Univerzita Hradec Králové – Přírodovědecká fakulta
a Fakulta informatiky a managmentu
Královéhradecká pobočka JČMF

Ani
jeden
matematický
talent
nazmar
2015

Sborník příspěvků 7. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodovědných oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2015

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Univerzita Hradec Králové
Fakulta informatiky a managementu

Programový výbor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PřF UHK, Hradec Králové
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
PhDr. Michal Musílek, Ph.D., Přírodovědecká fakulta UHK, Hradec Králové
Mgr. Iva Vojkůvková, Fakulta informatiky a managementu UHK, Hradec Králové

Editoři:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha
PhDr. Lucie Růžičková, Ph.D., Gymnázium Christiana Dopplera, Praha

Recenzenti:
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PřF UP, Olomouc
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7435-631-5

OBSAH

ÚVOD

Úvodní slova

Vážení čtenáři,

sedmý ročník konference Ani jeden matematický talent nazmar proběhl 5. a 6. června 2015 v Hradci Králové. Tato tradiční konference, která je tematicky orientována na žáky a studenty talentované v matematice a přírodovědných oborech, našla letos nové garanty: Univerzitu Hradec Králové a Královéhradeckou pobočku JČMF. Díky těmto organizátorům se na konferenci podařilo vytvořit příjemnou pracovní a přátelskou atmosféru. Problematika žáků a studentů talentovaných v matematice a přírodovědných oborech získává v posledních letech tím víc na aktuálnosti, čím víc je zřejmé, že to budou právě tito mladí lidé, kdo se v budoucnu stanou hybateli pokroku a nositeli vědeckého, technického i společenského rozvoje. Na konferenci zazněly přednášky, které se na problematiku talentu a pedagogické práce s ním dívají z pohledu psychologického, matematického, informatického, ale i příspěvky týkající se odborných soutěží. Přednášející představili posluchačům některé důležité teoretické rámce, ale zároveň své přednášky uváděli do souvislostí s konkrétními praktickými zkušenostmi s aplikací uváděných poznatků při práci s žáky základních škol a studenty středních i vysokých škol. Sborník, který právě dostáváte do ruky, obsahuje příspěvky k těmto přednáškám. Věříme, že v něm najdete mnoho inspirace a podnětů ke své pedagogické práci, ale také k vlastnímu rozvoji. Těšíme se na setkání na příštím ročníku konference Ani jeden matematický talent nazmar.

Editoři

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 5. 6. 2015

9.30	Prezence
10.30–10.45	Zahájení
10.45–11.30	Martin Bílek, Michal Musílek: Projekt MaSciL, aneb IBL jako nástroj rozvoje talentu
11.30–12.10	Ludmila Valešová: Trénování paměti
12.10–12.30	Jana Ševcová: Informace o soutěži Pythagoriáda
14.00–14.45	Marie Havigerová: Vyhledávání nadaných dětí a aktuální poznatky o nadání
14.45–15.20	Michaela Kaslová: Jeden nebo nekonečně mnoho?
15.45–16.15	Jana Kopfová: Pythagorova veta ako ju (možno) nepoznáte (alebo čo všetko. . .)
16.15–17.00	Jaroslav Zhouf: Matematické hry I

Sobota 6. 6. 2015

9.00–9.15	Jaroslav Zhouf: Matematické hry II
9.15–9.45	Iva Vojkůvková: Den π (nejen) na FIM
9.45–10.30	Jaroslav Zhouf: Jsou testy IQ skutečnými testy IQ?
10.30–11.00	Radovan Potůček: O třech typech nekonečných řad
11.00	Zakončení

Jeden nebo nekonečně mnoho?

Michaela Kaslová, PedF UK, Praha [1]

Abstrakt. *Pojmotvorný proces probíhá u nadprůměrných žáků v lecčems odlišně od majority třídy. Někdy je rozdíl evidentní, jindy se skrývá v „maličkostech“, které proběhnou ve vteřině. Jaké otázky provázejí proces zobecňování? Kdy nastává u žáka zájem o pojem a jeho reprezentaci? Analyzujme čtyři případy, na kterých si ukážeme, co a kde vzniklo a jaký to dalo popud k diskusi.*

1 Úvod

Práce s nadprůměrnými žáky vyžaduje vysokou citlivost na to, co a jak říkají. Jsou myšlenky, které díky nepřipravenosti učitele mohou zapadnout. Žák někdy uvažuje nahlas, sděluje své pocity, nápady, aniž by si uvědomil, co významného je za nimi skryto. Je na učiteli tyto žákovy podněty registrovat, analyzovat a adekvátně na ně reagovat.

2 Čtyři situace

S nadprůměrnými žáky mám čtyři druhy zkušeností: jako pozorovatel při hospitacích, jako učitel prvního/druhého stupně, jako experimentátor, jako vedoucí Klubu přátel matematiky (dále jen KPM), kam chodí dobrovolně žáci ve věku 5 – 11 let. Následují čtyři případy z KPM, ve kterých si budeme všímat žákovských reakcí na různé podněty, které jsou vzhledem ke kontextu prvního stupně nestandardní (galerie s abstraktním uměním a Geogebra). Případy nejsou uvedeny chronologicky proto, že teprve v situaci 1 z roku 2013 jsem si uvědomila, že podobný posun nastal již dříve, a to v monologu dívky v roce 2010 (situace 2) a v dialogu tří chlapců v roce 2012 (situace 3). Obě situace (2 i 3) byly sledovány původně z jiného hlediska a také publikovány v jiném kontex-

[1] e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

tu. V situaci 4 byly již v průběhu diskuse cíleně zaregistrovány momenty oněch proměn.

2.1 Situace 1

Kontext: Galerie Městská knihovna v Praze, výtvarník M. Kubíček, školní rok 2012/13

Úkol: Vybrat si jedno z děl, které se mi líbí/zaujalo mne; výběr zdůvodnit

Žák M, devět let, popisoval jeden obraz, ukazoval, co ho zaujalo, a přebíhal zleva doprava, aby všichni viděli; najednou si všiml (údiv), že se z různých úhlů pohledu trojúhelníky mění (obrázek 1): „Já myslel, že je vostrej (ostroúhlý), ale von může…“

Zarazil se, ostatní však ne. Učitel se podivil a to způsobilo, že následovalo zkoumání: vybraného trojúhelníku v galerii a štítů u domů cestou do ZŠ (obrázek 2).

Následující etapa: Někteří žáci (z KPM v rámci outdoorové matematiky) přinesli fotografie objektů zabíraných pod různými úhly. Práce se postupně prolínala s diskusí nad fotografiemi a nad silnou vzpomínkou z galerie.

Diskuse: Diskuse se soustředila na otázku, kolik je vlastně trojúhelníků. Pokud bychom se mohli na jeden obrázek dívat z různého úhlu nebo z různé vzdálenosti, byl by to jeden trojúhelník, nebo by jich bylo více?

Obrázek 1

Záznam fragmentu: „…tak je jen jeden? Tupoúhlej znamená, že… Koukám z jinýho místa,… Ne úhlu…? Tak kolik je vlastně trojúhelníků? Nekonečně? Kdyby byl jen jeden, tak proč učitel říká, že je dělíme na…“

Obrázek 2

2.2 Situace 2

Kontext: Galerie Rudolfinum, výtvarnice Shakbasi, školní rok 2010/2011

Úkol: Vybrat si jedno z děl, které se mi líbí/zaujalo mne; výběr zdůvodnit

Žákyně A, šest let, popisovala, co ji na obraze se třemi barevnými koulemi zaujalo (obrázek 3): „Hm… Teď mi to došlo… Ona koule nemusí na ničem ležet. Vlastně může měnit tu velikost, …“

U: „Proč myslíš?“

A: „No, … Není tu nic jinýho, nevím, jestli je větší než já, nebo menší… Je to asi jedno.…(pauza). Ona (autorka) říká, že je jedno, jakou si tam představím barvu, koule může být, kde chce. Já to vidím… Ani nevím, jestli se točí, ale to je taky jedno. Je (singulár) to koule. Je to krásný.“

Poznámka: V projevu holčičky v závěru již nejsou koule (množné číslo), ale mluví jen o jedné. Jde pro ni o modifikaci jediného dynamického modelu pojmu koule. Singulár jména zůstal učitelem napoprvé nepovšimnut, teprve s odstupem času se vynořil jako významný při opakovaném čtení záznamu.

Obrázek 3

2.3 Situace 3

Kontext: Galerie MU Hradec Králové, výtvarník V. Boštík, školní rok 2011/2012

Úkol: Vybrat si jedno z děl, které se mi líbí/zaujalo mne; výběr zdůvodnit

Žáci, kteří se shodli na jednom díle, M, K, S, T (ze záznamu není zcela jasné, kdo co řekl) (obrázek 4):

„Hele to, je to, to – kruh."

„No a co?"

„Co to má jako bejt?"

„Ale není vohraničenej."

„To vadí?"

„Tak... Je to vnitřek kruhu, ale..."

„Kde je ta kružnice? Je to takový, takový, no – neurčitý..."

„Jako by se zvětšoval!"

„Ne, je menší a..."

„To je tou barvou."

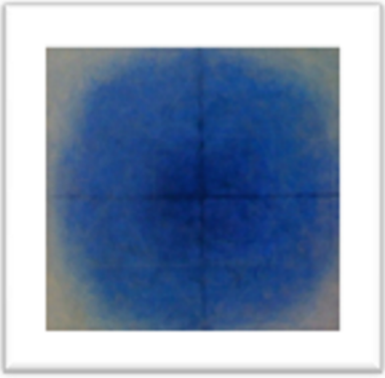
„Taky není stejně barevnej..."

„Jako když jde do nekonečna."

„To by nešlo, kdyby tam ta kružnice byla."

„No jo, to by nebylo věčný."

M a T se usmívají, S kroutí hlavou, ale už nic neříká, K má chvíli otevřená ústa.



Obrázek 4

Poznámka: V průběhu diskuse se mění pohled na obraz a pro některé se statický model kruhu stává dynamickým modelem, který je schopen měnit svoji velikost při zachování tvaru, pro druhé nezvýraznění hranice kruhu dává tušit existenci nekonečně mnoha modelů. Nejde již o řadu modelů, ale jediný proměnlivý model. Není jasné, jak dalece je chápán proces volby jednoho z modelů dle potřeby, tedy dospění k cílené volbě reprezentanta. Diskuse neuzavřena.

Ve škole za týden:

M: „Tak má Boštík jeden kruh?... Když by se roztahoval, tak by byl vlastně jeden.“

S: „No, když se roztahuje, tak je jich nekonečně ... moc ... “

U: „Tak se o tom pobavte se spolužáky.“

T: „To sotva.“

U: „Proč?“

T: „... je jim to fuk.“

M: „Maj problém s kružítkem.“

U: „Tak ještě počkáme.“

S: „Na co?“

U: „Dívejte se kolem sebe a přemýšlejte, až budete chtít, budeme o tom mluvit.“

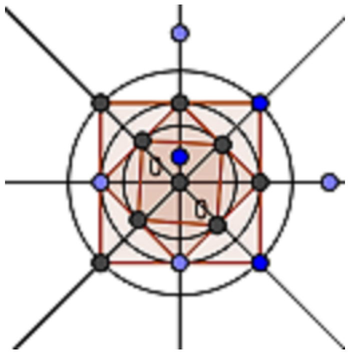
2.4 Situace 4

Kontext: Třída, interaktivní tabule, teprve potřetí se v KPM učili zobrazovat v Geogebře

Organizace: Práce ve skupinách po 2 nebo 3 žácích dle věku, práce odkrýváním, v blocích od 15 do 20 minut na interaktivní tabuli; skupinu A střídala skupina B, která měla jiný úkol.

Úkol: A) V systému souřadnic sestrojte pravidelný čtyřúhelník s vrcholy v bodech [–3; 0] a [0; –3]. Sestrojte kružnici, která je mu vepsaná (opsaná). Pak sestrojte opět pravidelný čtyřúhelník, který je vepsán vaší kružnici, a opět novou kružnici, a to tak dlouho, dokud vás to bude bavit (obrázek 5).

B) Obrázek uložte a zjistěte, jak by se dal zvětšit nebo zmenšit.



Obrázek 5

Dialog:

M: „Když se to zmenší. . . “

T(7): „Nekonečnó!!!“

U: ?

T(7): „Furt dál. . . “

M: „Ten (obrázek) ukazuje zmenšování. . . “

M2: „Zvětšování. . . “ (smích)

T: „Točení. . . “

H: „To je furt to samý. Když se to dá zvětšovat, tak je zbytečný to dělat dokola. Stačí jeden.“

U: „Co to tedy je?“

H: „Jeden kruh a jeden čtverec. Vložili se další. Jaký nekonečno?“

T: „No. . . (pohled na U) nekonečně mnoho menší a menší a menší.“

M2: „A větší a větší a větší.“

T: „Ale i ty větší můžou bejt malý až jako bod.“

Hra na interaktivní tabuli v programu Geogebra pokračovala.

H: „Stejně je to jen jeden (obrázek). Neznám softwer, ale je to jeden, co se mění.“

M: „Jak chceš ty, že jo?“
H: „Nebo ty, to…“ (mávl rukou)

3 Jen nadprůměrní?

V běžné třídě (nejen na prvním stupni) o relativně velkém počtu žáků musí učitel sledovat obrovské množství jevů, ty selektovat a třídu v aktuálně relativně optimální strategii směřovat k naplnění krátkodobých i dlouhodobých cílů. To vše realizuje ve dvou rovinách: jak ke třídě jako jednomu celku, tak vzhledem k individuálním případům, k jednotlivcům, či malým skupinám. Na prvním stupni jednak nepředpokládáme (jak plyne z metodických příruček, článků, příprav na hodiny, které jsou dostupné na internetu), že se dítě může trápit otázkou množství modelů, jejich typů, jednak není pro učitele příliš prostoru, aby registroval takové nuance, a konečně ne každý učitel je na toto připraven.

Z pozorování praxe (hospitace, výuka studentů kombinovaného studia, semináře dalšího vzdělávání) plyne, že někteří učitelé mají problém rozlišit mezi matematickým termínem (vysloveným, napsaným) a matematickým pojmem, pojmem chápaným jako vyvíjející se struktura, jejíž součástí je i termín. Podobně není ve studiu učitelů vždy dostatek prostoru nejen probrat, ale tím méně naučit pozorovat takové situace, aby se učitel musel zamýšlet nad tím, zda je pro žáka pojem na úrovni *unika* (unikum jako pojem, kde je termín propojen s jediným modelem/typem modelu), do jaké míry došlo k posunu, k redukci ve škále modelů, kdy a jak dochází k dalšímu zobecnění, nebo dokonce k abstrakčnímu zdvihu. Zpočátku má jedinec tendenci propojit slovo/slova (mluvená nebo psaná hláskovým písmem nebo symbolikou) s jedinou představou v daném kontextu. Propojení nazýváme *neprázdný pojem*. Pokud jde o unikum, pak toto jedinečné propojení je cílové, ale v matematice u abstraktu je proces propojování odborných slov – termínů s představami složitější. Schéma najdeme v řadě odborných textů (Hejný, Vondrová a další). Termín není totéž co pojem. Osvojení pouhého termínu může vést i k založení *prázdného pojmu*. Pojmy v matematice by neměly být prázdné, u osvojování matematických pojmů jde o dlouhodobý proces nazývaný pojmotvorný proces nebo také zrání pojmu, které je u žáků individuální, nejednotné.

