Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta,
katedra matematiky a didaktiky matematiky
SUMA Jednoty českých matematiků a fyziků
Školské zařízení pro DVPP Královéhradeckého kraje

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 6. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2013

Programový výbor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha
RNDr. Vladimír Burjan, Exam testing, Bratislava, Slovensko
Dr. Robert Geretschläger, Gymnasium, Graz, Rakousko
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PF UHK, Hradec Králové
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
Mgr. Lenka Takáčová, Střední zdravotnická škola, Hradec Králové

Editor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha

Recenzenti:
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PřF UP, Olomouc
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7290-699-4

OBSAH

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 10. 5.

9.00	Prezence
10.00–10.15	Zahájení
10.15–11.05	Vladislav Tomášek: Výsledky českých žáků v šetření TIMMS a PISA
11.10–12.00	Milan Urban: Program Excelence SŠ
12.00	Oběd
13.30–13.55	Michaela Kaslová: Etnomatematika a antropodidaktika matematiky v programu nadprůměrných žáků
13.55–14.20	Lucie Růžičková: Příprava studentů nižšího G na účast v matematických soutěžích
14.20–14.45	Pavel Calábek: Česko-slovensko-polská matematická soutěž juniorů
14.45–15.10	Eva Patáková: Proces tvorby úloh pro nadané žáky
15.10–15.35	Alena Vávrová: Hry
15.35–16.00	Přestávka
16.00–16.25	Vladimír Tesař: Abaku – početní hra
16.25–16.50	Vlastimil Lisse: Abaku
16.50–17.15	Martina Kořenová: Figurková školička – rozvoj logického myšlení pomocí šachů
17.15–17.40	Dana Hilská, Eva Holá: Nevšední matematika všedního dne
17.40–18.05	Vlastimil Dlab: Aritmetické a geometrické posloupnosti, mnohočleny
18.15	Večeře

Sobota 11. 5.

7.30	Snídaně
8.30– 9.20	Monika Dillingerová: Matematická olympiáda – ako na ňu a čo s ňou
9.20–10.10	Ivo Volf: Matematika, fyzika a výchova ke kritickému myšlení
10.10–10.30	Přestávka
10.30–10.55	Martina Květoňová: S matematikou na fyziku
10.55–11.20	Lubomíra Balková: Týden vědy na Jaderce
11.20–11.45	I. Machačíková, J. Molnár: Úlohy Matematickéh klokana v projektu Matematika pro všechny
11.45–12.10	Michal Musílek: Transpoziční šifry, tabulkový procesor a rozvoj matematického myšlení
12.10–12.35	Karel Popp: Skládačky, kresby, modely
12.00	Zakončení

ÚVODEM

Úvodní slovo k šestému setkání

V letošním roce proběhl již šestý ročník konference Ani jeden matematický talent nazmar. Připomeňme si, že jde o konferenci, která je tematicky orientována na talentované žáky v matematice a přírodovědných oborech. Jde o důležitou skupinu žáků, kteří v budoucnu budou hybateli pokroku, a to nejen v naší republice.

Pokračuje tak zájem setkávat se v komunitě lidí, jež sestává z učitelů, kteří mají velké zkušenosti s prací s takovými žáky, a učitelů, kteří se s touto problematikou teprve seznamují. Účastní se ale i lidé, kteří učiteli nejsou, avšak cítí velký význam takové práce.

Na konferenci zazněla řada zajímavých a podnětných zvaných přednášek. Podstatnější jsou ale přihlášené příspěvky a dílny účastníků, neboť právě ty svědčí o práci učitelů s nadanými žáky. I v letošním roce takovéto příspěvky byly prezentovány v hojné a kvalitní míře. Již tradičně se mezi českými účastníky objevili i zahraniční hosté, a to ze Slovenska.

