdot 6)^4=45^{26}$$
$$X+Y=Z;\quad 1+15=2^4\ \ /\cdot 225^4\ \Rightarrow\ 15^8+3375^3=450^4$$
$$X^n+X^n=Z;\quad 2^3+5^3=133\ \ /\cdot 133^3\ \Rightarrow\ 266^3+665^3=133^4$$
$$Z+X^n=Y^n;\quad 169+7^3=8^3\ \ /\cdot 169^3\ \Rightarrow\ 169^4+1183^3=1352^3$$
$$X^n+Z=Y^n;\quad 3^3+37=4^3\ \ /\cdot 37^3\ \Rightarrow\ 111^3+37^4=148^3$$
$$X^c+Y^b=Z^a;\quad 5^4+6^3=29^2\ \ /\cdot(29^4)^3\ \Rightarrow\ (5\cdot 29^3)^4+(6\cdot 29^4)^3=29^{14}$$
$$X^c+Z^a=Y^b;\quad 2^5+7^2=3^4\ \ /\cdot(7^4)^5\ \Rightarrow\ (2\cdot 7^4)^5+7^{22}=(3\cdot 7^5)^4$$
$$Y^b+Z^a=X^c;\quad 5^2+7^1=2^5\ \ /\cdot(7^2)^5\ \Rightarrow\ (5\cdot 7^5)^2+7^{11}=(2\cdot 7^2)^5$$

3.12 Nalezení nesoudělné trojice

Z rovnosti $105^3+70^3=35^4$ je patrné, že $105^3+70^3-35^4=0$. Čísla 105^3, 70^3, 35^4 tvoří posunutou trojici. Stačí provést rozklad $105^3=5^3\cdot 3^3\cdot 7^3$ a $70^3=7^3\cdot 5^3\cdot 2^3$. Jelikož je $gcd(105^3,70^3)=35^3$, tak rovnost $105^3+70^3= =35^4$ podělíme největším společným dělitelem 35^3. Takto získáme nesoudělnou trojici čísel 3^3, 2^3, 35, kde $3^3+2^3=35$.

Podobně je $4\,802^5+7^{22}=50\,421^4$, $(2\cdot 7^4)^5+7^{22}=(3\cdot 7^5)^4$, $gcd\,((2\cdot 7^4)^5,7^{22})=7^{20}$, $(2\cdot 7^4)^5+7^{22}=(3\cdot 7^5)^4$, $2^5+7^2=3^4$.

4 Závěr

Rozklad nám ukázal, že existují dva druhy nesoudělných trojic, které se navzájem vylučují. Rovnici s $n = 2$ řeší primitivní trojice, rovnici s $n = 1$ řeší posunutá trojice. Rovnici s $n > 2$ neřeší ani primitivní, ani posunutá trojice.

Z negace primitivní i posunuté trojice vyplývá, že rovnici s exponentem větším než 2, který je nad největším z mocněnců, řeší pouze trojice soudělná, což potvrzuje platnost Bealovy domněnky.

Literatura

[1] Singh, S.: *Velká Fermatova věta.* Academia, Praha, 2002.

[2] Kocanda, L.: Jak mohl Fermat uvažovat. *Kvaternion*, č. 1, 2013.

[3] Kocanda, L.: Rozkladem číselné trojice k důkazu Bealovy domněnky. *Sborník příspěvků 8. ročníku konference učitelů matematiky*, Přírodovědecká fakulta, Hradec Králové, 2017.

Numerix II – prototyp metodické pomůcky pro výuku matematiky

Kryštof Kozák, Loris Games, s.r.o.

Abstrakt: Numerix II navazuje na úspěšnou pomůcku k procvičování základních aritmetických operací. Jedná se o komplexní metodickou pomůcku pro výuku matematiky určenou především pro první stupeň základních škol. Jde o matematickou stavebnici, jejímž základem je pestrá sada hracích kostek ve tvaru všech platónských těles, žetony, figurky a čtyři modulární herní plány s matematickými prvky. Za pomoci těchto základních komponent lze vytvořit desítky matematických her nejrůznější obtížnosti, které jsou popsány v metodické příručce.

1 Úvod

Žáci mají různé nadání pro matematiku. Někteří jsou rychlí, někteří pomalejší. Představa, že v rámci jedné třídy nutíme všechny děti dostat se na stejný standard, je chybná a škodlivá. Nicméně tak se doposud k její výuce v českých školách standardně přistupuje.

Ti, kteří jsou na matematiku nadanější, se v hodinách nudí – předkládané příklady snadno a rychle vyřeší. Ti, kteří jsou méně nadaní, se celé roky trápí, dostávají špatné známky a snižuje se jejich sebevědomí – učitel matematiky si o nich zpravidla myslí, že jsou „hloupí“. Nezřídka to dává před celou třídou najevo.

Průměrní žáci pak dostávají známky podle toho, nakolik se doma se svými rodiči připravují. Matematika je často nebaví, ale jsou rádi, že ji „zvládají“ [1].

2 Matematika hrou

Hlavním cílem projektu je jednak rozvinout schopnost abstraktního numerického myšlení u nadaných žáků, ale zejména vytvořit u všech žáků vztah k matematickému myšlení, který je založen na konkrétních vizuálních a hmatových vjemech, jež nicméně směřují k matematické abstrakci [2]. Forma hry napomůže k pozitivní proměně pohledu na matematiku u těch žáků, kteří její přínos pro svůj život jen obtížně hledají. Projekt proto také vědomě pracuje s fascinujícími matematickými souvislostmi (např. Pascalův trojúhelník), které dokáže vizuálně přesvědčivě demonstrovat [3].

3 Alternativní hodnocení a postupy na vyšší úroveň

Druhotným cílem projektu je zavést alternativní způsob hodnocení založeného na postupném získávání stupňů na předem definovaném schodišti. Žáci tedy mohou ve hrách procvičovat svoje znalosti, a připravovat se tak na zkoušku, každý podle svého tempa. Prvním stupněm je samotné rozeznávání čísel na kostkách pro nejmladší žáky, jedním z posledních stupňů je pak pochopení nemožnosti předpovědět další prvočíslo.

Za pomoci herního materiálu si žáci mohou vytvářet vlastní hry na vlastních herních plánech. Podařené hry a herní plány bude možné jednoduše sdílet na portálu projektu.

Učitel dobře ví, na které úrovni v matematice je každý z jeho žáků ve třídě. Každá hodina je věnována tomu, aby se žáci dostali na vyšší úroveň. Žáci na vyšší úrovni pomáhají žákům na nižší úrovni, aniž by je u toho zesměšňovali. Vědí, že už jsou na vyšší úrovni. Sami se tím hodně naučí.

Postup na vyšší úroveň se ověřuje jednoduchým testem, který je možné opakovat a který není známkovaný.

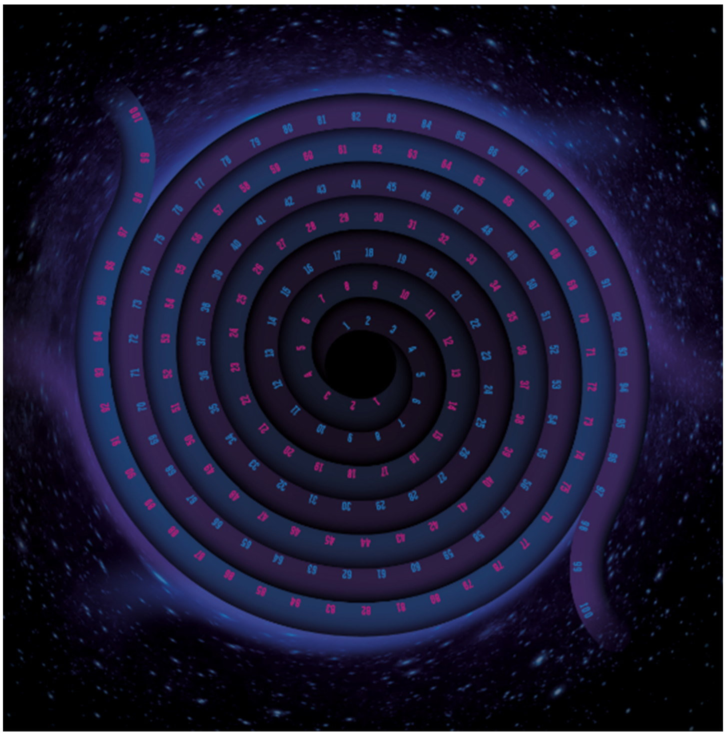
Hlavní úkol učitele matematiky je motivovat všechny žáky, aby se svým tempem dostávali na vyšší úrovně, a pomáhat jim v tom, aby tohoto cíle dosáhli. Za úspěšný postup na vyšší úroveň dostane každý místo známky malý odznáček (tzv. badge). Získávání odznáčků je důležitou motivací pro učení se nových věcí.

Ve škole pak mohou probíhat speciální odpolední semináře pro ty, kteří jsou v matematice na vyšší úrovni než jejich spolužáci. Jejich cílem je získání dalších, náročnějších úrovní. Zároveň ve škole probíhají speciální odpolední semináře pro ty, kteří jsou v matematice na nižší úrovni než jejich spolužáci. Jejich cílem je, aby i ti méně nadaní měli z matematiky radost a zároveň postoupili na vyšší úroveň.

4 Obsah krabice

V krabici se nachází:

- 2× oboustranný herní plán
- 20 figurek v pěti různých barvách
- 40 stříbrných žetonů
- 20 zlatých žetonů
- 6× šestistěnná kostka
- 2× čtyřstěnná kostka
- 2× osmistěnná kostka



Obr. 1: První návrh spirály, autor Jan Čermák

- 2× desetistěnná kostka
- 2× dvanáctistěnná kostka
- 2× dvacetistěnná kostka
- 2× desetistěnná kostka 10–20–30– – –100

První herní plán vypadá jako herní plán k *Člověče, nezlob se*, nicméně na políčkách jsou umístěny základní matematické operátory, které činí hru zajímavější. Hráči také mohou v průběhu hry získat lepší než šestistěnnou kostku, což hru ke konci zrychluje.

Druhý herní plán vypadá jako čtvercová matice s poli od jedné do 100. Hráči mají za úkol vyšplhat se od startu na poli 1 až na pole 100. Mezi čísly fungují na základě matematických vztahů různé žebříky (například na základě násobilky), které hru urychlují. Žáci si tak procvičí zejména sčítání a vizuálně se seznámí s problematikou násobení.

Třetí herní plán vypadá jako klasická spirála (obr. 1). Hráči začínají na poli 100 a musí se dostat do nuly, která vizuálně vytváří černou díru. Plán je tak zaměřený na problematiku odčítání. Směrem k černé díře se prostor na herním plánu zakřivuje, což umožňuje napojení na výuku fyziky.

Čtvrtý herní plán vychází z keltského labyrintu, který má sám o sobě zajímavé matematické pozadí (obr. 2). Úkolem hráčů je po očíslovaných polích dojít do středu labyrintu a zpět. Hlavní roli na tomto plánu hrají prvočísla, která hráčům pomáhají získávat lepší kostky. Tento plán slouží jako evokativní

Obr. 2: Keltský labyrint, zdroj Wikimedia Commons

pro problematiku prvočísel a vizuálně poukazuje na komplexnější a záhadnější aspekty matematiky.

Kostky a žetony pak slouží k jednodušším hrám založeným na sčítání a násobení stále větších čísel. Ve vyšších ročnících je pak možné hrát i hry založené na pravděpodobnosti.

5 Obsah krabice

Metodická příručka je zatím ve stadiu vývoje, nicméně její předběžný obsah vypadá takto:

1. Význam a krása matematiky
2. Hry primárně pro předškoláky
3. Hry primárně pro 1. třídu
4. Hry primárně pro 2. třídu
5. Hry primárně pro 3. třídu
6. Hry primárně pro 4. třídu
7. Hry primárně pro 5. třídu
8. Postupování na úrovně – jak na to?
9. Bonusové úkoly pro nadané
10. Bonusové čtení pro zvídavé

6 Závěr

Numerix II si klade za cíl, aby se nikdo matematiky nebál, a navíc měl radost z toho, že se při vynaložení dostatečné píle může dostat na vyšší úroveň. Forma hry a vizuálně přitažlivé herní plány by k tomuto cíli měly dopomoci.

Literatura

[1] Kozák, K.: *Jak místo vyhrocených diskusí nad maturitou z matematiky zlepšit její výuku.* `www.blisty.cz`.

[2] Bertola, L.: *Matematika hrou, V Lesní zemi.* Pikola, 2019.

[3] Zelinka, B.: *Matematika hrou i vážně.* Mladá fronta, Praha, 1979.

Ani jeden matematický klokan nazmar

Josef Molnár, KAM, PřF UP, Olomouc

Abstrakt: Článek připomíná vznik Matematického klokana na mezinárodní úrovni, hlavně však popisuje začlenění České republiky do této soutěže. Je popsána struktura soutěžních úloh a pravidla soutěže. Je také zmíněn význam citované soutěže.

Kde se vzal Matematický klokan? Koncem 70. let minulého století inicioval australský matematik Peter O'Halloren matematickou soutěž, která by mohla zaujmout jak matematické talenty, tak žáky, kteří v hodinách matematiky nepatří k těm nejlepším. Tuto myšlenku převzali André Deledicq a Jean Pierre Boudine a v roce 1991 uspořádali podobnou soutěž ve Francii a na počest australských přátel ji nazvali Kangourou (Klokan). V roce 1994 se do soutěže zapojilo sedm dalších evropských zemí sdružených v asociaci Kangourou sans frontières (AKSF).

Přestože již dříve se první zmínky o Klokanovi objevily i u nás (Michaela Kaslová se zúčastnila jednání v Paříži a žáci na našich školách s polským vyučovacím jazykem řešili Klokanovy úlohy zaslané polskými pořadateli), byl rok 1994 v této souvislosti významný i pro české žáky a jejich učitele matematiky. V létě toho roku se v bulharském Pravci konal kongres Světové federace národních matematických soutěží (WFNMC), kterého se za ČR zúčastnili Josef Molnár a Jaroslav Švrček, kteří měli možnost se se soutěží i jejími pořadateli blíže seznámit. A na podzim téhož roku na podzimní škole péče o talenty s mezinárodní účastí s názvem MAKOS první ze jmenovaných vyhlásil soutěž Matematický klokan (dále MK) pro Českou republiku. Pořádání MK se ujala Jednota českých matematiků a fyziků, konkrétně její olomoucká pobočka, jejíž členové ve spolupráci s Přírodovědeckou a Pedagogickou fakultou UP organizují MK doposud.

Hned prvního ročníku v roce 1995 se MK účastnilo téměř 25 tisíc žáků a Josef Molnár se na setkání pořadatelů „Klokana“ v jednotlivých zemích v Eindhovenu stal akreditovaným zástupcem ČR v AKSF. Postupem času se podařilo vytvořit pevnou organizační strukturu prostřednictvím okresních, později krajských důvěrníků a organizátorů na jednotlivých školách. Koncem 90. let byl MK zařazen mezi soutěže typu A, tedy plně hrazené z prostředků MŠMT ČR. V současné době v AKSF zastupuje Českou republiku JČMF a tzv. agentem je Vladimír Vaněk.

Je fascinujícím pomyšlením, že miliony žáků sedmi desítek zemí pěti kontinentů zasednou téměř současně (obvykle ve třetím březnovém týdnu) do lavic k řešení téměř stejných úloh. Jak tedy vypadá jeden rok s Klokanem? V září odešlou pořadatelé MK z jednotlivých zemí své návrhy soutěžních úloh pořadatelům mítinku AKSF (v pořádání se jednotlivé země střídají, (v roce 2000 jsme pořádali mítink AKSF my, a to v Čelákovicích), kteří je vyvěsí na chráněnou webovou stránku, kde je možno se se znalostí hesla a matematiky k úlohám vyjádřit. Jednotlivé do MK zapojené země vysílají na mítink své zástupce, kteří ze stovek, případně tisíců navržených úloh v jednotlivých sekcích vybírají soutěžní úlohy pro daný ročník. Do konce kalendářního roku se ještě vybrané úlohy kontrolují a pak překládají z angličtiny, v našem případě do češtiny. Po Novém roce se na semináři Klokani v Jeseníkách úlohy optimalizují a následně upravují do podoby, která je pak krátce před datem konání umístěna na stránce přístupné jen pořadatelům. Ve třetím březnovém týdnu proběhne soutěž a v průběhu dubna a května se výsledky sumarizují a umísťují na webové stránky Klokana [1], v červnu se předávají ceny nejlepším řešitelům, zpracovává a vydává se ročenka s ISSN 2533-3305. O prázdninách pak některé země pro řešitele pořádají tzv. Kangaroo kempy; deset českých úspěšných řešitelů ve věku 15 – 16 let bývá pozváno německými pořadateli na tábor s bohatým matematickým i rekreačním programem poblíž Berlína, kde se setkají se stovkou účastníků z dalších deseti evropských zemí.

Proč organizujeme Klokana? Hlavní cíle této soutěže jsou dva. Jedním z nich je popularizace matematiky, a to nejen mezi žáky, ale i mezi jejich rodiči, prarodiči a celou veřejností. Jde o to dopřát každému žákovi aspoň dílčí radost z toho, že správně vyřešil několik matematických úloh bez ohledu na jeho výsledky v hodinách matematiky. Tomuto cíli jsou podřízena jednak pravidla i organizační řád soutěže, ale též soutěžní úlohy.

Jak tedy mají vypadat správné „klokanské“ úlohy? Samozřejmě musí jít o otázky typu multiple-choice, tedy o otázky otevřené s nabídkou pěti možností s právě jednou správnou odpovědí, přičemž zbývající distraktory nejsou voleny libovolně – mohou řešitele mást, ale též jim pomáhat, pokud se jim podaří některé nebo všechny vyloučit. Vzhledem k tomu, že na řešení jedné úlohy mají žáci v průměru dvě a půl minuty, musí být zadání stručné a srozumitelné (často si vypomáháme obrázky), ale přitom mají být otázky vtipné, neotřelé, nestandardní, vycházet z úrovně myšlení i předpokládaných znalostí, schopností a dovedností soutěžících, ale nezávislé na obvyklé formulaci typických školských matematických úkolů, ceněné jsou úlohy, které lze řešit více způsoby – například rychlým vhledem, tedy vtipným nápadem často vycházejícím z obrázku, nalezením matematického modelu postupu řešení, které bývá zdlouhavější, ale vede k cíli, výše zmíněným vyloučením distraktorů, či jinak. Není výjimkou, že někteří jedničkáři se mezi nejlepší řešitele nedostanou, a naopak, úspěšní řešitelé Klokana nedosahují v hodinách matematiky těch nejlepších výsledků. Tím se dostáváme ke druhému cíli, kterým je vyhledávání matematicky talentovaných žáků, obecně pak vyhledávání přemýšlivých dětí.

Kdo jsou přemýšlivé děti? Na internetových stránkách Nadace RSJ [2] se o pojmu, vytvořeném právě na půdě této nadace, můžeme dovědět například toto: „Přemýšlivé děti myslí jinak. Nepřetržitě. Jsou nápadité. Mohou být nepříjemně logické a tvrdohlavé, velmi kritické a sebekritické, přecitlivělé. Některé tvoří složité, výstižné větné konstrukce, jiné mluví málo z obavy, aby se nevyjádřily špatně... Mají výbornou paměť, rády experimentují, uvažují abstraktně. Mají totiž vysoce rozvinuté rozumové schopnosti a představivost. Často ale bývají až příliš dychtivé po nových informacích..., zažívají vysokou míru stresu nebo se jim nedaří najít si kamarády a spolupracovat s učiteli ..., mohou své vrozené schopnosti potlačovat. Popírají samy sebe, jsou frustrované a unikají do sociální izolace. A to chceme změnit.“

Literatura

[1] `www.matematickyklokan.net`

[2] `www.premyslivedeti.cz/`

Hrajeme si s letopočtem – devatenáct úloh s číslem 2019 (a jedna navíc)

Evžen Müller, G, SOŠ, SOU a VOŠ Hořice

Abstrakt: Článek prezentuje 20 velice hezkých numerických úloh z různých matematických soutěží. Úlohy jsou středně obtížné, využitelné na středních i základních školách, ale i dalšími zájemci. Jednotným prvkem všech úloh je letošní letopočet 2019.

1 Úvod

Matematické soutěže obsahují velmi často úlohy spojené s aktuálním letopočtem. Letošní Pythagoriáda, Matematický klokan, MO, Náboj, IMO, korespondenční semináře nebyly výjimkou - zde všude jsme mohli zaznamenat zvýšený výskyt čísla 2 019.

Při přípravě žáků na uvedené soutěže, při práci v matematických kroužcích se vždy vyplatí mít v zásobě dostatek podobných úloh. Následující text nabídne dvacet takových problémů nejrůznější náročnosti. V souladu s pravidly většiny výše zmiňovaných soutěží by měly být příklady řešeny bez kalkulaček a dalších elektronických pomůcek. S jedinou výjimkou (čtvrtá úloha) byly vybrány právě takové úlohy.

Podívejme se nejprve na číslo 2019. Rozložíme-li 2019 na součin prvočísel $2019 = 3 \cdot 673$, tak to neslibuje nic moc. No, trápit se tím ale nebudeme...

2 Jednotlivé úlohy

2.0 Úloha nultá – úloha typu „každý rok je to jinak“

Kolik různých přirozených dělitelů má číslo 2019^{2019}*?*

Řešení: Postupně pro prvočíselný rozklad čísla 2 019 platí

$$2019 = 3 \cdot 673,$$

$$2019^{2019} = 3^{2019} \cdot 673^{2019}.$$

Přirozených dělitelů čísla 2019^{2019} je

$$(2019 + 1) \cdot (2019 + 1) = 2020^2 = 4\,080\,400.$$

Každý rok má jiný prvočíselný rozklad, a výsledky se tedy rok od roku značně liší. Navíc se blíží docela nudné „prvočíselné“ roky 2027 a 2029.

V tomto příspěvku dáme raději přednost úlohám, při jejichž řešení postupujeme obdobně bez ohledu na letopočet, na němž délka a obtížnost řešení nezávisí, a které v blízké budoucnosti povedou ke stejnému nebo nepříliš odlišnému výsledku. Úvodní úloha taková rozhodně nebyla, a proto jí říkejme „nultá“.

2.1 Úloha první – „šťastný“ rok pro pověrčivé

Ve kterém nejbližším „šťastném“ roce bude opět třináctého v pátek? Letos to vyšlo...

Řešení: Rok, ve kterém ani jednou nebude třináctého v pátek, nemůže nastat. Stačí prozkoumat tabulku. Snadno nahlédneme, že třináctý den v měsíci prostřídá v běžném i přestupném roce všechny dny v týdnu, obr 1.

Úloha není náročná, je ale poněkud pracná...

Letos je třináctého...

Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
neděle	středa	středa	sobota	pondělí	čtvrtek	sobota	úterý	pátek	neděle	středa	pátek
7	3	3	6	1	4	6	2	5	7	3	5

V přestupném roce začínajícím pondělím je třináctého...

Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen	Září	Říjen	Listopad	Prosinec
sobota	úterý	středa	sobota	pondělí	čtvrtek	sobota	úterý	pátek	neděle	středa	pátek
6	2	3	6	1	4	6	2	5	7	3	5

Obr. 1: Tabulka pro první úlohu

2.2 Úloha druhá – pravidelný mnohoúhelník

Kolik úhlopříček má pravidelný 2019úhelník?

Řešení: Z každého vrcholu n-úhelníku vede úhlopříčka do $n-3$ vrcholů (kromě sebe samého nevede do vrcholů sousedních). Celkový počet úhlopříček je tedy

$$u_n = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

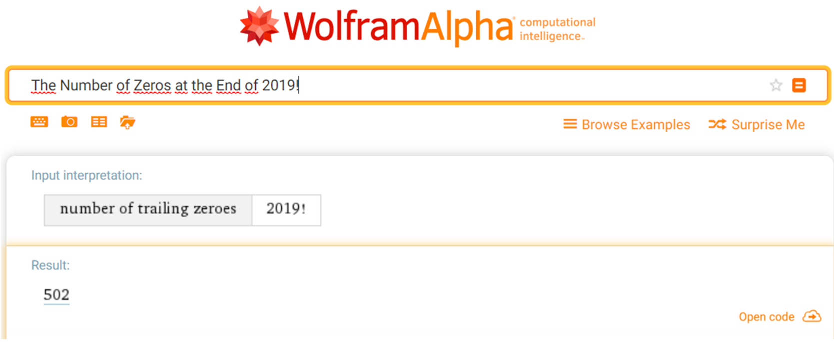
a pro $n = 2019$ dostáváme

$$u_n = \frac{2019\,(2019-3)}{2} = 2\,035\,152.$$

Příští rok vyjde „jen“ o něco více...

2.3 Úloha třetí – faktoriál

Urči, kolika nulami končí zápis čísla $a = 2\ 019!$



Obr. 2: Výsledkem třetí úlohy ve Wolframu Alpha [1]

Řešení: Podívejme se, odkud se nuly na konci čísla a berou. K nulám přispívají:

- násobky čísla 5 a čísla sudého (těch je celkem 403)
- součiny násobků 25 s násobky čtyř (každý přidává k již uvažovaným jednu nulu, takže dostáváme dalších 80 nul)
- násobky čísla 125 v součinu s násobkem čísla 8 (16 nul)
- součiny násobků čísla 625 s násobky čísla 16 (3 nuly)

Číslo a končí $403 + 80 + 16 + 3 = 502$ nulami.

Mimochodem web [1] to po dotazu „The Number of Zeros at the End of 2019!“ potvrdí (viz obr. 2).

2.4 Úloha čtvrtá – kalkulačka píše „ERROR“

Urči s pomocí kalkulačky co nejpřesněji hodnotu 2^{2019}.

Řešení: Běžná kapesní kalkulačka si s příkladem jednoduše neporadí. Proč ale hlásí kalkulačka chybu? Je to jednoduché – výsledek je příliš velké číslo. Stačí si uvědomit, že

$$2^{2019} > 2^{2016} = 2^{4 \cdot 504} = 16^{504} \gg 10^{10}.$$

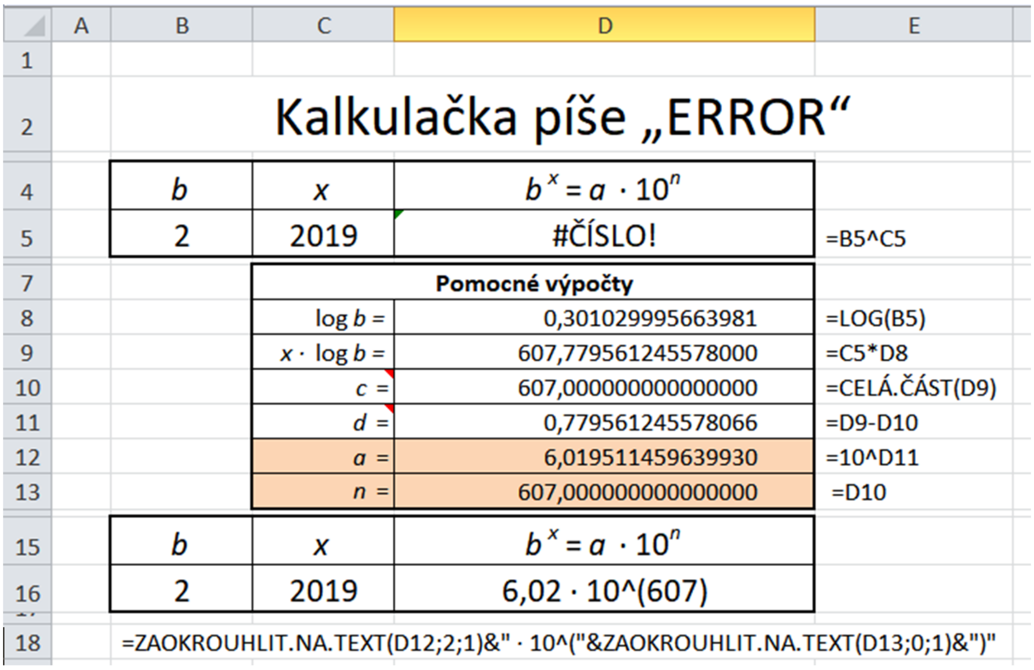
Tento výsledek je příliš velký i pro MS Excel (obr. 3). Co si s tím počneme? Můžeme výsledek určit alespoň přibližně? Jaké přesnosti lze dosáhnout? Pomůže obyčejný dekadický logaritmus! Pišme

$$2^{2019} = a \cdot 10^n.$$

Po zlogaritmování postupně dostaneme

$$\log 2^{2019} = \log \left(a \cdot 10^n\right),$$

$$2019 \cdot \log 2 = n + \log a.$$



	A	B	C	D	E
1					
2		Kalkulačka píše „ERROR“			
4		b	x	$b^x = a \cdot 10^n$	
5		2	2019	#ČÍSLO!	=B5^C5
7			Pomocné výpočty		
8			log b =	0,301029995663981	=LOG(B5)
9			x · log b =	607,779561245578000	=C5*D8
10			c =	607,000000000000000	=CELÁ.ČÁST(D9)
11			d =	0,779561245578066	=D9-D10
12			a =	6,019511459639930	=10^D11
13			n =	607,000000000000000	=D10
15		b	x	$b^x = a \cdot 10^n$	
16		2	2019	6,02 · 10^(607)	
18		=ZAOKROUHLIT.NA.TEXT(D12;2;1)&" · 10^("&ZAOKROUHLIT.NA.TEXT(D13;0;1)&")"			

Obr. 3: Čtvrtá úloha – kalkulačka píše „ERROR“

Vyjádřeme hodnotu

$$2019 \cdot \log 2 \doteq 2019 \cdot 0{,}301\,029\,996 \doteq 607{,}779\,561.$$

Vidíme, že $n = 607$ a $\log a \doteq 0{,}779\,561$. Proto je $a \doteq 6{,}019\,511$. A máme výsledek

$$2^{2019} \doteq 6{,}019\,511 \cdot 10^{607}.$$

Pro přibližné určení 2^{2019} dokonce kalkulačku vůbec nepotřebujeme! Stačí jen tužka, papír a početní zručnost. Podívejme se, jak na to.