Podrobnější sledování nadprůměrných žáků ovšem ukazuje (nejen v popsaných situacích), že abstrakční zdvih někdy naskočí rychle, ale nemusí být stabilní. V některých sledovaných případech u nadprůměrných žáků prvního stupně je zprvu vázán na kontext, ve kterém k tomu došlo, a vede zpravidla k dalšímu zkoumání nových kontextů s případným hledáním souvislostí. Podobné situace můžeme sledovat u nadprůměrných dětí v předškolním věku, kdy ve specifických situacích dochází k zobecnění, které ovšem není stabilní, a v jiných situacích je u dítěte sledováno propojení na izolované modely. Tento proces může být navíc nevhodně narušován komunikací ve třídě, kdy spolužáci, učebnice, někdy i učitelé komunikují s nadprůměrným tak, že nevědomky vracejí žáka do nižší „fáze poznávacího procesu". V situaci 1 je patrné, jak je žák zmaten rozporem mezi mluvou ve škole a vlastním „objevem". V třetí školní diskusi v KPM došlo k novým posunům. Teprve interpretací a propojením školní a mimoškolní situace pak účastníci odkryli novou formulaci (V): „...jak je fuk, jestli je to ABC (trojúhelník), nebo PQR,... Hm, jako neva, že je tupej, pravej, pravoúhlej, a tak. Je to furt trojúhelník. Jeden?... Jo?"

Šetření v devadesátých letech na prvním stupni v ZŠ ukázalo, že se žáci z více než 80 % domnívají, že geometrie je jen „svět, který se vejde na lavici, do sešitu, do učebnice", že jeho existence závisí na rýsování nebo na vytváření obrázků. Jak o takových představách je informován svět autorů učebnic? Je nebo není nutné zasáhnout do RVP? Mají někteří zahraniční učitelé pravdu, že učebnice matematiky je kontraproduktivní pro poznávací proces, že je třeba dávat žákům specifické pracovní listy? Pokud ano, jsou na to učitelé připraveni? Za jakých podmínek (počet žáků, počet internací se specifickými poruchami, možnost asistence, počet hodin matematiky v týdnu, ...)? Je zde proces, který podle mého vyžaduje dlouhodobější zkoumání u jednotlivců. Je otázkou, zda a za jakých okolností je možné, že neodhalení takových momentů se může podílet na vytváření blokátorů (Kaslová, 2015) v pojmotvorném procesu. Souvisí popsané situace také s tím, jak učitel komunikuje s žáky? Podívejme se na různé situace v hodinách matematiky v zahraničí.

1. situace, Belgie, 1998: *Máme trojúhelník (jednotné číslo). Může vypadat různě. Načrtněte různé typy.*

2. situace, Francie, 2009: *Dej mi různé příklady trojúhelníka. Kdo načrtne obrázek něčeho, co trojúhelník připomíná, ale nemůžeme ho pojmenovat trojúhelník?*

3. situace, Itálie, 2002: *Jsou různé možnosti, jak zobrazit trojúhelník.*

Pracujte ve skupinách a vyznačte co nejvíc modelů trojúhelníka.... Podle čeho mám posuzovat vaši práci? Kdy můžeme přijmout to, že váš obrázek zastupuje trojúhelník (zobrazit zde znamená vždy zdůraznění zástupné funkce modelu)?

4. situace, Švýcarsko, 1995: *V čem je rozdíl, (nějaký) trojúhelník a (tento) trojúhelník (rozdíl je v členu u jména)?*

Zdůrazňuji, že mimo jiné ve všech čtyřech zmíněných zemích jde v mluvě o rozdíl v užití členu u jména. Rozdíl je jazykově i v tom, zda užijeme u jména trojúhelník člen a který člen. Například ve francouzštině neurčitý člen jednotného čísla má dva významy: jeden či kterýkoliv z modelů pojmu trojúhelník; určitý člen v jednotném čísle znamená termín vázající se na pojem, tedy termín, ke kterému se pojí nepřeberné množství představ – modelů, nebo to znamená reprezentant pojmu v případě, že je trojúhelník znám – že vidíme reprezentant pojmu na tabuli nebo že je blíže určen (např. pojmenován, že známe jeho rozměry, případně polohu např. v systému souřadnic a tak podobně). V angličtině vynechání členu znamená, že máme na mysli pojem (zjednodušeně řečeno: propojení termínů s představami), neurčitý člen naznačuje, že budeme pracovat s jakýmkoli modelem pojmu trojúhelník a určitý člen funguje podobně jako ve francouzštině. Čeština členy u jmen neužívá, takže míra obecnosti/konkrétnosti není zřejmá. Je na komunikujících, zda míru obecnosti, či roli užitých slov dají najevo dalšími jazykovými prostředky. Například můžeme sledovat situaci v komunikaci kolem slova *trojúhelník* a *daný (vybraný, náš, ABC) trojúhelník, který je dán/určen* ...

Při kontrole práce žáků učitelé v zahraničí častěji užívají vazeb či frází, potrhujících existenci tříd shodných trojúhelníků k danému zadání, z čehož plyne, že každý žák narýsoval jednoho z reprezentantů této třídy, daného typu. Klade se důraz na to, že to všem musí vyjít stejně ve smyslu shodnosti, není-li úkol zadán jinak (poloha, symbolika a podobně).

4 Shrnutí

Důraz na úspornost v učitelově vyjadřování smazává rozdíl mezi termínem a pojmem, pojmem a jeho modelem, výběrem modelu jako reprezentanta dané třídy, který je vhodný pro danou situaci, pro daného jedince. To vše nestojí jen na užití slov – zde podstatných jmen, ale i na mluvnickém čísle v kontextu věty, jak se ukázalo ve výpovědích v úvodních situacích. Citlivost na jazyk a na situace, tedy na sluchové a vizuální jevy, je označováno v odborné literatuře jako jazykový cit a Kuřinovo „umění dívat se“. Na závěr sledujme na fotografiích různé pohledy na „modely pravoúhlých trojúhelníků“, které tvoří výzdobu knihovny Katolické univerzity v Ružomberoku (obrázek 6).

Obrázek 6

Reference

[1] Kaslová, M.: *Didaktické struktury.* Přednáška na konferenci Talent v matematice. MU BRNO, říjen 2014.

[2] Kaslová, M.: *Výtvarné umění jako motivace žáka nadprůměrného v matematice.* Přednáška na konferenci Podpora talentů. MU Brno, listopad 2014.

[3] Kaslová, M.: *Outdoorová matematika.* Workshop na konferenci Jak učit žáky matematice. Litomyšl, listopad 2013.

Tajemství ukrytá v pravoúhlém trojúhelníku

Jana Kopfová, MÚ SU, Ostrava [1]

Abstrakt. *Tento příspěvek má za cíl popsat, co může již dobře známá Pythagorova věta naučit talentované středoškoláky.*

1 Úvod

Profesor R. Smullyan ve své knize *5000 př.n.l. a jiné filosofické fantasie* popisuje experiment, který provedl v hodině geometrie. Na tabuli narýsoval pravoúhlý trojúhelník se čtverci nad jeho odvěsnami i nad přeponou a upozornil na fakt, že čtverec nad přeponou má větší obsah než kterýkoliv ze čtverců nad odvěsnami. Pak se zeptal: „Předpokládejme, že všechny tři čtverce jsou ze zlata a vám nabízejí jeden velký čtverec, nebo dva menší čtverce dohromady. Kterou možnost si vyberete?“ Možná vás překvapí výsledek „pokusu“ – asi půlka posluchačů si vybrala první možnost a druhá půlka možnost druhou.

Taky jsem byla překvapena, a ještě mnohem víc, když jsem si podobnou situaci zopakovala ve skupině asi 40 studentů středních škol se zájmem o matematiku. Výsledek „pokusu“ byl jen malinko odlišný, asi třetina studentů si vybrala první možnost, třetina možnost druhou a zbytek se nevyjádřil, ale postupně začalo pár studentů vykřikovat: „Vždyť je to jedno.“. Nakonec se ozvalo: „To je Pythagorova věta.“

Pythagorovu větu ve tvaru $a^2+b^2=c^2$ zná snad úplně každý. Jak je ale vidět z příběhu popsaného nahoře, do hloubky a souvislostí má Pythagorova věta co nového říct i nadaným žákům střední školy. Tento příspěvek má za cíl popsat několik směrů, jak rozvinout téma Pythagorovy věty pro středoškoláky.

Začít můžeme diskusí a jednoduchými úvahami na zamyšlení a na hledání souvislostí: Kde všude najdeme pravé úhly? Jak zkonstruujeme pravé úhly?

[1] e-mail: jana.kopfova@math.slu.cz

2 Jak Pythagorova věta vznikla?

Již kdysi dávno v Egyptě, v době, kdy se stavěly pyramidy, bylo potřeba umět přesně vyměřit území. Postup byl velmi jednoduchý. Delší lano opatřili třinácti uzly, takže mezi nimi vzniklo 12 stejně dlouhých dílků. Začátek a konec provazu chytil jeden člověk a spojil je, třetí uzel držel další člověk a sedmý uzel další. Potom lano napnuli od sebe, a vytvořili tak pravoúhlý trojúhelník.

Vzniklý obrazec je trojúhelník se stranami dlouhými 3, 4 a 5 dílů. Egypťané věděli, že na třetím uzlu vznikne pravý úhel. Tohoto postupu používali i při stavbě chrámů a pyramid. Byla to takřka ceremonie, když při slavnostním položení základního kamene takového chrámu vystoupili „napínači lana“ a pomocí lana s uzly vytyčili na staveništi první pravý uhel. Tito napínači lana patřili k cechu kněžské kasty a své tajemství vědění si pečlivě strážili.

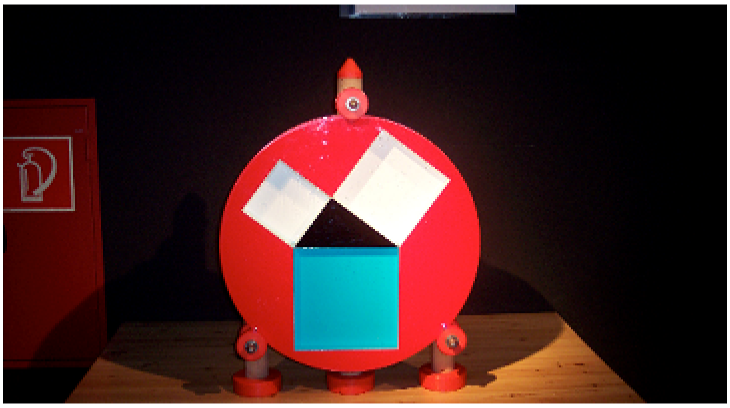
Později ve starověkém Řecku si položili otázku: „Jak to, že trojúhelník se stranami délek 3, 4, 5 je pravoúhlý a trojúhelník se stranami délek 4, 5, 6 se nemůže pyšnit pravým úhlem?“ Řekové si otázku nejenom položili, ale našli na ni i odpověď, a tou je Pythagorova věta.

Pythagorova věta se jmenuje po slavném řeckém matematikovi a především filosofovi Pythagorovi. *Pythagoras ze Sámu* žil přibližně v letech 580 až 500 před naším letopočtem. Když se usadil v městě Kroton na jihu Apeninského poloostrova, vytvořil kolem sebe zvláštní sdružení – kroužek, jehož členy dnes nazýváme Pythagorejci.

Pythagorejci byli posednuti čísly. Pokoušeli se vystihnout harmonii světa pomocí číselných vztahů. Pythagorejci utajovali svoje učení, a proto dnes nevíme přesně, co vymyslel Pythagoras a co jeho žáci. To se týče i slavné Pythagorovy věty, která byla patrně známá už Babylóňanům.

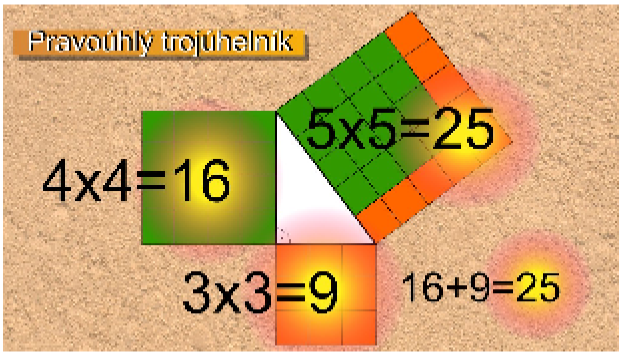
3 A proč platí Pythagorova věta? O jejím důkaze

V mnohých vědeckých muzeích po světě najdete následující exponát s názvem Pythagorova věta (obrázek 1): Ve čtvercích se nachází tekutina, která se po otočení exponátu přelije – z velkého čtverce do dvou menších a naopak. Je to dobrý důkaz Pythagorovy věty? Zkusme se žáky diskutovat, proč by to mohl být důkaz a proč ne.



Obrázek 1

A je toto důkaz Pythagorovy věty (obrázek 2)? Diskutujme se studenty a nechme je přijít na to, kde leží problém.

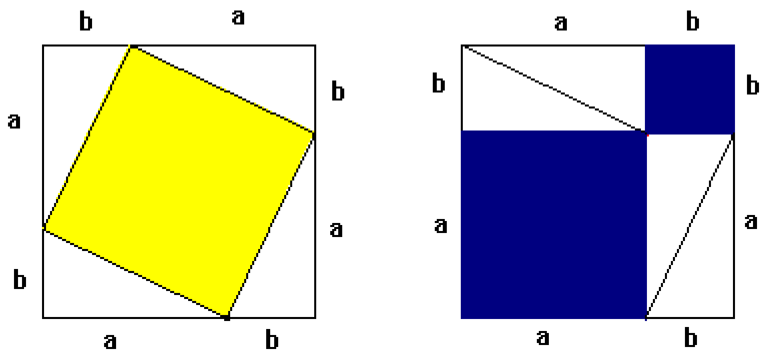


Obrázek 2

Následně můžeme ukázat „důkaz“ Pythagorovy věty pomocí origami. Jednoduchý návod s přesným popisem můžeme najít v odkazu [3]. Opět aktivitu zakončíme diskusí, jestli jde o platný a správný důkaz.

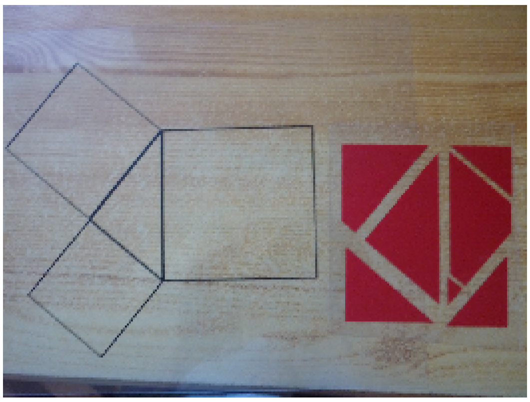
V současné době existuje více než sto nejrůznějších důkazů Pythagorovy věty. Jeden z nich navrhuji probrat společně, například pomocí obrázku 3. Uvedený důkaz je příkladem tzv. „důkazu beze slov“ – studenti se snaží jenom z obrázku pochopit podstatu myšlenky. Podobné důkazy beze slov je možné najít a využít i v jiných oblastech matematiky a v jiných tématech, vděčným zdrojem nápadů je kniha [1].

Studentům můžeme následně namnožit několik různých důkazů Pythagorovy věty (zdroj například [4]).



Obrázek 3

Necháme je samostatně pracovat s tím, že jejich úkolem bude důkaz pochopit a vysvětlit ostatním. Vybraní žáci na konci aktivity předvedou důkaz s vysvětlením na tabuli, svůj, nebo jiný, který je nejvíc zaujal. Hezké zábavné zpestření výuky je ukázat studentům některý z důkazů Pythagorovy věty ve formě dřevěného hlavolamu (hezčí, ale náročnější na výrobu a přípravu) nebo ve formě hlavolamu na folii (jednodušší na výrobu i méně nákladnější – obrázek 4), kde je úkolem poskládat dané útvary do čtverce nad přeponou a následně i do čtverců nad odvěsnami.



Obrázek 4

Samozřejmě je nejhezčí, pokud studenti Pythagorovu větu objeví sami. Protože píšu o aktivitách pro středoškoláky, předpokládám, že ji z učiva základní školy již znají. Nejhezčí způsob, který je mi znám, jak větu objevit, je (nebo bude) popsán v [2]. Ten je založen na podrobném zkoumání pravoúhlých trojúhelníků ve čtvercové síti. Taky je hezké nechat studenty skládat pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran z párátek nebo kousků stavebnice s tyčkami a pozorovat a hledat vztahy a zákonitosti, až je to dovede k objevu.