O významu této konference není zajisté pochyb. O to víc překvapuje malý zájem státních pracovníků na všech stupních administrativy, kteří jsou na tuto konferenci pravidelně zváni, málokdy se ale někdo z nich dostaví. V letošním roce se jedna taková čestná výjimka objevila, když nás přijel informovat ředitel jednoho odboru na Ministerstvu školství, mládeže a tělovýchovy o programu Excelence. Tento program podporuje učitele a školy, které vychovají úspěšné řešitele některých oborových soutěží.

Avšak ani zájem ze strany učitelů nebyl takový, neboť z jejich úst zaznívá, že na své škole se s talentovaným žákem setkávají čím dál tím méně. Také zároveň jmenují důvody, proč tomu tak je. Největší problém vidí v tom, že existuje mnoho středních škol s maturitou a financování škol se děje podle počtu žáků. Školy tedy snižují požadavky na žáky, jen aby udržely svoji existenci. Takže se neustále snižuje počet žáků, kteří by museli podávat nějaké větší výkony. V tomto se státní instituce proviňují na vzdělanosti národa v matematice a přírodovědných oborech, zřejmě však i v ostatních oborech. Velmi často to vypadá, že o to nemají státní instituce vlastně téměř žádný zájem. Ponechání veškeré péče na školách samotných ve formě školních vzdělávacích programů rozmělňuje soustředěnou péči o talentované žáky. Na naší konferenci zkušení učitelé volají po zásadní změně přístupu státních institucí k této problematice. A přitom v minulých letech byl systém vzdělávání talentovaných žáků velmi dobře propracován. Byl podobný současným systémům mnoha východoevropských zemí, hlavně však asijských zemí, které v současnosti dosahují největších úspěchů.

O to učitelé cítí více, že není možné rezignovat, že je nutné i navzdory nezájmu státních institucí vyvíjet osobní iniciativu a talentované žáky neustále identifikovat a intenzivně s nimi pracovat. A právě takový přístup má ve svém programu naše konference. Doufejme tedy i nadále v pozitivní vliv konference Ani jeden matematický talent nazmar na učitele a postupně i na státní úředníky.

Jaroslav Zhouf

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Matematická olympiáda – ako na ňu a čo s ňou

Monika Dillingerová, MFF UK Bratislava [1]

ABSTRAKT. *Zaoberáme sa históriou a meniacim sa cieľom Matematickej olympiády. Uvádzame príklady úloh objavujúcich sa v Matematickej olympiáde. Tiež poukazujeme na prácu tvorcu úloh a nekončiacu prácu učiteľa so žiakmi.*

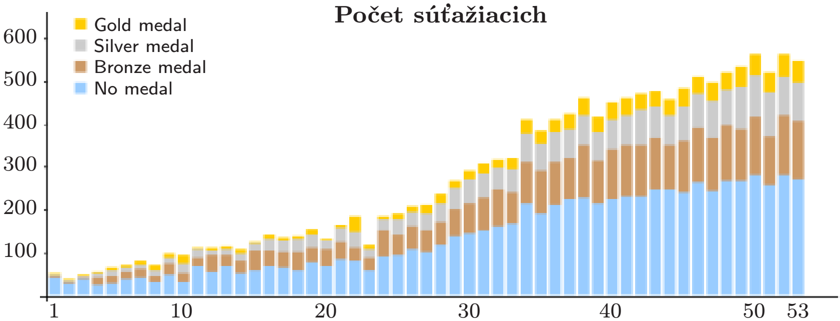
Niekoľko slov z histórie

V roku 1951 vznikla vo vtedajšom Československu na podnet akademika Eduarda Čecha a pod taktovkou profesora Františka Vyčichla nová matematická súťaž – Matematická olympiáda (MO). U jej zrodu stáli mnohí významní matematici, ako napríklad Jur Hronec, Miroslav Fiedler, Josef Novák, Jan Vyšín a iní. [1]