Určitě je dobré si pamatovat, že

$$\log 2 \doteq 0{,}301\,03.$$

Výše uvedeným postupem tak můžeme odhadnout

$$\log 2^{2019} \doteq 2019 \cdot 0{,}301\,03 = 607{,}779\,57.$$

Známe tedy počet číslic čísla 2^{2019}. Ještě zbývá odhadnout číslo a:

$$a \doteq 10^{0{,}78} \doteq 10^{0{,}75} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt{\sqrt{1\,000}} \quad \text{(spíše o něco více)}$$

Protože

$$\sqrt{1\,000} \doteq 31{,}6 \doteq 6,$$

získali jsme tak velmi dobrou představu, že

$$2^{2019} \doteq 6 \cdot 10^{607}.$$

2.5 Úloha pátá – ciferný součet kontra ciferný součin

Kolik přirozených čísel menších než 2019 má ciferný součin stejný jako ciferný součet?

Řešení: Vypišme si vyhovující čísla. Daný požadavek splňují:

- všechna čísla jednociferná
- jedno dvojciferné (22)
- šest trojciferných (123, 132, 213, 231, 312 a 321)
- šest čtyřciferných (1 124, 1 142, 1 214, 1 241, 1 412 a 1 421)

Celkem vyhovuje 22 čísel. Mimochodem, nejbližší další číslo se stejným ciferným součtem i součinem je 2 114. Skoro za 100 let...

2.6 Úloha šestá – rozklad na součet

Kolik prvočísel menších než $\sqrt{2019}$ je možné zapsat jako součet dvou složených čísel?

Řešení: Daný požadavek zřejmě nesplňují prvočísla 2, 3, 5, 7 a 11. Dále si povšimněme, že každé prvočíslo $p \geq 13$ lze zapsat jako $p = 9 + (p - 9)$, tedy součet složeného čísla 9 a sudého čísla $p - 9$. Protože jsme omezeni hodnotou $\sqrt{2019} \doteq 45$, je největší vhodné prvočíslo 43. Vyhovují tedy prvočísla 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 a 43 – celkem 9 prvočísel.

Výsledek se změní až v roce 2210, kdy řešení obohatí prvočíslo 47.

2.7 Úloha sedmá – ciferný součet

Urči ciferný součet čísla $a = 2^{2019} \cdot 5^{2020} + 2019$.

Řešení: Tato úloha není vůbec složitá, stačí číslo a vhodně přepsat:

$$a = 2^{2019} \cdot 5^{2020} + 2019 = 2^{2019} \cdot 5^{2019} \cdot 5 + 2019 = 5 \cdot 10^{2019} + 2019$$

Na začátku čísla a je pětka, následují nuly, na konci stojí číslo 2 019. Ciferný součet tedy je $5 + 2 + 1 + 9 = 17$.

2.8 Úloha osmá – první cifra zprava

Jaká číslice bude na místě jednotek v čísle $a = 2^{2019} + 2019^2$?

Řešení: Úlohu lze rozdělit na dvě samostatné a řešit každého sčítance zvlášť.

U mocniny čísla 2 se na místě jednotek opakují číslice 2, 4, 8, 6, 2, 4,... Číslo $2^{2019} = 2^{2016+3}$ bude tedy končit číslicí 8.

Protože $9^2 = 81$, bude číslo 2019^2 končit jedničkou.
Na místě jednotek v čísle a bude číslice 9.

2.9 Úloha devátá – hezká posloupnost

Je dána posloupnost (a_n) s n-tým členem

$$a_n = 2^{1+\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} - n,$$

kde symbol $\lfloor a \rfloor$ znamená dolní celou část čísla a. Pro jaké nejmenší n je $a_n = a_{2019}$?

Řešení: Platí

$$a_{2019} = 2^{1+\lfloor \log_2(2019-1) \rfloor} - 2019 = 2^{1+\lfloor \log_2 2018 \rfloor} - 2019 = 2^{11} - 2019 = 29.$$

Řešíme rovnici

$$\begin{aligned} a_n &= a_{2019}, \\ 2^{1+\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} - n &= 29, \\ 2^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor} &= \frac{n+29}{2}, \\ \lfloor \log_2(n-1) \rfloor &= \log_2 \frac{n+29}{2}. \end{aligned}$$

Protože $\lfloor \log_2(n-1) \rfloor$ je celé číslo, musí být

$$\frac{n+29}{2} = 2^m, \quad m \in \mathbf{N}, \quad m \geq 4.$$

Pro $m = 4$ je $n = 3$ a $a_3 = 2^{1+\lfloor \log_2 2 \rfloor} - 3 = 1$, což nevyhovuje.

Pro $m = 5$ je $n = 35$ a $a_{35} = 2^{1+\lfloor \log_2 34 \rfloor} - 35 = 29$. Máme řešení našeho problému!

2.10 Úloha desátá – k-násobně nádherná

*Přirozené číslo n nazveme **k-násobně nádherné**, jestliže má právě k dělitelů a zároveň je dělitelné číslem k. Příkladem je 6-násobně nádherné číslo 18. Nechť dále je S součet všech 20-násobně nádherných čísel menších než 2019. Urči $S/20$.*

Řešení: Každé 20-násobně nádherné číslo n lze vyjádřit ve tvaru $n = m \cdot 2^a \cdot 5^b$, kde $a \geq 2$, $b \geq 1$, m je nesoudělné číslo s dvěma a pěti; n má právě 20 dělitelů, tedy $d(n) = 20$. Musí tedy platit:

$$20 = (a+1)(b+1) \cdot d(m).$$

Vzhledem k tomu, že číslo 20 musí být dělitelné součinem $(a+1)(b+1)$, stačí prozkoumat jednotlivé možnosti.

1. Uvažujme $a + 1 = 4$ a $b + 1 = 5$. Zde je $2^3 \cdot 5^4 = 5\ 000 > 2019$, takže nedostáváme žádné řešení.
2. Uvažujme $a + 1 = 5$ a $b + 1 = 4$. Dostáváme $2^4 \cdot 5^3 = 2\ 000$, a tak musí být $m = 1$. Získali jsme 20-násobně nádherné číslo 2000.
3. Uvažujme $a + 1 = 5$ a $b + 1 = 2$. Nyní je $2^4 \cdot 5^1 = 80$ a $n = m \cdot 80$, kde k je prvočíslo (kvůli dodržení počtu dělitelů čísla n) různé od 2 a od 5. Možné hodnoty pro k jsou: 3, 7, 11, 13, 17, 19 a 23. Příslušná 20-násobně nádherná čísla jsou 240, 560, 880, 1040, 1360, 1520 a 1840.
4. Pro $a + 1 = 10$ a $b + 1 = 2$ je $2^9 \cdot 5^1 = 2\ 560 > 2019$, žádné další řešení tedy nedostaneme.

Protože

$$S = 240 + 560 + 880 + 1\,040 + 1\,360 + 1\,520 + 1\,840 + 2\,000 = 9\,440,$$

je hledaný podíl

$$\frac{S}{20} = 472.$$

Až do roku 2320 bude S/20 stále rovno 472...

2.11 Úloha jedenáctá – rozdělení množiny přirozených čísel

Množinu přirozených čísel rozdělíme do podmnožin následujícím způsobem: $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4, 5, 6\}$, $M_4 = \{7, 8, 9, 10\}$, $M_5 = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ *atd. V každé podmnožině* M_{n+1} *je vždy o jedno číslo více než v předcházející podmnožině* M_n*. Rozhodni, jaký index* n *bude mít podmnožina* M_n *obsahující číslo 2 019.*

Řešení: Pokud si všimneme, že poslední číslo každé z podmnožin M_n je rovno součtu prvních n přirozených čísel, můžeme úlohu přeformulovat: Hledejme takové přirozené číslo n, že součet všech přirozených čísel menších než n je menší než 2019 a zároveň součet prvních n přirozených čísel je větší nebo roven číslu 2019.

Nejmenší n, které splňuje nerovnost $\frac{n\,(n+1)}{2} \geq 2019$, je $n = 64$. Do roku 2080 máme vystaráno...

2.12 Úloha dvanáctá – rozdělení množiny přirozených čísel (varianta předchozí úlohy)

Množinu přirozených čísel rozdělíme do podmnožin stejně jako v minulé úloze: $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{4, 5, 6\}$, $M_4 = \{7, 8, 9, 10\}$, $M_5 = \{11, 12,$

$13, 14, 15\}$ atd. V každé další podmnožině je vždy o jedno číslo více než v předcházející. Urči součet čísel z podmnožiny obsahující číslo 2019.

Řešení: Číslo 2 019 se nachází v podmnožině

$$M_{64} = \{2\,017, 2\,018, 2\,019, ..., 2\,080\}.$$

Součet prvků v této podmnožině je

$$64 \cdot \frac{2\,017 + 2\,080}{2} = 131\,104.$$

2.13 Úloha třináctá – posloupnost jednociferných čísel

Posloupnost jednociferných čísel je dána takto: První dva členy jsou 2 a 3, každý další člen je tvořen poslední číslicí součinu dvou předcházejících členů. Urči 2 019. člen této posloupnosti.

Řešení: Členy posloupnosti jsou čísla

$$2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, ...$$

Vidíme, že po úvodní dvojici členů 2, 3 naše posloupnost obsahuje šestičlennou periodu 6, 8, 8, 4, 2, 8. Vzhledem k tomu, že

$$2019 = 3 + 6 \cdot 336,$$

je hledaný člen prvním číslem této periody, tedy číslo 6.

2.14 Úloha čtrnáctá – mnohoúhelník

Součet n–1 vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku je 2 019°. Urči počet vrcholů a velikost zbývajícího úhlu n-úhelníku.

Řešení: Součet velikostí vnitřních úhlů $n-$úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$. Protože

$$(13-2) \cdot 180° = 1\ 980° < 2\ 019° < (14-2) \cdot 180° = 2\ 160°,$$

jedná se o čtrnáctiúhelník. Zbývající úhel má velikost 141°.

2.15 Úloha patnáctá – součet faktoriálů aneb číslice na místě jednotek podruhé

Urči číslici na místě jednotek v čísle

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + ... + 2019!.$$

Řešení: Je $1! + 2! + 3! + 4! = 33$. Všechny ostatní sčítance končí nulou. Proto stojí na místě jednotek trojka. Úloha jednoduchá a věčná.

2.16 Úloha šestnáctá – mocnina dvou podruhé

Rozhodni, kolik sčítanců je na pravé straně rovnosti

$$2^{2\,019} = 2 + 2 + 2 + ... + 2.$$

Řešení: Protože

$$2^{2\,019} = 2 \cdot 2^{2\,018} = 2 \cdot (1 + 1 + ... + 1),$$

musí být v závorce $2^{2\,018}$ jedniček, což je i hledaný počet sčítanců.

2.17 Úloha sedmnáctá – rozdíl druhých mocnin

Kolik přirozených čísel menších než 2019 lze zapsat jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel?

Řešení: Přirozené číslo x, které lze vyjádřit požadovaným způsobem, můžeme zapsat jako

$$x = a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)\,.$$

Všimněme si, že čísla $a - b$ i $a + b$ jsou buď obě lichá, nebo obě sudá.

Pokud by bylo $x = 4n + 2 = 2\,(2n + 1)$, lišili by se činitelé svojí paritou, což nelze.

Pro liché číslo platí $x = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$.

Pro násobky čtyř platí $x = 4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2$.

Vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin nelze číslo 1 a číslo 4.

Čísel ve tvaru $x = 4n + 2$ menších než 2 019 je 505, vyhovuje tedy celkem $2\,018 - 505 - 2 = 1\,511$ čísel.

2.18 Úloha osmnáctá – kolik druhých mocnin?

Pro kolik přirozených čísel n $(1 \leq n \leq 2019)$ *je číslo* n^n *druhou mocninou nějakého přirozeného čísla?*

Řešení: Pro všechna sudá čísla $n = 2k$ je číslo $n^n = n^{2k} = \left(n^k\right)^2$ druhou mocninou. Pro lichá čísla n je n^n druhou mocninou právě tehdy, když je n druhou mocninou lichého čísla. Sudých čísel do 2 019 je 1 009. Největší druhá mocnina, která nepřevyšuje 2 019, je 442. Vyhovují tedy i druhé mocniny lichých čísel do 44, těch je 22. Celkem vyhovuje $1\,009 + 22 = 1\,031$ čísel.

2.19 Úloha devatenáctá - posloupnost zlomků

Ze zlomků s přirozeným čitatelem i jmenovatelem byla vytvořena následující posloupnost:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \dots$$

Zlomek s menším součtem čitatele a jmenovatele je vždy před zlomkem s větším součtem a je-li tento součet stejný, jsou zlomky seřazeny podle čitatele od nejmenšího k největšímu. Kolikátým členem této posloupnosti je zlomek $\frac{2018}{2019}$*?*

Řešení: Pokud zlomky rozdělíme do skupin se stejným součtem čitatele a jmenovatele

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right), \dots,$$

bude zlomek $\frac{2018}{2019}$ v 4 036. skupině a v této skupině bude na 2 018. místě. Zlomků v prvních 4 035 skupinách je celkem

$$\frac{4\,035 \cdot 4\,036}{2} = 8\,142\,063,$$

takže pořadové číslo našeho zlomku bude $8\,142\,063 + 2\,018 = 8\,144\,648$.

Literatura

[1] www.wolframalpha.com

Další inspirace na webu

[2] *Nubers Magic.* https://inderjtaneja.com/
cwe[3] *What's Special About This Number?* https://www2.stetson.edu/~efriedma/numbers.html
[4] *Number Empire.* https://www.numberempire.com/
[5] *Positive Integers.* http://www.positiveintegers.org/
[6] https://www.wolframalpha.com/input/?i=2019
[7] https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AMC_Problems_and_Solutions

Co umí vědecké / grafické kalkulátory Casio

Josef Rak, Vakoč Pavel, Fast ČR, a.s., Říčany

Abstrakt: Článek představuje jednu aplikaci CASIO EDU + kalkulátorů Classwiz.

QR kód kalkulátorů Classwiz umožňuje zobrazit stav displeje kalkulátoru ve webovém prohlížeči počítače. Je k tomu potřeba internetové připojení a aplikace CASIO EDU +, která je zdarma pro mobilní telefony a tablety. Projektor v místnosti poté zobrazí stav kalkulátoru s dalšími detaily, které na kalkulátoru nejdou zobrazit.

Nejzajímavější je situace u tabulky hodnot funkce a statistického režimu. V případě tabulky hodnot funkce se zobrazí graf jedné nebo dvou funkcí. V případě statistického režimu se zobrazí tabulky naměřených hodnot. Pro fyziku je zajímavá statistika dvou proměnných. V prohlížeči se zobrazí jednak tabulka, ale také bodový graf. U bodového grafu lze grafem vést některé křivky, a určit tak typ závislosti proměnných (např. lineární, kvadratická, exponenciální apod.).

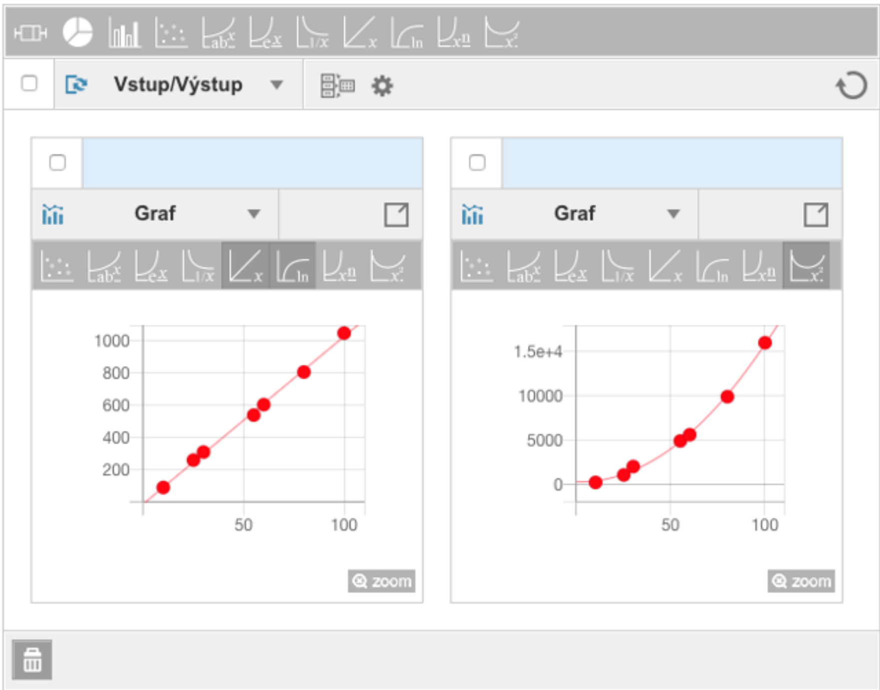
Aplikace CASIO EDU+ kromě zobrazení stavu kalkulátoru v prohlížeči umí tento stav odeslat emailem a sdílet v rámci skupiny, takzvané třídy. Při sdílení v rámci třídy se zobrazí na jedné webové stránce všechny stavy, které byly nasdíleny. V případě funkcí lze tedy zobrazit najednou grafy posbírané přes aplikaci CASIO EDU+ (např. od různých skupin žáků) a vysvětlit, jak který parametr ovlivňuje graf funkce. V případě statistiky lze takto například zobrazit výsledky pokusů různých skupin a ohodnotit je.

Na obr. 1 je vidět výsledek měření pohybu tělesa. Veličina x je čas a veličina y je dráha ujetá v zadaném čase. Vidíme, že v případě vlevo se jedná o pohyb rovnoměrný, ve druhém o pohyb rovnoměrně zrychlený.

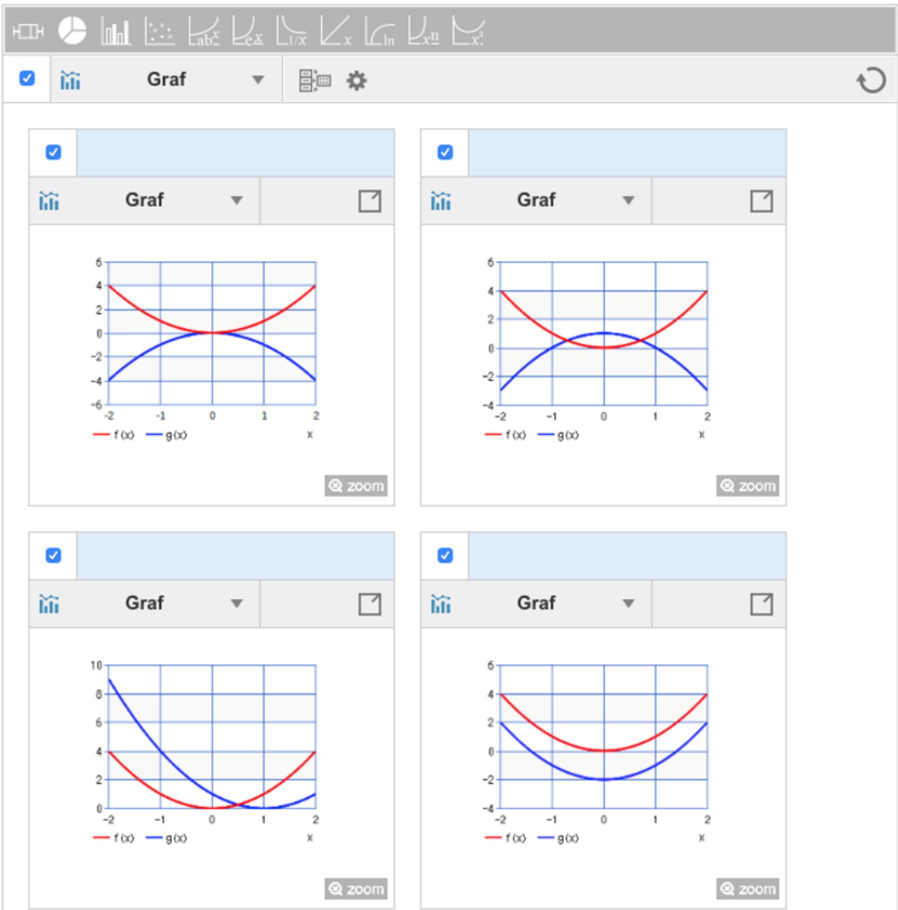
Na obr. 2 je vidět zobrazení grafů kvadratické funkce s různými parametry od různých skupin.

Literatura

[1] `https://yt.vu/p/PLpprhbekeUKSqVik5oBqOB1QWk2fl2gUq`



Obr. 1: Měření pohybu tělesa



Obr. 2: Grafy kvadratické funkce

Motivační role kontextu slovních úloh ve finále matematické soutěže Pangea

Pavel Sovič, SOŠ pro administrativu EU Praha,
Michaela Kaslová, PedF UK Praha

Abstrakt: Článek představuje mezinárodní matematickou soutěž Pangea a zabývá se motivačními nástroji u slovních úloh.

1 Úvod a představení soutěže

Mezinárodní matematická soutěž Pangea se v současné době koná v Německu, Španělsku, Maďarsku, Rakousku, Francii, Belgii, Norsku, Polsku, Portugalsku, Anglii, Litvě, Irsku, Srbsku nebo na Faerských ostrovech.

V České republice se poprvé tato soutěž určená žákům 4. – 9. ročníků základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií konala v roce 2013 a od té doby se těší velké oblibě, a to jak u žáků samotných, tak i u učitelů. Svědčí o tom i fakt, že počet přihlášených škol i soutěžících rok od roku neustále roste. V roce 2019 se zúčastnilo Pangey přes 52 000 tisíc českých žáků, což zařadilo naši republiku na 3. místo v žebříčku absolutně přihlášených soutěžících v daných zemích a v přepočtu na počet obyvatel mezi úplnou špičku (tab. 1). V současné době jsou do soutěže zapojováni i žáci z dětských oddělení z nemocnic a také čeští žáci ze zahraničí, např. z české třídy v Bruselu. Soutěž má dvě kola: školní a finálové, do kterého postoupí přibližně 30 nejlepších řešitelů z každého kraje na základě výsledků školního kola z každého ročníku.

V čem tkví zmíněná popularita této soutěže? V čem jsou úlohy v soutěži Pangea motivační? Jakou roli hraje kontext úloh?

2 Charakteristika a obsah úloh

Úlohy v Pangea jsou určené široké škále žáků, autoři proto pracují každoročně na co nejrozmanitějším souboru otázek tak, aby kladl nároky na všestrannost řešitele a prověřil jeho dovednosti v různých oblastech matematiky (nejen kalkulu) a dokázal je mezi sebou propojovat. Níže uvádíme zaměření úloh z matematického hlediska:

- Funkce, funkční myšlení
- Grafy, diagramy, práce s daty včetně serióznosti, pravdivosti, úplnosti

	Název země	Počet registrovaných účastníků		Název země	Počet registrovaných účastníků
1	Německo	126 926	10	Portugalsko	7 000
2	Španělsko	109 507	11	Anglie	5 267
3	Česká republika	52 540	12	Litva	3 900
4	Maďarsko	31 513	13	Irsko	3 300
5	Rakousko	22 732	14	Srbsko	3 100
6	Francie	20 219	15	Faerské ostrovy	1 813
7	Belgie	14 000	16		
8	Norsko	11 640	17		
9	Polsko	10 602	18		

Tab. 1: Počet přihlášených žáků v roce 2019

- Složitější, delší text, práce s podmínkou nereálnou
- Jednotky a převody
- Orientace v čase, proti i po toku času
- Úsudek včetně úloh na neprázdný průnik, zebry
- Identifikační proces, ekonomizace procesů
- Záporky u sloves, popření či vyhodnocení pravdivosti tvrzení
- Negace, práce s kvantifikátorem
- Práce se symboly (pre-algebra, algebra)
- Vlastnosti čísel a operací
- Čtení informací z obrázku
- Prostorová a časoprostorová představivost
- Posuzování odpovědí a procesu řešení u dané úlohy
- Celek a jeho části, práce se strukturovaným celkem
- Složené slovní úlohy
- Kombinatorické úlohy
- Úlohy na zobecnění (závislosti, řady)
- Souměrnosti, shodná zobrazení
- Objem, obsah, obvod, délka
- Finanční gramotnost

Úlohy jsou dvojího typu: „čistě matematické“ a slovní úlohy v užším slova smyslu. Tvůrci soutěžních slovních úloh se snaží vyhýbat tzv. pseudorealitě. Česká strana na návrh Kaslové od roku 2015 inovovala pojetí zařazovaných slovních úloh s tím, že jsou kontexty redukovány a každoročně zaměřeny na dvě zvolená témata. Důvodů je několik, při redukci tematických okruhů se soutěžící snadněji orientují v kontextech, obměňovaná témata mohou snadněji reagovat na aktuální zájmy žáků a kompenzovat deficit některých témat v učebnicích. Z pohledu motivace se tedy opíráme o ty psychické potřeby, které vystupují u nadprůměrných žáků do popředí: potřeba smysluplnosti a potřeba novosti (např. [3]). Obměny témat mají i další cíl: ukazovat na šíři přesahů matematiky do dalších oborů, což podporuje ideu využitelnosti matematiky v běžných i nestandardních životních situacích. Tato skutečnost působí značně motivačně a ovlivňuje výkon jedince (v obecné rovině to řeší např. [5]).

Klademe tedy důraz na témata, která vycházejí z konkrétních oblastí lidské činnosti, jako např. architektura, lékařství, sport, doprava, stravování, příroda, zdravotní záchranné systémy nebo média. Tato témata a úlohy samotné jsou konzultovány s patrony, kteří v daných oblastech působí, a to např. moderátor Vladimír Kořen (téma příroda, média), houslista Václav Hudeček (téma hudba), automobilový závodník v rallye Dakar Aleš Loprais (téma doprava), horolezec Radek Jaroš (téma sport), vedení horské služby (téma záchranáři), David Vávra (téma architektura). Kontrolu úloh provádějí dále dvě skupiny: tým didaktické kontroly (učitelé z praxe působící na úrovni metodiků) a tým supervizorů složený z odborníků z řad matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (doc. Knobloch), z fakulty elektrotechnické z ČVUT (prof. Demlová) nebo z fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské (doc. Dvořáková). V úlohách je propojováno kurikulum vycházející z Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání a realita každodenního života, což napomáhá žákům k lepšímu porozumění učiva v závislosti na svých přímých životních zkušenostech. Dalším motivačním prvkem charakteristickým pro Pangeu je krátký, tematický a kreativní název každé úlohy, který uvádí řešitele do konkrétního kontextu a konkrétní situace. Tato účinná myšlenka názvů úloh je inspirována francouzskou matematickou soutěží Rallye mathématique transalpin. Název úlohy umožňuje nejen lepší orientaci v textu, ale urychluje i tvorbu představ k danému kontextu úlohy či jejímu cíli, a v neposlední řadě hraje významnou roli v následné diskusi k vyřešeným úlohám a k jejich hodnocení.

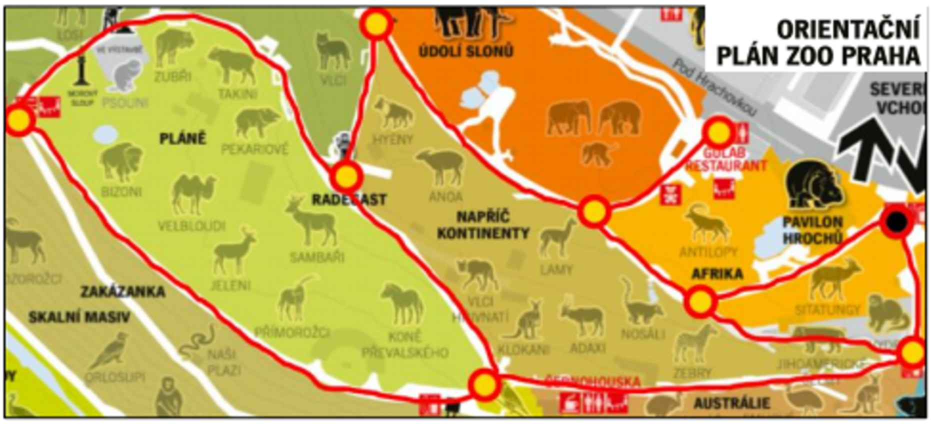
Ukázka jedné soutěžní úlohy pro 7. ročník je na obr. 1.