4 Diskuse o významu důkazu v matematice

Díky starověkým Řekům, a jejich důkazům, je matematika jediná vědecká disciplína, kde to, co platilo před tisíci lety, platí i dnes – pro hloubavé studenty je zvlášť zajímavé porovnání s fyzikou. Význam starověkého Řecka ve vývoji matematiky – matematika před Řeky se zabývala otázkami, jak něco vypočítat, pomáhala v praktických úlohách, až Řekové se snažili pochopit a přijít na to, proč něco se tak dá počítat. Tím přišel objev důkazu a důležitost jeho významu. Tato část je pro studenty většinou zajímavá a objevná, takový pohled neznají ze školních hodin matematiky.

Úloha 1: Navážeme na počáteční úlohu – jak by to vypadalo, kdyby trojúhelníky nebyly pravoúhlé? Po diskusi probereme a upozorníme na souvislost s kosinovou větou (pokud to nevymyslí sami studenti), pro šikovné studenty s důkazem.

Úloha 2: Co se stane, jestliže v Pythagorově větě zaměníme čtverce za trojúhelníky nebo jiné pravidelné geometrické útvary? Čtverce nad odvěsnami i přeponou pravoúhlého trojúhelníka nahradíme rovnostrannými trojúhelníky, pravidelnými šestiúhelníky, čtverci, půlkruhy – platí tvrzení podobné Pythagorově větě?

Možná je to překvapivé, ale čtverce lze opravdu zaměnit v Pythagorově větě za jiné obrazce – trojúhelníky, šestiúhelníky, půlkružnice, za předpokladu, že jsou navzájem podobné. Součet obsahů těchto obrazců nad odvěsnami bude opět rovný obsahu obrazce nad přeponou [5].

Úloha 3: Podle šikovnosti studentů, se kterými pracujeme, můžeme hledat nejdřív nějaké pythagorejské trojúhelníky (pravoúhlé trojúhelníky, jejichž délky stran jsou celá čísla), pak předpis pro obecný pythagorejský trojúhelník a vzorec použitelný pro jakýkoliv pythagorejský trojúhelník [6].

Úloha 4: Zaměříme se na trojúhelníková a čtyřstěnná čísla v Pascalově trojúhelníku, vlastnosti těchto čísel, hledání pravidel a vztahů v souvislosti s problémy řecké matematiky, na řešení zajímavých úkolů.

Úloha 5: Diskutujeme pythagorejský strom a souvislost s fraktály [7].

Na závěr můžeme vzpomenout souvislosti s neeuklidovskou geometrií a zmínit fakt, že Pythagorova věta je ekvivaletní 5. axiomu o rovnoběžkách. A že v neeuklidovské geometrii existují trojúhelníky, které mají všechny úhly pravé.

5 DVD Matematika a její tajemství

Rádi bychom vám nabídli DVD *Matematika a její tajemství*, kde se můžete dozvědět více o tajemstvích pravoúhlých trojúhelníků či jiných zajímavých tématech z matematiky.

Nabízíme českou, anglickou i německou verzi DVD – Matematika a její tajemství, Mathematics and its Secrets, Mathematik und ihre Geheimnisse. Ukázka z DVD v češtině je na adrese [8]. Ukázka z DVD v němčině je na adrese [9]. Ukázka z DVD v angličtině je na adrese [10].

DVD obsahuje sedm filmů o matematice namluvené rodilými mluvčími na témata:

Tajemství fraktálů. Může existovat útvar s nekonečným obvodem a s konečným obsahem? Pojď se s námi podívat do světa fraktálů! Co jsou to fraktály, kdo a jak je poprvé objevil a kde se používají.

Příběh čísla Pí. Pí je jedno z nejslavnějších čísel v matematice. Kde se ale vzalo, jaké má vlastnosti a jak a proč se objevuje ve vzorcích pro obsah kruhu, nebo objem koule?

Tajemství topologie. Topolog prý nerozezná pneumatiku od hrnku na kávu. Co je to topologie a jaká další tajemství skrývá? Putujeme od Platónských těles, Eulerovy věty až po Möbiův pásek a Kleinovu láhev.

Tajemství ukryté ve spirálách. Co mají spirály společné s králíky? A matematika s botanikou? Nabízíme Archimédovy, logaritmické a Fibonacciho spirály, jejich vlastnosti a souvislosti s výskytem v přírodě.

Tajemství pravoúhlých trojúhelníků. Co má společné Pythagoras s pravoúhlým trojúhelníkem? Prezentujeme historie a další netušené zajímavosti kolem Pythagorovy věty.

Tajemství počítání s nekonečnem. Může mít nekonečná řada čísel konečný součet? Řady geometrické, harmonické a jak je to s jejich součty? Jak se s nekonečnem počítá? Jak se sčítají nekonečna a co to jsou Zenónovy paradoxy.

Tajemství Pascalova trojúhelníku. Co všechno skrývá Pascalův trojúhelník? Prezentujeme historii a souvislosti, trojúhelníková a čtvercová čísla, fraktálové vzory a jiné pozoruhodné vlastnosti ukryté v Pascalově trojúhelníku.

Filmy se dají využít na doplnění či rozšíření učiva na základních i středních školách. Na mnohé ve filmech nastolené, nebo nastíněné otázky je možné navázat ve vyučování, a zamýšlet se tak nad problémy s širšími souvislostmi.

Reference

[1] Nelsen, R.B.: *Proofs without words.* The Mathematical Association of America, 1993.

[2] Hejný, M. a kol.: *Matematika, učebnice pro 2. stupeň a víceletá gymnázia.* H-mat, 2015.

[3] www.youtube.com/watch?v=z6lL83wl31E

[4] www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.html

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem#Similar_figures_on_the_three_sides

[6] www.mathsisfun.com/numbers/pythagorean-triples.html

[7] http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pytree/pytree.html

[8] youtu.be/RbQ4UJ_Vpnw

[9] youtu.be/Z_YHn2eviIg

[10] youtu.be/nWW3tCx45cI

Projekt MaSciL jako zdroj nápadů i pro talentované žáky v matematice

Michal Musílek, Martin Bílek, PřF UHK, Hradec Králové, [1]

ABSTRAKT. *Příspěvek prezentuje jeden z mezinárodních projektů, kterých se Přírodovědná fakulta UHK účastní. Projekt je zaměřen na změny ve vyučování a učení se matematiky a přírodovědných předmětů v Evropě. Příspěvek vedle představení tohoto projektu zahrnuje i konkrétní ukázku jedné takové aktivity ve vyučování.*

1 Projekt MaSciL

MaSciL (Mathematics and Science for Life – Matematika a přírodní vědy pro život) je mezinárodní projekt podporovaný Evropskou komisí v rámci 7. Rámcového programu, na kterém se podílí 18 partnerů ze 13 zemí. Projekt se zaměřuje na změny ve vyučování a učení se matematiky a přírodovědných předmětů v Evropě, které podporují učitele při využívání badatelské metody (IBL – Inquiry Based Learning) a zároveň je podněcují k propojení výuky matematiky a přírodovědných předmětů se světem práce (WoW – World of Work), tedy s reálným životem.

[1] e-mail: michal.musilek@uhk.cz, martin.bilek@uhk.cz

Jde o to, aby badatelsky orientovaná výuka ve spojení se světem práce pomohla učinit matematiku a přírodovědné předměty více smysluplné a přístupné pro žáky s různým stupněm nadání.

Cílem projektu je jednak zmapovat stav využívání badatelské metody ve vyučování a v učení se a v jejím propojení se světem práce v různých zemích Evropy a v různých předmětech, a jednak cíleně provádět diseminaci této nové vzdělávací kultury s hlavním důrazem na inovaci související přípravy učitelů matematiky a přírodovědných předmětů. Badatelsky orientovaná výuka (IBL – Inquiry Based Learning) se zaměřuje na rozvíjení procesů myšlení a postojů potřebných pro zvládnutí života v budoucnosti, o které přesně nevíme, co nám přinese. Základem badatelského přístupu je žákova aktivita a kladení otázek. Žáci pátrají po informacích, kladou otázky, nacházejí na ně odpovědi, které odpovídajícím způsobem vyhodnocují. Učení probíhá prostřednictvím otázek s otevřenou odpovědí a strategií hledání různých odpovědí a možností řešení problémů. Učitelé působí proaktivně, podporují úsilí žáků, a hlavně těch, kteří dosáhnou cíle pomocí pečlivě vybraných strategických otázek. Hodnotí přínos žáků, včetně chyb, kterých se dopustili, a posouvají je v učení pomocí jejich vlastních zkušeností a interpretací. Ve třídě podporují smysl pro účel a odpovědnost.

Vzdělávání by mělo připravovat žáky pro budoucí práci. Zdroje používané při vyučování a při učení by se tak měly vztahovat ke světu práce prostřednictvím specifického kontextu (tj. návazností na pracoviště nebo na role související s reálným životem). Podíl reflektující svět práce se může lišit, počínajíc aktivitou na pracovišti až po školní řešení úloh z reality uvedených v učebnici.

Pro podporu badatelského přístupu ve výuce matematiky a přírodovědných předmětů partneři projektu MaSciL připravili nabídku dalšího profesního vzdělávání učitelů, která byla od roku 2014 poskytnuta všem v projektu zúčastněným zemím. V rámci profesního rozvoje byli učitelé seznámeni s různými praktickými přístupy, s jejichž pomocí si mohou navrhovat přípravy pro vlastní výuku. Vytvořené materiály jsou postupně zveřejňovány a jsou v anglické jazykové verzi přístupné všem evropským učitelům na adrese [3]. Při vývoji komplexních úloh a jejich nasazení v kontextu výuky je využívána spolupráce realizátorů všeobecného matematického a přírodovědného vzdělávání s odbornými školami a podniky.

Řešení projektu se kromě spoluřešitelů z Přírodovědecké fakulty

Univerzity Hradec Králové, který předpokládá spolupráci napříč ustaveným fakultním výzkumným týmem zaměřeným na oborové didaktiky přírodních věd, matematiky a informatiky, účastní univerzity a další instituce z Německa, Nizozemí, Španělska, Norska, Turecka, Litvy, Bulharska, Rumunska, Řecka, Kypru, Rakouska a Velké Británie. Jejich zástupci vyvíjejí, nabízejí a ověřují nové přístupy profesního rozvoje učitelů, také zkoumají, jak by jednotlivé národní vzdělávací systémy a podmínky v evropských zemích měly být změněny, aby podporovaly novou vzdělávací kulturu. Projekt MaSciL je podporován Evropskou komisí v rámci 7. Rámcového programu EU a měl by se přímo dotknout 65 000 a nepřímo až 800 000 evropských učitelů. Podrobné informace lze získat na webu projektu na linku [4] nebo na sociální síti Bitter [5].

2 MaSciL, matematika a matematicky nadaní žáci

Projekt MaSciL není prvoplánově orientován na žáky talentované v matematice a přírodních vědách. Jeho ambicí je zprostředkovat prvky badatelského učení co nejširšímu spektru žáků zejména nižšího sekundárního stupně vzdělávání, tedy v České republice žákům 2. stupně základních škol. Pracuje se ovšem i s úlohami vhodnými již pro žáky primárního stupně (1. stupeň ZŠ), či naopak žáky vyššího sekundárního stupně (střední školy). Anglické slovo inquiry se v rámci českého termínu badatelsky orientovaná výuka překládá poněkud vzletně jako bádání. Lze ho však přeložit také jako dotazování, ptaní se, případně vyšetřování. Cílem IBL je naučit žáky, aby se naučili sami sobě klást vhodné otázky a následně na ně hledali odpovědi. Tento návyk je velmi vhodný pro rozvoj jakéhokoliv talentu, tedy i matematického.

Typickým rysem úloh vyvíjených v rámci projektu MaSciL je jejich otevřenost, neurčitost. Zadání si sami žáci mohou modifikovat, zpřesňovat, či naopak zobecňovat podle vlastní úvahy, samozřejmě v případě významnějších úprav po dohodě s učitelem. Je tedy možné, aby na základě stejného původního zadání řešila skupina talentovaných žáků náročnější problém než ostatní, a tím se intenzívněji rozvíjely jejich vědomosti a dovednosti. Řada úloh vzniklých v rámci projektu je zaměřena buď čistě na matematiku, nebo pokrývá mezipředmětové vztahy mezi matematikou a některou z přírodních věd (biologie, fyzika, chemie), pouze menší část úloh vyžaduje znalosti z konkrétního přírodovědného oboru.

Každá z úloh připravená některým z národních týmů je zařazena do jednoho, nebo více z pěti daných oborů: matematika, biologie, fyzika, chemie, základy techniky; pokrývá jednu, nebo více dimenzí IBL: zkoumání situace, plánování výzkumu, systematické experimentování, interpretace a vyhodnocení, diskuze závěrů; je určena pro jednu, nebo více cílových skupin (žáci prvního stupně základní školy, druhého stupně základní školy, středních škol). Ve specifikaci zadání je uveden předpokládaný čas řešení problému, kontext úlohy, role (kterou na sebe žák – řešitel problému bere), odpovídající profese (pro jejíž budoucí výkon řešení dané úlohy připravuje, nebo která byla inspirací pro vznik úlohy), aktivita (převažující činnost během řešení) a produkt (úlohy mají částečně povahu miniprojektů, je tedy očekáván konkrétní výstup). Většina úloh má kromě takto podrobně specifikovaného zadání k dispozici také metodický list pro učitele a pracovní list pro žáky. Ukažme si to na konkrétní úloze.

3 Parkování v suterénu očima architekta

Úkolem žáků je pracovat jako architekti (projektanti) a komplexně vyřešit parkování v suterénu nově projektovaného bytového domu. Úkol byl navržen architektem, který zrcadlí svoji práci v profesionálním kontextu. Omezení úlohy byla převzata z aktuálně platných stavebních předpisů. Úkol názorně ukazuje, jak se matematika používá ve světě práce, kde jsou problémy špatně strukturované, takže nelze předpokládat jednoznačné řešení. Hodnocení a zlepšování možných řešení je součástí procesu řešení. Profesionálové potřebují využívat různých matematických znalostí a nástrojů, aby mohli přijít s dobrým řešením.

Studenti přijímají roli architekta – člena projekčního týmu. Základní aktivitou je návrh plánu parkoviště v suterénu budovy. Rozměrový náčrtek obrysu je k dispozici na pracovním listu. Studenti aplikují geometrické znalosti a dovednosti a využívají svoji prostorovou představivost, aby rozhodli o úpravách a rozměrech parkovacích ploch a dalších prvků, jako jsou rampy a schodiště, či výtahová šachta. Odpovídající profese je tedy architekt.

Produktem tohoto úkolu je rozměrový náčrtek parkoviště s vysvětlujícím komentářem. Výsledek práce může také obsahovat zprávu, nebo popis pro majitele nebo uživatele parkovacích míst v dané budově.

Konstrukce budovy je složitý úkol, který zahrnuje mnoho proměnných.

Architekti musejí přemýšlet o struktuře, instalacích (elektřina, voda, topení), rozdělení prostoru (schodiště, chodby, pokoje, vstupní hala atd.), orientaci budovy atd. Často se stává, že rozhodnutí přijatá v předchozích krocích ovlivní to, co bude možné udělat v těch příštích. V této úloze studenti pracují jako architekti na konstrukci parkoviště (garáží). Struktura budovy a rozmístění pilířů již bylo rozhodnuto a nelze jej změnit. Studenti mají navrhnout rozvržení parkoviště, parkovací místa a výjezdní rampu. Pracují v rámci určitých omezení a je třeba, aby některé chybějící informace zjistili sami.

Předpokládaná doba trvání řešení miniprojektu jsou dvě vyučovací hodiny. K zadání je přiloženo video zachycující práci architektů v projekční kanceláři, metodický list pro učitele (ve formátu PDF) a pracovní list pro žáky (ve formátu PDF).