Prvý raz sa Matematická olympiáda uskutočnila v školskom roku 1951/52. Cieľovou skupinou Matematickej olympiády boli spočiatku študenti stredných škôl a úlohou olympiády bola podpora a vyhľadávanie matematických talentov. Hneď od počiatku boli vytvorené dve kategórie A a B. Kategória B slúžila študentom prvých dvoch ročníkov strednej školy. Pri zmenách dĺžky trvania strednej školy (3ročná, resp. 4ročná) sa rozširovalo a zužovalo zameranie kategórie A na 1 alebo 2 posledné ročníky strednej školy. Už o dva roky po jej vzniku, v školskom roku 1953/54, sa zriadili nové kategórie C a D. Kategória C vyselektovala z pôvodnej kategórie B študentov prvého ročníka strednej školy a pripravila ich veku a vedomostiam primerané úlohy. Kategória D mala za cieľ predstaviť Matematickú olympiádu žiakom základných škôl. V reči vtedajších škôl to bolo: Kategória D pre posledný ročník „osemročeniek“, kategórie C, B, A po rade pre 9., 10., 11. ročník Jednotnej strednej školy. Kategória D poskytovala možnosť objaviť talenty, začať pracovať aj so žiakmi na základných školách a predstaviť im o niečo zložitejšiu matematiku.

[1] e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk

V roku 1959 bola usporiadaná prvá medzinárodná matematická olympiáda, vtedy za účasti matematických talentov zo 7 krajín. Byť v prvej polovici zúčastnených krajín v tej dobe znamenalo stupne víťazov. Dnes sa stále držíme v prvej polovici zúčastnených, no už to nie sú stupne víťazov ba ani nie špička. V dnešnej dobe sa totiž IMO (Medzinárodnej matematickej olympiády) zúčastňuje viac ako 100 krajín. Celosvetový vývoj počtu súťažiacich študentov aj udelených medailí je viditeľný na obr. 1. [2]



Obr. 1

Až o neuveriteľných 10 rokov po vzniku MO vzniklo i prvé sústredenie pre najlepších 28 olympionikov. Išlo o prvé rozšírenie práce s talentami.

Že bola olympiáda vždy otvorená pre mladších žiakov, dokazuje aj úspech Bohuša Siváka na jej 14. ročníku, kedy sa tento vtedy žiak základnej školy prebojoval až na medzinárodnú olympiádu a tam získal 3. cenu. Rovnako i dnes môžu žiaci súťažiť vo vyšších kategóriách a nie nutne postupne vo všetkých po nejakú úroveň. Súvisí to i s termínmi, ktoré sú pre niektoré kategórie spoločné.

V roku 1969 sa kategória D premenovala na Z a zároveň sa na 2 roky zrušila kategória C. Išlo o akýsi pokus spojiť prvý a druhý ročník stredných škôl a poskytnúť im spoločné úlohy. Krátkosť trvania tohto pokusu naznačuje, že nebol prijatý verejnosťou a nepriniesol želané výsledky – zvýšenie úrovne matematického myslenia žiakov prvého ročníka stredných škôl.

Korešpondenčný seminár Ústredného výboru MO (resp. neskôr Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie MO) vznikol ako forma systematickej prípravy vytipovaných žiakov až v roku 1974.

Až v osemdesiatych rokoch minulého storočia vznikajú pre žiakov jednotlivých ročníkov základných škôl kategórie Z5, Z6, Z7, Z8, Z9. Podľa existencie – neexistencie 9. ročníka ZŠ sa posúva posledná kategória. Nakoľko najnižšia kategória plní aj účel poukázania na dobrých matematikov na prvom stupni základných škôl, vzniká na Slovensku aj kategória Z4. Výsledky súťaže sa často pripočítavali k výsledkom prijímacích testov do prvého ročníka osemročných gymnázií, kam sa hlásili práve žiaci 4. ročníka ZŠ. Po zmene v roku 2010, odkedy sa na osemročné gymnáziá hlásia už iba žiaci 5. ročníka, bola táto kategória zrušená.

Napriek rozdeleniu Československa na dva zvrchované celky Matematická olympiáda zostáva i po roku 1993 jednotná. Znamená to, že českí i slovenskí žiaci, až na drobné úpravy, riešia identické úlohy. Súťažné kolá prebiehajú v oboch republikách v rovnakom čase. Pripraviť úlohu, ktorá je vhodná pre napr. šiestaka v oboch krajinách, znamená okrem iného i hľadať prienik ich spoločných vedomostí. Napríklad záporné čísla sa v Česku objavujú v Štátnom vzdelávacom programe v 6. ročníku, ale na Slovensku až v 8. ročníku.