Výše zmíněné ovšem nevylučuje úlohy, ve kterých se žák řešením dozví něco nového, ba naopak k některým úlohám jsou dodávány další odkazy nebo poznámky tak, aby sloužily jako motivace k poznání i po skončení soutěže. Realita všedního dne je zde propojována s matematikou a s pomocí matematiky

1. PROCHÁZKA PO PRAŽSKÉ ZOO **2 body**

Kamarádi Dominik a Adéla plánují do ZOO Praha přijít severním vchodem (místo černého puntíku). Mají v plánu projít horní část ZOO Praha tak, aby po co nejméně cestách šli dvakrát a aby prošli každou červeně vyznačenou cestou alespoň jednou.

Kolik nejméně cest musí projít dvakrát, aby se dostali na místo, odkud vycházeli?



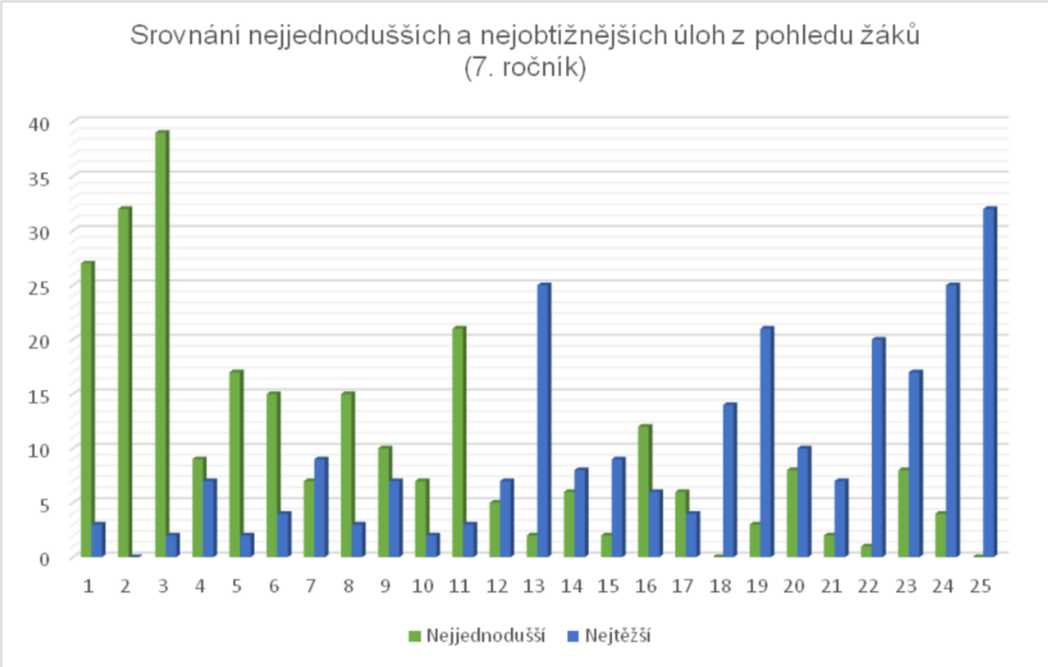
Obr. 1: Ukázka úlohy pro 7. ročník

je žákům představován způsob, jak lépe poznávat svět. Učitelé pěti škol napsali autorskému týmu, že se právě z těchto důvodů jejich žáci chtějí k úlohám vracet. V zápalu řešení si řešitelé nestačili „nastudovat“, k čemu zajímavému v řešení dospěli, respektive chtěli si ověřit, zda jejich řešení je správné. Proto, že to nasytilo jejich zvídavost, rozšířilo se poznání v nové oblasti.

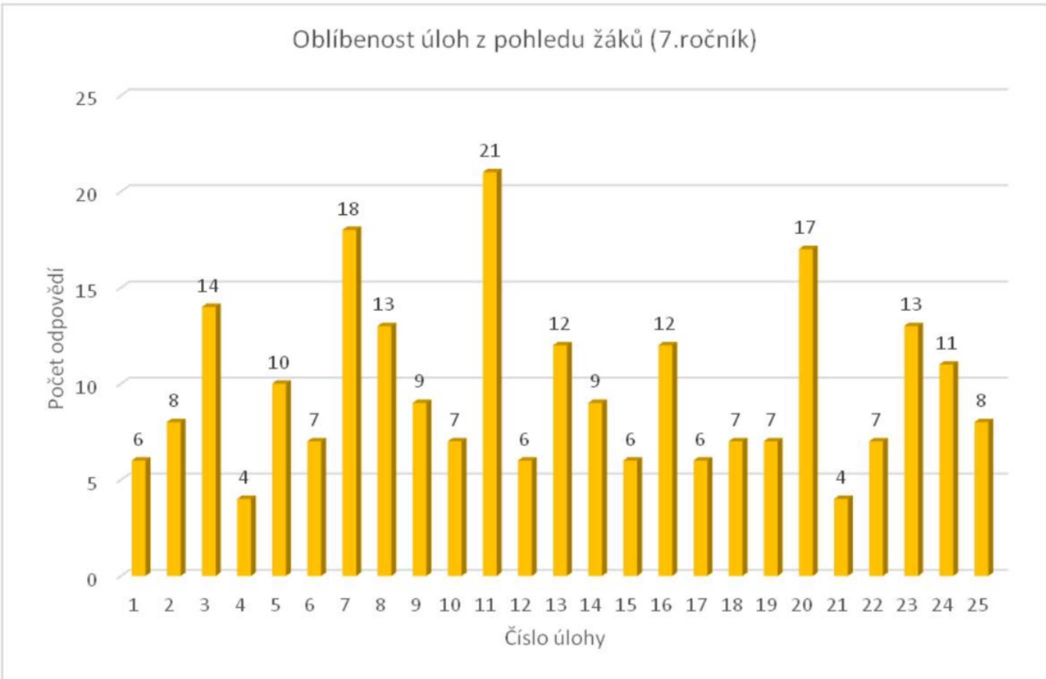
Soutěž má mimo jiné připravovat žáky na budoucí život, a to vhodnou volbou již zmíněných různorodých kontextů. Jelikož jsou tyto úlohy součástí výuky a vzdělávání, mají formativní dopad vně matematiky. Je v nich tedy vhodné poukazovat na správný životní styl, ekologické a etické chování a dodržování pravidel charakteristických pro středoevropskou společnost. Soutěž se tedy vyhýbá oblastem, které by odporovaly morálním zásadám společnosti nebo tématům, jako např. pozdní příchod do školy, či jiným negativním projevům chování.

3 Oblíbenost úloh

Po skončení každého finále se již druhým rokem všem účastníkům rozdávají dotazníky, ve kterých řešitelé vybírají 5 nejtěžších úloh, 5 nejlehčích úloh a poté všechny úlohy, které je zaujaly. Součástí je i prostor pro komentáře a vyjádření



Obr. 2: Srovnání nejjednodušších a nejobtížnějších úloh z pohledu žáků (7. ročník)



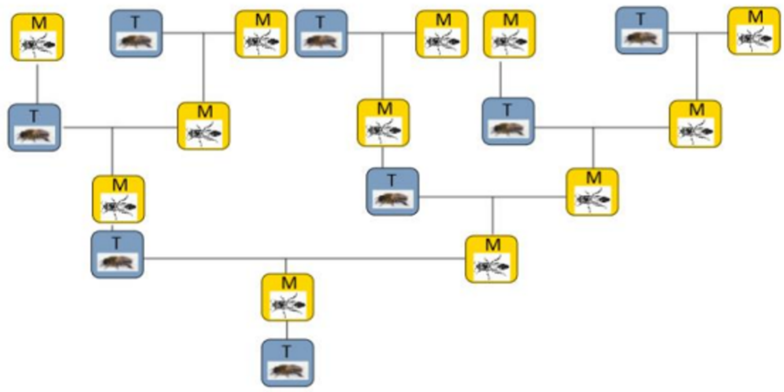
Obr. 3: Oblíbenost úloh z pohledu žáků (7. ročník)

k úlohám. Tyto dotazníky jsou následně analyzovány a konzultovány s Dr. Martinem Chválem. Výsledky jsou využity při tvorbě nových úloh. Obr. 2 reprezentuje, že se zvyšující úrovní se z pohledu žáků zvyšuje i náročnost. Obr. 3 reprezentuje výsledky oblíbenosti úloh.

20. VČELY **6 bodů**

Na následujícím obrázku je znázorněn rodokmen trubce (T) včely medonosné. Zvláštností ve včelím světě je to, že trubec na rozdíl od včel dělnic a včel matek má pouze jednoho rodiče, a to matku (M). Matka musí mít ovšem vždy „dva“ rodiče.

V obrázku můžeme vyčíst, že náš jeden trubec má jednoho rodiče (matku), 2 prarodiče, 3 praprarodiče, atd.



Kolik bude mít náš trubec prapraprapraprapraprapraprarodičů?

a) méně než 20 **b) 21** **c) 34** **d) 55** **e) 56**

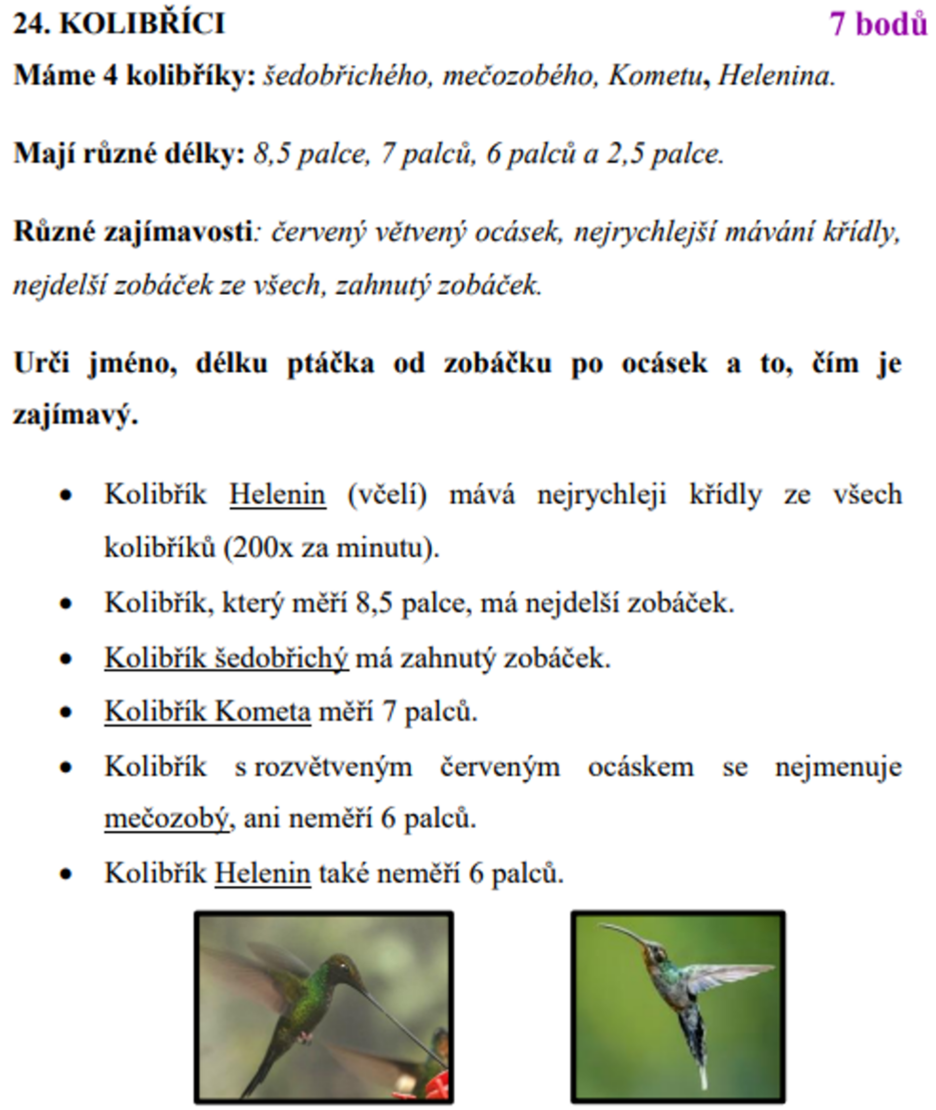
Obr. 4: Populární úloha včely (7. ročník)

Úloha, která byla v 7. ročníku vybrána mezi nejoblíbenější, je na obr. 4. Jiná populární úloha je na obr. 5.

4 Průřezové úlohy

V soutěži jsou rovněž zařazovány některé úlohy průřezově tak, že se liší např. pouze složitostí textu, použitými čísly, jednotkami, nebo bodovým ohodnocením, což nám umožňuje sledovat, jak dalece je dané téma slovní úlohy vázáno na kontext či jeho matematickou podstatu.

Vhodným příkladem je slovní úloha typu „zebra“ z loňského finále, která byla zařazena do 4., 5. a 6. ročníku (obr. 5). Žáci, přestože pro ně byla odlišně obtížná, ji ve všech třech ročnících vyhodnotili jako nejoblíbenější. I když připustíme, že svoji roli v hodnocení může hrát i estetika doprovodných obrázků, zde fotografie kolibříka, v porovnání s jinými ročníky víme, že není automatické, že by úlohu s „hezčí“ fotografií pozitivně ocenili.



24. KOLIBŘÍCI **7 bodů**

Máme 4 kolibříky: *šedobřichého, mečozobého, Kometu,* ***Helenina.***

Mají různé délky: *8,5 palce, 7 palců, 6 palců a 2,5 palce.*

Různé zajímavosti*: červený větvený ocásek, nejrychlejší mávání křídly, nejdelší zobáček ze všech, zahnutý zobáček.*

Urči jméno, délku ptáčka od zobáčku po ocásek a to, čím je zajímavý.

- Kolibřík Helenin (včelí) mává nejrychleji křídly ze všech kolibříků (200x za minutu).
- Kolibřík, který měří 8,5 palce, má nejdelší zobáček.
- Kolibřík šedobřichý má zahnutý zobáček.
- Kolibřík Kometa měří 7 palců.
- Kolibřík s rozvětveným červeným ocáskem se nejmenuje mečozobý, ani neměří 6 palců.
- Kolibřík Helenin také neměří 6 palců.

Obr. 5: Nejoblíbenější úloha z finále 2019

5 Odpovědi a motivace

Tak, jako většina současných matematických soutěží, kde je vyšší počet účastníků, pracuje Pangea s uzavřenými úlohami, tedy s výběrovou odpovědí z nabídky pěti možností. V rámci analýzy a priori, kdy se autoři snaží předvídat chyby v řešení, vytváříme návrhy možností, z nichž vybíráme do nabídky takové, aby řešení nebylo na první pohled vidět. Přesto v hodnocení žáky – účastníky finále – se několikrát objevil požadavek otevřených úloh, a to především u řešitelů z osmých a devátých ročníků. Z toho pro nás plyne, že dalším motivačním faktorem je výzva, vyšší obtížnost, což odpovídá psychické potřebě přiměřenosti, avšak je patrné, že se vyskytuje jen u minority z finalistů a současně u těch nejstarších. Naopak někteří finalisté si stěžovali, že nestihli vyřešit všechny úlohy. Jsme si vědomi, že toto by mohlo působit jako „demotivátor“, viz [2], proto jsme s finalisty na toto téma diskutovali. Stačilo změnit úhel pohledu od řešitele k autorovi a vyhodnocovateli soutěže. Poměrně rychle přijali ideu, že při snazší soutěži by bylo velmi obtížné určit pořadí, což komentovali jako demotivující.

6 Metoda řešení jako motivátor

Z výpovědí žáků plyne, že si odhadu odpovědi jako metody řešení v soutěži příliš neváží, a pokud ho dělají, pak proto, že mají pocit, že by měly být všechny úlohy vyřešené. Co však oceňují, pokud se metody řešení nějakým způsobem liší od učebnicových úloh. Vítají úlohy, jejichž řešení se nějakým způsobem opírá o úsudek. V tomto smyslu je opět ceněna nestandardnost slovní úlohy. U některých kontextů, jak plyne z rozhovorů se staršími žáky (8. a 9. ročníky), řešitelé předpokládali např. nasazení soustavy dvou rovnic, ale příjemně je překvapilo, že daný kontext směřoval k odlišným metodám řešení. Kontext tedy nefunguje sám o sobě.

7 Závěr

Otázka motivace, ať již ji chápeme jakkoli, není jednoduchá. Projdeme-li bohatou literaturu k motivacím, nejen českou, dospějeme k názoru, že jednotný impulz k motivaci neexistuje, avšak jsou některé impulzy, které zasahují nadprůměrné žáky více, či častěji. Všem se zavděčit nelze, ale musíme zkoušet hledat nové a nové cesty. Cílem našeho úsilí není jen žák, ale také jeho učitel. Je to právě učitel, pokud je motivovaný nebo pokud se nám ho podaří motivovat, který svůj zápal přenese na žáky. Z těchto důvodů cílíme rovněž na něho.

Webové stránky Pangey nabízejí každý rok učiteli celou škálu odlišně obtížných a matematicky různých slovních úloh od 4. po 9. ročník ke dvěma vybraným tématům. To učiteli poskytuje bohatý materiál k tvorbě projektů na jedno z témat, představuje rezervu úloh vhodných pro „nevytížené“ nadprůměrné žáky.

V budoucnu plánujeme vyšší interakci mezi týmem autorů a řešiteli, kteří by mohli volbu témat zčásti ovlivňovat.

Literatura

[1] Hrabal, V., Pavelková, I.: *Školní a výkonová motivace žáků.* NUV, Praha, 2011. `http://www.nuov.cz/uploads/AE/evaluacni_nastroje/24_Skolni_vykonova_motivace_zaku.pdf`

[2] Kaslová, M.: Nadaní žáci a specifika jejich motivace v matematice. In Novotná J. (ed.) *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách IV.* MU, Brno, 2015.

[3] Langmaier, J., Krejčířová, D.: *Vývojová psychologie.* Grada, Praha, 2007.

[4] Lokšová, I., Lokša, J.: *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole.* Portál, Praha, 1999.

[5] Machač, M., Machačová, H., Hoskovec, J.: *Emoce a výkonnost.* VŠ učebnice. Praha, 1985.

[6] Nakonečný, M.: *Motivace lidského chování.* Academia, Praha, 1997.

[7] Shapiro, L. E.: *Emoční inteligence dítěte a její rozvoj.* Portál, Praha, 1998.

[8] Šmahel, I.: *Motivace a zákony lidského chování.* MU, Brno, 2000.

[9] `www.pangeasoutez.cz`

Kalendář – astronomická dimenze velikonočních svátků

Jan Veselý, Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy,
G Boženy Němcové, Hradec Králové

Abstrakt: Podle pravidla pro stanovení Velikonoční neděle měla ta v roce 2019 připadnout na 24. březen. V kalendáři ji ale najdeme až 21. dubna. Příspěvek ukazuje příčinu tohoto rozporu, uvádí stanovení Velikonoční neděle do souvislosti s historickými kalendářními systémy a představuje matematické algoritmy výpočtu data Velikonoc, které je možné využít v práci se žáky jako příklad využití operací div a mod.

1 Uvedení do problému

Podle pravidla by Velikonoční neděle měla být první nedělí po prvním jarním úplňku. Ověřme toto tvrzení na Velikonoční neděli, která v roce 2019 podle kalendářů připadla na 21. 4. 2019:

- středa 20. 3. 2019 22:58 SEČ začátek astronomického jara [1]
- čtvrtek 21. 3. 2019 02:43 SEČ měsíc v úplňku – první jarní úplněk [1]
- nejbližší neděle 24. 3. 2019 – proč není Velikonoční nedělí?

2 Letopočet

Definice Velikonoční neděle jako první neděle, která přijde po prvním jarním úplňku, byla přijata nicaejským koncilem v roce 325 [2]. Je dobré si uvědomit, že účastníci koncilu letopočet 325 neměli. V té době se používal tzv. koptský kalendář, jehož počátek se počítá od nastoupení císaře Diokleciána, tedy od roku 284.

Počítání roků našeho letopočtu od narození Ježíše Krista bylo zavedeno až o několik století později. Letošní letopočet 2019 je tedy umělé číslo. Na jeho hodnotě v podstatě nezáleží. Letopočet je v kalendářích často stanovován také nástupem hlavy státu či církve do úřadu – viz například japonský oficiální kalendář. V něm se počítají éry spojené s císaři. Dne 1. 5. 2019 začala nástupem císaře Naruhita na trůn éra Reiwa. Právě se tedy píše rok 1 japonské éry Reiwa [3]. Předchozí éra Heisei trvala od 8. ledna 1989, kdy na trůn usedl císař Akihito, do 30. dubna 2019, kdy tento císař abdikoval. Odhlédneme-li od odlišného počítání letopočtu, je japonský oficiální kalendář shodný s naším – jde o gregoriánský systém.

3 Kalendářní systémy

Systémů počítání dnů v roce najdeme celou řadu. Nejrozšířenější a nejvýznamnější jsou tři [2]:

- lunární
- lunisolární
- solární

Základem čistě lunárních systémů je synodický měsíc, tedy průměrná doba, za kterou se vystřídají fáze Měsíce. Průměrná délka synodického měsíce je 29,53 dne. V lunárním kalendáři je zpravidla 12 měsíců střídavě o 29 a 30 dnech. Délka lunárního roku je 354 dní, není tedy synchronizována s periodou oběhu Země okolo Slunce, potažmo se střídáním ročních období. Lunární roky jsou kratší než solární, letopočet se tedy mění rychleji než například v našem gregoriánském kalendáři. Čistě lunární systém se používá v islámském světě.

Lunisolární systémy problém s ročními dobami řeší tím, že se kromě přestupných dní vkládají přestupné měsíce, zpravidla jednou za tři roky. Lunisolární je například židovský kalendář, používali jej i Slované na našem území téměř do konce 9. století, tedy do příchodu věrozvěstů.

Třináctý přestupný měsíc nesl název hruden a vkládal se mezi prosinec a leden, když bylo třeba synchronizovat lunární kalendář s ročními dobami [4]. Zajímavé stopy přechodu Slovanů na solární kalendář odhalíme porovnáním názvů měsíců v českém a polském kalendáři. V polském názvu pro náš prosinec vidíme zaniklý hruden našich předků (tab. 1).

Základem solárního kalendáře je perioda oběhu Země okolo Slunce, vlastně perioda střídání ročních období. Solární kalendář byl používán ve starověkém Římě, solární byl jeden z Mayských kalendářů a je jím i náš kalendářní systém, který používá euroamerická civilizace a v současnosti celý globalizovaný svět.

3.1 Juliánský kalendář

Kořeny našeho současného solárního kalendáře sahají do roku 46 př. n. l., kdy jej zavedl Gaius Julius Caesar s platností od roku 45 př. n. l. V tomto juliánském kalendáři rok trvá 365,25 dne, proto je každý 4. rok přestupný.

Tropický rok, který nejlépe odpovídá skutečné době oběhu Země okolo Slunce, je doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody pravého Slunce (středu slunečního disku) jarním bodem. Trvá 365,242 192 129 dne.

Čeština	**Polština**
leden	Styczeń
únor	Luty
březen	Marzec
duben	Kwiecień
květen	Maj
červen	Czerwiec
červenec	Lipiec
srpen	Sierpień
září	Wrzesień
říjen	Październik
listopad	Listopad
prosinec	Grudzień

Tab. 1: Názvy měsíců v češtině a polštině

3.2 Gregoriánský kalendář

Rozdíl mezi tropickým a juliánským rokem činí 11,23 min. Za 16 století se rozdíl v součtu vyšplhal na téměř 10 dní a rozpor mezi ročními dobami a kalendářem začal být významný. Ještě významnější byla souvislost se stanovením data Velikonoční neděle, jež měla následovat po prvním jarním úplňku. Posun prvního jarního dne o 10 dní vůči skutečnému okamžiku rovnodennosti míval v některých letech za následek posun prvního jarního úplňku, a tím i Velikonoc o více než měsíc. A protože na Velikonoce jsou v křesťanské tradici navázány i další svátky (letnice), zasahoval tento posun citelně do hospodářského života, především plánu zemědělských prací.

A proto papež Řehoř (Gregorius) XIII. vyhlásil roku 1582 reformu [5], jež měla dva cíle: vrátit kalendář do souladu s přírodním cyklem ročních dob a zabezpečit, aby v budoucnosti k dalším posunům nedocházelo.

Prvního cíle bylo dosaženo vynecháním přebytečných 10 dní – po čtvrtku 4. října následoval pátek 15. října 1582. Aby se kalendářní rok co nejvíce blížil tropickému, bylo třeba v juliánském systému vynechat tři dny během čtyř století. Gregoriánský kalendář je tedy založen na dvojici výjimek:

Každý čtvrtý rok je přestupný (stejně jako v juliánském kalendáři),

- výjimkou jsou poslední roky ve století, ty přestupné nejsou,
- výjimkou z výjimky jsou konce století, které jsou dělitelné 400, ty přestupné zůstávají.

Rok 1600 tedy přestupný měl být, roky 1700, 1800, 1900 ne, 2000 ano, 2100 ne, ...

Obr. 1: Třicátý únor ve švédském kalendáři na rok 1712 [6]

Rozdíl proti tropickému roku po reformě činí 26 s za kalendářní rok, tj. 1 den za 3 300 let.

3.3 Přijetí a nepřijetí gregoriánské reformy [6]

Bezprostředně po vyhlášení reformy papežskou bulou Inter gravissimas, tedy v roce 1582, přijaly nový kalendář jen katolické státy (Itálie, Španělsko, Polsko, Portugalsko). Na našem dnešním území byla reforma přijata později, ale přesto relativně rychle. V Čechách v lednu 1584, ve Slezsku o týden později, na Moravě v říjnu 1584 a v Uhrách (Slovensko) v říjnu 1587.

V jiných evropských zemích byla reforma přijímána méně ochotně, v některých státech měla kalendářní reforma až humorný průběh. Příkladem budiž Švédské království – země proslulá hledáním vlastních „třetích cest“. Švédsko v roce 1700 vynechalo přestupný den s cílem vynechávat přestupné dny následujících 40 let. Tím se ovšem švédský kalendář začal rozcházet s kalendáři všech okolních zemí – s juliánskými i gregoriánskými systémy. Švédové z kalendáře vypustili přestupné dny ještě v letech 1704 a 1708, aby v roce 1712 pokus o reformu evolucí opustili. Místo skokového zavedení gregoriánského kalendáře se ale vrátili k juliánskému! Díky tomu měl únor 1712 ve švédském kalendáři 30 dní (obr. 1). Teprve v roce 1753 zavedli natrvalo gregoriánský kalendář.

Mnohé další státy zavedly gregoriánský kalendář ještě později:

- Anglie 1752
- Japonsko 1873
- Čína 1911 (1949 ČLR)

- Rusko 1918 (Velká říjnová socialistická revoluce v listopadu)
- Řecko 1924 (poslední v Evropě)

Pravoslavná církev nepřijala gregoriánskou reformu nikdy. Tím vznikl dosud trvající rozpor uvnitř křesťanství a díky tomu jsou většinu roků odlišná data Nového roku a pravoslavných Velikonoc.

3.4 Francouzský revoluční kalendář

V historii i současnosti najdeme několik pozoruhodných solárních kalendářů. Historicky velmi zajímavý je kalendář francouzské revoluce [7]. Zaveden byl 24. 11. 1793 se zpětně stanoveným začátkem od 22. 9. 1792 – začátek roku připadal vždy na podzimní rovnodennost. Zrušen byl Napoleonem 31. března 1805, platil do konce roku 1805.

Jednalo se o částečně dekadický systém:

- 3 týdny po 10 dnech (dekády)
- Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Décadi
- den se dělil na 10 hodin / hodina na 100 minut / minuta na 100 sekund

Názvy dnů:

- dny končící 5 podle zvířat
- dny končící 0 podle pracovního náčiní
- ostatní dny podle rostlin, minerálů, chemických prvků

Názvy měsíců:

- podzim
  - vendémiaire (měsíc vinobraní)
  - brumaire (měsíc mlh)
  - frimaire (měsíc jinovatky)
- zima
  - nivôse (měsíc sněhu)
  - pluviôse (měsíc dešťů)
  - ventôse (měsíc větrů)
- jaro
  - germinal (měsíc rašení)
  - floréal (měsíc květů)
  - prairial (měsíc luk)

Obr. 2: Sovětský pracovní kalendář na rok 1933 [8]

- léto
  - messidor (měsíc žní)
  - thermidor (měsíc horka, koupelí)
  - fructidor (měsíc plodů)

Pro nás je francouzský revoluční kalendář zajímavý díky bitvě u Slavkova. Ta se odehrála 2. prosince 1805 podle gregoriánského kalendáře, ale vojsko každého z císařů používalo kalendář jiný:

- 2. Dezember 1805 (prosinec; Rakušané)
- 20. Ноября 1805 (listopad; Rusové)
- 2. 11. Frimaire 14 (Francouzi)

S jistou nadsázkou se můžeme divit, že se tehdy ta vojska na pláni u Brna vůbec sešla.