Dimenze badatelského učení, které úloha pokrývá, jsou: zkoumání situace, interpretace a vyhodnocení, diskuze závěrů. Tato úloha není zaměřena na plánování výzkumu ani na systematické experimentování. Cílovou skupinou jsou žáci druhého stupně základní školy. Úlohu navrhl národní tým Španělska.

4 Závěr

V tomto krátkém článku jsme chtěli představit projekt MaSciL a netradiční matematickou úlohu, která je jedním z jeho produktů. Mnoho dalších zajímavých a užitečných informací a zásobu úloh najdete na webu projektu na linku [1]. Věříme, že půjde o vítanou pomoc a inspiraci při rozvíjení matematického nadání našich žáků.

Reference

[1] Project MaSciL. Accesible at: `http://www.mascil-project.eu/`

[2] Doorman, M., Fechner, S., Jonker, V., Wijers, M.: *Guidelines for Teachers for Developing IBST-oriented Classroom Materials for Science and Mathematics Using Workplace Contexts. Connecting Inquiry-based Learning (IBL) in Mathematics and Science to the World of Work (WoW).* Translation to Czech version – Bilek, M.: Project MaSciL. `http://www.fisme.science.uu.nl/en/mascil/`.

[3] `http://www.mascil-project.eu/teaching-material.html`

[4] `http://www.mascil-project.eu`

[5] `https://twitter.com/mascilEU/mascil-team`

Parkování v suterénu očima architekta – metodický list pro učitele

Abstrakt

V této úloze studenti pracují jako architekti na konstrukci parkoviště (garáže) v suterénu budovy. Struktura budovy a rozdělení pilířů již byly určeny, a nelze jej změnit. Studenti mají navrhnout rozvržení parkoviště, parkovací místa a vstupní rampu. Pracují v rámci určitých omezení a je třeba, aby si sami doplnili některé chybějící informace.

Předmět:	matematika
Věková skupina:	12–16 let
Čas:	100 minut (2 vyučovací hodiny)

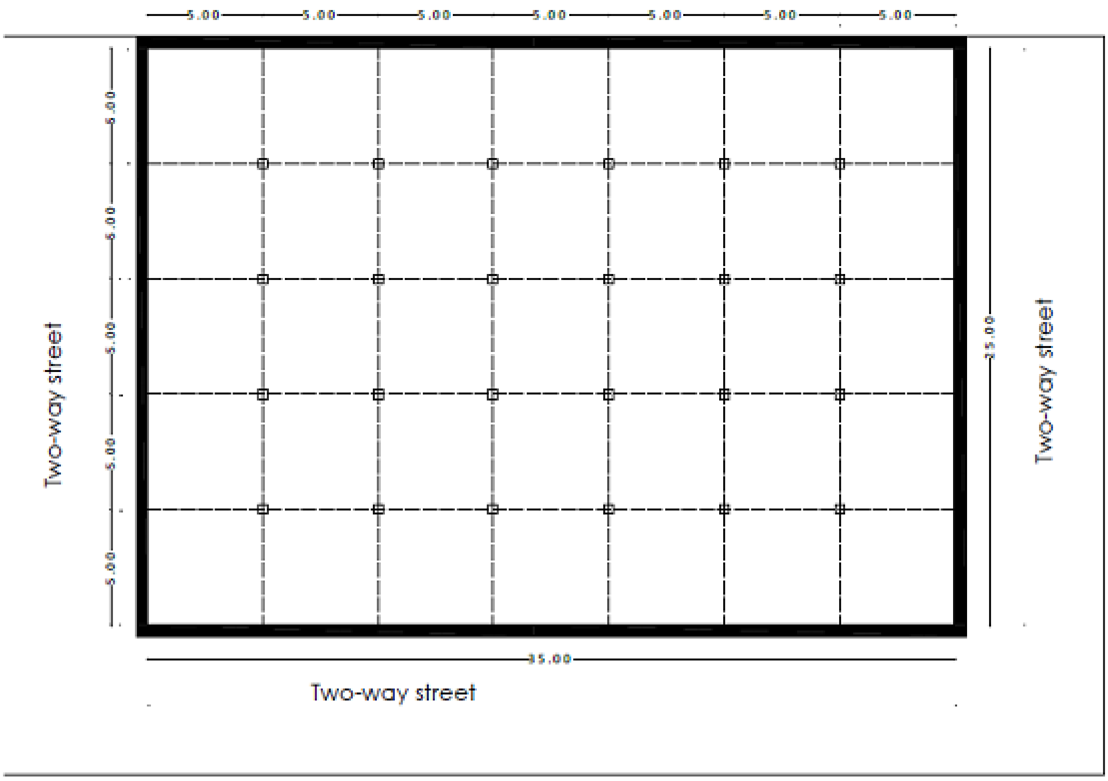
Příprava:

- nakopírujte pracovní list
- pomůcky: tužky, pravítka atd.
- volitelně: přístup k internetu pro vyhledání dalších informací

Parkování v suterénu očima architekta – pracovní list pro žáky

Při navrhování bloku bytů musí architekt vymyslet, jak rozmístit parkovací místa v konstrukci suterénního parkoviště.

Schéma ukazuje plán vymezující rozsah oblasti, která je k dispozici. Všechny rozměry jsou v metrech.



Některá omezení:

1. Musí zde být dvě parkovací místa pro osoby se zdravotním postižením.
2. Musí zde být šest parkovacích míst pro motocykly.
3. Musí existovat 5m x 5m schodiště.
4. Je třeba rampa, kterou auta vjíždějí a vyjíždějí. Maximální sklon rampy je 25 %.

Najděte dobrý návrh pro tuto situaci.

Příklad časového plánu výuky:

1. hodina

5 min	Rozdělte třídu do malých pracovních skupin (po 4 studentech) a uveďte je do problému a pracoviště: architekt navrhuje parkoviště. Je možné ukázat video jako videonápovědu. Vhodná videa naleznete na YouTube.
10 min	Studenti se seznámí s úlohou (pracovním listem) a dozvědí se, co se očekává jako výsledek řešení úlohy. Začnou pracovat.
5 min	Krátká diskuse s celou třídou o problémech, otázkách, například pokud jde o "chybějící" informace: Jak velké je auto? Kolik místa je potřeba pro otáčení? atd. Poznámka: neposkytujte hotové odpovědi, ale pomozte studentům, aby tuto informaci sami našli (například na internetu, výměnou osobních znalostí, měřením automobilů parkujících před školou atd.).
25 min	Studenti budou pokračovat v práci na úkolu.
5 min	Následuje krátká diskuse o výsledcích a otázkách.

2. hodina

35 min	Studenti dokončují svůj návrh suterénního parkoviště (výkres a komentář).
15 min	Studenti prezentují (všichni, nebo jen někteří) příklady a diskutují závěry.

Didaktické poznámky

- V závislosti na věku studentů budete vyžadovat podrobnější design.
- Je-li k dispozici dostatek času, mohou studenti využívat další informace z internetu (například o pravidlech pro přístupnost parkovacích míst nebo o poloměru otáčení osobních automobilů).

O třech typech nekonečných řad

Radovan Potůček, FVT UO, Brno [1]

Abstrakt. *Příspěvek je věnován třem typům nekonečných řad – divergentním řadám, jejichž členy jsou tvořeny převrácenými hodnotami k některým posloupnostem, speciálním typům zobecněných harmonických řad a Kempnerovým řadám. Tyto tři typy řad mohou představovat zajímavá témata pro talentované studenty nejen na vysokých, ale i na středních školách. Mohou rozšířit učivo tematického celku Nekonečné řady, a vzbudit tak hlubší zájem studentů o nekonečné řady i matematickou analýzu.*

1 Úvod

Obsah tematického celku Nekonečné řady je na středních školách zpravidla omezen pouze na nekonečné geometrické řady. Přednášky na vysokých školách jsou nejčastěji věnovány geometrické a harmonické řadě, s případnou zmínkou o řadách s teleskopickou vlastností, a také kritériím konvergence číselných řad. Proto by příspěvek mohl být inspirací pro práci s nadanými studenty nebo pro rozšíření standardní výuky o nekonečných číselných řadách o další typy konvergentních i divergentních řad, a to jak na vysokých školách, tak i, při jistém zjednodušení výkladu, na školách středních. Příspěvek volně navazuje na autorovy články [1], [2], [3] a [4].

2 Divergentní řady tvořené převrácenými hodnotami k některým posloupnostem

Zde se budeme zabývat řadami, jejichž členy jsou tvořeny převrácenými hodnotami k posloupnostem přirozených čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$, sudých čísel $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$ a k posloupnosti tvořené jedničkou a prvočísly

[1] e-mail: radovan.potucek@unob.cz

$\{1, 2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$. Postupně ukážeme, že všechny tyto čtyři řady divergují.

2.1 Řada převrácených hodnot k přirozeným číslům

Harmonická řada je definována jako řada převrácených hodnot k přirozeným číslům, tj. nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{1}$$

V základním kurzu matematické analýzy týkajícím se nekonečných řad se dokazuje, že harmonická řada diverguje, a to pomocí vhodného uzávorkování jejích členů. Tato skutečnost může některé studenty překvapit. Postupuje se zpravidla tak, že se součet s_n prvních $n = 2^m$ členů zapíše takto:

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^m}\right) >$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{2^m}\right)$$

Přitom v 1. závorce jsou 2 sčítanci, ve 2. závorce 2^2 sčítanci a poslední, $(m-1)$-ní závorka obsahuje 2^{m-1} sčítanců. Protože je součet sčítanců v každé závorce větší než $1/2$, platí celkem

$$s_n > 1 + \frac{1}{2} + (m-1)\frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}\,.$$

Odtud plyne, že částečné součty řady (1), $s_n = s_{2^m}$, rostou s rostoucím m nade všechny meze. Tak např. $s_n > 10$ pro $m > 18$, tj. pro více než $2^{18} = 262\ 144$ členů harmonické řady. Tento klasický a nejčastěji v učebnicích užívaný důkaz je připisován *Nikolasi Oresmovi* (1323 – 1382).

Divergenci harmonické řady lze však dokázat i takto: Předpokládejme, že harmonická řada konverguje ke konečnému součtu

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\,.$$

Potom lze psát

$$s = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots\right) + \frac{1}{2}s.$$

Odtud dostáváme, že

$$\frac{s}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots ,$$

tj. rovnost

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots .$$

Tato rovnost však nemůže platit, neboť

$$\frac{1}{2} < 1 , \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{3} , \quad \frac{1}{6} < \frac{1}{5} , \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{7} , \quad \ldots ,$$

takže součet s nemůže být konečný, a harmonická řada tudíž diverguje.

2.2 Řady převrácených hodnot k lichým a sudým číslům

Důsledkem vztahů

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{s}{2}$$

a

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

jsou skutečnosti, že obě redukované harmonické řady, tj. nekonečné řady převrácených hodnot k lichým, resp. k sudým číslům

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \tag{2}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \tag{3}$$

divergují. Tato tvrzení lze, stejně jako divergenci harmonické řady, rovněž snadno dokázat užitím integrálního kritéria konvergence.

Třebaže harmonická řada diverguje, roste její n-tý částečný součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

velice pomalu. Matematici se proto zabývali otázkou určit minimální počet členů potřebných k tomu, aby částečný součet přesáhl dané číslo. Např součet 250 000 000 členů je stále menší než 20 a k tomu, aby částečný součet přesáhl 100, je třeba přidat více než dalších $15 \cdot 10^{33}$ členů [5].

2.3 Řada převrácených hodnot k prvočíslům

Harmonickou řadu nyní výrazně zredukujeme tak, že vynecháme všechny členy, jejichž jmenovatel představuje složené číslo, takže obdržíme nekonečnou řadu tvořenou součtem jedničky a převrácených hodnot ke všem prvočíslům

$$1+\sum_{p\in P}\frac{1}{p}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\cdots\,, \tag{4}$$

kde P označuje množinu všech prvočísel. Dalším překvapením pro studenty může být, že i takto značně redukovaná harmonická řada – místo prvních 100 členů harmonické řady jich zbývá 26, místo prvních 1 000 členů zbývá jen 169 členů, místo prvních 10 000 členů zbývá pouze 1 230 členů, místo prvních 100 000 členů zůstává jen 9 593 členů atd. – přesto stále diverguje. První důkaz divergence řady (4) provedl sporem (např. [6]) *Leonhard Euler* (1707 – 1783) v roce 1737.

Jiným, elegantním důkazem divergence řady (4), je tento důkaz: Jestliže je číslo p prvočíslo, potom ze vzorce

$$s=\frac{a}{1-q}$$

pro součet s nekonečné konvergentní geometrické řady s prvním členem $a=1$ a kvocientem $q=1/p<1$ plyne vztah

$$\frac{1}{1-1/p}=1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\,.$$

Nyní proveďme součin obou stran tohoto vztahu přes všechna $p\in P$. Obdržíme tak vztah

$$\prod_{p\in P}\frac{1}{1-1/p}=\prod_{p\in P}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right).$$

Všimněme si, že na pravé straně této rovnosti jsme tak dostali součet převrácených hodnot $1/n$ pro všechna přirozená čísla n. Každý takový zlomek totiž vznikne součinem převrácených hodnot k prvočíslům a jejich mocninám. Tak např. zlomek $1/1234$ vznikne součinem zlomků $1/2\cdot 1/617$ a zlomek $1/2100$ je součinem zlomků $1/2^2\cdot 1/3\cdot 1/5^2\cdot 1/7$. Platí tedy rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p\in P}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)$$

Protože harmonická řada (1) diverguje a její součet $s = \infty$, platí proto rovnost

$$\prod_{p \in P} \frac{1}{1 - 1/p} = \infty\,,$$

z níž plyne, že součin jmenovatelů

$$\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0\,.$$

Na závěr odvozování divergence řady (4) užijeme následující větu, jejíž důkaz lze nalézt např. v článku [1]:

Pro každou funkci $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < f(n) < 1$, platí rovnost $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} [1 - f(n)] = 0$ právě tehdy, když řada $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ diverguje.

Důsledkem této věty je skutečnost, že rovnost $\prod\limits_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 0$ nastane právě tehdy, když $\sum\limits_{p \in P} \frac{1}{p} = \infty$, což dokazuje divergenci číselné řady (4).

3 Speciální typy zobecněných harmonických řad

Nyní se zaměřme na některé jednoduché případy zobecněných harmonických řad. **Zobecněnou harmonickou řadu** přitom definujeme jako nekonečnou řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_1}(n+1)^{a_2} \cdots (n+k-1)^{a_k}}, \tag{5}$$

kterou označujeme $H(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ a kde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou nezáporná čísla se součtem alespoň 2. Tyto řady se také nazývají H-řady délky k s vahou $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Příkladem takové řady je řada $H(1, 1, 4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)^4}$. Podrobnější informace o H-řadách a jejich vlastnostech lze nalézt např. [7] a [8]. Poznamenejme, že H-řady délky 1 představují hodnoty **Riemannovy funkce zeta**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \zeta(s)\,.$$

Dále se zabývejme některými nejjednoduššími příklady zobecněné harmonické řady – řadami $H(1, 1)$ a $H(2)$. Na řadu $H(2)$, která představuje řadu tvořenou převrácenými hodnotami k tzv. čtvercovým číslům, navážeme řadou tvořenou převrácenými hodnotami k trojúhelníkovým číslům. Na závěr odstavce se budeme věnovat řadám převrácených hodnot ke kvadratickým polynomům tvaru $(n-a)(n-b)$, o kterých podrobněji pojednává článek [4].

3.1 Řada $\boldsymbol{H(1,1)}$

Uvažujme nejprve řadu

$$H(1,1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Rozkladem na součet parciálních zlomků obdržíme rovnosti

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},\ 1=A(n+1)+Bn,$$

z níž po dosazení kořenů jmenovatele $n=0$ a $n=-1$ získáme koeficienty $A=1$, $B=-1$, takže n-tý člen a_n řady $H(1,1)$ lze psát ve tvaru

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Pro určení součtu s řady $H(1,1)$ užijeme posloupnosti n-tých částečných součtů $\{s_n\}$, kde $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, a vztahu $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$. Protože řada $H(1,1)$ má teleskopickou vlastnost, je její n-tý částečný součet velmi jednoduchým výrazem

$$s_n=\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)+\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1-\dfrac{1}{n+1}\Big)=1$, je součtem konvergentní řady $H(1,1)$ číslo $s=1$.