Cieľ Matematickej olympiády

Ako už je spomínané aj vyššie, prvoradým cieľom MO bolo vyhľadávanie talentov. V priebehu svojej existencie sa MO stala jednou z najmasovejších súťaží a postupne sa prispôsobovala jednotlivým generáciám riešiteľov. Keď si vezmeme úlohy niektorého zo starších ročníkov kategórie Z, zistíme, že dnešným deťom by sme ich nemohli zadať. Napríklad:

XXIX. ročník MO, úloha Z-I-1. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 2. Na jeho stranách AB, BC, CD, DA sú postupne zvolené body K, L, M, N tak, že $|AK| = |BL| = |CM| = |DN| = x$. Vyjadrite obsah štvorca $KLMN$ pomocou x. Pre ktoré x je obsah štvorca $KLMN$ najmenší? [3]

Táto úloha svojou všeobecnosťou a v rámci nej hľadaním minima, presahuje dnešné možnosti žiaka.

XXXI. ročník MO, úloha Z-II-2. Súčet podielu a súčinu dvoch prirodzených čísel p, q je 30. Určte všetky dvojice čísiel s uvedenou vlastnosťou. [4]

Ak by sme ju dnes zadali našim deviatakom, ihneď by sme mali aj pripomienky učiteľov o neriešiteľnosti bez vyšších vedomostí. Obe citované úlohy sú pre dnešných žiakov príliš ťažké. Sú na to dva závažné dôvody.

Prvým je, že sa MO stala tak rozšírenou, že učitelia nadobudli dojem, že by ju v každej triede mal niektorý žiak vedieť vyriešiť. To je spojené i s predstavou, že Matematická olympiáda nesmie v zadaní prekročiť rámec učiva odporúčaný v Štátnom vzdelávacom programe pre konkrétnu triedu, resp. kategóriu. Takto sa už do MO hlási každý jednotkár. Niektorý dobrovoľne, niektorý nasilu. Ale žiaden, česť výnimkám, nemá záujem sa naozaj učiť niečo nové. Takto sa potom MO zúčastňuje síce špička národa, no zároveň veľmi široká špička.

Druhý dôvod sú samotní účastníci a ich pocity po súťažných kolách. Očakávajú, že jednotkári budú úspešní. Ale mať talent nie je to isté ako byť jednotkár. Ak by sme nastavili latku vysoko, znamenalo by to sklamanie drvivej väčšiny súťažiacich. Obava z ekvivalencie „sklamanie = odmietanie súťažiť v budúcnosti“ sa pretransformovala do cieľa urobiť MO takú, aby väčšina žiakov bola úspešná. Nejde len o domnienku úlohovej komisie či SK MO. Po okresných, krajských kolách sa často učitelia vyjadrujú písomne k nadsadenej obtiažnosti jednotlivých kategórií. Podaktorí dokonca chcú riešiť hneď a okamžite telefonicky svoju sťažnosť. Zatiaľ som sa však osobne nestretla s pochvalou niektorej kategórie MO. Viedlo nás to ku schéme, ktorú sa v rámci úlohovej komisie Z (pre kategórie Z5–Z9) snažíme uplatňovať. V súťažnom kole musí byť jedna úloha ľahká, aby poskytla pocit dobre vykonanej práce všetkým. Jedna úloha má byť ťažká, aby dokázala vyrobiť poradie najlepších. Tretia (prípadne aj štvrtá) by mali byť niečo medzi. Nie vždy sa to podarí, nie každý ročník žiakov je rovnako silný či slabý.