3.5 Sovětský šestidenní pracovní kalendář

V Sovětském svazu byl ve třicátých letech 20. století používán pracovní kalendář se šestidenním cyklem. Po pěti pracovních dnech byl jeden den volna. Šlo však jen o pracovní cyklus, v pozadí byl klasický gregoriánský kalendář (obr. 2).

3.6 Astronomický juliánský kalendář

Jde o sluneční kalendář počítaný na dny. Zavedl jej Joseph Justus Scaliger (1540–1609) a počátek stanovil na poledne 1. ledna roku –4712 (1. ledna 4713 př. n. l.). Tento kalendář v sobě obsahuje i rok nula, běží tedy kontinuálně. Všechny občanské kalendáře začínají letopočtem 1 (nemají rok nula) a při stanovení dat událostí, které se staly před začátkem platnosti (letopočtu) daného kalendáře, dojde k diskontinuitě – skoku o jeden rok. Například v našem kalendáři po roce 1 př. n. l. (BC) následoval hned rok 1 našeho letopočtu (AD). V astronomických výpočtech takový skok způsobuje značné potíže, viz dále. Astronomické juliánské datum mělo v okamžiku, kdy bylo prosloveno na této přednášce, tvar:

$$\mathrm{JD} = 2458628{,}16.$$

Číslo vyjadřuje počet dní, které uběhly od stanoveného začátku počítání astronomického juliánského data. Protože první dva řády zleva se v JD nemění příliš často, používají astronomové modifikované juliánské datum MJD, pro které platí

$$\mathrm{MJD} = \mathrm{JD} - 2\,400\,000{,}5 \text{ (dní)}.$$

Pět desetin dne na konci vyjadřuje začátek v poledne (viz výše). MJD se tedy počítá od půlnoci a jeho hodnota v okamžiku proslovení na přednášce byla

$$\mathrm{MJD} = 58\,627{,}66.$$

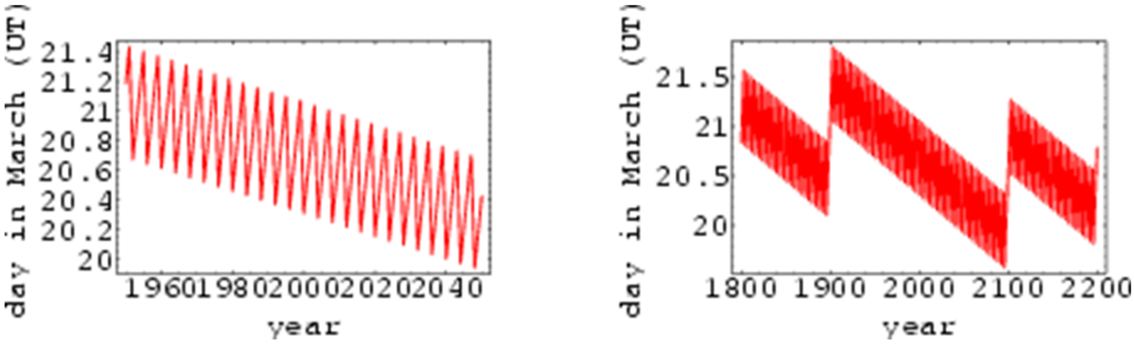
3.7 Jarní rovnodennost

V gregoriánském kalendáři okamžik, kdy nastává jarní rovnodennost, tedy kdy se Slunce ocitá na obloze v průsečíku ekliptiky a světového rovníku, kolísá. Nejčastěji připadá na 20. březen, ale protože vkládáme přestupné dny, občas nastává 19. března nebo 21. března.

Vzhledem k systému výjimek, jež jsou podstatou gregoriánské reformy kalendáře, můžeme v posunech okamžiku jarní rovnodennosti najít čtyřletý, stoletý a čtyřsetletý cyklus.

V každém základním čtyřletém období se po první tři roky okamžik jarní rovnodennosti každý rok posouvá o necelou čtvrtinu dne k pozdějšímu datu, po zařazení přestupného dne se opět vrátí k datu dřívějšímu. Protože však je kompenzace rozdílu mezi tropickým rokem a kalendářním rokem, jehož základem je 365,25 dní dlouhý cyklus, nedostatečná (viz juliánský kalendář), dlouhodobě se okamžiky jarní rovnodennosti posouvají naopak k datu pozdějšímu (obr. 3 vlevo zachycuje tento jev mezi lety 1950 a 2050).

Kompletní čtyřsetletý cyklus proběhl jen jeden. Letopočty dělitelné čtyřmi sty nastaly dva – 1600 a 2000. Vložením přestupného dne v roce 2000 začal



Obr. 3: Oscilace okamžiků jarní rovnodennosti a systematický posun k dřívějším datům během stoletého cyklu [9].

nový 400letý cyklus, okamžiky jarní rovnodennosti se v tomto století posouvají k dřívějším datům, na konci následujících století se bude rovnodennost vždy přesouvat k datům pozdějším, ale kompenzace není dokonalá, na konci 400letého cyklu zůstane rozdíl 2,9 hodiny. To ilustruje graf na obr. 3 vpravo.

Výsledkem této oscilace je, že na začátku nového 400letého cyklu masivně převažuje jako datum jarní rovnodennosti 20. březen a objevuje se i 19. březen. V následujících dvou stoletích připadá začátek jara nejčastěji na 20. březen, ale objevuje se i 21. březen a teprve v posledním století 400leté periody začne převažovat 21. březen jako datum začátku jara. Ve 20. století se to týkalo jeho první poloviny.

Tab. 2 obsahuje počty okamžiků jarní rovnodennosti, které připadly na dané datum ze tří možných ve 20. století a první polovině 21. století. Jsou do ní zahrnuta data spočítaná v UT (Universal Time), tedy platná ve standardním pásmovém čase na nultém poledníku. Dne 19. 3. nastanou jarní rovnodennosti v UT v letech 2044 a 2048, u nás, v čase středoevropském, pouze v roce 2048. Ve druhé polovině 21. století bude jarních rovnodenností připadajících na 19. březen více. Obě jarní rovnodennosti, které v tomto století připadají na 21. březen, už nastaly, a to v letech 2003 a 2007. Nejbližší další rovnodennost připadne na 21. březen v roce 2102.

Roky	19. 3.	20.3.	21. 3.
1901 – 1950	0	12	38
1951 – 2000	0	31	19
2001 – 2050	2	46	2

Tab. 2: Četnost okamžiků jarní rovnodennosti pro 19. až 21. 3. v letech 1901 až 2050 (uvažovány jsou okamžiky v UT) [10]

Rok	Jaro	Léto	Podzim	Zima
0	93,97	92,45	88,69	90,14
1000	93,44	93,15	89,18	89,47
2000	92,76	93,65	89,84	88,99
3000	91,97	93,92	90,61	88,74

Tab. 3: Trvání ročních období (dny) [10]

3.8 Druhý Keplerův zákon

Z výše uvedeného je vidět, že určení okamžiku jarní rovnodennosti je poměrně komplikované, a to nejen čtyřmi cykly, v nichž se tyto okamžiky posouvají, ale také tím, že v místním čase na různých polednících mohou připadnout na rozdílná data. Další jev, který se promítá do dlouhodobých cyklů rovnodenností a slunovratů, je pohyb Země po eliptické trajektorii proměnlivou rychlostí (2. Keplerův zákon). A protože v periheliu (periapsis, např. 3. 1. 2019; 147,096 Gm od Slunce [1]) je Země nejrychlejší, zatímco v aféliu (apoapsis) je nejpomalejší, je na severní polokouli astronomická zima nejkratší a astronomické léto nejdelší.

Stanovení okamžiku jarní rovnodennosti ovšem samotný fakt proměnlivé rychlosti pohybu Země neovlivňuje. Projevuje se v něm však stáčení tzv. přímky apsid (prochází periheliem a aféliem, určuje směr velké osy eliptické trajektorie planety v prostoru). Stáčení přímky apsid má v případě Země hodnotu $0{,}017\,2^\circ$ za tropický rok. Díky tomu se pak dlouhodobě mění délka jednotlivých ročních období. V tab. 3 vidíme, že v současnosti se jaro a zima zkracují, léto a podzim prodlužují.

Pro účel stanovení data Velikonoční neděle vyřešila problém začátku jarní rovnodennosti už samotná gregoriánská reforma – stanovila pevné datum jarní rovnodennosti na 21. březen bez ohledu na astronomickou skutečnost. Za první jarní úplněk je považován i ten, který nastane 21. března.

3.9 Výpočet Velikonoční neděle

Rekapitulujme rok 2019:

- středa 20. 3. 2019, 22:58 SEČ začátek astronomického jara
- čtvrtek 21. 3. 2019, začátek jara pro účel stanovení Velikonoční neděle
- čtvrtek 21. 3. 2019, 02:43 SEČ Měsíc v úplňku, první jarní úplněk

- neděle 24. 3. 2019, všechny podmínky jsou splněny, proč není Velikonoční nedělí?

- neděle 21. 4. 2019, Velikonoční neděle

Ve skutečnosti se datum Velikonoční neděle stanovuje algoritmem [11], který pro některé roky vygeneruje jako první jarní úplněk ten, který je podle astronomické skutečnosti i při zohlednění pevného začátku jara 21. března až druhý, a Velikonoce se posunou. Proto se tento Velikonoční úplněk v algoritmu neoznačuje jako první jarní, ale jako cyklický úplněk, používá se také zkratka PFM (z anglického označení Paschal Full Moon = pašijový úplněk).

Základem je určení tzv. epakty = stáří (fáze) Měsíce na začátku roku, přiřazení cyklického úplňku („první jarní“) a nakonec zjištění kalendářního data neděle následující po cyklickém úplňku.

Představíme si algoritmus, který pracuje s operacemi celočíselného dělení (div) a zbytku po celočíselném dělení (mod). Ačkoli je letopočet vlastně uměle stanoveným číslem, vycházejí algoritmy právě z letopočtu.

3.10 Výpočet gregoriánské epakty

Pro výpočet gregoriánské epakty ve dnech (stáří měsíce na začátku roku, tedy kolik dní uplynulo od posledního novu do 1. 1. v 0 hodin UT) se nejprve stanoví epakta podle juliánského kalendáře a poté se provede oprava na gregoriánský systém (tab. 4).

Operace	2019
letopočet *mod* 19	5
předchozí řádek + 1 ... **zlaté číslo**	**6**
zlaté číslo × 11	66
předchozí řádek *mod* 30 ... **juliánská epakta**	**6**
opravy	
(letopočet *div* 100) + 1 ... **století**	**21**
století − 16	5
(předchozí řádek × 3) *div* 4 ... **sluneční oprava**	**3**
století − 15	6
(předchozí řádek × 8) *div* 25 ... **měsíční oprava**	**1**
juliánská epakta − 10 − sluneční oprava + měsíční oprava	−6
toto číslo musí být v intervalu 0 až 29 je-li <0, přičíst 30, je-li >29, odečíst 30 ... **gregoriánská epakta**	**24**

Tab. 4: Výpočet gregoriánské epakty pro rok 2019

3.11 Určení data cyklického úplňku

Určení data cyklického účinku je vidět v tab. 5.

epakta	cyklický úplněk PFM *(Paschal Full Moon)*	2019
0 až 23	44 − epakta	
24	49	49
25 ∧ zlaté číslo <12	49	
25 ∧ zlaté číslo >11	48	
26 až 29	74 − epakta	
je-li PFM <32	cyklický úplněk **PFM. března**	
je-li PFM >31	cyklický úplněk **(PFM − 31). dubna**	**18**
Cyklický úplněk může nastat nejdříve 21. března a nejpozději 18. dubna.		

Tab. 5: Stanovení data cyklického úplňku podle epakty – s příkladem pro rok 2019

3.12 Určení Velikonoční neděle

Posledním krokem je určení kalendářního dne, na který připadá datum cyklického úplňku, které jsme právě zjistili, a poté nalezení nejbližší následující neděle (tab. 6).

Operace	2019
10 + **sluneční oprava** . . . gregoriánská oprava (rozdíl mezi kalendáři)	**13**
letopočet + (letopočet *div* 4)	2523
předchozí řádek − gregoriánská oprava + PFM	2559
předchozí řádek *mod* 7 . . . den v týdnu, na nějž připadá cyklický úplněk	**4**
0 – neděle, 1 – pondělí, 2 – úterý, . . . , 6 – sobota	**čtvrtek**
21. dubna následující **neděle** je **Velikonoční**	**21. dubna**

Tab. 6: Určení kalendářního dne cyklického úplňku a Velikonoční neděle

Vidíme, že algoritmus vygeneroval pro letopočet 2019 gregoriánského kalendáře nejzazší možné datum cyklického („prvního jarního“) úplňku čtvrtek 18. 4., a tudíž Velikonoční neděli 21. 4. 2019.

3.13 Další algoritmy a varianty

Výsledky uplatnění podmínek a algoritmu stanovení data cyklického úplňku z tab. 5 můžeme také shrnout do tab. 7. Zlaté číslo, které rozhoduje o datu cyklického úplňku v případě, že hodnota epakty je 25, jsme vygenerovali ve druhém kroku výpočtu epakty – viz tab. 4.

epakta	cyklický úplněk	epakta	cyklický úplněk	epakta	cyklický úplněk
0	13. duben	10	3. duben	20	24. březen
1	12. duben	11	2. duben	21	23. březen
2	11. duben	12	1. duben	22	22. březen
3	10. duben	13	31. březen	23	21. březen
4	9. duben	14	30. březen	24	18. duben
5	8. duben	15	29. březen	25	18. / 17. duben
6	7. duben	16	28. březen	26	17. duben
7	6. duben	17	27. březen	27	16. duben
8	5. duben	18	26. březen	28	15. duben
9	4. duben	19	25. březen	29	14. duben
epakta 25: je-li zlaté číslo >11, platí 17. duben, jinak zvolíme 18. duben					

Tab. 7: Přiřazení cyklických úplňků k epaktě

Známý je též Gaussův algoritmus, který zde neuvádíme.

Pro účel strojového výpočtu, ať už na programovatelném kalkulátoru nebo počítačem, a tedy například práci studentů, je vhodný Butcherův algoritmus z roku 1876 [12], který zahrnuje všechny výjimky obsažené v pravidlech pro stanovení Velikonoc a přímo generuje datum Velikonoční neděle (tab. 8).

Operace	podíl	zbytek
XXYY *mod* 19	–	**a**
XX *div* 4	**b**	–
XX *mod* 4	–	**c**
(XX+8) *div* 25	**d**	–
YY *div* 4	**e**	–
YY *mod* 4	–	**f**
(XX – d + 1) *div* 3	**g**	–
(XX + 15 – b – g + 19a) *mod* 30	–	**h**
(2e + 2c + 32 – h – f) *mod* 7	–	**i**
(22i + 11h + a) *div* 451	**j**	–
(114 – 7j + h + i) *div* 31	**měsíc**	
1 + (114 – 7j + h + i) *mod* 31		**den**

Tab. 8: Butcherův algoritmus vhodný pro strojový výpočet Velikonoční neděle

4 Shrnutí

Porovnejme mezi sebou data vedoucí k určení první neděle po prvním jarním úplňku podle astronomické skutečnosti a data vedoucí ke stanovení Velikonoční neděle pro rok 2019 (tab. 9).

astronomická skutečnost	výpočet Velikonoc
stáří Měsíce na začátku roku: **24,7** dne	gregoriánská epakta **24**
začátek jara: středa **20. 3.** 22:58 SEČ	začátek jara čtvrtek **21. 3.**
první jarní úplněk: čtvrtek **21. 3.** 2:43 SEČ	cyklický úplněk čtvrtek **18. 4.**
první následující neděle **24. 3.**	Velikonoční neděle **21. 4.**

Tab. 9: Velikonoce v roce 2019 – porovnání

Algoritmus právě pro rok 2019 vygeneroval datum Velikonoční neděle, které se liší od data, které bychom dostali striktně astronomickými výpočty podle nicaejské definice.

Porovnejme ještě data Velikonoc v gregoriánském kalendáři a v kalendáři juliánském, jímž se dosud řídí pravoslavné větve křesťanství.

Gregoriánský kalendář

- Velikonoční neděle může připadnout nejdříve na 22. 3. a nejpozději na 25. 4.
- připadne-li na 26. 4., přesun na 19. 4. (např. 1981)

Juliánský kalendář

- Velikonoce jsou většinou později (výjimečně současně)
  - většinou o týden – letos (2019) 21. 4. vs 28. 4.
  - největší rozdíly (např.)
    - 2021: 4. 4. vs 2. 5. (28 dní)
    - 2024: 31. 3. vs 5. 5. (35 dní)

5 Závěr

Ukázali jsme, že stanovení data Velikonoční neděle je sice definováno přirozenými astronomickými cykly, jako jsou délka tropického roku a synodická perioda Měsíce, ale ve skutečnosti se k výpočtu používá matematický algoritmus založený na operacích celočíselné dělení a zbytek po celočíselném dělení. Problematiku je možné využít v práci s nadanými žáky jako příklad algoritmizace výpočtu jevu, který ovlivňuje řada podmínek, včetně demonstrace skutečnosti, že algoritmus může vést k odchylce od skutečnosti. Nebo v hodinách matematiky jako motivační příklad využití operací div a mod.

Literatura

[1] Rozehnal, J. et al.: *Hvězdářská ročenka 2019*. Praha, Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, Astronomický ústav AV ČR, 2018.

[2] Bláhová, M.: *Historická chronologie.* Praha, Libri, 2001.

[3] Takashima, H.: *Emperor Naruhito assumes throne to mark new Reiwa era* [online]. The Mainichi, May 1, 2019. https://mainichi.jp/english/articles/20190430/p2a/00m/0na/023000c

[4] Malý, J.: *Vlastenský slovník historický.* Praha, Rohlíček a Sievers, 1877, s. 197.

[5] Gregorius XIII, Audette, R., Spencer, W.: *Inter Gravissimas* [online]. http://www.bluewaterarts.com/calendar/NewInterGravissimas.htm

[6] Jozíf, J.: *Přijetí gregoriánského kalendáře* [online]. https://kalendar.beda.cz/prijeti-gregorianskeho-kalendare

[7] *Francouzský revoluční kalendář* [online]. https://cs.wikipedia.org/wiki/Francouzsky_revolucni_kalendar

[8] *Soviet Calendar 1933* [online]. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soviet_calendar_1933_color.jpg

[9] Wesstein, E. W.: *Vernal Equinox* [online]. http://scienceworld.wolfram.com/astronomy/VernalEquinox.html

[10] Příhoda, P.: Proč ne jenom jednadvacátého...? In: *Corona Pragensis*, 6/1998. Praha, ČAS, 1998.

[11] Jozíf, J.: *Výpočet velikonoční neděle v gregoriánském kalendáři* [online]. https://kalendar.beda.cz/vypocet-velikonocni-nedele-v-gregorianskem-kalendari

[12] Netopil, T.: Astronomické okénko – Velikonoce. In: *ABC*, 4/1982.

Technické aplikace fyziky – motivace pro výuku

Bohumil Vybíral, Univerzita Hradec Králové

Abstrakt: Předložený článek představuje autorovu dvousvazkovou elektronickou knihu „Technické aplikace fyziky" o 24 kapitolách na 520 stranách. Kniha soustavně pojednává o fyzikálních principech, na nichž je založeno široké spektrum technických systémů. Východiskem výkladu jsou příslušné fyzikální principy/zákony, následuje pojednání o realizaci, funkci i historickém vývoji aplikací. V článku je komentován obsah jednotlivých kapitol knihy. Jako ukázka zpracování je uvedena část kapitoly, věnované aplikacím Archimédova zákona, jehož formulaci autor zpřesnil. V závěru je zdůrazněn motivující charakter díla pro zlepšení zájmu o fyziku, doplněný apelem na zlepšení přípravy budoucích učitelů fyziky.

1 Úvod – představení knihy *Technické aplikace fyziky*

Dvousvazková elektronická kniha „Technické aplikace fyziky" ([1], [2], motiv titulní stránky je na obr. 1) soustavně pojednává o fyzikálních principech, na nichž je založeno široké spektrum technických systémů, o jejich realizaci a funkci. Kniha tvoří jakýsi můstek mezi školským předmětem *Fyzika* a technickými obory. To je významné jak pro studenty fyziky (jasně ukazuje, proč je fyzika užitečná), tak pro techniky (vysvětlí jim, na jakých principech zařízení pracuje). Učitelům fyziky dává inspiraci k oživení výuky a k podnícení většího zájmu o fyziku. Ke zvýšení atraktivity probírané látky kniha věnuje pozornost i historii techniky a k výkladu využívá četné ilustrace technických systémů, vč. fotografií jejich provedení. Celým dílem prostupuje matematika jako nenahraditelný nástroj pro fyziku a technické aplikace.

V knize o 24 kapitolách se probírají nejdůležitější obory aplikace fyziky, zejména z období od druhé poloviny 19. století až do současnosti. Století, začínající druhou polovinou 19. století, se právem nazývá stoletím elektřiny. Navazující a prudce se rozvíjející aplikace polovodičové techniky a digitální technologie otevřely digitální éru, která dnes prolíná všemi sférami společnosti. To vše podmínila fyzika a její aplikace.

V každé kapitole knihy se dodržuje posloupnost výkladu: nejprve jsou připomenuty aplikované fyzikální zákony, poté je popsána technická realizace a vysvětlena funkce systémů. Všechny kapitoly jsou relativně samostatné, lze je

Obr. 1: Raketoplán *Discovery* při instalaci *Hubbleova teleskopu* na oběžnou dráhu kolem Země – jeden z vrcholů technických aplikací fyziky ve 20. století

tedy studovat i odděleně (samozřejmě se znalostí obecné fyziky a matematiky). Každá kapitola má samostatný seznam zdrojů.

V prvních dvou kapitolách prvního svazku se věnuje pozornost fyzice jako zdroji poznání a základu aplikací, které rozvíjí matematika. Následují kapitoly o aplikaci Archimédova zákona, o širokém uplatnění setrvačníků a o tepelném přenosu. Hlavní pozornost prvního svazku je věnována pohonům (spalovacím motorům, vodním, parním a spalovacím turbínám, raketám a elektromotorům). Pozornost se věnuje také výrobě a přenosu elektrického proudu (souhrnně jde o elektrické indukční stroje). Významnou složkou výkladu je také stabilita a pohyb lodí a létajících strojů (tj. balonů, vzducholodí, letadel a vrtulníků). Činnost technických systémů provázejí dynamické jevy, projevující se kmitáním, které může vyvolat nebezpečné destrukce, jak je ukázáno v samostatné kapitole.

Kapitoly druhého svazku probírají zejména aplikace polovodičů a elektromagnetického vlnění/záření. Mj. se probírají systémy pro záznam a reprodukci zvuku a obrazu, lasery, sdělovací a telekomunikační technika a optické přístroje. Dvě kapitoly se věnují štěpení jádra, jaderné fúzi a energetice (vodním, uhelným a jaderným elektrárnám). Pozornost je také věnována fyzikálně správnému používání pojmu *energie*. Poslední kapitola stručně pojednává o technických muzeích a jejich motivaci pro studium fyziky.

Předností prezentované elektronické knihy je možnost rychlého vyhledání textu, přechod na začátek zvolené kapitoly (či oddílu) využitím seznamu záložek anebo vepsáním čísla strany do políčka na horní liště nástrojů.

Vazbou fyziky na technické aplikace se ve starší české literatuře zabývají *Technické fysiky* [3], [4]. O historii elektrotechniky poutavě pojednává kniha [5].

2 Z obsahu jednotlivých kapitol

Kapitola první ***Fyzika – zdroj poznání a základ technických aplikací*** nejprve pojednává o vztahu přírodních zákonitostí a fyzikálních zákonů (na základě observací a experimentů formulovaných člověkem jako víceméně přesné matematické modely poznaných zákonitostí). Jako příklad heuristického poznávání uvádí 120letý vývoj poznávání od elektřiny a magnetismu ke speciální relativitě. Následuje úvaha o tom, jak živá příroda je ve svém vývoji podmíněna přírodními zákonitostmi a jak je člověk aplikuje při vytváření technických systémů. Proto je také důležité, aby mládež úspěšně studovala fyziku.

Kapitola druhá ***Matematika – nástroj fyziků a techniků*** ukazuje na nezastupitelnou roli matematiky při formulaci fyzikálních zákonů. Matematickými nástroji, které si někdy nově musí člověk vytvořit, dospívá k významným souvislostem mezi zákony a k možnostem je aplikovat v technických systémech. Součástí kapitoly je i přehled základních vzorců infinitezimálního počtu.

Kapitola třetí ***Aplikace Archimédova zákona*** nejprve uvádí zpřesněné znění Archimédova zákona a ukazuje, kdy tradičně uváděné znění neplatí. Předmětem aplikací jsou lodě a jejich stabilita, balóny a vzducholodě. Ukázka části znění této kapitoly je v samostatném oddíle 3.

Kapitola čtvrtá ***Setrvačníky a jejich aplikace*** je uvedena pohybovými rovnicemi setrvačníku a jejich geometrickou interpretací – Résalovou větou. Analyzuje pohyb volného setrvačníku a jeho aplikace, řeší precesi a nutaci setrvačníku. Uvádí aplikaci setrvačníku jako kinetického energetického akumulátoru. Probírá gyroskopické jevy u dopravních strojů v zatáčce, stabilizaci letu rakety, hlavňové střely a sportovního disku. Uzavírá lunisolární precesí Země.

Kapitola pátá ***Tepelný přenos, chlazení a vytápění*** se nejprve zabývá teplem a tepelnými ději. Řeší tepelný přenos vedením (kondukcí), prouděním (konvekcí) a sáláním (radiací) s četnými příklady. Uvádí chladicí systémy (kompresorové, absorpční, Peltierovo polovodičové a magnetokalorické, např. s využitím slitin na bázi gadolinia). Uzavírá ekologickým a ekonomickým vytápěním.

Kapitola šestá ***Spalovací motory*** nejprve připomíná zákony a děje termodynamiky se zaměřením na cykly zážehových a vznětových spalovacích motorů (včetně výpočtu jejich výkonu a účinnosti). Následuje stručné pojednání o realizaci motorů (činnost čtyřdobého a dvoudobého zážehového motoru, ventilový rozvod, systémy zapalování, příprava paliva, vstřikovací čerpadlo u vznětového motoru). Uvádí příklady provedení historických a současných motorů, Wankelův motor.

Kapitola sedmá ***Proudové motory – turbíny*** se nejprve zabývá Newtonovým zákonem síly pro proudící tekutinu (zavádí veličinu tok hybnosti). Pojednává o termodynamice páry. Poté se věnuje vodním turbínám všech typů. Hlavní pozornost věnuje parním turbínám (Clausiův-Rankinův cyklus, příklad výpočtu výkonu jednoho stupně turbíny, konstrukční řešení parních turbín). Uzavírá spalovacími turbínami.

Kapitola osmá ***Rakety a jejich kosmické aplikace*** se nejprve zabývá historií vývoje raket a jejich aplikací, projektu Apollo a raketoplánu. Řeší pohybovou rovnici raket (reaktivní síla, Ciolkovského úloha, výpočet rychlosti vícestupňové rakety). V závěru probírá raketové motory (chemické a motory fyzikálního typu).

Kapitola devátá ***Letadla*** ukazuje, že tyto stroje využívají četné fyzikální principy. Po motivačním vstupu o historii letectví, vč. české stopy, se zabývá letadlem jako tělesem o šesti stupních volnosti. Analyzuje aerodynamické síly působící na křídlo a na celé letadlo. Zabývá se vrtulovým a proudovým pohonem letadla a uvádí příklady leteckých motorů. Pozornost je věnována leteckým přístrojům v kabině letadla, přičemž je zdůrazněn jejich fyzikální princip a nezastupitelná činnost pro bezpečnost letu.

Kapitola desátá ***Vrtulníky*** zahajuje úvahou o tom, jak u živočišných letců se příroda obtížně kopíruje (přistávají bezpečně kdekoli chtějí, nedochází u nich k haváriím v důsledku srážek, mají výbornou navigaci). Probírá historii a fyzikální základy vrtulníku, jejich konstrukci a principy řízení letu. Uvádí příklady provedení vrtulníků a vírníku.

Kapitola jedenáctá ***Kmitání technických soustav*** se po nezbytném fyzikálním pojednání o kmitání oscilátorů a jejich rezonančních stavech zabývá samobuzeným kmitáním. Jeho zdrojem mohou být Kármánovy víry v tekutinách. Uvádí příklady samobuzených kmitů u velkých staveb (komínů, visutých mostů, mrakodrapů). Pozornost je také věnována únavě materiálu v důsledku kmitání a haváriím, které únavový lom způsobuje.