3.2 Řada $\boldsymbol{H(2)}$

Určit součet řady

$$H(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

představuje již obtížnější úlohu. Výše bylo uvedeno, že součet s této řady představuje hodnotu Riemannovy funkce zeta v čísle 2, tj.

$s = \zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Konvergenci řady $H(2)$ lze však dokázat snadno užitím rozkladu na součet parciálních zlomků a následující nerovnosti, kde $N \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Big) =$$
$$= 1 + \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1}\Big) +$$
$$+ \Big(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\Big) = 1 + 1 - \frac{1}{N} \to 2\,.$$

Dostali jsme tak horní ohraničení součtu $s = \zeta(2) < 2$, takže řada $H(2)$ konverguje.

Problém určit součet převrácených hodnot k druhým mocninám přirozených čísel, tj. určit součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \Big)$$

je v teorii čísel znám jako **Basilejský problém**, který byl formulován *Pietrem Mengolim* (1626 – 1686) v roce 1644 a vyřešen *Leonhardem Eulerem* v roce 1735. Problém je nazván po Basileji – rodišti Leonharda Eulera, stejně jako rodiny Bernoulliovy, jejíž členové se rovněž pokoušeli o řešení tohoto problému. Součet řady, zaokrouhlený na 15 desetinných míst, má hodnotu

$$s = 1.644\ 934\ 066\ 848\ 226\,.$$

Basilejský problém vyžaduje určit přesný součet s v uzavřené formě. Euler určil přesný součet s jako podíl $\pi^2/6$ a svůj objev oznámil v roce 1735. Eulerovo odvození hodnoty $\pi^2/6$ je velmi důmyslné a originální. Nyní stručně připomeneme hlavní kroky a ideje jeho excelentního důkazu.

Vyjděme z Taylorova rozvoje funkce sinus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\ .$$

Vydělením proměnnou x obdržíme rovnost

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\ .$$

Kořeny rovnice $\sin x/x = 0$ jsou body $x = n\pi$, kde $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Za předpokladu, že nekonečnou řadu na pravé straně lze vyjádřit jako součin lineárních činitelů daných kořeny, obdobně jako u polynomů konečného stupně, dostáváme vyjádření

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots,$$

tj.

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Jestliže tento součin formálně roznásobíme a sloučíme všechny členy s x^2, zjistíme, že koeficient u mocniny x^2 rozvoje funkce $\sin x/x$ je

$$-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Avšak v původním rozvoji funkce $\sin x/x$ je u mocniny x^2 koeficient $-1/3! = -1/6$. Protože se tyto dva koeficienty musejí rovnat, dostáváme rovnost

$$-\frac{1}{6} = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Vynásobením obou stran výrazem $-\pi^2$ obdržíme hledaný součet řady $H(2)$ převrácených hodnot k druhým mocninám přirozených čísel:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3.3 Řada převrácených hodnot k trojúhelníkovým číslům

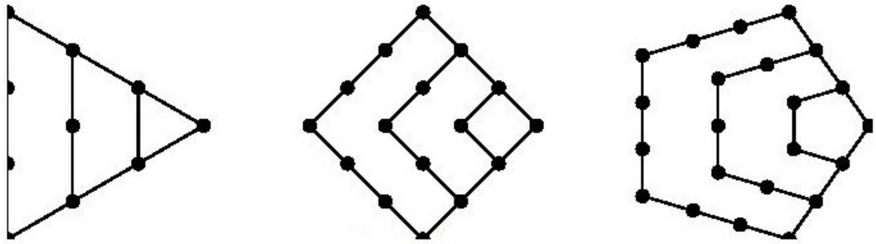
Trojúhelníkové číslo je jedním z **figurálních čísel**, tedy čísel, která mohou být reprezentována pravidelným geometrickým uspořádáním. Na obrázku 1 jsou ilustrována trojúhelníková, čtvercová a pětiúhelníková čísla, která po řadě tvoří posloupnosti

$$\{1,3,6,10,15,21,28,\ldots,\frac{n(n+1)}{2},\ldots\},$$

$$\{1,4,9,16,25,36,49,\ldots,n^2,\ldots\}$$

a

$$\{1,5,12,22,35,51,70,\ldots,\frac{n(3n-1)}{2},\ldots\}.$$



Obrázek 1

Odvoďme součet T řady převrácených hodnot k trojúhelníkovým číslům. Označme n-té trojúhelníkové číslo t_n, tedy $t_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, a převrácenou hodnotu k t_n označme T_n, tedy $T_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$. Rozkladem na součet parciálních zlomků obdržíme $T_n = 2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$. Užitím teleskopické vlastnosti dostáváme n-tý částečný součet

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n =$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right],$$

tj. $S_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$. Odtud součet

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{n+1}\right) = 2.$$

3.4 Řady převrácených hodnot k některým kvadratickým polynomům

Uvažujme řadu převrácených hodnot k normovaným kvadratickým polynomům tvaru $(n+a)(n+b)$, kde $a, b \in \mathbf{N_0}$, tedy řadu

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)},$$

a určeme součet této řady $s = s(a,b)$. Vyjádřeme n-tý člen a_n této řady jako součet parciálních zlomků

$$a_n = \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+b}.$$

Z rovnosti dvou lineárních polynomů $1 = A(n+b) + B(n+a)$ dostaneme po dosazení $n = -a$ koeficient $A = \dfrac{1}{b-a}$ a po dosazení $n = -b$ koeficient $B = \dfrac{-1}{b-a}$, takže

$$a_n = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right).$$

Pro n-tý částečný součet s_n tak máme

$$s_n = \frac{1}{b-a}\left[\left(\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b}\right) + \left(\frac{1}{2+a} - \frac{1}{2+b}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{n-1+a} - \frac{1}{n-1+b}\right) + \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right)\right].$$

Prvními sčítanci, kteří se v tomto součtu navzájem zruší, budou sčítanci, pro které pro vhodné k platí $\dfrac{1}{1+b} = \dfrac{1}{k+a}$. Proto poslední sčítanec od začátku v součtu s_n, který se nezruší, bude sčítanec $\dfrac{1}{b}$, takže první sčítanci, kteří se nezruší, vytvoří součet

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \cdots + \frac{1}{b}\,.$$

Analogicky posledními sčítanci, kteří se v součtu s_n navzájem zruší, budou sčítanci, pro které pro vhodné ℓ platí $\dfrac{1}{n+a} = \dfrac{1}{\ell+b}$. Proto první sčítanec od konce v součtu s_n, který se nezruší, bude sčítanec $\dfrac{1}{n+a+1}$, takže poslední sčítanci, kteří se nezruší, vytvoří součet

$$-\left(\frac{1}{n+a+1} + \frac{1}{n+a+2} + \cdots + \frac{1}{n+b}\right).$$

Po zrušení vnitřních sčítanců s opačnými znaménky dostaneme n-tý částečný součet ve tvaru

$$s_n = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \cdots + \frac{1}{b} - \frac{1}{n+a+1} - \frac{1}{n+a+2} - \ldots - \frac{1}{n+b}\right).$$

Proto hledaný součet

$$s = s(a,b) = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \cdots + \frac{1}{b}\right).$$

Např. pro $a = 2$, $b = 5$ máme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)}\,,$$

která má n-tý částečný součet

$$s_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right),$$

takže součtem $s = s(2,5)$ této řady je

$$s = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20 + 15 + 12}{60} = \frac{47}{180} = 0.26\overline{1}\,.$$

4 Kempnerovy řady

Kempnerova řada K_c je zajímavým případem redukované harmonické řady, z níž vznikne vynecháním všech členů $1/n$, jejichž jmenovatel n obsahuje při zápisu v desítkové soustavě číslici c. Tato řada, přesněji řada

$$K_9 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \ldots,$$

byla poprvé studována v roce 1914 v článku [9] britským matematikem *Aubreym Johnem Kempnerem* (1880 – 1972), v němž Kempner dokázal, že řada K_9 překvapivě konverguje, třebaže harmonická řada diverguje. Analogicky lze dokázat, že všech dalších devět Kempnerových řad $K_0, K_1, \ldots, K_8$ konverguje. Stránky věnované Kempnerovým řadám lze nalézt např. v knize [10]. Následující tabulka udává přibližné hodnoty součtů $S_0, S_1, \ldots, S_9$ těchto řad zaokrouhlené na tři desetinná místa, které přesněji (na 20 desetinných míst) vyčíslil v roce 1979 americký matematik a softwarový expert *Robert Baillie* v článku [11]:

c	0	1	2	3	4
S_c	23.103	16.177	19.257	20.570	21.327

c	5	6	7	8	9
S_c	21.835	22.206	22.493	22.726	22.921

Kempnerův důkaz konvergence řady K_9, jež nyní uvedeme, je relativně jednoduchý. Členy řady K_9 nejprve seskupíme do závorek podle počtu číslic ve jmenovateli. Dostaneme tak řadu ve tvaru:

$$\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{88}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{88\ldots8}_{n-\text{krát}}}+\right)\ldots \quad (6)$$

Nyní vytvoříme pomocnou řadu

$$\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)+\dots\,, \tag{7}$$

jejíž členy jsou větší nebo rovny odpovídajícím členům řady (6), a to tak, že každý člen s k číslicemi ve jmenovateli je roven zlomku $1/10^{k-1}$.

Poznamenejme, že počet zlomků s k číslicemi ve jmenovateli řady (6) neobsahujícími číslici 9 je $8\cdot 9^{k-1}$, neboť číslici z množiny $\{1,2,\dots,8\}$ na prvním místě lze vybrat 8 způsoby a číslice z množiny $\{0,1,\dots,8\}$ na dalších místech 9 způsoby. Řadu (7) lze tedy zapsat ve tvaru

$$8\cdot 1+\frac{8\cdot 9}{10}+\frac{8\cdot 9^2}{10^2}+\cdots+\frac{8\cdot 9^{n-1}}{10^{n-1}}+\dots\,.$$

Protože se však jedná o geometrickou řadu s prvním členem $a=8$ a kvocientem $q=9/10$, je součet S této konvergentní řady, tedy pomocné řady (7),

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{8}{1-9/10}=\frac{8}{1/10}=80\,.$$

Užitím srovnávacího kritéria pro nekonečné číselné řady s nezápornými členy tak dostáváme, že pro součet S_9 řady (6), tj. Kempnerovy řady K_9, platí nerovnost $S_9<S=80$. Analogicky lze dokázat, že platí nerovnost $8<S_9$, takže celkem platí

$$8<S_9<80\,.$$

Poznamenejme, že v článku [13] je uveden algoritmus zobecňující problém chybějících číslic na chybějící řetězec číslic. Tak např. součet redukované harmonické řady s vynechaným řetězcem „42“ ve jmenovatelích je přibližně 228.446 a při vynechaném řetězci „314159“ je součet takto redukované harmonické řady přibližně 2 302 582.334.

Co se týče vynechaných členů Kempnerovy řady K_9, dokázal v roce 1916 americký matematik *Frank Irwin* (1868 – 1948), že jednotlivé redukované harmonické řady obsahující ve jmenovatelích nejvýše konečný počet číslic 9, představují rovněž konvergentní řady. Tak např. řada $1/9+1/19+1/29+1/39+\cdots$, kde jmenovatelé obsahují právě jednu číslici 9, má součet přibližně 23.044.

Reference

[1] Potůček, R.: Některé zajímavé redukované harmonické řady. In: *Sborník abstraktů a elektronických verzí příspěvků XXVII. mezinárodního vědeckého kolokvia o řízení osvojovacího procesu.* Fakulta ekonomiky a managementu, Univerzita obrany, Brno, 2009.

[2] Potůček, R.: *Zborník príspevkov 7. žilinskej didaktickej konferencie DIDZA.* Fakulta prírodných vied, Žilinská univerzita v Žilině, Slovensko, 2010, s. 112–119.

[3] Potůček, R.: *Zborník vedeckých prác „Nové trendy v matematickom vzdelávaní 2010".* Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, Slovensko, 2010, s. 105–110.

[4] Potůček, R.: The sums of the series of reciprocals of some quadratic polynomials In: *Proceedings of AFASES 2010, 12th International Conference "Scientific Research and Education in the Air Force"* (CD-ROM). Brasov, Romania, 2010, s. 1206–1209.

[5] Boas, R. P., Wrench, J. W.: Partial Sums of the Harmonic Series. *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), s. 864.

[6] Hardy, G. H., Wright, E. M: *An Introduction to the Theory of Numbers.* 4th Edition. Oxford University Press, London, 1975.

[7] Hoffmann, M.: *Sums of Generalized Harmonic Series (NOT Multiple Zeta Values).* http://www.usna.edu/Users/math/meh/usna14a.pdf.

[8] Hoffmann, M., Moen, C.: Sums of Generalized Harmonic Series. *Integers* 14 (2014), A46, http://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/o46/o46.pdf.

[9] Kempner, A. J.: A Curious Convergent Series. *Amer. Math. Monthly*, 21(1) (1914), s. 48–50.

[10] Havil, J.: *Gamma : Exploring Euler's Constant.* Princeton University Press, New Jersey, 2003.

[11] Baillie, R.: Sums of Reciprocals of Integers Missing a Given Digit. *Amer. Math. Monthly*, 86 (1979), s. 372–374.

[12] Baillie, R.: *Summing the curious series of Kempner and Irwin 2013,* http://arxiv.org/pdf/0806.4410.pdf.

[13] Schmelzer, T., Baillie, R.: Summing a Curious, Slowly Convergent Series. *Amer. Math. Monthly*, 115(6) (1979), s. 525–540.

Soutěže a olympiády zajišťované NIDV

Jana Ševcová, NIDV, Praha [1]

Abstrakt. *V příspěvku je uveden výčet soutěží a nesoutěžních aktivit, které zajišťuje na národní úrovni Národní institut pro další vzdělávání. Jde o výčet veškerých takových aktivit, nejen z matematiky, fyziky či jiných přírodovědných oborů.*

1 Úvod

Národní institut pro další vzdělávání (NIDV) vznikl před deseti lety spojením čtrnácti krajských pedagogických center. Oproti jiným organizacím s obdobným zaměřením má výhodu celostátní působnosti a širokou

[1] e-mail: sevcova@nidv.cz

lektorskou základnu. Připravuje a realizuje vzdělávací programy, kurzy a semináře pro pedagogické pracovníky v rámci dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků. Zabývá se rovněž zájmovým a neformálním vzděláváním a oblastí podpory rozvoje nadání, v rámci které realizuje mimo jiné předmětové soutěže a olympiády vyhlašované MŠMT.

2 Přehled soutěží a olympiád garantovaných Talentcentrem NIDV

Středoškolská odborná činnost – je určena pro studenty středních škol v 18 soutěžních oborech. Probíhá ve školním, okresním, krajském a celostátním kole. Studenti zpracovávají samostatnou práci na téma, které si sami vyberou a které následně obhajují před odbornou porotou v jednotlivých postupových kolech. Nejlepší práce postupují do celostátní přehlídky, která se pro 38. ročník soutěže koná od 17. do 19. června 2016 v Hradci Králové, v SPŠ, SOŠ a SOU v Hradební ul.

Jazykové soutěže – jsou realizovány v následujících jazycích: anglický, německý, španělský, francouzský, ruský a latinský. Jsou určené pro žáky základních a středních škol. Probíhají v několika kategoriích, které respektují věk žáků a jejich jazykovou úroveň, mají několik postupových kol. Nejlepší student z kraje postupuje do ústředního kola.

Dějepisná olympiáda – je určena pro žáky základních škol. Probíhá v několika soutěžních kategoriích a kolech. Tematické zaměření 45. ročníku soutěže je „Po stopách Lucemburků aneb Za císařskou korunou“.