Na základe uvedeného sa cieľ MO pre základné školy pretransformoval na niekoľko cieľov:

1. Objaviť najlepších matematikov.
2. Poskytnúť dobrým (výborným) žiakom pocit úspechu.
3. Úlohy tvoriť v súlade s ŠVP.
4. V úlohách poskytnúť riešiteľom netradičný, nový pohľad na vec.
5. Každá použitá úloha musí byť autorská, teda doteraz nepublikovaná, má svojho konkrétneho autora a riešitelia nemali možnosť sa s ňou dopredu stretnúť.

Napĺňanie cieľov súvisí aj s kategóriou a kolom súťaže. V tab. 1 uvádzame stručný prehľad kôl, orientačne termín konania a tiež čas poskytovaný riešiteľom na vypracovanie riešení.

Súťaž začína úlohami domáceho kola. V rámci domáceho kola je možné zadávať prácnejšie, časovo náročnejšie úlohy. Riešitelia na ne majú 3–6 mesiacov čas, a môžu teda experimentovať či pracovať s novými definíciami, uhlom pohľadu a pod. Mali by sa aspoň týmto spôsobom naučiť niečo nové. Niekedy je ťažšie opísať riešenie či ako k nemu dospieť, než vyriešiť úlohu. V Matematickej olympiáde je nutné napísať, ako žiak rozmýšľal, ako pokračoval a nakoniec dospel k riešeniu. Všetky kroky duševnej práce by mali byť opísané. A to je veľmi ťažké.

Kategória	Prvé kolo domáce			Druhé kolo okresné			Tretie kolo krajské		
	úloh	čas	termín	úloh	čas	termín	úloh	čas	termín
Z5	6	3 mesiace	December	3	2 h	Január	–	–	–
Z6	6	6 mesiacov	Marec	3	2 h	Apríl	–	–	–
Z7	6	6 mesiacov	Marec	3	2 h	Apríl	–	–	–
Z8	6	6 mesiacov	Marec	3	2 h	Apríl	–	–	–
Z9	6	3 mesiace	December	4	4 h	Január	4	4 h	Marec

Tab. 1

Majme úlohu o dvoch deťoch, Petrovi, Aničke a košíku s párnym počtom jabĺk. Následne po niekoľkých úvahách zistíme, že Peter vybral z košíka 5 jabĺk. V reálnej školskej matematike z toho nerobíme ešte žiadne závery. No v MO sa žiadajú. Očakávame úvahy a zápisy na niektorej z nasledujúcich úrovní:

- Peter má 5 jabĺk, ale nakoľko tam bol párny počet jabĺk, malo by aspoň jedno jablko zostať v koši, alebo si ho (ich) vzala Anička.
- Určite ešte nejaké jablká – jablko musia byť. Súčet jabĺk, ktoré zostali v košíku a ktoré si vzala Anička, musí byť nepárny.

Toto je začiatok správnej argumentácie a tvorby záverov, činností potrebných v ďalších kategóriách, a tiež na Medzinárodnej matematickej olympiáde. V prvom tvrdení navyše žiak uvažuje ešte nedôsledne, kedy sa zamýšľa iba nad modelom Anička si nevzala nič – Anička si vzala všetky zvyšné. Až druhé tvrdenie upresňuje, že ide o stavy, ktoré môžu nastať súčasne. Ak chce učiteľ od svojich žiakov získať riešenie napísané uvedeným spôsobom, stojí na začiatku dlhej strastiplnej cesty. Pre úlohovú komisiu obdoba tejto cesty začína vymýšľaním a výberom úloh.

Tvorba úloh

Úlohové komisie SR a ČR majú na starosti vytvoriť úlohy pre žiakov základných škôl. Dvakrát ročne sa za týmto účelom stretávajú na spoločnom zasadnutí. Požiadavky na dobrú úlohu, vhodnú pre MO, vychádzajú zo samotných cieľov MO. Môžeme ich vymedziť nasledujúcim spôsobom:

- Nikto nesmie úlohu poznať, úloha nie je publikovaná. Želaným dôsledkom je, že všetci žiaci majú rovnaké štartovné pozície.
- Úloha nemá byť ako stovky iných v učebniciach – mala by sa niečím odlišovať.
- Úloha by mala riešiteľom priniesť alebo od nich požadovať niečo nové.
- Úloha by mala byť riešiteľná viacerými spôsobmi.
- Viac ako jedno riešenie je povolené a vítané.
- Riešitelia potrebujú školské znalosti a logiku.