Kapitola dvanáctá ***Indukční elektrické stroje*** nejprve uvádí Faradayovy zákony o elektromagnetické indukci a uvádí jejich aplikaci u jednoduchého alternátoru. Technické aplikace jsou uplatněny u alternátorů, dynam a transformátorů (s uvedením jejich aplikací u současných i historických strojů).

Kapitola třináctá ***Elektrické motory*** vychází ze silového působení proudovodičů podle Ampérova zákona a řeší se zde jednoduchý stejnosměrný motor. Zabývá se konstrukcí stejnosměrných a střídavých jednofázových komutátorových motorů. Hlavní pozornost věnuje třífázovým asynchronním motorům, účelným pro jejich jednoduchost. Uzavírá ukázkami provedení současných i historických elektromotorů.

Kapitola čtrnáctá ***Polovodiče a jejich aplikace*** nejprve pojednává o elektrické vodivosti pevných látek se zaměřením na polovodiče. Uvádí jejich chemické představitele. Pojednává o PN přechodu a o typizaci polovodičových součástek. Probírá četné typy polovodičových diod. Zaměřuje se na tranzistory (bipolární, unipolární, spínací). Následují integrované polovodičové obvody (operační zesilovače, mikroprocesory, elektronické polovodičové paměti). Závěr kapitoly je podrobně zaměřen na vývoj polovodičových aplikací s četnými příklady provedení, vč. českých.

Kapitola patnáctá ***Zvuk – jeho záznam a reprodukce*** se nejprve zaměřuje na fyzikální a fyziologické vlastnosti zvuku. Pojednává o principech a konstrukci mikrofonů a reproduktorů. Následují současně používané systémy záznamu a reprodukce (elektrický gramofon, optický záznam a reprodukce, magnetický záznam a reprodukce, digitální záznam a reprodukce). Závěr kapitoly je opět věnován historii oboru.

Kapitola šestnáctá ***Aplikace elektromagnetického vlnění*** je uvedena přehledem aplikací tohoto vlnění. Pak se soustřeďuje na generátory elektromagnetických kmitů a vln různých pásem frekvencí, vč. mikrovln. Následuje stať o rentgenkách a kvantových generátorech koherentního záření (lasery, masery). Pojednání o anténách (princip, realizace antén různých velikostí). V závěru jsou různé příklady aplikace záření, laseru.

Kapitola sedmnáctá ***Obraz – jeho záznam a reprodukce*** se nejprve soustřeďuje na světlo a mechanismus vidění (zejména na strukturu a činnost sítnice). Probírá intenzitní záznam obrazu – fotografii na fotochemickém principu (černobílou i barevnou). Hlavní pozornost je věnována digitální fotografii (zejména struktuře a funkci tří druhů snímacích čipů). Pozornost je věnována i filmu a videu. Následuje stručná historie fotografie a filmu. Pokračuje holografií – jako fázovým záznamem obrazu pomocí koherentního světla (medicínské aplikace jako OCT). Poslední část je věnována třem typům plochých elektronických zobrazovačů, resp. monitorů, jejich principu a provedení.

Kapitola osmnáctá ***Sdělovací technika*** nejprve řeší sdělování zpráv a pořadů technologií amplitudové a frekvenční modulace nosné vlny. Uvádí princip rozhlasového a televizního přijímače klasického (analogového) systému. Prezentuje příklady provedení přijímačů z různých období jejich vývoje. Vysvětluje systém digitálního vysílání a příjmu televize a rozhlasu. Zmiňuje se o HD a 3D televizi. Uzavírá internetem jako sdělovacím prostředkem.

Kapitola devatenáctá ***Telekomunikační technika a technologie*** nejprve uvádí současný stav vývoje tohoto prudce se rozvíjejícího oboru. Jde především o drátovou a mobilní telefonii a o internet. Zajímavý je pohled do historie telekomunikací využívající různé fyzikální principy. Patří sem mj. vývoj drátového a mobilního telefonu (analogového i digitálního), dálnopisu a internetu, jeho historie.

Kapitola dvacátá ***Optické přístroje*** nejprve uvádí základní zákony geometrické optiky, zobrazování zrcadly a čočkami. Pak je zmíněna lupa jako základ optických přístrojů, mikroskop (vč. elektronového), jeho princip, provedení a historie, dalekohled – princip a provedení čočkového Keplerova a Galileova dalekohledu, zrcadlový dalekohled, dále astronomické dalekohledy – ukázky historických i současných, fotoaparáty (konstrukce a ukázky, vč. digitálních).

Kapitola dvacátá první ***Štěpení jádra a jaderná fúze*** nejprve věnuje pozornost struktuře jádra atomu, jeho vazební energii a možnostem jejího uvolňování. Zaměřuje se na historii objevu štěpení jádra uranu, vývoj nukleární bomby, řízené štěpení v reaktoru, uvádí typy jaderných reaktorů pro energetiku. V závěru se zabývá historií vodíkové bomby a problémem řízené jaderné fúze (experimenty s tokamakem a se stelarátorem).

Kapitola dvacátá druhá ***Elektrárny*** přehledně probírá všechny druhy elektráren, přičemž se soustřeďuje na elektrárny vodní, uhelné a jaderné. Uvádí ukázky českých vodních elektráren a dvou největších elektráren na světě (v Jižní Americe a v Číně). Uvádí fyzikální a technologický popis obou českých jaderných elektráren: Temelín a Dukovany.

Kapitola dvacátá třetí ***Energie – o správném používání pojmu*** se nejprve zaměřuje na etymologii tohoto fyzikálního pojmu. Ukazuje na správné i nesprávné používání pojmu energie ve fyzice a ve společnosti. V podstatě jde o měřitelnou fyzikální veličinu, vázanou na nějakou soustavu, přičemž v uzavřené soustavě energii nelze např. vyrábět, přemísťovat, obchodovat s ní jako se zbožím. Jsou obsaženy návrhy na řešení tohoto pojmového problému.

Kapitola dvacátá čtvrtá ***S fyzikou od minulosti pro budoucnost*** podtrhuje význam historie fyziky a techniky pro řešení fyzikálně-technických problémů v současnosti a v budoucnosti. V kapitole jsou prezentovány příklady několika technických muzeí. V nich lze nalézt nejen poučení, ale i inspiraci pro budoucnost. Závěrečný apel zní: nebojme se fyziky, otevře nám nové obzory a přináší užitek.

3 Ukázka části jedné kapitoly: Aplikace Archimédova zákona

3.1 K platnosti Archimédova zákona

V úvodu se podíváme na Archimédův zákon a na podmínky, pro které platí. Jeho znění obsahuje každá učebnice fyziky a odříkat jej umí i každý žák základní školy, avšak uváděné znění neplatí obecně. Původní formulace zákona se připisuje řeckému mysliteli Archimédovi ze Syrakus (asi 287–212 př.n.l.), obr. 2, snad největšímu matematikovi a fyzikovi starověku.

Formulace, stará asi 2 250 let, je sice jednoduchá, avšak není zcela obecná; mlčky totiž předpokládá, že kapalina (resp. tekutina) je v dotyku s celým povrchem ponořeného tělesa. U plovoucích těles, např. lodí, je sice tato podmínka splněna vždy, avšak obecně to neplatí, jak ukážeme na příkladech.

Není-li část povrchu ponořeného tělesa v dotyku s kapalinou (tekutinou), nepůsobí na ni hydrostatický (resp. aerostatický) tlak a Archimédův zákon neplatí. Proto je třeba formulaci Archimédova zákona upravit tak, aby se vyloučily výše zmíněné situace ([1], [6], [7], [8]).

Zpřesněné znění **Archimédova zákona** je toto: Těleso ponořené do kapaliny (resp. tekutiny) tak, že kapalina **působí na celý ponořený povrch**, je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž velikost je rovna tíze kapaliny stejného objemu, jako je ponořený objem tělesa. Zvláštním případem je *plovoucí těleso*, kdy kapalina vždy působí na celý ponořený povrch. Pak je formulace pro velikost vztlakové síly jednoduchá: Vztlaková síla působící na plovoucí těleso je rovna tíze objemu kapaliny vytlačené tělesem.

O případech, kdy kapalina (voda a plyn/vzduch) nepůsobí na celý ponořený povrch tělesa a které se v praxi vyskytují, pojednává následující ilustrační příklad. V textu [1] a [7] je další příklad, který se vztahuje na praktický případ přehradní hráze ve dvou mezních situacích: jednak, kdy hráz je v podloží dokonale utěsněna, a jednak, kdy netěsní (mezi hrází a podložím je tenká vrstvička vody).

Bude vhodné si ještě uvést, jakým myšlenkovým pochodem Archimédes k formulaci zákona asi dospěl. V případě homogenního tělesa s povrchem obecného tvaru pomůže jednoduchá úvaha, která pravděpodobně pochází již od Archiméda. Představme si, že ve stojící kapalině vymezíme objem ve tvaru uvažovaného pevného tělesa. Toto kapalinové těleso zůstává na místě, tudíž je nadlehčováno silou o velikosti jeho tíhy. Po náhradě kapalinového tělesa pevným tělesem o jiné hustotě, stejného tvaru a objemu (v kapalině nerozpustným) bude výsledná síla působící na vložené těleso rovna rozdílu tíhy obou těles.

K tomu je třeba dodat, že Archimédes již znal pojem hustoty těles. Vyšel z úvahy o vztahu hustoty ponořeného tělesa a kapaliny. V souvislosti s objevem zákona se také uvádí historka o jeho koupání a o náhlém problesknutí mysli („heuréka“), když si uvědomil, že jej voda nadnáší. Mohl si představit, že kdyby měl stejnou hustotu jako voda ve vaně, vznášel by se, a tudíž by na něj působila nadlehčující síla rovná právě tíze jím vytlačené vody.

Důležitý pojem pro výpočet vztlakové síly je *hydrostatický tlak*, který pochází

Obr. 2: Archimédes ze Syrakus, „heuréka“ při koupání, hydrostatický tlak a vztlaková síla u tělesa obecného tvaru (zdroje [9], [10])

až od italského fyzika Evangelisty Torricelliho (1608 – 1647) v souvislosti s měřením atmosférického tlaku. Vlastní měření tohoto tlaku na popud Torricelliho roku 1643 provedl Vincenzo Viviani (1622 – 1703) pomocí rtuťového sloupce. Použití hydrostatického tlaku ($p = h\rho g$) k výpočtu vztlakové síly nás přivede ke správnému výsledku i v případech, kdy nejsou splněny podmínky pro použití zpřesněné formulace Archimédova zákona.

Pro úplnost uvedeme, jak se Archimédův zákon běžně odvozuje (přičemž se mlčky předpokládá, že kapalina působí na celý ponořený povrch tělesa). Uvažujme do kapaliny o hustotě ρ zcela ponořený kolmý válec se svislou osou, jehož délka je l a podstavy mají obsah S. Horní podstava je ve vzdálenosti h od hladiny. Hydrostatický tlak vyvolá na jeho plášti vzájemně se rušící síly a na podstavách síly $h\rho gS$, $(h + l)\rho gS$. Jejich rozdíl je

$$Sl\rho g = V\rho g = F_V.$$

Tedy velikost F_V vztlakové síly je rovna tíze kapaliny o objemu $V = Sl$ válce, přičemž vztlaková síla pro konstantní hustotu ρ nezávisí na hloubce ponoření válce. Působení atmosférického tlaku nebylo nutné uvažovat, protože jeho působení na celý povrch tělesa se vzájemně vyruší. Pro těleso obecného tvaru je výpočet náročnější (z důvodu integrace po uzavřené ploše povrchu tělesa), avšak výsledek je stejný. Řešení pro tento případ však lze nahradit úvahou o kapalinovém tělese, jak již bylo uvedeno.

3.2 Analýza sil působících na válec ponořovaný do kapaliny (příklad)

Uvažujme homogenní válec ($\rho_t = 2{,}70 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) o poloměru $r = 30{,}0$ mm a výšce $l = 70{,}0$ mm a nádobu s vodou ($\rho = 1{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$), v níž ve všech sledovaných situacích budeme udržovat hladinu ve stejné výšce $h = 120$ mm ode dna. Atmosférický tlak uvažujme $p_\mathrm{a} = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Válec nechť se nachází ve vztahu k nádobě v šesti různých situacích statické rovnováhy (obr. 3):

1. Válec je pomocí lanka částečně ponořen do nádoby, přičemž pro hloubku ponoření platí $x \in \langle 0; l)$
2. Zavěšený válec je zcela ponořen, avšak nedotýká se dna, $x \in \langle l; h)$
3. Válec je postaven na dno nádoby, přičemž v důsledku drobných nečistot (např. zrnek písku) nebo nerovností styčných ploch nedosedá dokonale na dno.
4. Válec dokonale přiléhá ke dnu (je zabroušen či nerozpustně přitmelen).
5. Válec na ploše mezikruží o vnitřním poloměru $r_1 = r/\sqrt{2}$ dokonale přiléhá ke dnu a tvoří uzávěr výtokového otvoru (tento případ lze považovat za model výpustného ventilu nádrže).
6. Zavěšený válec volně prochází (se zanedbatelným třením) otvorem o poloměru r ve dně nádoby, přičemž jeho plášť těsní výtokový otvor. Tloušťka dna nádoby je zanedbatelná. Pro vzdálenost dna válce od hladiny platí $x \in \langle h; h + l)$.

Vypočteme velikost síly F_i, která v jednotlivých případech působí na válec.

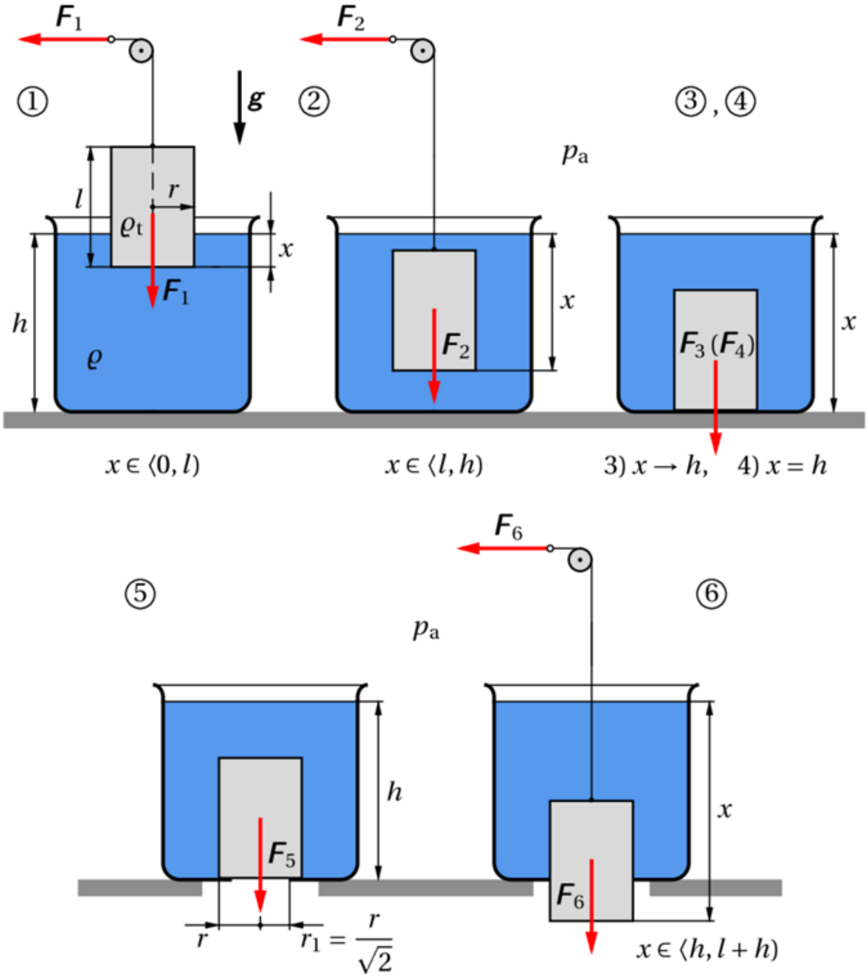
Řešení

1.
$$F_1 = \pi r^2 \left(l\rho_\mathrm{t} - x\rho\right) g \leq F_G,$$
$$F_{1\,\max} = \pi r^2 l\rho_\mathrm{t} g = F_G = 5{,}24\ \mathrm{N}\ (\text{pro } x = 0),$$
$$F_{1\,\min} = \pi r^2 l\left(\rho_\mathrm{t} - \rho\right) g = 3{,}30\ \mathrm{N}\ (\text{pro } x \to l).$$

2. Případ se od situace v bodě 1 liší tím, že hydrostatický tlak působí na celý povrch válce a síla má konstantní velikost
$$F_2 = F_{1\ \min} = 3{,}30\ \mathrm{N}.$$

3. V důsledku netěsného uložení působí hydrostatická tlaková síla i na spodní podstavu válce a výsledná síla je stejná jako v bodě 2, tj.
$$F_3 = F_2 = 3{,}30\ \mathrm{N}.$$

4. V důsledku těsného uložení ke dnu nemůže na spodní podstavu válce působit hydrostatická tlaková síla ani síla od atmosférického tlaku. Proto
$$F_4 = \pi r^2 \left[l\rho_t\ g + p_a + (h - l)\,\rho g\right] \gg F_G\ ,$$
$$F_4 = 289\ \mathrm{N}.$$



Obr. 3: K analýze sil působících na válec ponořovaný do vody

5. Situace se oproti případu 4 liší tím, že působení atmosférického tlaku se částečně kompenzuje jeho působením u dna na kruhové ploše o poloměru r_1. Pak

$$F_5 = F_4 - \pi r_1^2 p_a \gg F_G,$$

$$F_5 = 148 \text{ N}.$$

6. Síla je proměnná, závisí na x. Její mezní hodnoty pro $x = h + l$ a $x = h$ jsou

$$F_{6\ \max} = F_2 + \pi r^2 \rho g \,(h + l) = 8,56 \text{ N},$$

$$F_{6\ \min} = F_2 + \pi r^2 \rho g h = 6,62 \text{ N}.$$

Analýza výsledků: Snadno nahlédneme, že v případech 1, 2, 3 je splněna v úvodu formulovaná podmínka pro použití Archimédova zákona, a tudíž jej lze aplikovat. U případů 4, 5, 6 tato podmínka není splněna, Archimédův zákon neplatí a problém lze řešit jen využitím hydrostatického a atmosférického tlaku. Odchylka u případu 4 od případu 3 je výrazná. Pravděpodobně je překvapující velikost síly (F_4 = 289 N $\gg$ F_3 = 3,30 N), kde je síla F_4 především dána nekompenzovaným působením síly od atmosférického tlaku na spodní podstavě válce. U případu 5 atmosférický tlak přítlačnou sílu částečně zmenšuje. O tom, že v případech 3 a 4 nejde jen o akademickou úvahu, přesvědčuje zmíněný příklad přehradní hráze.

3.3 Plování těles, metacentrum

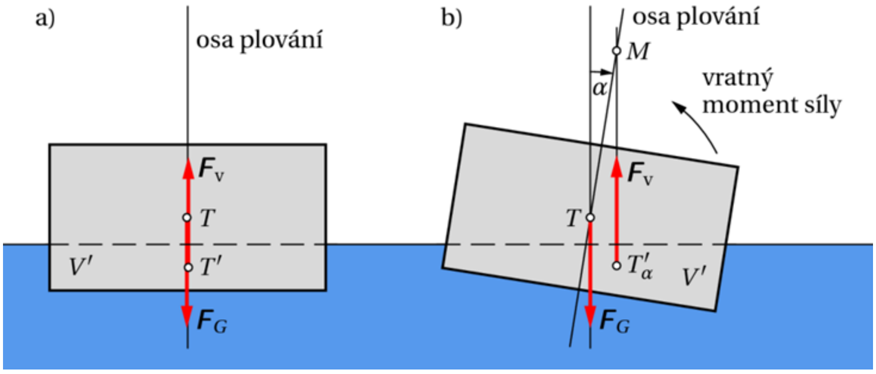
Stav plování tělesa je určen vztahem mezi střední hustotou ρ_t tělesa (budeme uvažovat $\rho_\mathrm{r} = \mathrm{konst}$) a hustotou ρ kapaliny (např. vody). Je-li $\rho_\mathrm{t} > \rho$, je vztlaková síla menší než tíhová síla a těleso se potopí. Pro $\rho_\mathrm{t} = \rho$ se tyto síly vyrovnají a těleso se vznáší. Pro naši úvahu je významný případ $\rho_\mathrm{t} < \rho$, kdy se ponořené těleso vynoří a plove. Je-li V celkový objem tělesa a V' objem jeho ponořené části, platí pro rovnováhu sil $V'\rho g = V\rho_\mathrm{t} g$. Pak

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_\mathrm{t}}{\rho}.$$

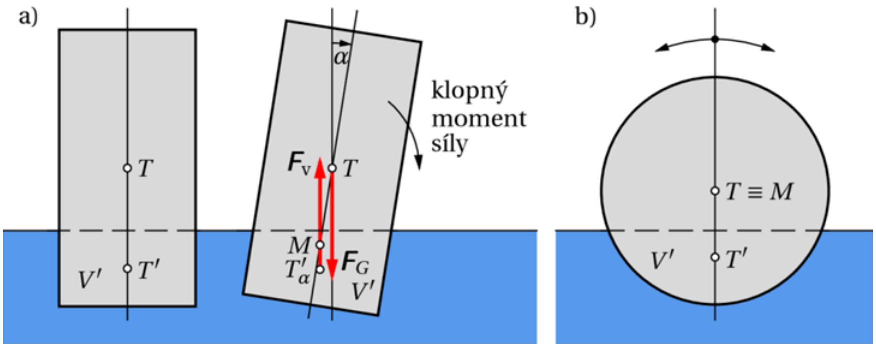
Hlavní aplikací tohoto vztahu jsou lodě. Mají zpravidla složitou strukturu a variabilní rozložení hmotnosti nákladu, přičemž k posouzení jejich schopnosti plout je určující střední hustota ρ_t a její vztah k hustotě ρ kapaliny. Střední hodnotu ρ_t lodi výrazně snižují dutiny uvnitř lodi (viz např. také řešení Titaniku, vybaveného 16 uzavíratelnými vodotěsnými komorami, které v nouzové situaci měly výrazně přispět k jeho uvažované nepotopitelnosti).

U plovoucích těles, zejména u lodí, je důležitá *stabilita*. Těleso plove stabilně, pokud na ně po vychýlení působí dvojice sil, která je uvádí zpět do původní rovnovážné polohy. Pro jednoduchost uvažujme plovoucí homogenní plochý kvádr (obr. 4), který je dostatečně dlouhý (jeho délka je větší než šířka). Stabilitu plovoucího kvádru podrobně analyzuje např. Bajer [11] a dochází k závěru, že kvádr je stabilní vždy, když je vodorovná strana průřezu (tj. šířka) větší než 1,22 výšky. Obecně závisí na poměru hustoty kvádru a hustoty kapaliny.

U plovoucích těles jsou důležité dva body, které za rovnováhy plovoucího tělesa leží na společné vertikále, tzv. *ose plování*. Těmito body jsou *těžiště T plovoucího tělesa* (působiště tíhové síly F_G) a *těžiště T' kapalného tělesa* o objemu V' vytlačeného plovoucím tělesem (působiště vztlakové síly F_V). Je zřejmé, že u homogenního tělesa, jakým je uvažovaný kvádr o hustotě $\rho_\mathrm{t} < \rho$, je bod T vždy nad bodem T'. Protože v těžišti působí tíhová síla F_G směrem dolů, snaží se těleso po vychýlení zaujmout co nejnižší polohu, kdežto těžiště T', jako působiště vztlakové síly F_V, směřuje vzhůru a snaží se zaujmout co nejvyšší polohu. V rovnovážné poloze jsou oba body na vertikální ose plování (obr. 4a). Vychýlíme-li těleso z rovnovážné polohy o malý úhel α (obr. 4b), změní se tvar kapalného tělesa, i když jeho objem V' se zachová. Poloha těžiště T' se změní na T'_V. Po vychýlení ze stabilní polohy se vytvoří dvojice sil F_G, F_V o stejné



Obr. 4: Plování homogenního kvádru: a) osa plování je svislá, b) osa plování je vychýlena o malý úhel α

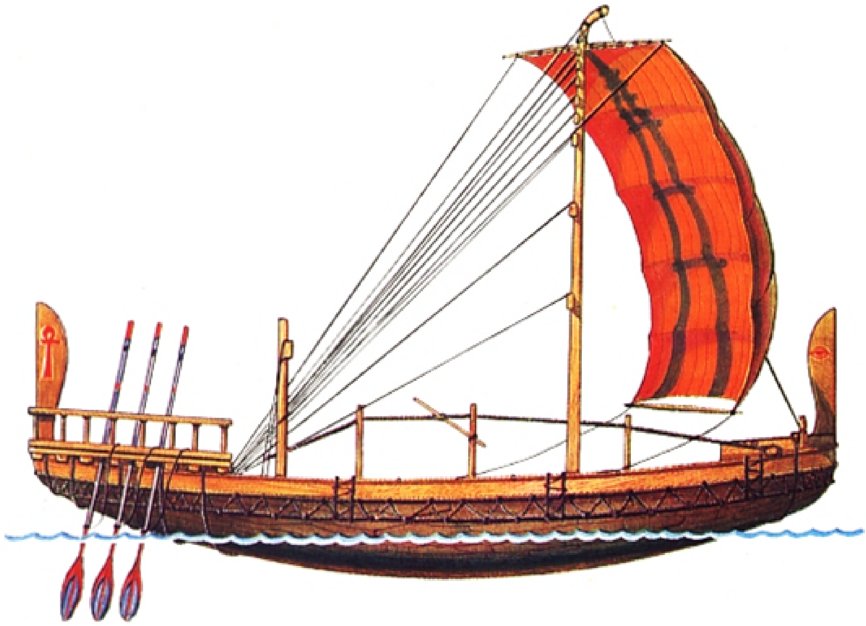


Obr. 5: a) Labilní plování homogenního tělesa položeného na výšku – metacentrum (M) je pod těžištěm (T), b) indiferentní plování (např. koule) – metacentrum leží v těžišti

velikosti, která svým momentem síly vrací těleso zpět do rovnovážné polohy. Nazývá se *vratný moment síly*. Se zmenšujícím se úhlem α se zmenšuje rameno silové dvojice, pro $\alpha = 0$ je nulové a vratný moment vymizí.

Stabilní stav plovoucího tělesa se snadno posoudí podle bodu M, který je průsečíkem nositelky vztlakové síly a vychýlené osy plování. Bod M se nazývá *metacentrum* a vzdálenost $|TM|$ *metacentrická výška*. U stabilně plovoucího tělesa je bod M nad bodem T a metacentrická výška se definuje jako kladná.

Plování labilní a indiferentní. Padne-li metacentrum M pod těžiště T (viz např. obr. 5a, kde je ilustrační plochý kvádr postavený na výšku), nachází se těleso při plování v *labilní* poloze, neboť při jeho vychýlení z rovnovážné polohy o malý úhel α začne na těleso působit dvojice sil F_G, F_V *klopným momentem síly*, který je převrhne. Metacentrická výška je v tomto případě záporná. Kromě stabilní a labilní polohy se těleso může nacházet i v poloze *indiferentní*, kdy metacentrum M splyne s těžištěm T a klopný moment je nulový. V indiferentní poloze se při plování nachází homogenní rotační válec s vodorovnou osou, jehož délka je větší než průměr, nebo homogenní koule (obr. 5b). Metacentrická výška je nulová.



Obr. 6: Námořní loď ze starověkého Egypta – ze Staré říše (asi 2 550 let př.n.l.); typická délka byla 14 m až 20 m, šířka 2 m až 5 m, pohon vesly a větrem; podoba lodí je známá z kreseb v hrobkách faraónů a ojediněle i z vykopávek (zdroj [12])

3.4 Stabilita plovoucí lodě

Plování lodě je založeno na působení vztlakové síly ve vodě. Člověk na základě empirie stavěl lodě před formulací Archimédova zákona, už ve 3. století př.n.l. Byly to především přímořské národy v Egyptě, Číně, Indonésii, Řecku aj. Lodě již tehdy vynikaly nejen účelností, ale i estetikou, jak vidíme např. z obr. 6.

Již při pohledu na staroegyptskou loď lze usoudit, že pro obloukovitou základnu asi velkou stabilitou nevynikala. Důležitým faktorem byl plavební odpor, který mj. z hlediska převážně ručního pohonu musel být malý. Provozní stabilitu významně ovlivňovalo vhodné rozložení hmotnosti nákladu a posádky.