Olympiáda v českém jazyce – je určena pro žáky základních a středních škol. Probíhá v několika soutěžních kategoriích a kolech. Ústřední kolo se koná v červnu formou týdenního táborového pobytu.

Soutěž v programování – je určena pro žáky základních a středních škol, probíhá v následujících kategoriích: programování žáci, programování mládež a nově je zařazena subkategorie programování mikrořadičů; kategorie aplikační software se dělí na tvorbu webu a kancelářské aplikace. Probíhá v krajském a ústředním kole, okresní kola jsou realizována fakultativně.

Pythagoriáda – je určena pro žáky 5.–8. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Koná se ve školním a okresním kole. V každém kole řeší žáci 15 úloh, za každou správně vyřešenou úlohu získají jeden bod, úspěšným řešitelem je žák, který získá 9 a více bodů.

NIDV zodpovídá za zpracování a distribuci úloh.

Evropa ve škole – je literární a výtvarná soutěž určená pro děti a mládež ve 4 věkových kategoriích, které jsou odstupňované odlišně pro výtvarné a pro literární aktivity.

Daniel – má náplň Holocaust a jeho reflexi, současnou rasovou problematiku a problematiku soužití různých etnik v ČR. Soutěž Daniel je jednokolová. Je organizována ve dvou kategoriích pro žáky základních a žáky všech typů středních škol v oboru literárním, historickém a v oboru fotografie. Více informací o uvedených soutěžích naleznete na [1, 2].

Úspěšní studenti vybraných soutěží mají možnost účastnit se následujících mezinárodních soutěžních a nesoutěžních aktivit.

3 Mezinárodní soutěže

Being Youth Science Creation Competition – laureáti SOČ se díky spolupráci s ČSVTS účastní od r. 2014 mezinárodní soutěže odborných prací v Pekingu v Číně. V roce 2016 se bude konat již 36. ročník soutěže, kterou organizuje pekingská asociace pro vědu a techniku – Beijing Association of Science and Technology (BAST).

INTEL International Science and Engineering Fair (Intel ISEF) – je soutěž organizovaná v 15 oborech, od přírodovědných přes technické až po humanitní. Každý rok ji na začátku května pořádá jedno z měst v USA. Účastní se jí cca 1 700 studentů z více než 70 států světa. V květnu 2016 se ve Phoenixu, stát Arizona, USA, uskuteční 67. ročník soutěže ISEF, kterého se zúčastní i vybraní vítězové 37. ročníku SOČ, který se konal v červnu 2015 v Praze. Více na [3].

European Union Contest for Young Scientists (EUCYS) – Evropská soutěž pro mladé vědce navazující na soutěž Philips Contest, která probíhala v letech 1968–88. Soutěže se účastní mladí zájemci o vědu, kteří byli vybráni svou národní porotou a umístili se na 1. místě národní přehlídky. Každá země může přihlásit 3 projekty a maximálně 6 soutěžících ve věku 14–21 let s podmínkou, že soutěžící není absolventem 1. ročníku VŠ. Česká republika na této soutěži participuje od roku 2000. Vysílá nejlepší studenty z Celostátní přehlídky Středoškolské odborné činnosti (SOČ). Více na [4].

European Union Science Olympiad (EUSO) – Přírodovědná olympiáda zemí Evropské unie (EUSO) založená v roce 2002 Dr. Michaelem A. Cotterem z Dublin City University, který přišel s myšlenkou týmové přírodovědné soutěže pro studenty ze zemí Evropské unie. Olympiáda je koncipována jako multidisciplinární týmová soutěž určená pro 17leté a mladší žáky ze zemí EU. Každá země EU může vyslat maximálně dva týmy ve složení biolog, fyzik, chemik a tři mentory. Úkolem hostující země je kromě logistického zajištění soutěže i příprava úloh pro jednotlivé soutěžní oblasti, které bývají rovnoměrně zastoupeny. ČR se účastní na této soutěži od roku 2007. Více na [5].

4 Nesoutěžní přehlídky a odborná soustředění

International Wild Research Week (IWRW) – je týdenní soustředění mladých biologů organizované švýcarskou organizací Schweizer Jugend forscht ve švýcarských Alpách v oblasti Valchavy. Soustředění se účastní mladí biologové do 21 let, ČR se účastní od roku 2008. Každý stát má možnost vyslat 2 studenty. Studenti, kteří prošli národním kolem soutěže (u nás Celostátní přehlídkou odborných prací SOČ), jsou nominováni odbornou porotou. Studenti řeší ve skupinách různé úkoly týkající se pozorování přírody. Ze svých pozorování vypracuje každá skupina projekt, který na závěrečném setkání představí ostatním účastníkům. Příští ročník se bude konat v červnu 2016. Více na [6].

European Sciences Expo (ESE) – je nesoutěžní přehlídka projektů, kterou organizuje Milset for Europe. The International Movement for Leisure Activities in Science and Technology (MILSET) – je nestátní, nezisková a politicky nezávislá mládežnická organizace, která pomocí přírodovědných projektů a technologických programů (přírodovědných veletrhů, kempů, kongresů a dalších aktivit) pomáhá rozvíjet přírodovědné, technické a kulturní vzdělání mezi mladými lidmi.

Milset Expo – Sciences International (ESI) – je organizováno jednou za dva roky. Letošní 15. ročník se konal v červenci v belgickém Bruselu za účasti 60 zemí světa, vystaveno bylo 400 projektů od 1 000 studentů. Více na [7, 8].

Swiss Talent Forum – je organizované švýcarskou organizací Schweizer Jugend forscht. Koná se na přelomu ledna a února ve švýcarském Thunu, účastní se ho studenti do 21 let. Jedná se o mezinárodní studentskou konferenci pro studenty různých oborů (jak přírodovědných, tak humanitních). Studenti diskutují o aktuálních celosvětových problémech s předními představiteli vědy, výzkumu a praxe. Více na [9].

Reference

[1] www.talentovani.cz/souteze
[2] www.soc.cz
[3] www.societyforscience.org
[4] www.eucys2015.eu
[5] www.sjf.ch
[6] www.esi2015.be
[7] www.milset.org
[8] www.euso.ie

Den Pí (nejen) na FIM

Iva Vojkůvková, UHK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Příspěvek informuje o tradici, kterou založil tým z Katedry informatiky a kvantitativních metod Fakulty informatiky a managementu (FIM) Univerzity Hradec Králové. Cílem každoroční akce nazvané Den Pí na FIM je ukázat studentům univerzity a středních škol, že matematika není jen suchá věda, ale má velmi poutavou historii i přitažlivou moderní podobu. Tato forma předávání poznatků může talentované studenty nasměrovat k vlastnímu bádání.*

1 Co je to Den Pí?

Ludolfovo číslo neboli číslo π vzbuzuje zájem matematiků i laiků od dávnověku. Pohled do historie tohoto „magického" (iracionálního a transcendentního) čísla je v podstatě pohled do historie matematiky jako takové, jak dokládá [1]. Je to historie plná velkých objevů i slepých uliček. Objevíme tu nečekané souvislosti mezi jednotlivými oblastmi matematiky. Můžeme opakovat úmorné výpočty, obdivovat elegantní aproximace nebo trénovat vlastní paměť. Na cestě po stopách je možno studovat egyptské papyry i babylonské hliněné destičky, zalistovat Biblí nebo dokonce sbírkou zákonů. Lze se tu setkat s velkými postavami, jakými

[1] e-mail: iva.vojkuvkova@uhk.cz

byli Archimédes, Francois Viète, John Wallis, Gottfried Wilhelm Leibniz, Isaac Newton, Leonhard Euler a další. Někteří z poutníků po této cestě byli vybaveni jen pravítkem a kružítkem, jiní hráli hazardní hry, další spolupracovali se zázračnými počtáři a v nedávné minulosti se ke slovu dostala moderní technika – výkonné počítače a nové algoritmy (více např. v [3]).

Snad právě podobné úvahy o významu vedly v roce 1988 fyzika Larryho Shawa ze sanfranciského muzea Exploratorium k uspořádání oslavy, nazvané jednoduše Den Pí [4]. Ta se konala 14. března (v anglosaském zápisu 3/14) a mimo jiné se na ní konzumovaly kulaté ovocné koláče (pie). V dalších letech se postupně začalo slavit i jinde, především na univerzitách. Například v Princetonu se oslavy spojují s výročím narození Alberta Einsteina, které připadá na stejný den. Někde se slaví „den přibližného Pí“ (22/7), tedy 22. července. Na MIT se navíc v rámci oslav připomíná Čas Tau (6.28), neboť zde existuje hnutí „lobbující“ za používání $\tau = 2\pi$. V roce 2009 byl Den Pí dokonce uznán Sněmovnou reprezentantů USA. Oslavy probíhají různým způsobem. Samozřejmostí je výroba a konzumace tradičních koláčů, ale i pizzy nebo dortů se zápisem čísla Pí. Soutěží se v zapamatování, resp. vyjmenování co nejvíce cifer, hledají se vtipné slogany na plakáty a trička, povídá se o historii i žhavé počítačové současnosti…

2 Den Pí na FIM

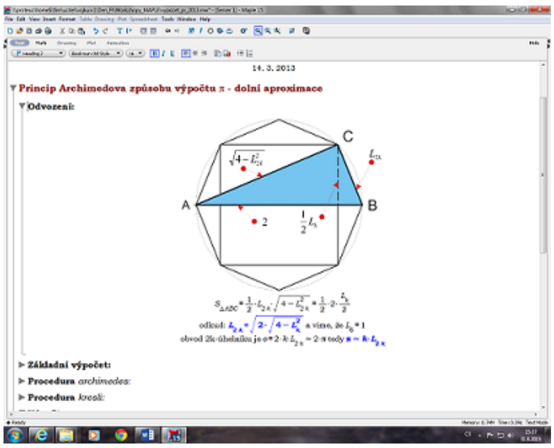
Zřejmě každá vysoká škola má zájem o dobré studenty a chce se dostat do povědomí středoškoláků. Při hledání nových možností zviditelnění fakulty se nad článkem z populárního časopisu na naší katedře zrodil nápad uspořádat Den Pí. Vzniklo logo, které reflektuje jednotný vizuální styl univerzity a je přitom zároveň matematickou hříčkou (obrázek 1), zprovoznili jsme webové stránky `http://fim.uhk.cz/pi`. Po zhodnocení svých možností jsme se shodli na podobě, kterou jsme v dosavadních ročnících zachovali a zřejmě zachováme i do budoucna. Základ bude vždy tvořit skutečná matematika, avšak provedení by mělo být odlehčené. Chceme využít i počítačové zázemí fakulty, zejména software MAPLE.

První částí akce je volně přístupná přednáška. Ve druhé části se konají počítačové workshopy pro studenty, na které je třeba se z kapacitních důvodů hlásit předem. Workshopy buď rozvíjejí téma z přednášky, nebo nabízejí další netradiční pohledy na problematiku.

Obrázek 1

2.1 První ročník

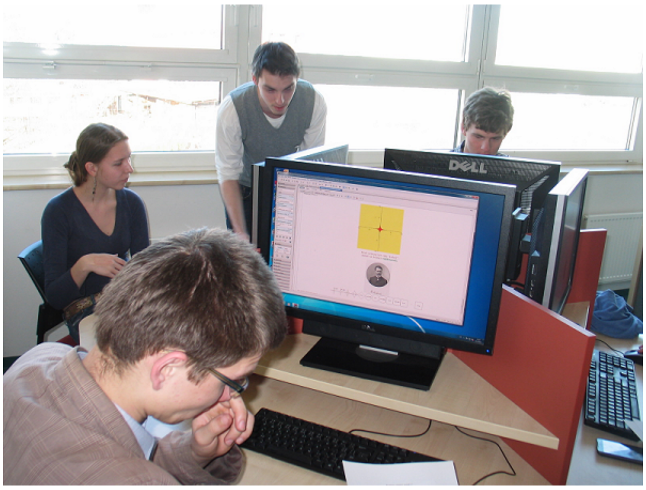
V roce 2013 jsme dne 14. března uspořádali 1. ročník akce, kterého se zúčastnilo zhruba dvacet studentů univerzity a padesát středoškoláků. Přednáška *Historie čísla π vážně i nevážně* provedla posluchače od starověku do současnosti. Během přednášky byla možnost zapojit se do několika tipovacích soutěží o tričko FIM. Na workshopu *Algoritmy pro výpočet π* se po základním seznámení s MAPLE počítalo v první části Archimédovou (obrázek 2) a obdélníkovou metodou (ty byly zmíněny i v přednášce) a v druhé části metodou Monte Carlo.



Obrázek 2

2.2 Druhý ročník

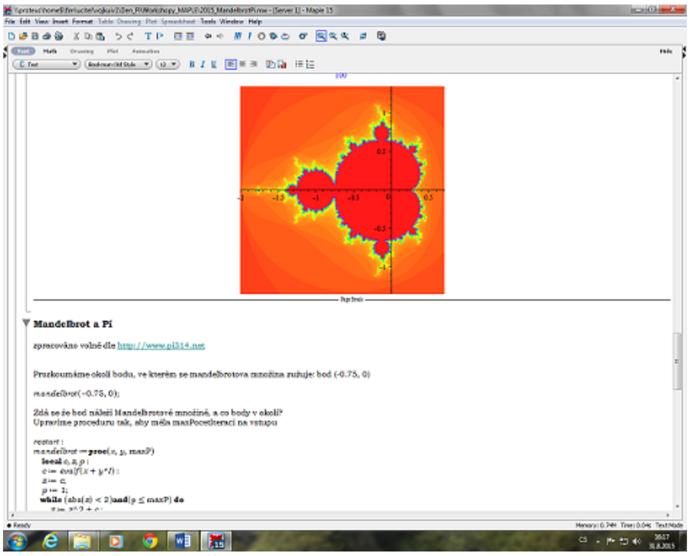
V roce 2014 se konal 2. ročník, z organizačních důvodů již 13. března. Nad pořádáním akce přijala patronát královéhradecká pobočka JČMF. Mezi studenty univerzity byl sice zájem menší než v prvním ročníku, ale cenná byla jejich asistence při workshopu pro středoškoláky, kterých dorazilo opět kolem padesáti. V přednášce nazvané *Dohoní Achilles poslední cifru π?* bylo pojednáno o výpočtu pomocí nekonečných řad a tzv. vzorců Machinova typu. Workshop *Co s π v řadě?* na přednášku navázal, zkoumala se na něm známá Gregory-Leibnizova řada, zatímco workshop *Kružnice známé a neznámé* nabídl pohled statistický (obrázek 3).



Obrázek 3

2.3 Třetí ročník

V roce 2015 se vzhledem k termínu jarních prázdnin v okrese konal 3. ročník 19. března, opět pod záštitou královéhradecké pobočky JČMF. Počet posluchačů se v podstatě shodoval s předchozím ročníkem. Přednáška s názvem *Kruh – matematika nebo mystika?* provedla posluchače napříč časem i místem. Ukázala, jak se kruh, jeden ze základních symbolů lidstva, vyvíjel v různých kulturách a nabídla přesah do psychologie, umění, architektury, náboženství, marketingu apod. Na prvním workshopu byla naznačena odpověď na otázku *Kde ukrývá Mandelbrot Ludolfa?* (obrázek 4); jedná se o zajímavou souvislost mezi známou fraktální množinou a číslem π. Ve druhém workshopu bylo ukázáno s využitím Gaussovy myšlenky a Pickovy věty, jak souvisí π a čtverce. Vzhledem k tomu, že postupy popsané v teoretické části workshopů nebyly dosud potvrzeny důkazem, otevírá se zde studentům cesta k samostatnému bádání.



Obrázek 4

3 Závěr

Pořádání podobné akce je samozřejmě práce nad rámec běžných povinností, navíc s neměřitelným výsledkem. Ukázalo se, že patrně nebudeme schopni uspořádat velkou akci „amerického“ typu. Problémem je kapacita počítačových učeben a počet licencí MAPLE. Také částky na propagaci nejsou neomezené, takže středoškoláci přicházejí zejména ze škol, kde máme osobní kontakty. Přesto se domníváme, že podobná aktivita je smysluplná a přispívá nejen k šíření dobrého jména fakulty, ale zejména matematiky jako takové. Může být inspirativní pro nadané studenty, kteří se na základě podnětů z přednášek a workshopů mohou vydat vlastní cestou objevů.