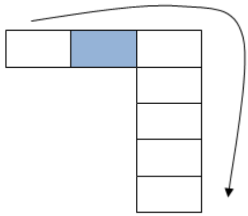
S týmito premisami pristupujú členovia úlohovej komisie k svojej práci. Počas jesenného zasadnutia sa snažia vytvoriť pre domáce kolo vhodné šestice úloh. Zároveň už poškuľujú po prípadných ďalších úlohách do súťažných kôl. Nepísaným zákonom je, že v šestici sa má objaviť aspoň jedna, ale najviac dve geometrické úlohy. Vyberajú sa aj témy, ktoré by mohli mať v súťažnom kole svoje pokračovanie. Ak sa definuje nejaký nový objekt, práve v domácom kole je čas podrobnejšie sa s ním oboznámiť, experimentovať...

Na jarnom zasadnutí potom tvoria členovia úlohovej komisie trojice – štvorice súťažných úloh. Deti by nemali používať pri ich riešení žiadnu techniku. Súťaží sa v tom, čo majú v hlave, nie čo majú vo vrecku. Okrem už spomínanej obtiažnosti úloh sú ďalšími atribútmi nadväznosť a matematický obsah. V trojici sa tak určite objaví jedna geometrická úloha. Ak bola v domácom kole úloha, v ktorej sa pracovalo s novou definíciou (optimistické číslo, rodné číslo, rodinka čísel a pod.), tu sa s definíciou a vlastnosťami definovaného objektu pracuje ďalej.

Leták

Leták, tak ako sa dostáva v septembri na školy, poskytuje samozrejme jednotlivé úlohy priradené kategóriám. Učiteľovi, ktorý učí iba napr. v šiestom ročníku, sa však vyplatí prečítať si ho celý. Často sa totiž stáva, že sa v letáku objaví séria úloh naprieč kategóriami. Takáto séria pozostáva z ľahších a ťažších úloh. Ak teda potrebuje učiteľ nájsť niečo jednoduchšie, niečo zložitejšie, môže použiť úlohu nižšej či vyššej kategórie. Ak jeho žiaci sú okrajovou kategóriou, stále mu takáto séria poskytuje návod na možné rozširovania a zjednodušovania témy. Jednou takou sériou boli napríklad úlohy 58. ročníka MO. V kategórii Z5 sa objavila najjednoduchšia a v kategórii Z8 najzložitejšia forma úlohy.

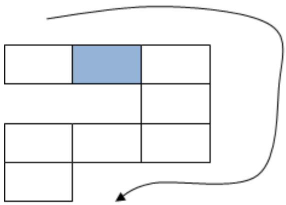
Z5 Klasická hracia kocka sa kotúľala naznačeným smerom po pláne na obr. 2. Pri jej pohybe na každom políčku ostali otlačené bodky zo steny, ktorou sa plánu dotýkala. Súčet všetkých bodiek otlačených na pláne bol 23. Koľko bodiek bolo otlačených na zafarbenom políčku? (Klasická hracia kocka má na stenách bodky 1, 2, . . . , 6 umiestnené tak, že súčet počtu bodiek na protiľahlých stenách je 7. Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.) [5, s. 6]



Obr. 2

Úloha bola postavená na troch základných princípoch. Prvým bola klasická hracia kocka a umiestnenie bodiek na jej stenách. Druhým bolo prevaľovanie kocky po vyznačenom pláne. Tretím bolo objavenie dvojíc políčok, na ktorých bude súčet otlačených bodiek rovný 7. Odtiaľ už sa dalo ľahko zistiť, že sa autor úlohy pýta na dve bodky. Pre kategóriu Z6 došlo k sťaženiu dvoch týchto princípov a pridanie štvrtého. Prvým bolo umistnenie čísel na kocke. Šiestaci začiatkom školského roka preberali deliteľnosť a túto tému sme sa rozhodli podporiť použitím prvočísiel. Druhý pozmenený princíp je zozložitenie plánu tak, aby neboli dvojice políčok s konštantným súčtom zjavne viditeľné. Zároveň sme z úlohy s konkrétnym súčtom urobili úlohu na minimum.