Podobně je tomu u *kánoí* (s dávným původem u různých kultur na světě, např. u severoamerických indiánů) a *kajaků* (používaných např. Eskymáky), které jsou velmi oblíbeny dodnes pro malý plavební odpor (a tím i velkou rychlost). Nasednutí do loďky však vyžaduje cvik, protože v této situaci se těžiště dostává vysoko (do polohy nad metacentrum) a hrozí převrácení loďky. Posed veslaře při jízdě musí být nízký, aby se výsledné těžiště dostalo pod metacentrum.

Z výkladu je zřejmé, že při stavbě lodí je důležitým faktorem poloha jejího metacentra. Pokud by metacentrum M padlo pod těžiště T, nacházela by se loď při plavbě v labilní poloze a byla by nepoužitelná, neboť již při malém vychýlení z rovnovážné polohy by na ni začal působit klopný moment síly, který by ji převrhl. Znalost kladné metacentrické výšky je tedy důležitá pro

Obr. 7: Švédská válečná galeona *Vasa*

stabilní a také pohodovou plavbu. Čím je (kladná) výška větší, tím rychleji se loď vrací zpět do rovnovážné polohy a plavba je pak ovšem „tvrdá“. Stavitelé lodí uvádějí, že optimální hodnota této výšky je asi 5 % šířky paluby lodi (viz např. [9]). Hodnota metacentrické výšky se pro členitost lodi velmi obtížně počítá. Určuje se zpravidla empiricky např. pomocí zjednodušeného modelu lodi.

K méně stabilním lodím minulosti patřily plachetnice *galeony,* výbavou často uzpůsobené pro válečné účely. Stavěly se zejména v 16. a 17. století. V souvislosti s vyzbrojováním lodí četnými děly a přitom k tomu málo uzpůsobené konstrukce lodi, špatného rozložení další její výbavy či nákladu, byla hodnota kladné metacentrické výšky velmi malá. Pak na neklidném moři při poryvech větru mohlo dojít i k převrácení lodi a jejímu potopení. Malou stabilitou byly pověstné např. španělské galeony. K nevhodným prvkům patřily i ubikace na zádi, které někdy měly až pět pater. Nevhodně vybavené galeony, zejména s děly umístěnými v horních patrech, se proto někdy převracely. Historicky nejznámější je tragický osud galeony *Vasa* (obr. 7), kterou nechal postavit švédský král Gustav Adolf z rodu Vasa. Měla pět palub, z toho dvě dělové v horní části, což značně ovlivnilo polohu těžiště lodi směrem vzhůru a zmenšilo metacentrickou výšku. Tato skutečnost se jí stala osudnou hned při první plavbě. Již při první plavbě 10. srpna 1628, po necelých 2 km plavby od přístavu ve Stockholmu, po vytažení hlavních plachet, košové plachty a po následném prudkém nárazu větru byl klopný moment aerodynamických sil větší než vratný moment. To způsobilo překlopení a potopení lodi. Zahynulo nejméně 30 mužů.

Obr. 8: Zaoceánský parník *Titanik*

Galeona byla 24. dubna 1961 vyzvednuta, restaurována, konzervována a nyní je zpřístupněna v muzeu ve Stockholmu, v suchém doku. Technická data: výtlak 1 300 tun, délka 69 m, šířka 11,2 m, ponor 4,8 m, posádka 137 námořníků a 300 vojáků, 58 děl a 6 moždířů ([13]).

Na začátku 20. století dokázali lidé již postavit velkokapacitní rychlé zaoceánské parníky. Největším a nejluxusnějším byl britský parník *Titanik* (obr. 8), který patřil i k tehdejším nejrychlejším lodím. Byl spuštěn na vodu 31. května 1911. Výbavou šestnácti vodotěsných uzavíratelných komor měl být i bezpečný v krizové situaci, kdy hrozilo potopení. Poháněn byl tehdy nejmodernějšími parními stroji a k výrobě elektrického proudu sloužila parní turbína. Páru dodávaly parogenerátory na černé uhlí. Parník byl zcela elektrifikován a ve výbavě měl i rádiový vysílač o výkonu 5 kW od firmy *Marconi* na impulsní signálový provoz morseovkou. Z hlediska plavební bezpečnosti mu chyběla radiolokační technika, která ovšem vznikala až o 30 let později. Tak byl odkázán jen na vizuální pozorování dalekohledem. Při první zaoceánské plavbě z anglického Southamptonu do amerického New Yorku se v noci na 15. dubna 1912 střetl s velkou ledovou krou. Vznikla trhlina o délce 90 m pod čarou ponoru, poškodilo se i několik vodotěsných komor (loď jich měla 16, měly přispět k její nepotopitelnosti). Titanik se v průběhu tří hodin potopil. Na první (a zároveň poslední) plavbě přes oceán bylo na palubě přes 2 200 osob, z toho 1 316 cestujících; zahynulo kolem 1 500 osob. Díky vysílači, šířícímu signál SOS, byla přivolána loď *Carpathia*, a tak nedošlo k ještě větším ztrátám na životech. Technická data: výtlak 52 310 tun, délka 269 m, šířka 28,3 m, ponor 10,5 m, tři lodní šrouby poháněné parními pístovými stroji o výkonu 37 MW, 1 parní turbína 12 MW s generátorem proudu, 29 parogenerátorů, rychlost až 44 km/h, kapacita asi 3,5 tisíce osob ([14]).

Současné velké lodě jsou z fyzikálního, technického a bezpečnostního hlediska již vyřešeny dokonale. Příklady největších lodí svých tříd jsou na obr. 9 a 10.

Obr. 9: Největší vojenská loď současnosti, letadlová loď *Gerald R. Ford*, US Navy

Obr. 10: Výletní loď *MS Symphony of the Seas*

Americká letadlová loď Gerald R. Ford (obr. 9), uvedená do provozu 20. května 2017, je pozoruhodná nejen rozměry, ale i technickou výbavou a vojenskou výzbrojí. Např. jaderné reaktory v lodi mají dvojnásobný výkon než uhelná elektrárna/teplárna v Opatovicích nad Labem (mají energetickou rezervu i pro instalaci laserových děl). Na obr. 10 je současná největší zaoceánská osobní loď MS Symphony of the Seas. Jde o výletní loď třídy Oasis společnosti *Royal Caribbean International.* Vyniká nejen velikostí, výrazně (2,5krát) převyšující kapacitu Titaniku. Vyniká také komfortem a bezpečností. Technická data: výtlak 101 600 tun, délka 337 m, šířka 77 m, ponor 12 m, energetický zdroj: dva jaderné reaktory A1B o výkonu 2 300 MW (tento výkon umožní použít i laserová děla), 10 kanonů, 75 letadel, rychlost lodě až 56 km/h, posádka 4 460 vojáků. Pořizovací náklady 12,9 miliard dolarů ([15]).

Výletní loď *MS Symphony of the Seas* postavená ve Francii v loděnici *Chantiers de l'Atlantique* byla uvedena do provozu 7. dubna 2018. Technická data:

výtlak 228 000 tun, délka 362,1 m, šířka 47,4 m, výška 72,5 m, ponor 9,32 m, pohon 4 spalovacími turbínami po 14,4 MW, 3 lodní šrouby, rychlost 41 km/h, 18 palub, kapacita 6 680 cestujících a 2 200 členů posádky. K výbavě patří divadla, obchody, restaurace, bary, tělocvičny, bazény, dětský vodní park, basketbalové hřiště, atrakcí je centrální park, obsahující více než 20 tisíc tropických rostlin. Domovský přístav je Nassau, Bahamy ([16]).

4 Závěr – jak využít prezentované dílo k motivaci zájmu o fyziku a ke zkvalitnění přípravy učitelů

Představené dílo [1] je už svým obsahem a bohatými ilustracemi, historickým i současným pohledem na aplikace předurčeno k výrazné motivaci zájmu o studium fyziky a potažmo také matematiky. Samozřejmě závisí na učiteli, aby při výkladu učiva ukázal na význam a užitečnost probíraných fyzikálních poznatků. Ty jsou nejen zdrojem poznání o světě, ale i základem četných technických i jiných aplikací, jak právě ukazuje prezentovaná kniha. K tomu je třeba ještě doplnit, že k pozitivnímu vztahu k fyzice, jako vědě o reálném světě, přispívá také věcně komentovaná návštěva technických muzeí a exkurze do výzkumných stanic a vědeckých laboratoří. Kořením výuky fyziky stále jsou i reálné experimenty při výkladu – dnes bohužel z „časových důvodů“ často opomíjené, v lepším případě nahrazované počítačovými animacemi. Tento ústup od dřívější praxe ve výuce (zejména uplatňované v 19. a 20. století, tehdy prováděné vzorně a s láskou) zhoršuje zájem o fyziku. Viz také čtvrtou kapitolu autorova díla [8], které je jednou z příloh prezentovaného díla [1].

Stručně shrnuto: již žáci základních škol, avšak především studenti středních a vysokých škol, kde se vyučuje fyzika, by si z výuky fyziky měli odnést nejen jisté ucelené poznání o fyzikálních jevech a zákonech, podložené reálnými experimenty, ale i vědomí, ilustrované četnými příklady, že fyzika je základem širokého spektra technických aplikací. Ty jím nejen denně usnadňují a zpříjemňují život, ale celé společnosti přinášejí bohatství. Na tyto cíle by však měli být lépe připravování i budoucí učitelé fyziky. To by vyžadovalo na fakultách připravujících učitele fyziky doplnit vzdělávací program o nový předmět „Technické aplikace fyziky“.

Literatura

[1] Vybíral, B.: *Technické aplikace fyziky.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2019.

[2] Svaz českých knihkupců a nakladatelů, `https://www.sckn.cz/technicke-aplikace-fyziky-pn-540-596/`

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fysika.* SNTL, Praha, 1960 a 1961.

[4] Nachtikal, F: *Technická fysika.* JČMF, Praha, 1937.

[5] Mayer, D.: *Pohledy do minulosti elektrotechniky.* Druhé doplněné vydání. KOPP, České Budějovice, 2004.

[6] Vybíral, B.: *Mechanika ideálních kapalin.* Knihovnička Fyzikální olympiády č. 62. MAFY, Hradec Králové, 2003, www.fyzikalniolympiada.cz/praha/texty/kapaliny.pdf

[7] Vybíral, B.: Rozumíme dobře Archimédovu zákonu? *Matematika–fyzika–informatika* 22, 2013, s. 116-121, www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/29/25

[8] Vybíral, B.: *Kapitoly z experimentální fyziky.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2014.

[9] Archimédes, https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcQw1AjwVB2b4vG86

[10] Heuréka, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/47/Archimedes_bath.jpg

[11] Bajer, J: *Mechanika 3*, Chlup.net, Olomouc, 2012.

[12] Loď z Egypta, http://www.piratskelode.wz.cz/egyptskaobchodni.jpg

[13] Vasa, https://media.novinky.cz/526/265267-free1-2g1ws.jpg

[14] Titanik, https://img.cncenter.cz/img/3/article/3266976_titanic-v0.jpg?v=0

[15] Letadlová loď, http://img.cz.prg.cmestatic.com/media/images/600x338/Jan2013/1445209.jpg?c5f1

[16] Symphony, http://www.wilsonbutler.com/assets/Symphony-of-the-Seas.jpg

Komparativní výzkum výuky matematiky u žáků 1. – 5. ročníku ZŠ z pohledu psychodidaktiky a kvality výstupů matematické gramotnosti

Jana Zapletalová, NÚV Praha, Miroslav Rendl, PedF UK Praha,
Anna Páchová, David Heider, Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT a VŠE Praha,
Kateřina Macháčková, NÚV

Abstrakt: Výzkumný projekt byl realizovaný v letech 2014–2019 a v tomto příspěvku prezentujeme jeho dílčí výstupy. Hlavním cílem je popis didaktických a psychodidaktických parametrů výuky matematiky na 1. stupni ZŠ, dílčím cílem je analýza efektivity výuky matematiky na 1. stupni ZŠ s důrazem na porovnání většinově realizované výuky a výuky podle metody prof. Hejného. Pro tento projekt byl zvolen smíšený design. Celkovým výstupem po kompletní realizaci výzkumu a analýze pořízených videonahrávek vyučovacích pokusů je závěrečná zpráva popisující didaktické a psychodidaktické parametry výuky matematiky, potenciálně silné a slabé stránky obou přístupů, roli práce pedagoga, srozumitelnost a efektivitu přístupu pro různé skupiny žáků. Během realizace celého výzkumného šetření bylo sledováno také to, zda různé přístupy k výuce přinášejí i vedlejší benefity, například pozitivní ovlivnění čtenářské gramotnosti, rozvoj pozitivního učebního klimatu ve třídě, dovednost věcné a konkrétní argumentace, zájem o řešení matematických úloh aj., nebo zda mohou být pro některé skupiny žáků nevhodné. Pracovní skupina se rovněž zaměřila na komparaci výkonových výstupů žáků.

1 Zadání a metoda výzkumu

Pro výzkumné šetření byl zvolen smíšený design.

Formou předvýzkumu se skupina výzkumníků nejdříve věnovala operacionalizaci pojmů, s nimiž měla následně pracovat, zejména se snažila vymezit pro potřeby výzkumu, co to je výuka podle prof. Hejného a tzv. tradiční přístup k výuce matematiky:

- **výuka dle prof. Hejného** – ve třídě jsou pro výuku matematiky využívány učebnice matematiky, jejichž autorem je prof. Hejný. Daná škola učebnice Hejného (vydavatelství Fraus) odebírá dlouhodobě, lze tedy předpokládat, že výuka dle Hejného má ve škole určitou tradici a učitelé si již výuku podle této metody osvojili;

- v rámci **tradiční výuky** je používáno větší spektrum učebnic. Během mapování učebnic používaných k výuce matematiky na prvním stupni ZŠ se ukázalo, že nejpoužívanější je řada učebnic nakladatelství Alter. Ukázalo se ovšem, že je velmi obtížné operacionalizovat parametry tradiční výuky vzhledem k vysoké míře variability provedení výuky. Někteří učitelé využívají i jiné „alternativní“ učebnice, nebo pro vlastní výuku vybírají materiály z různých učebnic.

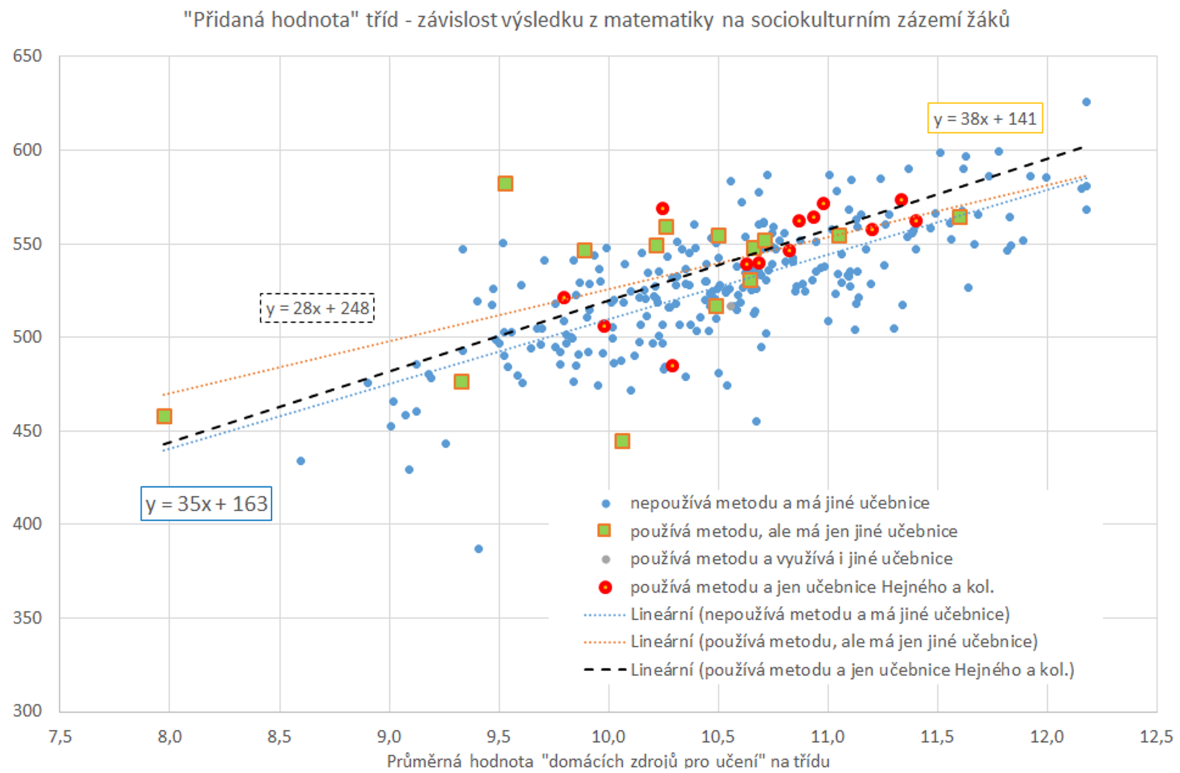
2 Kvalitativní část šetření

Pracovní skupina analyzovala v roce 2017 výstupy z mezinárodního šetření TIMSS 2015 (Trends in International Mathematics and Science Study), jež mapuje úroveň znalostí a dovedností žáků 4. a/nebo 8. ročníku základní školy v matematice a v přírodovědných předmětech. Na základě komparace výsledných dat s databázemi České školní inspekce bylo preselektováno dohromady 28 škol zapojených do programu TIMSS používajících metodu Hejného. V rámci výzkumu bylo zjištěno, že školy využívající Hejného metodu měly průměrně vyšší výsledky než školy využívající metody tradičního typu. Za podmínky, že tato data jsou dána do regresní matice, je z výsledku patrné, že index „domácí zdroje pro učení“ vysvětlí téměř polovinu rozdílů identifikovaných při prostém porovnání průměrů. Index domácí zdroje pro učení popisuje, že děti z rodin s vyšším sociálním statusem častěji navštěvují školy, kde je vyučována Hejného metoda.

2.1 Analýza TIMSS 2015, mezinárodní studie, výsledky pro ČR

Následující analýzy se pokusí odhalit alespoň některé výsledky, které jsou v datech TIMSS k dispozici na úrovni žáků (z dotazníků od žáků) (obr. 1).

Kromě porovnání celkových skórů na úrovni tříd jsme se pokusili rovněž o srovnání výsledků jednotlivých úloh, respektive jednotlivých oblastí učiva. V rámci těchto analýz jsme srovnávali na úrovni jednotlivých žáků průměrnou úspěšnost žáků vzdělávaných dle principů Hejného metody (kat. 4) oproti průměrné úspěšnosti žáků vzdělávaných tradičně (kat. 1). Úspěšností žáka přitom rozumíme procento správně řešených úloh, úspěšností v úloze pak procento žáků, kteří danou úlohu vyřešili správně. (Úspěšnost v úloze se také běžně nazývá obtížností úlohy.)



Obr. 1: Analýza TIMSS 2015, mezinárodní studie, výsledky pro ČR

Rovněž tímto srovnáním jsme potvrdili, že průměrná úspěšnost v celém testu je u žáků vzdělávaných dle Hejného metody vyšší (61,4 %) než u žáků vzdělávaných tradičně (55,8 %).

Dále jsme porovnávali úspěšnost obou skupin žáků v jednotlivých úlohách. Slabinou tohoto porovnání je nízký počet žáků vyučovaných podle Hejného. Každou z úloh řešilo z této skupiny pouze 36 – 45 žáků, je tu tedy vysoká pravděpodobnost náhodných výkyvů. Tuto náhodnost jsme se snažili snížit těmito postupy:

1. Úlohy jsme roztřídili do kategorií. Pro srovnání jsme pak použili pouze kategorie, které byly tvořeny čtyřmi a více úlohami. V úvahu jsme přitom brali jen úlohy, u nichž jsme znali jejich znění.
2. Za indikátor rozdílné úspěšnosti v úloze jsme považovali rozdíl 10 procent a více.

Výsledky porovnání ukazuje tab. 1, ze které je rovněž patrné, které oblasti test postihuje a na které klade zejména důraz.

Vidíme, že žáci vzdělávaní dle Hejného metody byli výrazně úspěšnější pouze v Analýze zobrazených geometrických útvarů (např. určit obsah či obvod obrazce nakresleného ve čtvercové síti). Naproti tomu zvládnutí Geometrických pojmů (rovnoběžnost, kolmost, osová symetrie, pravý úhel) bylo výrazně lepší u tradičně vzdělávaných žáků.

V nejčetněji zastoupené oblasti Tabulek a grafů je úspěšnost obou skupin stejná, podobně tomu je v identifikaci či uplatnění Funkčních vztahů a posloupností.

V dalších osmi oblastech najdeme vždy několik úloh, v nichž lépe uspěli žáci hejnovských tříd. Zdá se, že tito žáci lépe uspěli zejména ve složitějších úlohách.

Kategorie	**Celkový počet úloh**	**Lepší H (o 10 % a více)**	**Lepší T (o 10 % a více)**
Tabulky a grafy	20	1	0
Analýza zobrazených geometrických útvarů (elementy, obsah, obvod)	17	9	1
Geometrické pojmy (rovnoběžnost, kolmost, osová symetrie, pravý úhel)	14	0	8
Slovní úlohy	14	4	0
Zlomky	11	4	1
Počítání příkladů	10	3	0
Desítková soustava	6	2	0
Desetinná čísla	4	2	0
Násobky/dělitelnost	4	2	0
Měření	4	2	0
Funkční vztahy/posloupnosti	4	0	0
Operace na číselné ose	4	1	0

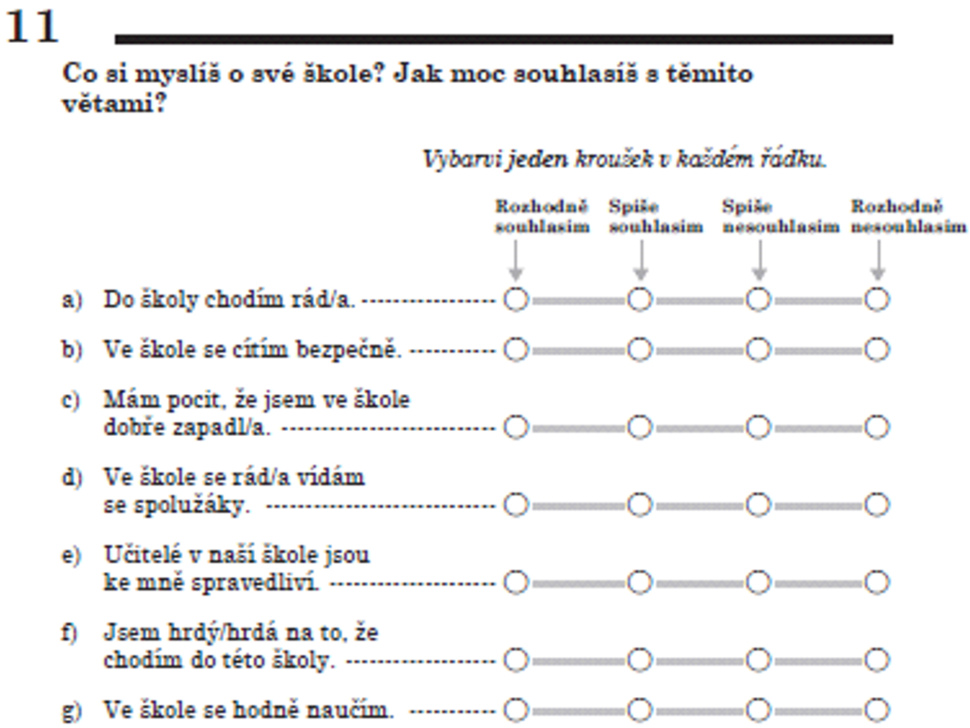
Tab. 1: Oblasti matematiky, na které byl test zaměřen

2.2 Oblíbenost matematiky u žáků vzdělávaných Hejného a tradičními metodami

V rámci výzkumného šetření TIMSS 2015 byl kromě testovací části žákům předkládán i dotazník věnující se jejich postoji ke vzdělávání obecně. Tento dotazník se zabýval přítomností šikany ve školním prostředí, oblíbenosti školního prostředí a kromě jiného i právě oblíbenosti matematiky a zpětné vazby na výuku pod vedením učitele matematiky. V rámci tohoto výzkumu budou prezentované pouze výsledky týkající se výuky matematiky a atmosféry ve škole.

Srovnání odpovědí žáků s výukou podle Hejného a odpovědí žáků s výukou tradiční v dotazníku pro žáky (viz web ČŠI) přináší rozdíly v několika oblastech. Uvedeme znění příslušných částí dotazníku a následně i přehled rozdílů u žáků vzdělávaných tradičními metodami a Hejného metodou výuky matematiky.

V dotazníku TIMMS byla např. otázka č. 11, viz obr. 2. Výsledky pro tuto otázku je možné vidět v tab. 2. Výsledky interpretujeme dle logiky, čím nižší je průměr, tím více se blíží odpovědi „rozhodně souhlasím“ a naopak. Z přehledu výsledků tedy vyplývá, že žáci z hejnovských tříd méně souhlasí s předloženými



11

Co si myslíš o své škole? Jak moc souhlasíš s těmito větami?

Vybarvi jeden kroužek v každém řádku.

	Rozhodně souhlasím	Spíše souhlasím	Spíše nesouhlasím	Rozhodně nesouhlasím
a) Do školy chodím rád/a.	○	○	○	○
b) Ve škole se cítím bezpečně.	○	○	○	○
c) Mám pocit, že jsem ve škole dobře zapadl/a.	○	○	○	○
d) Ve škole se rád/a vídám se spolužáky.	○	○	○	○
e) Učitelé v naší škole jsou ke mně spravedliví.	○	○	○	○
f) Jsem hrdý/hrdá na to, že chodím do této školy.	○	○	○	○
g) Ve škole se hodně naučím.	○	○	○	○

Obr. 2: Otázka č. 11, dotazník žákům TIMSS 2015

tvrzeními. Statisticky významné pak jsou tyto rozdíly pro žáky ze tříd vzdělávaných dle Hejného metody:

- chodí méně rádi do školy;
- cítí se ve škole méně bezpečně;
- méně často se domnívají, že učitelé jsou k nim spravedliví;
- jsou méně hrdí na to, že chodí do dané školy;
- méně často se domnívají, že se ve škole hodně naučí.

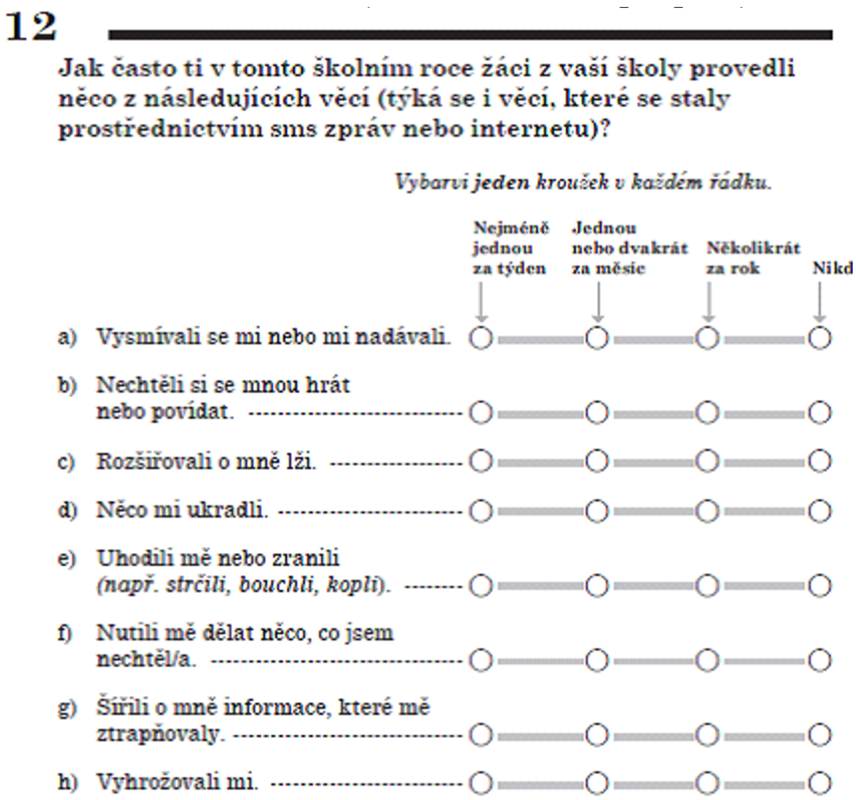
Otázka	Nehejný průměr	Hejný průměr	Rozdíl průměrů Nehejný – Hejný	p-value (Mann–Whitney)
11a	2,184	2,38	–0,193	0,003
11b	1,674	1,80	–0,122	0,034
11c	1,594	1,65	–0,059	0,227
11d	1,235	1,26	–0,026	0,652
11e	1,464	1,62	–0,156	0,001
11f	1,546	1,67	–0,128	0,020
11g	1,338	1,48	–0,140	0,004

Tab. 2: Výsledky dotazníku TIMSS, otázka č. 11

Na základě položek otázky č. 11 byl analytiky TIMSS konstruován index „Students Sense of School Belonging“. Také tento index nabývá v průměru statisticky významně méně příznivých hodnot u respondentů z hejnovských tříd, jak je možné vidět v tab. 3.