4 Poděkování

Autorka článku děkuje svým kolegům z katedry za poskytnutí materiálů pro přípravu článku.

Reference

[1] Beckman, P.: *Historie čísla π.* 1. vydání. Academia, Praha, 1998.

[2] Netuka, I., Veselý, J.: Nedávné poznatky o čísle π. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* 1998, roč. 43, č. 3, s. 217–236.

[3] Veselý, J.: π aneb 3,141 59… *Učitel matematiky.* 1995, roč. 3, č. 3 (15), s. 1–10 a č. 4 (16), s. 1–13.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Pi_Day`

Jsou testy IQ skutečnými testy IQ?

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha [1]

Abstrakt. *Článek se zabývá jedním typem matematických úloh, které jsou často součástí testů IQ a jiných školních testů a na mnohých školách se žáci s těmito úlohami setkávají ve výuce. Jde o úlohu typu „Doplň číselnou řadu o následující člen.“ či „Doplň správné číslo na místo otazníku v uvedené číselné řadě.“ Tyto úlohy nemají jednoznačné řešení, a zkreslují tak školní výsledky žáků a IQ testovaných jedinců.*

1 Úvod

V různých kvízech v časopisech, ale i v seriózních publikacích (např. v [2], s. 84, [3], s. 12) a na webu (z mnoha např. [4] – [6]), hlavně však v testech, které zkoumají IQ člověka, se objevují úlohy, kde je uvedeno několik čísel za sebou a má se doplnit další, které má logicky následovat. Příkladem takové úlohy je tato: „Doplňte další číslo, které následuje v řadě čísel 1, 4, 9, 16, … .“ V takovéto úloze jsou hned dva problémy. Jednak se používá nesprávně slovo „řada“, správně se má používat slovo „posloupnost“, jednak pokud není známo pravidlo, jak doplnit další číslo, může každého z nás napadnout jiné pravidlo, takže úloha může mít více řešení, dokonce nekonečně mnoho řešení. Např. k uvedené úloze může někdo říci, že použije pravidlo, v něž se uvedená čtveřice čísel neustále opakuje, takže čísla budou tvořit posloupnost: 1, 4, 9, 16, 1, 4, 9, 16, 1, … . Někdo jiný uvede pravidlo, že od pátého členu posloupnosti bude vždy číslo nula, takže dostaneme posloupnost: 1, 4, 9, 16, 0, 0, 0, … . A takovýchto pravidel si můžeme vymyslet nekonečně mnoho. Někdo řekne, že jednotlivé členy posloupnosti dostane, když bude dosazovat do nějakého matematického výrazu. V našem příkladu by šlo o výraz n^2, do něhož když dosadíme za proměnnou n postupně čísla 1, 2, 3, 4, …, dostaneme posloupnost 1, 4, 9, 16, … . Co když ale někoho jiného napadne jiný výraz? Dále

[1] e-mail: zhouf@seznam.cz

uvedeme ukázku toho, že můžeme k daným několika členům posloupnosti vytvořit nekonečně mnoho výrazů, do nichž když dosazujeme za proměnnou čísla 1, 2, 3, 4, …, dostaneme začátek posloupnosti stejný, ale v dalších členech se bude posloupnost měnit podle použitého výrazu.

2 Úloha

Jako ukázku použijeme ještě jednodušší úlohu, než je uvedena v úvodu, aby získané výsledky byly lehce kontrolovatelné. Takže úloha zní:

Určete další člen posloupnosti 1, 2, 3, 4, … .

3 První metoda – Polynom vyššího stupně

Zadané členy si můžeme představit jako polynomickou funkci, v níž je číslu 1 přiřazeno číslo 1, číslu 2 je přiřazeno číslo 2, číslu 3 je přiřazeno číslo 3 a číslu 4 je přiřazeno číslo 4.

Takovou představu splňuje polynomická funkce $y = x$. Podle tohoto předpisu by bylo číslu 5 přiřazeno číslo 5 atd. To většinou předpokládají autoři testových úloh.

Na tuto polynomickou funkci můžeme přijít, když si řekneme, že použijeme polynom třetího stupně $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, neboť v něm jsou jako neznámé parametry čtyři koeficienty a zadaná úloha má zadané také čtyři údaje, takže se ony koeficienty dají jednoznačně najít. V tomto případě jde o vyřešení této soustavy:

$$
\begin{aligned}
x = 1 &: a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\
x = 2 &: a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 2 \\
x = 3 &: a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3 \\
x = 4 &: a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 4
\end{aligned}
$$

Ta má řešení $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, což představuje polynomickou funkci $y = x$. V uvedeném výpočtu vyšla polynomická funkce jednoznačně, a to může být pro tvůrce testů důvodem, proč požadují jediné pokračování dané posloupnosti.

Problematika ale není tak jednoznačná, jak nyní ukážeme. Proč bychom nemohli požadovat vyjádřit danou posloupnost polynomickou funkcí vyššího stupně než třetího? Ukažme si tuto metodu pro polynomickou funkci čtvrtého stupně $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. V tomto případě jde o řešení této soustavy:

$$\begin{aligned}
x = 1 &: a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1\\
x = 2 &: a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 2\\
x = 3 &: a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 = 3\\
x = 4 &: a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 = 4
\end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení. Volíme-li např. $a_4 = 1$, je pak $a_3 = -10$, $a_2 = 35$, $a_1 = -49$, $a_0 = 24$, takže jsme dostali polynomickou funkci $y = 24 - 49x + 35x^2 - 10x^3 + x^4$. Po dosazení $x = 5$ do této funkce, dostaneme hodnotu 29; tedy naše posloupnost má podobu 1, 2, 3, 4, 29, ... Pokud volíme $a_4 = -1$, je pak $a_3 = 10$, $a_2 = -35$, $a_1 = 51$, $a_0 = -24$, dostaneme polynomickou funkci $y = -24 + 51x - 35x^2 + 10x^3 - x^4$. Po dosazení $x = 5$ do této funkce, dostaneme hodnotu -19; tedy naše posloupnost má podobu 1, 2, 3, 4, -19, ... A takto můžeme pokračovat do nekonečna, což znamená, že požadovaný pátý člen dané posloupnosti může být v podstatě jakýkoli.

Analogicky můžeme volit polynomickou funkci pátého, šestého atd. stupně. Tím dostáváme další a další možnosti, jakých hodnot může nabývat pátý člen dané posloupnosti.

4 Druhá metoda – Rychlý „univerzál“

Jiná metoda je velice rychlá na tvorbu polynomické funkce. V našem případě posloupnosti 1, 2, 3, 4, ... můžeme využít autorem očekávaného pokračování posloupnosti, tj. funkce $y = x$ a přičíst k ní nějakou jinou polynomickou funkci. Těch přičtených funkcí může být nekonečně mnoho závislých na počtu daných prvních členů posloupnosti. Jako ukázku si uveďme dva takové příklady. První z nich má podobu

$$y = x + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Tato funkce má po úpravě podobu

$$y = 24 - 49x + 35x^2 - 10x^3 + x^4,$$

se kterou jsme se již setkali výše. Druhá z nich má podobu

$$y = x + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6).$$

Tato funkce má po úpravě podobu

$$y = 144 - 145x - 44x^2 + 71x^3 - 16x^2 + x^5.$$

Tato polynomická funkce generuje posloupnost 1, 2, 3, 4, -19, 6, … .

5 Třetí metoda – Jednotlivý nápad

Zde si uveďme jednotlivé funkce, které nás napadnou náhodou nebo jejich tvorba je inspirována již jistou zkušeností např. z předchozích metod. Ukažme si čtyři takové příklady.

První příklad je

$$y = \log_5[(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1] + x,$$

druhý příklad je

$$y = \sin{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\frac{\pi}{48}} + x,$$

třetí příklad je

$$y = -\left|x-4\right| + 4$$

a čtvrtý příklad využívající dolní celou část reálného čísla je

$$y = \lfloor \tfrac{x}{5} \rfloor + x.$$

6 Čtvrtá metoda – Lagrangeův vzorec

Lagrangeův vzorec [1, s. 250] je vlastně předpis pro polynomickou funkci, která má takový počet koeficientů, kolik je zadáno funkčních hodnot. Ukažme si tuto metodu pro naši danou posloupnost 1, 2, 3, 4, … .

Zde musíme zadat, jakou hodnotu si přejeme, aby měl pátý člen posloupnosti. Řekněme, že chceme, aby měl hodnotu 1. Pro přehlednost si sestavme tabulku, v níž jsou uvedeny hodnoty nezávisle proměnné a k ní hodnoty závisle proměnné:

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	1

Vznikne polynomická funkce čtvrtého stupně, která má v obecném případě tvar:

$$y = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)}+$$
$$+y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}+$$
$$+y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)}+$$
$$+y_4 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)}+$$
$$+y_5 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}$$

V konkrétním případě pro naši tabulku má polynomická funkce tvar:

$$y = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(-1)(-2)(-3)(-4)} + 2 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)}+$$
$$+3 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{2 \cdot 1 \cdot (-1)(-2)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)}+$$
$$+1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$y = \frac{-24 + 56x - 35x^2 + 10x^3 - x^4}{6}$$

7 Pátá metoda – Newtonův vzorec

Newtonův vzorec [1, s. 251] je také předpis pro polynomickou funkci, která má takový počet koeficientů, kolik je zadáno funkčních hodnot. Ukažme si tuto metodu opět pro naši posloupnost 1, 2, 3, 4, … . Zde také musíme zadat, jakou hodnotu si přejeme, aby měl pátý člen posloupnosti. Řekněme, že chceme, aby měl hodnotu 1. Pro přehlednost si sestavme analogickou tabulku, v níž jsou uvedeny hodnoty nezávisle proměnné a k ní hodnoty závisle proměnné:

x	1	2	3	4	5
y	1	2	3	4	1

Nejprve si vypočteme tzv. diference:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_2,\ \Delta y_3 = y_4 - y_3,\ \Delta y_4 = y_5 - y_4,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,\ \Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3,$$

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1,\ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2,$$

$$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$$

Navíc od Lagrangeova vzorce vyžaduje Newtonův vzorec volbu tzv. kroku h, což je hodnota, se kterou se zvětšuje nezávisle proměnná. Vznikne polynomická funkce čtvrtého stupně, která má v obecném případě následující tvar:

$$\begin{aligned} y = y_1 + &\frac{\Delta y_1 (x - x_1)}{1!h} + \frac{\Delta^2 y_1 (x - x_1)(x - x_2)}{2!h^2} + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!h^3} + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_1 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{4!h^4} \end{aligned}$$

V našem případě zvolíme krok $h = 1$ vzhledem k tomu, že posloupnost je definována na přirozených číslech. Vznikne polynomická funkce čtvrtého stupně, která má pro naši tabulku tvar:

$$\begin{aligned} y = 1 + \frac{1(x-1)}{1} + \frac{0(x-1)(x-2)}{2} + \frac{0(x-1)(x-2)(x-3)}{6} + \\ + \frac{-4(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24} \end{aligned}$$

$$y = \frac{-24 + 56x - 35x^2 + 10x^3 - x^4}{6}$$

Zde náhodou Newtonův vzorec a Lagrangeův vzorec dávají stejný tvar, to je ale způsobeno volbou kroku $h = 1$, jinak bývají oba tvary různé.

8 Závěr

Doufejme, že tento malý příspěvek aspoň trochu vyvrátil většinový názor společnosti, jak má jednoznačně pokračovat načatá posloupnost. Hezké by bylo, kdyby si to uvědomili hlavně psychologové, kteří podle takových testů hodnotí osobnost člověka, či jeho IQ. Podle mého názoru by člověk, který doplní většinově očekávanou hodnotu, měl dostat jen malý počet plusových bodů, kdežto člověk, který vyplní jinou hodnotu, by měl dostat více plusových bodů. To je samozřejmě přehnané, ale určitě by člověku, který vyplní jinou hodnotu než tu většinově očekávanou, neměla být počítána tato položka jako chybná. Znamená to tedy, že by se takto nejednoznačné úlohy měly ze všech testů a všech učebnic vymýtit.

Reference

[1] Bartsch, H. J.: *Matematické vzorce.* Mladá fronta, Praha, 2002.

[2] Fořtík, V., Fořtíková, J.: *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností.* Portál, Praha, 2007.

[3] Schmidt, G.: *Efektivní myšlení.* Rebo Productions CZ, Česlice, 2007.

[4] `www.ig-tester.cz/ig-test/vrozena-inteligence.html`

[5] `www.testpark.cz/ig-testy-zdarma/ig-test`

[6] `www.ucitel.net/test/19-doplnovani-rady-cisel`

Matematické hry

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha [1]

Abstrakt. *Jak motivovat žáky ke studiu matematiky? Je dobré občas předložit jim atraktivní téma a vyučovat ho poněkud volnějším způsobem. Článek popisuje jednu takovou situaci v rámci volitelného předmětu Aplikovaná matematika pro žáky zajímající se o matematiku poněkud více. To atraktivnější téma bylo Teorie her, ale ne vyučované striktně metodou definic a vět, ale formou hraní konkrétních her, hledání vítězných strategií a hledání různých jiných variant her.*

1 Úvod

Ve školním roce 2014/15 jsem na Gymnáziu Christiana Dopplera v Praze vyučoval volitelný předmět Aplikovaná matematika pro žáky, kteří mají větší zájem o matematiku a dosahují v ní už poměrně slušných výsledků. Jedním tématem, které jsme si společně se žáky zvolili, byl Úvod do teorie her. Úplně prvním impulsem k volbě tématu byly úlohy z probíhajícího a následujícího ročníku matematické olympiády, které mají charakter her. Průběžně jsme se ve výuce zabývali matematickou olympiádou, takže to byl vlastně přirozený přechod k novému tématu.

Teorie her je poměrně nová matematická disciplína, a to studenty také zaujalo, protože školní výuka se zabývá matematickými oblastmi, které

[1] e-mail: zhouf@seznam.cz

byly nové před několika staletími, nebo dokonce tisíciletími. A to už pro žáky nejsou lákavá témata.

V tomto příspěvku se budu zabývat jen tou úvodní částí tématu, která měla studenty vnést do prostředí her, vyzkoušet si několik známých her, hledat jejich vítězné strategie a pokusit se vymýšlet hry nové, nebo aspoň obměněné k již známým hrám.

2 Vymezení tématu

V té jednodušší, motivační části Teorie her jsme si se žáky stanovili osnovu, jak by bylo vhodné hlouběji se seznámit s jednotlivými hrami, a tak začít přemýšlet, jak je asi vybudována disciplína Teorie her. Takže jsme si stanovili tuto osnovu:

– prezentace hry;
– sehrání jedné nebo více partií této hry v kolektivu třídy;
– hledání vítězné strategie hry;
– ověření této strategie sehráním partie v kolektivu třídy;
– hledání obměn prezentované hry a hledání vítězných strategií;
– hledání relativně jiné hry, která má ale skryté kořeny v prezentované hře;
– sepsání sbírky nových her, které byly vytvořeny v našem předmětu.