Z6 Na kocku sme na každú stenu napísali prvočíslo menšie ako 20. Potom sme zistili, že súčet každých dvoch čísel ležiacich na protiľahlých stenách je vždy rovnaký. Kocku sme položili na prvé políčko plánu na obr. 3 stenou s najmenším číslom nadol. Potom sme ju kotúľali naznačeným smerom po pláne. Pri každom dotyku kocky s plánom sme na políčko plánu napísali číslo, ktorým sa ho kocka dotkla. Ktorým číslom sa kocka dotkla zafarbeného políčka plánu, ak súčet všetkých napísaných čísel bol najmenší možný? (Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.) [5, s. 9]



Obr. 3

Siedmy ročník z nášho pohľadu bol rovnako ďaleko v uvedených témach, preto sme použili úlohu ako pre šiesty ročník, no otázku sme zmenili na maximum.

Z7 Na kocku sme na každú stenu napísali prvočíslo menšie ako 20. Potom sme zistili, že súčet každých dvoch čísel ležiacich na protiľahlých stenách je vždy rovnaký. Kocku sme položili na prvé políčko plánu na obr. 3 stenou s najväčším číslom nadol. Potom sme ju kotúľali naznačeným smerom po pláne. Pri každom dotyku kocky s plánom sme na políčko napísali číslo, ktorým sa kocka plánu dotkla. Ktorým číslom sa kocka dotkla zafarbeného políčka plánu, ak súčet všetkých napísaných čísel bol najväčší možný? (Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.) [5, s. 10]

Poslednou kategóriou, ktorá pracovala s našou kockou, bola Z8. Jediná zmena bola vo forme otázky. Vrátili sme sa síce k jednoduchšiemu celkovému súčtu napísaných čísel, no zároveň sme postavili zápornú otázku. Táto predĺžila postup riešenia o jeden dôležitý krok.

Z8 Na kocku sme na každú stenu napísali prvočíslo menšie ako 20. Potom sme zistili, že súčet každých dvoch čísel ležiacich na protiľahlých stenách je vždy rovnaký. Kocku sme položili na prvé políčko plánu na obr. 3. Následne sme ju kotúľali naznačeným smerom po pláne. Pri každom dotyku kocky s plánom sme na políčko plánu napísali číslo, ktorým sa ho kocka dotkla. Ktorým číslom sa kocka plánu nedotkla, ak súčet všetkých napísaných čísel bol 86? (Plán pozostáva zo štvorcov, ktoré sú rovnako veľké ako steny kocky.) [5, s. 12]

Reálne môžeme z uvedeného teda hovoriť o úlohe na:

1. umiestnenie čísel na steny kocky
2. prevaľovanie kocky po pláne
3. hľadanie jednotlivých čísel na základe znalosti vlastnosti súčtu, alebo súčtu samotného
4. interpretáciu výsledkov

Práca učiteľa

Práca učiteľa s MO nie je iba priniesť zadanie, pozbierať a oznámkovať riešenia a poslať deti na súťaž. Učiteľ, ktorý to takto robí, asi nemá veľa úspešných riešiteľov. Dobrý učiteľ si okrem toho najprv vyrieši všetky úlohy z letáku. Pri ich zadávaní komunikuje so žiakmi o úlohách.

Počas žiackej tvorby odpovedí komunikuje o ich riešeniach, úspechoch a neúspechoch. Aby sa žiakom ľahšie napredovalo, tvorí pre nich návodné úlohy. Opäť komunikuje o riešeniach, teraz návodných úloh. Potom dostane riešenia úloh domáceho kola a okomentuje svoje hodnotenia. Výborný učiteľ ešte pripraví možné pokračovania tém a preberie ich so svojimi olympionikmi.