Otázka	Nehejný průměr	Hejný průměr	Rozdíl průměrů Nehejný – Hejný	p-value (Mann–Whitney)
Index SSSB	1,538	1,663	–0,125	0,004

Tab. 3: Výsledky obou kategorií, index SSSB



12

Jak často ti v tomto školním roce žáci z vaší školy provedli něco z následujících věcí (týká se i věcí, které se staly prostřednictvím sms zpráv nebo internetu)?

Vybarvi jeden kroužek v každém řádku.

	Nejméně jednou za týden	Jednou nebo dvakrát za měsíc	Několikrát za rok	Nikd
a) Vysmívali se mi nebo mi nadávali.	○	○	○	○
b) Nechtěli si se mnou hrát nebo povídat.	○	○	○	○
c) Rozšiřovali o mně lži.	○	○	○	○
d) Něco mi ukradli.	○	○	○	○
e) Uhodili mě nebo zranili *(např. strčili, bouchli, kopli)*.	○	○	○	○
f) Nutili mě dělat něco, co jsem nechtěl/a.	○	○	○	○
g) Šířili o mně informace, které mě ztrapňovaly.	○	○	○	○
h) Vyhrožovali mi.	○	○	○	○

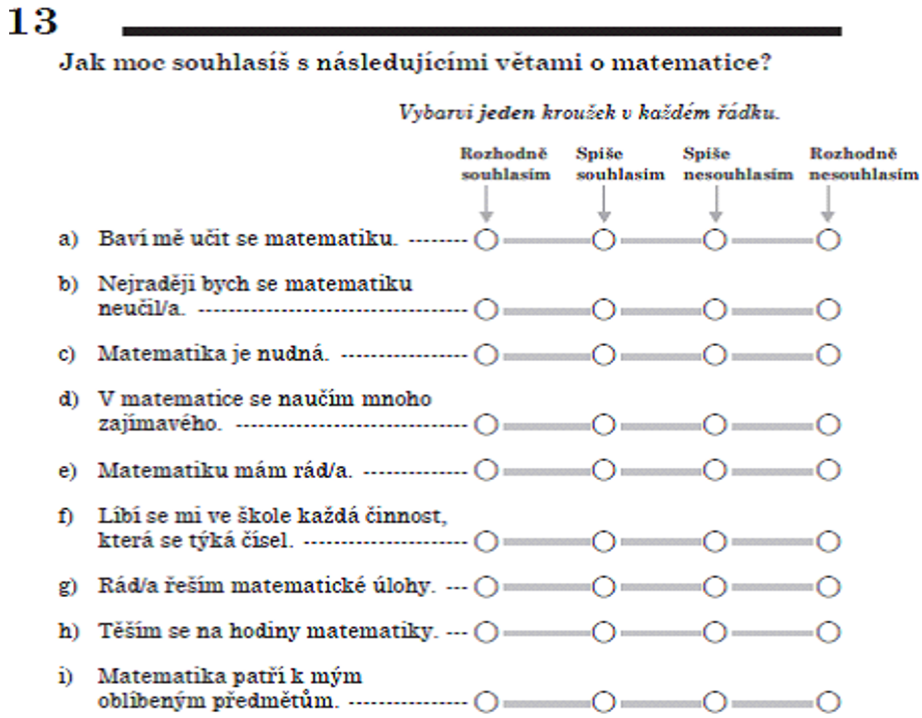
Obr. 3: Otázka č. 12, dotazník žákům TIMSS 2015

Otázka č. 12, viz obr. 3, ze šetření TIMMS se zabývá jednotlivými symptomy šikany a měření míry koheznosti prostředí, kde probíhá vzdělávání. V rámci této otázky byl taktéž nalezen statisticky významný ($p = 0{,}04$) pouze v položce e): žáci z hejnovských tříd se častěji setkali s tím, že je někdo uhodil nebo zranil (strčil, bouchl, kopl apod.).

Otázka č. 13, viz obr. 4, je velmi zajímavá vzhledem k tomu, že v současné době existuje obecný úzus, který tvrdí, že žáci vyučovaní podle Hejného metody mají pozitivnější vztah k matematice. V žádné z položek otázky však nebyl nalezen statisticky významný rozdíl, nejnižší hladina významnosti byla na úrovni 0,35. **To znamená, že toto tvrzení není možné vyvrátit, ale ani potvrdit.**

2.3 Výsledky plošného šetření pátých tříd České školní inspekce

V rámci porovnání výsledků žáků ve třídách, ve kterých je používána učebnice dle Hejného metody, a žáků ve třídách, ve kterých je využívána jedna z ostat-



13

Jak moc souhlasíš s následujícími větami o matematice?

Vybarvi jeden kroužek v každém řádku.

	Rozhodně souhlasím	Spíše souhlasím	Spíše nesouhlasím	Rozhodně nesouhlasím
a) Baví mě učit se matematiku.	○	○	○	○
b) Nejraději bych se matematiku neučil/a.	○	○	○	○
c) Matematika je nudná.	○	○	○	○
d) V matematice se naučím mnoho zajímavého.	○	○	○	○
e) Matematiku mám rád/a.	○	○	○	○
f) Líbí se mi ve škole každá činnost, která se týká čísel.	○	○	○	○
g) Rád/a řeším matematické úlohy.	○	○	○	○
h) Těším se na hodiny matematiky.	○	○	○	○
i) Matematika patří k mým oblíbeným předmětům.	○	○	○	○

Obr. 4: Otázka č. 13, dotazník žákům TIMSS 2015

ních učebnic, jsme zpracovali výsledky testování ČŠI z roku 2018. Výsledky jsou k dispozici na úrovni jednotlivých žáků a jsou rozděleny do 74 úkolových položek, které jsou skórovány vždy 0 (špatné nebo žádné řešení), nebo 1 (správné řešení). Celkový skór je výsledkem součtu všech položek s hodnotou 1. Tato zpráva obsahuje výsledky dle jednotlivých sledovaných kategorií a interpretaci získaných dat vzhledem k cíli projektu, tedy porovnání úspěšnosti metody Hejného a tradiční výuky matematiky na výkonu žáků v testování.

2.3.1 Výsledky plošného šetření pátých tříd České školní inspekce

V souhrnných výsledcích hejnovských žáků a žáků vzdělávaných tradičními metodami nebyly shledány statisticky významné rozdíly. Průměr celkového skóru hejnovských žáků je 48,08 a žáků vzdělávaných tradičně je 47,83, rozdíl není statisticky významný. Na úrovni celkového výkonu v oblastech měřených testem ČŠI jsou výsledky téměř stejné. Podobně v rozdílech výsledků hejnovských žáků a žáků vzdělávaných tradičními metodami, dělenými dle velikosti obce, nebyly shledány statisticky významné rozdíly. Výsledky uvádíme v tab. 4.

Naproti tomu lze však vysledovat významné rozdíly ve výsledcích žáků z obou kategorií dle velikosti obce, a to na všech stanovených úrovních (p hodnota je vždy nižší než 0,05, což je nejmenší hladina významnosti, pro kterou ještě zamítáme nulovou hypotézu), pokud porovnáváme výsledky žáků v jednotlivých kategoriích velikosti obce s ostatními. Výrazně lepších výsledků dosáhli žáci v Praze, opět bez významného rozdílu mezi hejnovským a tradičním přístupem.

Velikost obce	**Hejný/Tradiční**	**Počet respondentů**	**Průměr celkových skórů**	**Statistická významnost**
Praha	H	101	54,80	Ne
	T	462	53,32	
Velká města nad 100 000 ob.	H	197	47,78	Ne
	T	948	48,95	
Střední města 20 000 - 100 000 ob.	H	163	45,15	Ne
	T	694	46,07	
Obce do 20 000 ob.	H	438	47,75	Ne
	T	3 846	47,21	

Tab. 4: Komparace výsledků žáků dle velikosti aglomerace

2.3.2 Porovnání výsledků žáků vzdělávaných Hejného metodou a tradiční metodou v jednotlivých tematických oblastech

Zajímavější je porovnání výsledků žáků vzdělávaných Hejného metodou a tradičními metodami, pokud se zaměříme na skóry dosažené v jednotlivých tématických oblastech. Úlohy zadávané ČŠI jsme roztřídili do několika oblastí, některé v sobě zahrnují i více typů řešeného problému/oblasti. V této části výzkumného šetření je primárně pracováno s velikostí účinku, což je ukazatel směru a síly vztahu mezi dvěma proměnnými. V tomto případě bude specificky pracováno s Cohenovým *d*. V této přehledové studii budeme zmiňovat pouze výsledky se střední a větší velikostí účinku.

V rámci plošného testování 5. tříd se objevilo 27 úloh (průměrná hladina velikosti účinku je $d = 0{,}06$). Žáci vzdělávaní dle Hejného metody měli statisticky významně lepší výsledky v osmi typech úloh. Vzhledem k tomu, že oblast slovních úloh je poměrně komplexní a úroveň statistické významnosti velmi závisí na typologii jednotlivých úloh, výzkumný tým by se rád této oblasti věnoval podrobněji v další fázi šetření. Shrnutí výsledků je možné nalézt v tab. 5. U každé oblasti souhrnně uvádíme počet položek, na kterých byla daná oblast testována, a z toho počet položek, v nichž se statisticky významně lišily výsledky žáků vyučovaných dle Hejného metody a tradičními metodami. Modře (1., 2. a 9. řádek) jsou označeny úlohy s převahou statisticky významných rozdílů ve prospěch H (Hejného) přístupu, červeně (5. a 10. řádek) pak úlohy s převahou statisticky významných rozdílů ve prospěch T (tradičního) přístupu. Dále uvádíme průměrné hodnoty velikosti účinku *d*.

Tab. 6 podle našeho výzkumu uvádí výsledky vzdělávaných Hejného metodou a žáků vzdělávaných tradičními metodami v jednotlivých tematických oblastech

Téma	Celkový počet	Položky se stat. významně lepším výsledkem H		Položky se stat. významně lepším výsledkem T		Velikost účinku d
		Počet	%	Počet	%	
Číselná osa	6	5	83	0	0	0,12
Obsahy obvody	8	7	88	0	0	0,19
Početní úlohy s předností operací	5	1	20	0	0	0,05
Prostorová představivost	1	0	0	0	0	0,08
Převody jednotek délky	16	0	0	7	44	-0,07
Řazení čísel	5	1	20	0	0	0,04
Sestavení (výběr) rovnice pro výpočet	4	0	0	0	0	0,02
Slovně zadané početní úlohy	5	0	0	0	0	0
Slovní úlohy	27	8	30	0	0	0,06
Zaokrouhlování	5	0	0	4	80	-0,12

Tab. 5: Souhrnná tabulka: seznam oblastí testu ČŠI

Téma	Počet položek	H ($N = 899$)	T ($N = 5\ 950$)	P hodnota
Číslelná osa	6	5,86	5,39	<0,001***
Obsahy a obvody	8	4,19	3,45	<0,001***
Početní úlohy s přednostní operací	5	1,93	1,85	0,086
Prostorová představivost	1	0,90	0,90	0,081
Převody jednotek délky	16	10,73	11,16	0,007**
Řazení čísel	5	4,62	4,56	0,137
Sestavení (výběr) rovnice pro výpočet	4	2,45	2,41	0,511
Slovně zadané početní úlohy	5	3,81	3,79	0,718
Slovní úlohy	27	12,62	11,90	0,003**
Zaokrouhlování	5	3,47	3,73	<0,001***

Tab. 6: Hladiny významnosti u jednotlivých tematických oblastí
*Pozn.: ** = hladina významnosti 1 %; *** = hladina významnosti 0,1 %*

celkově spolu s p hodnotou. Pro srovnání uvádíme průměrný skór žáků dosažený v jednotlivých tematických oblastech. Oblasti, ve kterých dosáhli lepšího výsledku žáci vyučovaní Hejného metodou, jsou opět znázorněny modře (1., 2. a 9. řádek) a oblasti, ve kterých dosáhli lepšího výsledku žáci vyučování tradiční metodou, jsou znázorněny červeně (5. a 10. řádek).

2.3.3 Zhodnocení výsledků žáků se speciálními vzdělávacími potřebami ve vztahu k metodě

Kromě celkového srovnání žáků vzdělávaných Hejného metodou a tradičními metodami jsme dále provedli srovnání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami v oblasti matematiky (např. žáci se specifickými poruchami učení, žáci v hraničním pásmu inteligence, žáci s poruchou pozornosti, žáci se zvýšenou unavitelností). Určení, zda speciální vzdělávací potřeba žáka bude intervenovat během testové situace, bylo na posouzení ředitele školy ve spolupráci se školním poradenským pracovištěm.

Zkrácená verze testu pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami obsahovala 54 položek na rozdíl od 74 položek v „plné“ verzi testu. S výjimkou kategorie „přiřazení výpočtu ke znění úlohy“ byly v této verzi zahrnuté všechny výše zmíněné kategorie (a až j). Tuto verzi testu řešilo celkem 512 žáků, z toho 108 jich bylo vzděláváno dle Hejného metody a 404 tradiční metodou. Z celého výzkumného vzorku bylo 86,9 % žáků vzděláváno dle tradičních metod a pouhých 13,1 % žáků bylo vzděláváno dle Hejného metody. V případě žáků se speciálními vzdělávacími potřebami to byla více než jedna pětina (celých 21,1 %) vzděláváno Hejného metodou.

Téma	**KZ H**	**KZ T**
Číselná osa	0,09	0,09
Obsahy obvody	0,06	0,06
Početní úlohy s předností operací	0,04	0,09
Prostorová představivost	0,11	0,04
Převody jednotek délky	0,10	0,05
Řazení čísel	0,08	0,05
Slovně zadané početní úlohy	0,12	0,12
Slovní úlohy	0,12	0,08
Zaokrouhlování	0,11	0,10

Tab. 7: Komparace koeficientů znevýhodnění u jednotlivých typů úloh

Z důvodu této diskrepance se výzkumný tým rozhodl na tento významný rozdíl upozornit. Nejvíce nás však zajímalo posouzení toho, která z metod je pro žáky se SVP výhodnější. Za tímto účelem jsme porovnávali výkony žáků se speciálními vzdělávacími potřebami s výkony žáků bez speciálních vzdělávacích potřeb v rámci obou metod. K porovnání nám posloužila proměnná, kterou jsme nazvali koeficient znevýhodnění (KZ), který je roven rozdílu aritmetických průměrů žáků bez SVP a žáků se SVP za obě metody. Z 54 položek byl v případě 38 položek koeficient znevýhodnění vyšší u žáků H. Porovnání koeficientů znevýhodnění pro jednotlivé kategorie je uvedeno v tab. 7.

Koeficient znevýhodnění je vyšší pro žáky vzdělávané tradičními metodami v případě kategorie „početní úlohy s předností operací“. V ostatních kategoriích jsou koeficienty buď shodné, nebo jsou vyšší pro Hejného žáky. Interpretovat tuto skutečnost můžeme několika způsoby:

1. První možnou interpretací je, že **H metoda je pro žáky s SVP méně vhodná**. To může odkazovat na některé studie, které tvrdí, že žákům se znevýhodněním (zejména pak žákům se speciálními vzdělávacími potřebami v oblasti počítání) umožňuje přesnější pochopení látky, pokud dostanou návod (příklad řešení s uvedením jednotlivých operací vedoucích k úspěšnému řešení a jejich následné opakování), jak daný typ problému řešit.
2. Můžeme však také tvrdit, že **tradiční metoda dokáže lépe využít potenciál žáků se speciálními vzdělávacími potřebami** v porovnání s tím, jak využívá potenciál běžných žáků.
3. Obdobně můžeme však také tvrdit, že H metoda umí v porovnání s T metodou lépe využít potenciál běžných žáků oproti tomu, jak využívá potenciál SVP žáků. Dá se tedy říci, že **pro běžné žáky (bez speciálních vzdělávacích potřeb) by mohla naopak Hejného metoda být vhodnější** než metoda tradiční.

2.4 Expertní dotazník

Poslední oblastí kvantitativního výzkumu, které se výzkumný tým v rámci komparace metod věnoval, byla zpětná vazba ze strany pedagogických pracovníků se zkušenostmi jak s Hejného, tak i s tradičními metodami výuky matematiky. Dotazník byl členěn na tři části:

a) údaje o respondentovi vztahující se k danému cíli (metoda, kterou učitel/ka vyučuje, délka praxe);
b) povaha jeho/její profesní trajektorie s ohledem na vyučovanou metodu (jakou metodou učil/a dříve, důvody ke změně metody);
c) hodnocení metod výuky.

Ze získaných dat můžeme formulovat několik výstupů:

- Učitelé, kteří učí Hejného metodou, hodnotí výrazně pozitivněji „svou“ metodu než učitelé, kteří učí tradičně. Učitelé tradiční metody jsou v celkovém hodnocení obou metod spíše neutrální (viz Průměr). Dá se tedy usuzovat na vyšší míru identifikace učitele se „svou“ metodou. To do jisté míry potvrzují také slovní komentáře.
- Učitelé obou metod se však spíše shodují na oblastech, které hodnotí relativně kladně u obou metod.
- Metoda Hejného je relativně pozitivně u obou skupin hodnocená v oblasti „Děti mají matematiku rády“ a „Děti rády experimentují“ (s výjimkou

učitelů, kteří učí kombinovaně), stejně tak jako (i když trochu méně) kategorie „Děti dobře zvládají slovní úlohy“ a „Děti dobře aplikují naučené postupy do běžného života“.

- Tradiční metoda je relativně pozitivně hodnocena v oblasti „Přesnost a rychlost počítání“ a „Snadnost pro učitele“, a do jisté míry také „Rodiče chválí vysoký výkon“; opět to platí pro obě skupiny respondentů.
- Velice zajímavé (i když vzhledem k malému vzorku nevýznamné) je hodnocení učitelů, kteří učí kombinovaně: tradiční metodu hodnotí výrazně lépe než metodu Hejného. Zde by však bylo zapotřebí buď zajistit větší vzorek, nebo (ještě lépe) ověřit povahu hodnocení rozhovorem. Většina odpovědí u této skupiny má však vysoký rozptyl vyjádřený vyšší směrodatnou odchylkou (hodnoty od 1,7 do 3, oproti intervalu 0,7 – 1,6 u Hejného metody a 1,25 – 1,8 u tradiční metody). To vyvolává pochybnost, zda byl způsob hodnocení pochopen u všech respondentů stejným způsobem.
- Rozporuplné je hodnocení „SPU“ a „Přijímací zkoušky“, a to nejen mezi jednotlivými skupinami respondentů, ale také v rámci těchto skupin – u učitelů Hejného metody se v oblasti „SPU“ jedná o druhou nejvyšší hodnotu směrodatné odchylky (1,4) hned po „Pro učitele je snadné metodu pochopit“. Této oblasti se také v tomto duchu týká jeden z komentářů.

3 Kvalitativní část

V rámci kvalitativní analýzy 3. ročníků bylo analyzováno 8 tříd, z toho 4 třídy vzdělávající dle Hejného metody a 4 třídy vzdělávající dle metod tradičního typu.

Na základě pilotní analýzy bylo vybráno celkem 35 parametrů výuky, které byly dále sledovány. Vybrané parametry lze rozdělit do následujících kategorií: aktivita učitelky, organizace hodiny, práce s čísly, typ zadání a jiné.

S výjimkou několika kódů (v tab. 8 jsou uvedeny červeně – řádky 5.–7., 16., 20.–21., 28.–31. a 33.) lze přímo porovnávat výskyt jednotlivých parametrů. Čísla ve sloupci H uvádějí, kolikrát byl daný parametr kódován ve třídách, které jsou vzdělávány dle Hejného metody. Ve sloupci T je totéž uvedeno pro třídy vzdělávané dle tradičních metod. Následující dva sloupce zaznamenávají procentuální výskyt daných parametrů vzhledem k celkovému počtu kódů v hejnovských třídách (H), respektive ve třídách tradičních (T). Sloupec KR je koeficient rozdílu výskytu daného kódu v třídách vzdělávaných Hejného metodou oproti třídám vzdělávaným tradiční metodou. Koeficient KR je roven (H–T)/(H+T) a nabývá tedy hodnot od +1 do –1, přičemž kladné hodnoty

	H	T	H (%)	T (%)	KR	Kategorie
Individuální práce	30	17	4,31	2,14	0,28	Aktivita učitele
Jak to komu vyhovuje	17	13	2,44	1,64	0,13	Aktivita učitele
Kázeňská intervence	73	40	10,49	5,04	0,29	Aktivita učitele
Nadání	11	3	1,58	0,38	0,57	Aktivita učitele
Opakování	1	15	0,14	1,89	−0,88	Aktivita učitele
Pobízení	3	35	0,43	4,41	−0,84	Aktivita učitele
Práce navíc	5	16	0,72	2,02	−0,52	Aktivita učitele
Připravenost učitelky	13	4	1,87	0,50	0,53	Aktivita učitele
Vysvětlování	23	34	3,3	4,29	−0,19	Aktivita učitele
Výklad	5	4	0,72	0,50	0,11	Aktivita učitele
Zacházení s chybou	41	60	5,89	7,57	−0,19	Aktivita učitele
Hejný	24	1	3,45	0,13	0,92	Organizace hodiny
Hluk−nepřiměřený	28	1	4,02	0,13	0,93	Organizace hodiny
Hluk−přiměřený	7	3	1,01	0,38	0,40	Organizace hodiny
Nápady dětí	40	4	5,75	0,50	0,82	Organizace hodiny
Práce s učebnicí	9	20	1,29	2,52	−0,38	Organizace hodiny
Prodleva	17	24	2,44	3,03	−0,17	Organizace hodiny
Projevy nudy	4	1	0,57	0,13	0,60	Organizace hodiny
Počítání−násobení pod sebe	7	1	1,01	0,13	0,75	Práce s čísly
Počítání−násobilka	48	79	6,9	9,96	−0,24	Práce s čísly
Počítání−pod sebe (+/−)	4	11	0,57	1,39	−0,47	Práce s čísly
Počítání−zpaměti (+/−)	42	51	6,03	6,43	−0,10	Práce s čísly
Výpočet	71	43	10,2	5,42	0,25	Práce s čísly
Řetězce	0	3	0,00	0,38	−1,00	Typ úlohy
Stmelovací aktivity	17	1	2,44	0,13	0,89	Typ úlohy
Úloha−analýza čísel	1	0	0,14	0,00	1,00	Typ úlohy
Úloha−geom. útvary	9	9	1,29	1,13	0,00	Typ úlohy
Úloha−ostatní	10	24	1,44	3,03	−0,41	Typ úlohy
Úloha−příklad	14	50	2,01	6,31	−0,56	Typ úlohy
Úloha−slovní	33	56	4,74	7,06	−0,26	Typ úlohy
Způsob práce−individuální	21	56	3,02	7,06	−0,45	Typ zadání
Způsob práce−skupinová	41	33	5,89	4,16	0,11	Typ zadání
Způsob práce−společná	5	52	0,72	6,56	−0,82	Typ zadání
Názvosloví	20	24	2,87	3,03	−0,09	Jiné
Obrácené číslovky	2	0	0,29	0,00	1,00	Jiné
Celkem	696	788				

Tab. 8: Celkové výsledky kvalitativního šetření 3. tříd

označují převahu výskytu kódu v třídách vzdělávaných Hejného metodou a záporné hodnoty převahu výskytu kódu v třídách vzdělávaných tradičně.

Z tab. 8 je patrné, že ve většině oblastí jsou rozdíly minimální. Blíže se tedy budeme zabývat jen těmi oblastmi, kde se přeci jen některé rozdíly vyskytly. Z důvodu velkého množství kódů za relevantní považujeme rozdíly větší než 2 %, které jsou stanoveny jako odpovídající hranice v oblasti sociálních věd – v tabulce označeny modrým podbarvením – řádky 1., 3., 12.–13., 15., 23., 25., pokud byl daný kód častěji přítomný v H třídách, respektive červeně – řádky 5.–7., 16., 20.–21., 28.–31. a 33., pokud byl daný kód častější v T třídách.

3.1 Aktivita učitele a organizace hodiny

Pro nás překvapivě byly kázeňské intervence mnohem častější v hejnovských třídách. Souvislost je nicméně možné hledat v tom, že v těchto třídách se častěji objevoval výraznější hluk (kód hluk – nepřiměřený), což bylo zejména dáno způsobem práce v hejnovských třídách (viz následující oblast). V třídách vzdělávaných tradičními metodami bylo zase mnohem častější pobízení ke zvýšení pracovního tempa a k eliminaci prodlev. Oproti tomu pro hejnovské třídy bylo častější vybízení k produkci vlastních nápadů.

3.2 Typy činností – práce s čísly, typy úloh

Ve třídách vzdělávaných tradičními metodami jsme zaznamenali celkově větší objem počítaných příkladů a slovních úloh. Nejpatrnější to bylo v oblasti pamětného počítání násobilky. V hejnovských třídách se nicméně častěji objevil kód Výpočet, který byl identifikován tehdy, když žák nahlas prezentoval řešení příkladu. Tento rozpor je dán způsobem práce, kdy žáci v hejnovských třídách častěji prezentovali svá řešení v rámci skupiny.

3.3 Způsob práce

Výrazné rozdíly jsme zaznamenali ve způsobu práce. Zatímco v třídách vzdělávaných tradičními metodami jasně dominovala individuální a společná práce, v hejnovských třídách to byla práce skupinová. Ta se vyskytovala v relativně vysokých frekvencích i v třídách vzdělávaných tradičně, ale nikoli na úkor zbývajících způsobů práce.

Při obsahové analýze parametru Zacházení s chybou je možné identifikovat dvě oblasti. Tou první je „upozornění na chybu“, tou druhou je „řešení chyby“. Celkem bylo do analýzy zařazeno 53 citací pocházejících z hodin ve třídách vzdělávaných tradičními metodami a 34 citací pocházejících z hejnovských tříd (ne všechny citace tohoto kódu bylo totiž možné posoudit z hlediska námi stanovených kritérií).

3.4 Upozornění na chybu

V našich datech jsme nalezli 4 způsoby, kterými vyučující upozorňovali svoje žáky na chybu (viz tab. 9).

Název	**Popis**	**Příklad citace**
Pojmenování	Vyučující s různou mírou explicitnosti dá žákovi najevo, že jeho řešení je chybné.	*To říkáte špatně, Terezko. Která jsou sudá startovací čísla?*
Otázka na správnost	Upozornění na chybu se v tomto případě děje skrze to, že se vyučující zeptá chybujícího či zbytku třídy na jistotu ohledně správnosti řešení.	*Je to tak?*
Zesměšnění	Jedná se o upozornění na chybu skrze komentář ohledně nekompetence chybujícího.	*U: Dobře. Když budu mít dva časopisy, bude mě to stát víc? A nebo méně? Co myslíš? Kdo si myslí, že to bude stát víc korun? (skoro všichni) Kdo si myslí, že to bude stát méně? Pepo (myslí si, že méně), když si koupíš jeden časopis nebo když si koupíš dva časopisy, kdy zaplatíš víc?* *Pepa: Za ty dva.* *U: No to je snad logický. Sedni si pěkně, když sedíš na noze, víš, že mozek nepracuje, a teď to nepracuje.*
Opominutí	Vyučující chybu přechází – buď si jí nevšimne, nebo ji ignoruje.	

Tab. 9: Analýza způsobu upozornění na chybu

	Pojmenování	**Otázka na správnost**	**Zesměšnění**	**Opominutí**	**Celkem**
H	13,2 %	1,9 %	0,0 %	5,7 %	20,8 %
T	43,4 %	17,0 %	7,6 %	11,3 %	79,2 %
Celkem	56,6 %	18,9 %	7,6 %	17,0 %	100,0 %

Tab. 10: Analýza způsobu upozornění na chybu, komparace tradičních a hejnovských tříd

V tab. 10 uvádíme procentuální výskyt daného upozornění na chybu vzhledem k celkovému počtu Zacházení s chybou v hejnovských třídách, respektive v třídách vzdělávaných tradiční metodou. Součet není 100 %, jelikož ne u všech Zacházení s chybou bylo možné typ upozornění kódovat.

3.5 Řešení chyby

V případě řešení chyby jsme rozlišovali následující kategorie (viz tab. 11), které se však současně mohou překrývat (jedna citace mohla být kódována pomocí vícero kategorií).

V tab. 12 uvádíme rozdíly mezi hejnovskými třídami a třídami vzdělávanými tradičně z hlediska způsobu řešení chyby. V tabulce uvádíme procentuální výskyt daného řešení vzhledem k celkovému počtu Zacházení s chybou v hejnovských třídách a třídách vzdělávaných tradičně.