3 Realizace vymezení předmětu ve vyučovací hodině

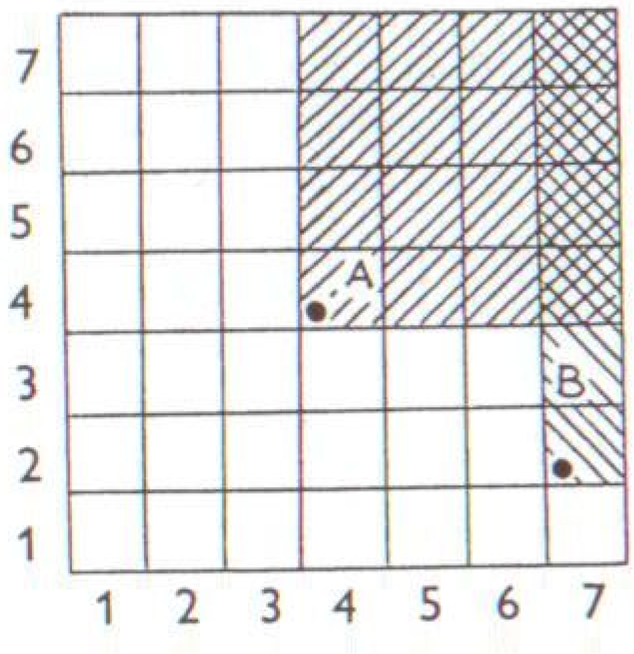
Žákům jsem předložil publikaci [1], kde je uvedeno 75 základních matematických her a mnoho jejich obměn. Na začátku tématu o hrách dostal každý žák přiděleny dvě hry, které měl nastudovat a řídit následně v dalších hodinách postup tak, abychom naplňovali stanovenou osnovu tématu. Jako doplňkovou literaturu k řádnému nastudování pravidel a strategií her měli žáci k dispozici publikace [2, 3, 5, 6, 7], a také si sháněli další informace na internetu.

V následných hodinách vždy jeden student řídil výuku zhruba podle osnovy, kterou jsme si stanovili. Žáci měli mnohdy tendenci některé části osnovy přeskočit, protože se jim to zdálo samozřejmé. Tento postup se neukázal jako optimální, protože tím zrychleným procesem na některé detaily zapomínali. Proto jsem tam byl jako supervizor já a vracel jsem je k pomalejšímu tempu a právě podle stanovené osnovy. Poté mnohdy žáci přiznali, že když se zamysleli až hlouběji nad problémem, tak mu teprve řádně porozuměli.

4 Příklad jedné hry rozpitvané podle předepsané osnovy

Hra je uvedena v [1, s. 46–47] pod názvem Ščelk, ale je převzata z publikace [4].

Formulace hry: *Hrají dva hráči. Je dán čtverec s $n \times n$ jednotkovými políčky. Hráči střídavě zabarví libovolné nezabarvené políčko a s ním všechna políčka ležící od něj doprava, nahoru a šikmo doprava nahoru (obrázek 1). Prohraje ten hráč, který musí zabarvit levé dolní políčko.*



Obrázek 1

Žáci sehráli dvě partie, aby si hru podrobněji „osahali“. Pak nastala diskuse o tom, jak hrát, aby některý z hráčů jednoznačně vyhrál. Hra je poměrně jednoduchá a žáci po několika minutách vítěznou strategii objevili. Vždy došli k tabuli, aby se nemuseli dlouze vyjadřovat, a ukazovali, která políčka by si postupně vybírali.

Objevili, že vítěznou strategii má začínající hráč. Nejprve vybere políčko na úhlopříčce čtverce těsně sousedící s políčkem v levém dolním rohu. Pak bude vybírat políčka souměrná s vybranými políčky soupeře podle diagonály směřující zleva dole doprava nahoru.

Tato strategie je tak jasná, že už žáci odmítli hru ještě jednou hrát. Naopak je zaujalo vymýšlet varianty této hry.

Jedna z variant, která je napadla, je, že místo počátečního čtverce se vezme libovolný obdélník. Ta je uvedena i v publikaci [1], ale tam je také uvedeno, že doposud není známa vítězná strategie (viz [3]), že „jedinou možností je úplný strom možností, ze kterého se vyhrávající pozice dají zpětně určit".

Další variantou uvedenou našimi žáky je, že by se k vybranému políčku vybarvila políčka ležící v celé vodorovné řadě a v celém svislém sloupci, tj. jakýsi kříž. Zde první hráč vybere políčko v jednom sloupci, druhý hráč musí vybrat políčko ve druhém sloupci, první hráč ve třetím sloupci atd. Nakonec jeden z hráčů musí vybrat poslední sloupec, čímž zabarví i levé dolní políčko. Zde tedy závisí na tom, má-li čtverec lichý nebo sudý počet sloupců. Tím je tato varianta nezajímavá.

Uveďme ještě jednu variantu, kterou žáci navrhli, a sice že by střídavě hráli tři hráči. I zde je ale vítězství závislé na velikosti původního čtverce. Takže i tato varianta je nezajímavá.

Úplně jinou hru motivovanou prezentovanou úlohou se žákům nepodařilo najít, vždy v návrhu bylo vidět, že je to více či méně jen varianta prezentované hry. Zde se není možné divit, protože hra je svou podstatou jednoduchá a nenabízí mnoho zcela jiných, ale přitom vlastně stejných úvah.

5 Závěr

Na začátku výuky Úvodu do teorie her jsme si společně se žáky vytyčili, že vytvoříme sbírku nových her, které žáci objevili. Jak ale bylo vidět v ukázce výše, není vůbec jednoduché takové hry vytvořit. Většinou šlo vždy jen o varianty známých her. Proto nakonec žádná sbírka nevznikla. To ale nemění nic na tom, že se žáci do práce zapojili se zaujetím, že se seznámili s mnoha matematickými hrami, že se naučili přemýšlet specifickým způsobem a že byli schopni vymyslet aspoň varianty známých her.

To tedy z mého pohledu učitele, který měl žákům předat nové poznatky a vzbudit v nich zájem, je velký úspěch. A není si možné přát nic víc, než aby i jiná matematická témata přinesla takový pozitivní přístup k výuce matematiky. A nejen matematiky.

Reference

[1] Burjan, V., Burjanová, Ľ.: *Matematické hry.* PYTAGORAS, Bratislava, 1991.

[2] Dudeney, H.E.: *Matematické hlavolamy a hříčky.* Olympia, Praha, 1995.

[3] Dynkin, J.B. a kol.: *Matematické hlavolamy.* Alfa, Bratislava, 1979.

[4] Gardner, M.: *Matematičeskije novelly.* Mir, Moskva, 1974.

[5] Obermair, G.: *Hry a kouzla se zápalkami.* Levné knihy, Praha, 2003.

[6] Omasta, V., Ravik, S.: *Karty, hráči, karetní hry.* Levné knihy, Praha, 2007.

[7] Pijanowski, L., Pijanowski, W.: *Encyklopedie světových her.* Universum, Praha, 2008.

Adam a Eva

Moje zrcadlo

Martin Malý

Eva:

Jsem jednotou těla,
velmi, velmi nepatrného,
ale dost složitého kousku hmoty,
a monumentálního ducha,
který v tomto bludišti nachází
svoje vlastní rysy.

Moje vědomí je tajemným
milováním se oněch dvou
a obrazem, k němuž konverguje
souhra jejich pohybů.
Je funkcí i číslem,
k němuž se blíží její hodnoty.

Až se hmota opotřebuje,
její přítel se jako nevěsta,
která se chce líbit
svému ženichovi,
oděje do svatebního závoje
a jejich tanec vykreslí svoji limitu,
pozná číslo svůj obraz
a moje bytí bude u konce.
Hmota se rozpadne a můj duch,
připravený zakřičet
jako novorozenec své "ano",
si mnou vetknutý tvar vloží
do barvami hýřícího kontinua
svých podob.

Adam:

Hraji si jako dítě
s barevnými kamínky,
tu většími - tu menšími,
ve snaze poskládat z nich
pravdivý a krásný obraz.
Jsem tělem i duchem badatel.

Hledám strukturu tam,
kde ji dosud jiní nenašli -
moje mysl štěpí,
co se dosud nepovedlo rozštěpit,
a skládá v celistvost,
co v celistvosti
dosud lidský duch neuchopil.

Jsem jako nábojnice
plná schopností a sil,
které dokáži uvolnit
jako šíp z napjatého luku -
mám talent ke všemu,
po čem touží moje srdce,
a také schopnosti jej využít.
Jsem připraven dojít
ve svém uchopení sebe a světa,
ve kterém žiji, až na vrchol
svých schopností.

Já:

Jsem dítě Adama a Evy.

StUdEnT

Ani jeden matematický talent nazmar – tisková zpráva z internetových stránek UHK

Ve dnech 5. až 6. června 2015 se na UHK konala konference „Ani jeden matematický talent nazmar“, kterou pořádá pravidelně Jednota českých matematiků a fyziků.

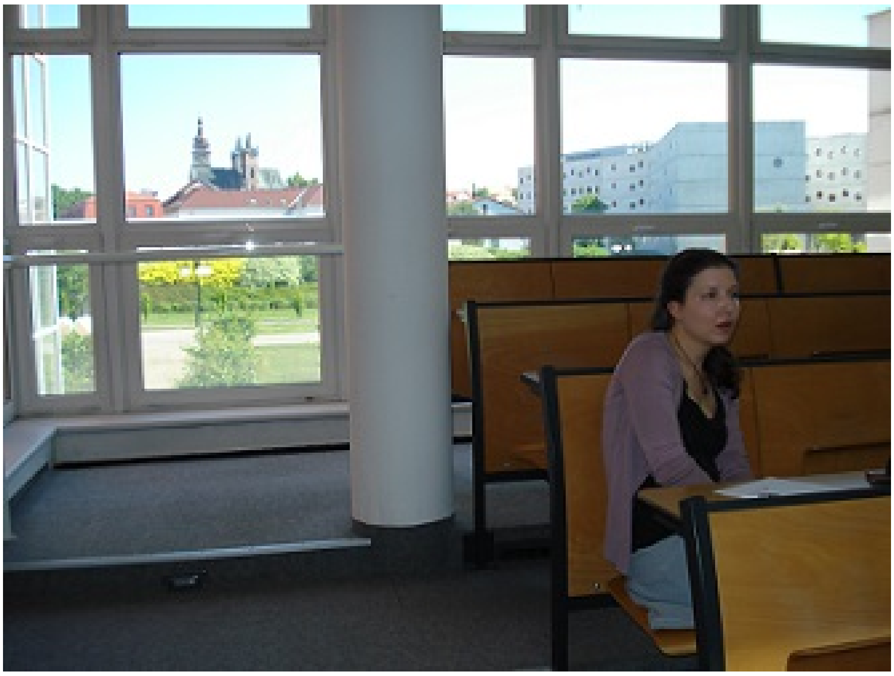
V programu se představili i domácí účastníci hned ze tří fakult univerzity. Prof. PhDr. Martin Bílek, Ph.D. a PhDr. Michal Musílek, Ph.D. z PřF UHK představili v úvodu setkání Projekt MaSciL, aneb IBL jako nástroj rozvoje talentu. PhDr. Jana Marie Havigerová, Ph.D. z PdF UHK pohovořila o Vyhledávání nadaných dětí a Mgr. Iva Vojkůvková z FIM UHK seznámila s akcí Den pí (nejen) na FIM. V závěru konference předseda programového výboru doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D. poděkoval za milou atmosféru představitelům královéhradecké pobočky JČMF a účastníci obdrželi od proděkana přírodovědecké fakulty PhDr. Michala Musílka, Ph.D. pozvánku k setkání v roce 2017 již v nové budově.

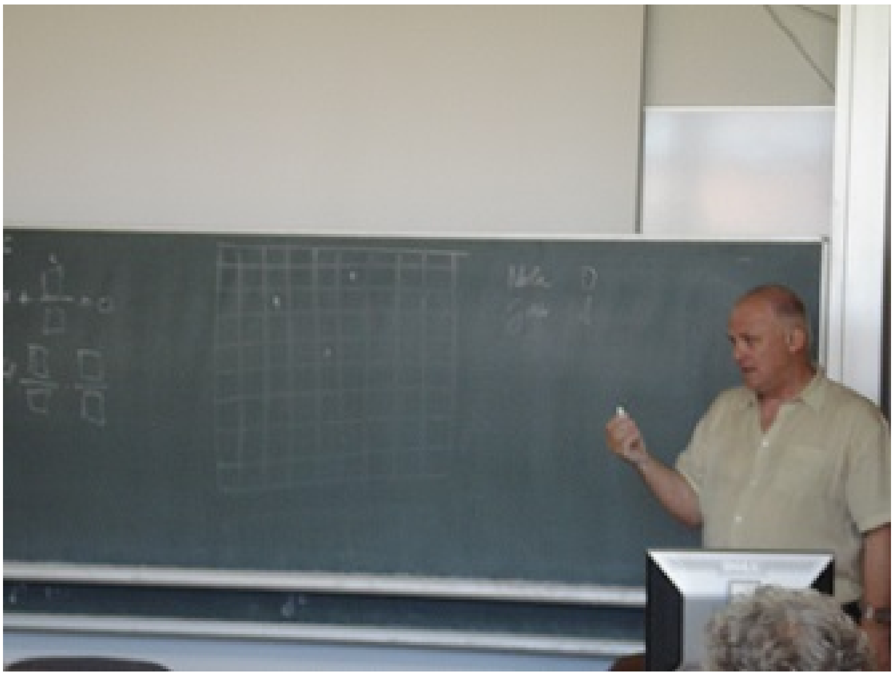
Mgr. Iva Vojkůvková lektor Katedra informatiky a kvantitativních metod FIM UHK

Zdroj: https://www.uhk.cz/cs-CZ/UHK/Cim-zijeme/Multi-telocvikarska#UHK-Article

Fotografie


Národní institut pro další vzdělávání (NIDV)





Seznam účastníků

1. *Bílek Martin* e-mail: martin.bilek@uhk.cz
Pracoviště: PřF UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
2. *Havlíčková Radka* e-mail: radka.havlickova@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
3. *Ježek Viktor* e-mail: jezek@jaroska.cz
Pracoviště: G, tř. kpt. Jaroše 14, Brno
4. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
5. *Kobza Aleš* e-mail: akob@seznam.cz
Pracoviště: PřF MU, Kotlářská 2, Brno
6. *Kommová Helena* e-mail: helena.kommova@gmail.com
Pracoviště: GJK, Parléřova 2, Praha 6
7. *Kopfová Jana* e-mail: jana.kopfova@math.slu.cz
Pracoviště: MÚ SU, Na Rybníčku 1, Opava
8. *Kuřina František* e-mail: kurinovi@gmail.com
Pracoviště: UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
9. *Malý Martin* e-mail: maly.m@mail.muni.cz
Pracoviště: ADC Czech Republic, Tuřanka 98B, Brno
10. *Michálková Jarmila* e-mail: michalkova.j@zsprosec.cz
Pracoviště: ZŠ, Proseč 260
11. *Molnár Josef* e-mail: josef.molnar@upol.cz
Pracoviště: PřF UP, tř. Svobody 26, Olomouc
12. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
Pracoviště: PřF UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové
13. *Müller Evžen* e-mail: muller@gozhorice.cz
Pracoviště: G, SOŠ, SOU, VOŠ, Husova 1414, Hořice
14. *Potůček Radovan* e-mail: radovan.potucek@unob.cz
Pracoviště: FVT UO, Kounicova 65, Brno

15. *Ringel Jiří* e-mail: ringel@gybroumov.cz
Pracoviště: G, Hradební 218, Broumov

16. *Růžičková Lucie* e-mail: ruzickova@gchd.cz
Pracoviště: GChD, Zborovská 45, Praha 5

17. *Ševcová Jana* e-mail: sevcova@nidv.cz
Pracoviště: NIDV, Praha

18. *Tláskal Jakub* e-mail: jakub.tlaskal@seznam.cz
Pracoviště: VOŠ a SPŠE, Božetěchova 3, Olomouc

19. *Vojkůvková Iva* e-mail: iva.vojkuvkova@uhk.cz
Pracoviště: FIM UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

20. *Zhouf Jaroslav* e-mail: zhouf@seznam.cz
Pracoviště: FIT ČVUT, Thákurova 9, Praha 6

Název: **Ani jeden matematický talent nazmar 2015**, Sborník příspěvků

Editoři: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PhDr. Lucie Růžičková, Ph.D.

Sazba programem LaTeX: Zuzana Procházková

Rok a místo vydání: 2016, Hradec Králové

Vydání: první

Náklad: 100

Vydalo nakladatelství GAUDEAMUS, Univerzita Hradec Králové jako svou 1571. publikaci

ISBN 978-80-7435-631-5