Název	**Popis**	**Příklad citace**
Návodné otázky	Vyučující "řeší" chybu žáka tím, že se ho pomocí návodných otázek snaží dovést ke správnému řešení.	Takže 7x50 nebo 50x7. Maty? Same? Sam: 105. U: Aj, Same? Co uděláš? Vynásobíš. Sam: 7x5. U: A přidáš nulu, takže? Sam: 350.
Vyvolání někoho jiného	V tomto případě po výskytu chyby vyučující ihned reaguje tím, že vyvolá jiného žáka, na chybu tedy nemusí být explicitně upozorněno.	Kuba: Musíme sečíst to. U: No, Marku? Marek: Musíme si převést ty metry na centimetry. U: Výborně.
Vysvětlení	Vyučující na chybu reaguje tak, že sám vysvětlí, jak by měla být úloha vyřešena správně; někdy tak vyučující činili i poté, co byla úloha vyřešena. Cílem je tedy zřejmě fixace správného postupu.	Ale nějaký špatný, to jsi špatně počítal. Musíš 6x7 = 42, ne plus 7, 7x3 = 21, to jsme říkali, když dáš bráchovi, tak musíš i ty dostat. By se mu nelíbilo, kdybys dostal jenom ty. Jenom brácha.
Snaha o porozumění chybě	Snahu o porozumění jsme kódovali, když se vyučující doptával chybujícího žáka na postup z důvodu, aby si chybu žák uvědomil, či aby sám vyučující porozuměl, kde je chyba, a to i tehdy, když snaha nebyla úspěšná.	U: Kde byl problém? Dívka: Že jsme to počítali jako 23. U: Hm. Už tomu rozumíte, holky? Dívka: Jo.
Zdůraznění	Zdůraznění se často vyskytovalo v souvislosti s tím, že již úloha byla vyřešena, vyučující tedy upozornil na problematické místo úlohy.	Vojta: Že v pondělí a v úterý ujeli 35 km. U: Je to dobře? V pondělí a v úterý ujeli 35 km? Jako dohromady, Vojto? Vojta: Každý den. U: Každý den, pozor, to je důležité. Tak jak si nám to řekl, tak by zapondělí a úterý ujeli dohromady 35 km, ale tady je každý den 35 km.

Tab. 11: Analýza způsobu upozornění na chybu, komparace tradičních a hejnovských tříd

	Návodné otázky	**Vyvolání někoho jiného**	**Vysvětlení**	**Snaha o porozumění chybě**	**Zdůraznění**
H	11,76	17,65	8,82	55,89	0,00
T	20,75	37,74	13,20	1,89	7,55

Tab. 12: Komparace způsobů řešení chyby

Z tabulky je patrný rozdíl ve způsobu práce s chybou u hejnovských tříd a tříd vzdělávaných tradičně. V hejnovských třídách se mnohem častěji vyskytuje „snaha o porozumění chybě“. V třídách používajících tradiční metodu výuky naopak tento způsob práce s chybou nebyl prakticky vůbec zastoupen. Je však třeba upozornit i na skutečnost, že tato „snaha o porozumění chybě“ byla v některých případech (ale nikoli ve všech) spíše formálního charakteru. Cílem tedy bylo zejména to, aby žák popsal způsob řešení. Pouze v hejnovských třídách vyučující explicitně zdůrazňovali (ale ne všichni) důležitost porozumění chybě a poučení se z ní.

U: Dobrý, už tomu všichni rozumíte, kde byl zádrhel. Důležité je poučit se z té chyby, moc vás chválím, tak jedeme dál.

V tradičních třídách bylo naopak nejčastější strategií „vyvolání někoho jiného". Jakoby snahou vyučujících byla snaha o eliminaci chyb. Možná zde do hry vstupuje obava ze špatné fixace chybných postupů. Častější než v hejnovských třídách také v třídách tradičních bylo pokládání návodných otázek se snahou dovést žáka ke správnému řešení.

Pokud to shrneme, zjednodušeně lze říci, že učitelky, které učily tradičně, byly častěji vedeny snahou o podporu správných řešení – ať již tím, že vyvolaly někoho jiného, či tím, že se snažily chybujícího žáka dovést ke správnému řešení. V hejnovských třídách se učitelky naopak častěji pozastavovaly u chybných řešení. Byly tedy spíše vedeny snahou o objasnění chybného postupu (s cílem poučit se z chyby).

3.6 Shrnutí

Nutné je však znovu zdůraznit skutečnost, že se jedná pouze o malý vzorek vyučujících a že bez porovnání s dalšími ročníky není možné brát výsledky jako vypovídající. Jedná se tedy opravdu spíše o ukázku možné analýzy kvalitativních dat než o relevantní výsledek. Do hry navíc vstupuje rovněž skutečnost, že zatímco chyby u tříd vzdělávaných tradičně byly častěji rozebírány u příkladů, u hejnovských tříd to bylo častěji u slovních úloh. Rozdíly ve způsobu zacházení s chybou mohou tedy být rovněž odrazem způsobu práce s daným materiálem.

4 Závěr

V rámci testování TIMSS 2013 a 2018 jsme neshledali statisticky významné rozdíly mezi Hejného a tradiční metodou. Statistické nevýznamně mírně zvýšené výsledky korelují s indexem *Domácí zdroje pro učení* u testování TIMSS a s velikostí obce u testování ČŠI bez ohledu na použitou metodu výuky. U obou testování je zřejmé, že v rámci pozorovaných kategorií (H/T i velikost obce) dochází k vysokému rozptylu výsledků. Tuto skutečnost můžeme interpretovat jako důsledek vysokého vlivu okolností, které nemají přímou vazbu na metodu, např. učitelova pojetí výuky, jeho/její přístup k žákům, případně školní klima apod. Zdá se, že tyto aspekty mají na výsledky žáků podstatně vyšší vliv než samotná metoda výuky.

Metoda Hejného je relativně pozitivně hodnocená, respondenty-pedagogy, jak v oblasti *Děti mají matematiku rády* a *Děti rády experimentují* (s výjimkou učitelů, kteří učí kombinovaně), stejně tak jako (i když trochu méně) v oblasti *Děti dobře zvládají slovní úlohy* a *Děti dobře aplikují naučené postupy do běžného života*.

Tradiční metoda je relativně pozitivně hodnocená v oblasti *Přesnost a rychlost počítání* a *Snadnost pro učitele* a do jisté míry také v oblasti *Rodiče chválí vysoký výkon*, což opět platí pro obě skupiny respondentů.

Postupný nárůst rozdílů se objevil hlavně v oblasti přístupu učitele a organizace hodiny mezi 1. a 3. ročníkem. Zatímco v rámci 1. ročníku byly rozdíly v oblasti aktivit učitele a organizace hodiny minimální, v rámci 3. a 5. ročníků byly rozdíly výraznější. Naopak v oblasti způsobu práce (skupinová práce, individuální práce či společná práce) se rozdíly postupně minimalizovaly (v 5. ročníku byly již zcela bez rozdílu). Z hlediska přístupu k chybným žákovským řešením jsme ukázali, že pro hejnovské třídy je typičtější snaha o porozumění chybným postupům, zatímco pro tradiční třídy je typičtější podpora správných řešení, resp. dovedení žáka ke správnému výsledku. Zároveň je v hejnovských třídách přítomný požadavek na to, aby „práci odváděli žáci". Na chybu hejnovští vyučující častěji upozorňují skrze žáky a skrze žáky rovněž dochází i k jejímu objasnění. Vysvětlení ze strany vyučujícího se zde prakticky neděje. O správném řešení se často diskutuje. Autorita vyučujícího jako toho, kdo „ví", je zde upozaděna. V některých situacích je možné na tuto strategii nahlížet jako na úspěšnou snahu o aktivizaci u žáků. V jiných případech však tento postup sklouzával až k rigidní obavě o označení chyby jakožto chyby.

Zajímavé je hodnocení v *Přechodu přes desítku* v tradičních metodách a v hejnovském přístupu. Samotná číselná osa nevyžaduje desítkovou strukturaci výsledku a blíží se pouhému úspornému spočítání, pokud není desítka a její strukturující funkce zdůrazněna učitelem. Paradoxně proti tomu počítání na prstech jako řadě nutí si desítkovou strukturaci uvědomovat, protože při jejím přechodu jde zároveň o přechod z obou plných rukou na prázdné, nebo naopak (při odčítání) z obou prázdných rukou na plné. Učitel ale musí kontrolovat, zda prsty jsou opravdu používány jako řada a zda uvedené přechody jsou uvědomovány. Počítání přes desítku s rozkladem, nebo bez něj: Pokud žák vybavuje výsledky příkladů s přechodem přes 10 rovnou, vypadá to, jako by se nepotřeboval učit počítat přes desítku s oporou o rozklad a rozklad by se u něj na první pohled mohl zdát nesmyslnou a zbytečnou komplikací. Ale je tomu tak opravdu? Pokud žák nechápe logiku rozkladu, jakkoli už je pro něj pro samotné zjištění výsledku rozklad zbytečný, chápe opravdu logiku aditivních operací na číselném kontinuu? Hejného metoda s přechodem přes desítku nijak specificky nepracuje, tradiční metoda ji naopak silně zdůrazňuje.

Literatura

[1] Macháčková, K: *Komparativní výzkum výuky matematiky u žáků 1.–5. ročníku ZŠ z pohledu psychodidaktiky a kvality výstupů matematické gramotnosti*. Závěrečná zpráva. NÚV, Praha, 2019.

[2] *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do. Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)*. OECD, 2010.

[3] Zatloukal, T.: *Kvalita a efektivita vzdělávání soustavy ve školním roce 2018/2019*. Výroční zpráva. ČŠI, Praha, 2019.

Matematické soutěže v českých a ruských časopisech

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT a VŠE, Praha

Abstrakt: Článek představuje matematické soutěže, které je možné nalézt v českých a ruských časopisech určených pro žáky základních a středních škol. Zajímavé je porovnání velmi skromného souboru soutěží v českých časopisech s bohatou paletou soutěží v ruských časopisech.

1 Úvod

V osmdesátých letech minulého století jsem po ukončení vysoké školy nastoupil jako učitel matematiky ve speciálních třídách se zaměřením na matematiku. Byl jsem pověřen organizací matematických soutěží na škole, např. matematické olympiády či korespondenčního semináře. To si vynucovalo hledat vhodnou literaturu, hlavně úlohy, které by žáky na tyto soutěže připravovaly.

V té době byla k dispozici literatura samozřejmě v českém jazyce, z cizích jazyků to pak byla převážně ruská literatura. Pro účely matematických soutěží se ukázaly jako nejvhodnější a nejbohatší matematické časopisy určené pro žáky základních, hlavně však středních škol.

Občas bylo možné nahlédnout i do časopisů zemí západní Evropy a také do časopisů amerických. Dle mého názoru nejbohatším a nejkvalitnějším zdrojem byly právě časopisy ruské. Proto je jim věnována hlavní pozornost v následujících kapitolách.

2 Matematické soutěže v českých časopisech

V české republice v současnosti, ale bylo tomu tak i v minulosti, vycházejí tyto časopisy s matematickým obsahem a určené učitelům středních a základních škol: *Rozhledy matematicko-fyzikální*, *Učitel matematiky* (zpočátku *Učitel matematiky a fyziky*), *Matematika – fyzika – informatika* (dříve *Matematika a fyzika ve škole*), *Pokroky matematiky, fyziky a informatiky.* Z nich pouze první jmenovaný má takový obsah a takovou formu, které jsou určeny i žákům středních a základních škol.

V těchto časopisech se můžeme dočíst v podstatě jen o matematické olympiádě a Matematickém klokanu. Spíše to jsou ale zprávy z konání soutěží, nejsou tam žádné pravidelné rubriky s úlohami, které by inspirovaly žáky a učitele k řešení a vymýšlení úloh. Jelikož jde o známé soutěže, nebudeme se jim více věnovat.

Snad jedinou výjimkou byly *Rozhledy matematicko-fyzikální*, kde existovala rubrika *Naše soutěž*, kde žáci mohli řešit několik úloh korespondenčně.

3 Matematické soutěže v ruských časopisech

Z ruských časopisů obdobného ražení, jak je uvedeno v předchozí kapitole, jsem měl možnost se poměrně důvěrně seznámit se dvěma. Jsou to *Kvant* a *Matematika v škole*.

Kvant [1] začal být vydáván v roce 1970, takže slaví tento rok 50 let své existence. Proto je mu věnována pozornost i v tomto článku. Matematika v škole [2] začal být vydáván v roce 1934. Nahlédněme do těchto časopisů z pohledu speciálních rubrik, které mají podobu soutěží s mnoha úlohami.

3.1 Kvant s rubrikou *Zadačnik Kvanta – Zadači po matematike i fizike*

Jde o pravidelnou rubriku zavedenou hned od začátku vydávání časopisu, tj. od ledna roku 1970. Jde o podobnou rubriku, jako je výše uvedená rubrika Naše soutěž v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Jsou v ní úlohy z matematiky i fyziky. V roce 2019 dosáhl počet uvedených úloh počtu většího než 2 500, a to jak v matematice, tak ve fyzice. Úlohy jsou většinou originální, někdy jde o úlohy z jiných soutěží, které jsou většinou málo známé. V některém z následujících čísel je vždy uvedeno řešení úloh z předchozích čísel. Řešení úloh se mohou zasílat do redakce časopisu, žádná listina řešitelů se však neuvádí.

3.2 Kvant s rubrikou *Turnir gorodov*

Turnir gorodov, neboli Turnaj měst, je soutěž, ve které soutěží jednotliví žáci, ale výsledky se sčítají odděleně pro jednotlivá města, která se soutěže účastní. Tato soutěž není vyhlašována časopisem Kvant, ten ji jenom propaguje, ale existuje organizační výbor soutěže.

Soutěž má dvě kvalitativní úrovně – jednodušší a obtížnější, a dvě věkové kategorie – pro 8. a 9. třídy a pro 1. a 2. ročník středních škol. Každá kategorie pro každou třídu obsahuje 5 úloh. Soutěž má jediné kolo.

V roce 2019 se konal již 40. ročník této soutěže.

Zajímavé na této soutěži je to, že ji i s úlohami převzalo a účastní se jí mnoho dalších zemí. Asi deseti ročníků v nedávné minulosti se účastnila i Česká republika.

3.3 Kvant s rubrikou *Turnir matematičeskych boev imeni A. P. Savina*

Jde o soutěž, která se koná každým rokem na jiném místě Ruska. Jde o soutěž školních kolektivů 5.–9. tříd, každá třída má svoji kategorii. Ani tato soutěž není vyhlašována časopisem Kvant, ale časopis je jejím propagátorem.

V roce 2019 se uskutečnil již 25. ročník soutěže.

3.4 Kvant s rubrikou *Fiziko-matematičeskaja olimpiada „Fiztech“*

Soutěž není organizována přímo časopisem Kvant, ale Kvant je jejím propagátorem. Soutěž vznikla v roce 1975. Soutěž není jen ruskou záležitostí, ale účastní se jí mnoho postsovětských republik.

Soutěž má dvě etapy, matematickou a fyzikální. Je určena samostatně pro 9., 10. a 11. třídu.

3.5 Kvant s rubrikou *Meždunaridnaja olimpiada „Tujmaada“*

Jde o soutěž v matematice, fyzice, informatice a chemii – v každé vědní oblasti samostatně. Je rozdělena na mladší a starší soutěžící a úlohy v obou věkových kategoriích mohou být z jakékoli oblasti vědní disciplíny. Úlohy jsou jak teoretické, tak praktické.

V roce 2019 proběhl již 25. ročník soutěže. Soutěže se mohou zúčastnit i jiné státy, ne jen ruští žáci.

3.6 Kvant s rubrikou *„Kvant“ dlja mladšich školnikov*

Jde o jednostránkovou rubriku pro nejmladší čtenáře Kvantu. Úlohy jsou sice pro starší čtenáře jednoduché, ale svojí formou jsou zajímavé pro všechny čtenáře, jsou však velkou inspirací pro tvůrce nových problémů pro matematické soutěže, jak vytvořit obtížnější úlohy právě pro starší žáky.

3.7 Matematika v škole s rubrikou *Zadači*

Tato rubrika je analogií rubriky Zadačnik Kvanta – Zadači po matematike i fizike z časopisu Kvant. Jsou zde úlohy z matematiky i fyziky.

4 Závěr

V úvodu jsem zmínil, že nejbohatším a nejkvalitnějším zdrojem problémů pro účely matematických soutěží byly v nedávné historii časopisy ruské. A nebojím se tvrdit, že tomu je tak i nadále. Proto doporučuji talentovaným žákům i jejich učitelům, aby i v současnosti využívaly tyto zdroje.

Literatura

[1] Časopis *Kvant*. 1970-2019.

[2] Časopis *Matematika v škole*. 1934-2019.

Informace o publikacích vydavatelství Portál

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT a VŠE, Praha

Abstrakt: V článku jsou prezentovány dvě populární matematické publikace vydavatelství Portál. Z každé publikace je prezentován jeden konkrétní problém, řešení je ale ponecháno na čtenáři.

1 Úvod

Vydavatelství Portál vydává mnoho hezkých a zajímavých knih. Jsou mezi nimi i knihy, které populárně prezentují slavné matematiky a jejich, a nejenom jejich, matematické poznatky. Uveďme si zde dvě knihy, které prezentují logické úlohy. Knihy mají své autory, ale knihy obsahují vedle jimi vytvořených problémů i problémy převzaté z jiných publikací nebo webových stránek. Problémy v nich uvedené jsou různě obtížné, některé mohou vyřešit žáci základní školy, některé naopak mohou dát zabrat i velice fundovaným matematikům.

Pusťme se tedy do prezentace oněch dvou publikací.

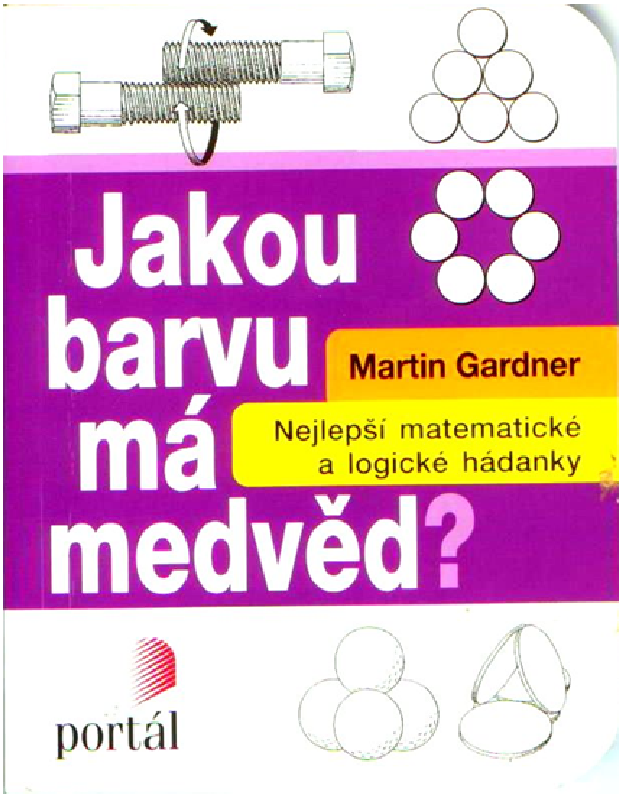
2 Jakou barvu má medvěd

Kniha má celý název [2]: *Jakou barvu má medvěd?: nejlepší matematické a logické hádanky* (v originále My best mathematical and logic puzzle). Jejím autorem je Martin Gardner. Martin Gardner je známý americký matematik a popularizátor vědy. Napsal více než 100 knih, psal články do časopisu Scientific American. Je často označován jako člověk, který přinesl více matematiky více milionům lidí než kdokoli jiný.

Prezentovaná kniha vyšla v českém jazyce v nakladatelství Portál v roce 2017. V publikaci je 65 nejlepších logických problémů, které jsou zajímavé často vtipným řešením. Recenze této knihy byla publikována již v [3]. Přední strana obálky je na obr. 1.

Název knihy pochází z otázky jedné úlohy, která je v knize uvedená pod číslem 1, kde má název Vracející se cestovatel. Uveďme si její znění:

Jedna stará hádanka má následující znění: Cestovatel jde míli na jih, otočí se, jde míli na východ, znovu se otočí, jde míli na sever a skončí na místě, kde začal. Pak zastřelí medvěda. Otázka zní, jakou barvu má medvěd? Časem prověřená odpověď zní: „Bílou," neboť cestovatel musel začít na severním pólu. Není tomu však dlouho, co někdo zjistil, že severní pól není jediné startovní místo, které může splňovat zadané podmínky. Přijdete na nějaké jiné místo na



Obr. 1: Přední strana obálky knihy Jakou barvu má medvěd?

zeměkouli, odkud lze jít míli na jih, míli na východ, míli na sever a skončit na stejném místě?

Řešení zde neuvedeme, necháme ho na čtenáři.

3 Přijdou tři logici do baru...

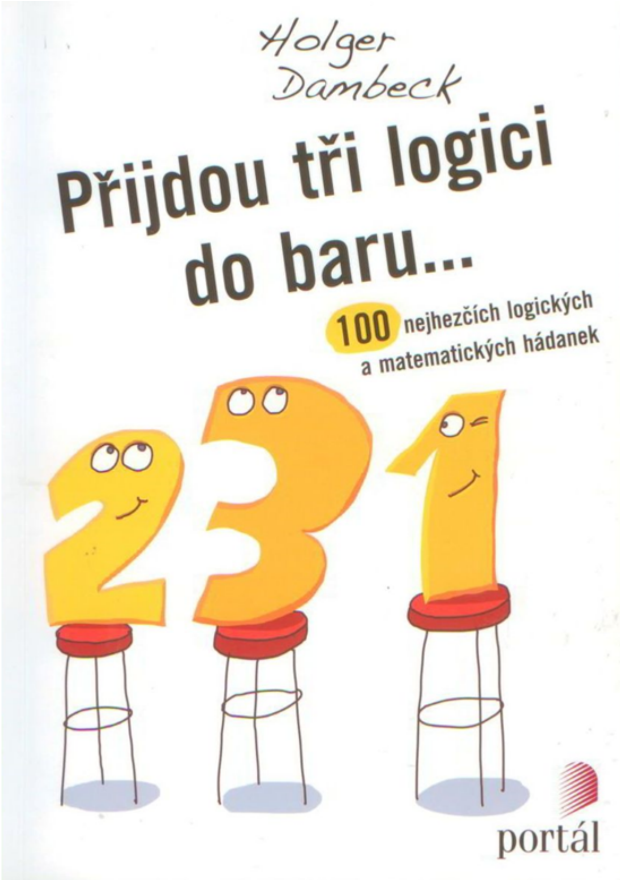
Kniha má celý název [1]: P*řijdou tři logici do baru...: 100 nejhezčích logických a matematických hádanek* (v originále Kommnen drei Logiker in eine Bar... Die schönsten Matherätsel). Jejím autorem je Holger Dambeck.

Holger Dambeck je německý redaktor časopisu Spiegel Online. Vystudoval fyziku. Prezentovaná kniha vyšla v češtině v nakladatelství Portál v roce 2018. V publikaci je 100 velice hezkých logických problémů, zajímavých, s vtipným řešením. Některé úlohy zde jsou modifikací výše uvedeného matematika Martina Gardnera. Přední strana obálky je na obr. 2.

Název knihy pochází z názvu jedné úlohy, která je v knize uvedená pod číslem 37. Uveďme si její znění:

Lidé, kteří se snaží vyjadřovat logicky přesně, znějí někdy velmi vtipně. Tohle prolétne hlavou i barmanovi, když jednoho dne přijímá objednávku.

Jelikož tři hrdinové této úlohy jsou známí odborníci přes logiku, stále dokola házejí vtípky plné podivně znějících, ale formálně dokonalých logických výroků.



Obr. 2: Přední strana obálky knihy Přijdou tři logici do baru...

Tito tři přátelé mají už po práci a chtěli by si zajít společně na skleničku. Vstoupí tedy do baru, kde ihned upoutají barmanovu pozornost. Ti vypadají poněkud zvláštně, pomyslí si.

Přistoupí k nim a ptá se: „Takže všichni pivo?“ Následný sled událostí ho však velmi zmate.

„Nevím,“ odpoví první muž.

„Vůbec netuším,“ řekne druhý.

Třetí nakonec radostně oznámí: „Ano!“

Barman se na ně podrážděně zahledí. Kolik sklenic piva jim musí barman přinést?

Ani zde řešení neuvedeme, necháme ho na čtenáři.

4 Závěr

Dvěma malými ukázkami byly představeny dvě knihy vydavatelství Portál. Je možné vřele doporučit jejich zakoupení. Problémy v nich uvedené čtenáře jistě pobaví a mnohé i poučí.

Literatura

[1] Dambeck, H.: *Přijdou tři logici do baru...: 100 nejhezčích logických a matematických hádanek*. Portál, Praha, 2018.

[2] Gardner, M.: *Jakou barvu má medvěd?: nejlepší matematické a logické hádanky*. Portál, Praha, 2017.

[3] Zhouf, J.: Gardner, M.: Jakou barvu má medvěd? *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92, 2017, recenze, 3. strana obálky.

Seznam účastníků

1. *Brož Lukáš* e-mail: ja.stychova@seznam.cz
   Pracoviště: ZŠ, Přeštice
2. *Břízová Leontýna* e-mail: leontyna.brizova@uhk.cz
   Pracoviště: G A. Jiráska, Litomyšl; PřF UHK, Hradec Králové
3. *Hnatová Jana* e-mail: jana.hnatova@unipo.sk
   Pracoviště: Prešovská univerzita, 17. novembra 15, Prešov, SR
4. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
   Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
5. *Kašová Štěpánka* e-mail: kasste@seznam.cz
   Pracoviště: MŠ, Smetanova 204, Vodňany
6. *Knitl Jan* e-mail: jan.knitl@skolavdf.cz
   Pracoviště: VOŠ, SPŠaSOŠSaCR, Bratislavská 2166, Varnsdorf
7. *Kocanda Ladislav* e-mail: ladislavkocanda69@gmail.com
   Pracoviště: Na Pískách 69/II, Veselí nad Lužnicí
8. *Kozák Kryštof* e-mail: krystofkozak@gmail.com
   Pracoviště: FSV UK, Praha
9. *Kuřina František* e-mail: kurinovi@gmail.com
   Pracoviště: UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
10. *Lego Stanislav* e-mail: stanislav.lego@oegp.cz
    Pracoviště: Rakouské G, Na Cikorce 2166/2b, Praha 4
11. *Molnár Josef* e-mail: josef.molnar@upol.cz
    Pracoviště: KAG PřF UP, 17. listopadu 12, Olomouc
12. *Müller Evžen* e-mail: muller@gozhorice.cz
    Pracoviště: G, SOŠ, SOU A VOŠ, Riegrova 1403, Hořice
13. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
    Pracoviště: PřF UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové
14. *Nocar David* e-mail: david.nocar@upol.cz
    Pracoviště: PdF UP, Žižkovo nám. 5, Olomouc
15. *Novák Miroslav* e-mail: novak@gjkt.cz
    Pracoviště: GJKT, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové

16. *Řepík Michal* e-mail: repik.michal@gmail.com
Pracoviště: PSHŠ, Svídnická 506, Praha 8

17. *Sovič Pavel* e-mail: pavel.sovic@seznam.cz
Pracoviště: PSOŠ pro administrativu EU, Praha

18. *Šlégr Jan* e-mail: jan.slegr@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

19. *Tláskal Jakub* e-mail: jakub.tlaskal@seznam.cz
Pracoviště: SPŠ elit, Čs. odboje 670, Dobruška

20. *Vakoč Pavel* e-mail: pavel.vakoc@fastcr.cz
Pracoviště: Fast ČR, a.s., Černokostelecká 1621, Říčany

21. *Vaněk Vladimír* e-mail: vladimir.vanek@upol.cz
Pracoviště: KAG PřF UP, 17. listopadu 12, Olomouc

22. *Veselý Jan* e-mail: vesely.jan@email.cz
Pracoviště: Planetárium Praha, Královská obora 233, Praha 7

23. *Vojkůvková Iva* e-mail: iva.vojkuvkova@uhk.cz
Pracoviště: FIM UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

24. *Vybíral Bohumil* e-mail: bohumil.vybiral@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

25. *Zapletalová Jana* e-mail: zapletalovaj@ippp.cz
Pracoviště: IPP, Praha

26. *Zdráhal Tomáš* e-mail: zdrahal.tomas@gmail.com
Pracoviště: PdF UP, Žižkovo nám. 5, Olomouc

27. *Zelená Zuzana* e-mail: zuzana.zelena@seznam.cz
Pracoviště: Smetanova 395, Nové Město nad Metují

28. *Zhouf Jaroslav* e-mail: zhouf@seznam.cz
Pracoviště: FIT ČVUT, Thákurova 9, Praha 6

Název: Ani jeden matematický talent nazmar 2019. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba systémem LaTeX: Jan Šlégr
Vydala Univerzita Hradec Králové, nakladatelství GAUDEAMUS jako svou 1780. publikaci.
Vytiskla tiskárna Astraprint Hradec Králové
Náklad: 150 kusů
Rok vydání: 2021

Text neprošel jazykovou úpravou.

Na vydání sborníku se finančně podílela Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Hradec Králové.

9 788074 358463