Vytvoriť dobrú návodnú úlohu je tvorivá práca, ktorá má svoje pravidlá. Popisujeme ich v staršom článku:

„Než vytvoríme návodnú úlohu, mali by sme si ozrejmiť, čo všetko poskytuje žiakovi text jej zadania a samozrejme je potrebné ju vyriešiť podľa možnosti čo najväčším možným počtom spôsobov. Potom sa pokúšame na základe predchádzajúcich činností roztriediť proces riešenia do nasledujúcich štyroch kategórií:

1. Pojmy a fakty vystupujúce v zadaní úlohy
2. Procesy a operácie (postupy) vystupujúce v zadaní úlohy
3. Pojmy a fakty vystupujúce v samotnom riešení úlohy
4. Procesy a operácie (postupy) vystupujúce v samotnom riešení úlohy

Pritom sa vždy môže jednať o

A. nové,
B. staré a známe

pojmy, fakty, procesy a operácie. V neposlednom rade z hľadiska riešenia úlohy môže byť návodná úloha

a. varovná,
b. usmerňujúca,
c. prezrádzajúca.“ [6]

Dobre vytvorené návodné úlohy sú vďaka možnosti nastavenia svojich atribútov šité konkrétnym žiakom na mieru. Pri ich tvorbe často učiteľ objaví, ktorým smerom by sa úloha mohla ďalej uberať. Úlohy zadá teda žiakom, rozoberá s nimi ich riešenia. V istom momente je domáce kolo vyriešené, vyzbierané. Učiteľ zdanlivo má "po práci". V skutočnosti sa jeho práca znova začína pred ďalším kolom súťaže. Žiaci si už nepamätajú, aké boli tie úlohy z domáceho kola. Tesne pred súťažou je dobré pripomenúť ich hlavné myšlienky, prípadne skúsiť dať žiakom vyriešiť podobné a o niečo ťažšie úlohy. V najlepšom prípade potom žiaka na súťažnom kole nič neprekvapí.

V deň súťaže potom zväčša aktívny učiteľ je súčasťou komisie, dozoru alebo aspoň doprovodu žiakov. Takto sa najrýchlejšie dostane k textom úloh. Ak sa mu žiadna z týchto funkcií neušla, potajme striehne, kedy sa objavia zadania voľne dostupné na internete. Hneď ich sťahuje a púšťa sa úlohy riešiť. Následne po publikovaní riešení si stiahne aj tie a kontroluje svoje postupy. Pritom sa stretne niekedy aj s postupmi, ktoré sa od tých jeho líšia. Veľa úloh je totiž za použitia matematického modelu a sily algebry, geometrie jednoduchých ako facka. No zaujímavé je aj, či ich vie svojim matematickým aparátom vyriešiť aj žiak príslušného ročníka základnej školy.

Keď sa žiaci vrátia zo súťaže, učiteľ už žiari poznaním a pýta sa: „Koľko ste vedeli? Ako vám to vyšlo?“ Ten lepší sa spýta aj: „Ako si postupoval? Čo si tam k tomu napísal?“ Začína nové kolo komunikácie o úlohách a ich riešeniach…

Záver

Náš článok sa snažil prejsť od fylogenézy Matematickej olympiády ako súťaže k ontogenézy jednoho jej ročníka. Pritom sme sa zamerali na cieľ MO, tvorbu jej úloh a prácu učiteľa. Poukázali sme na to, čo poskytuje leták MO, ako tvoriť návodné úlohy.

Jednoznačne by MO nemohla existovať bez zodpovedných ľudí, ktorí pripravujú úlohy, bez tých, ktorí ju organizačne zabezpečujú. Najdôležitejším činiteľom pre vyhľadávanie talentovaných žiakov sa však ukazuje práca učiteľa matematiky priamo na škole. Na prípravu žiakov na MO ukrajuje zo spoločného času výuky všetkých, z vlastného voľného času a mnohí dokoncia tvoria poobedňajšie krúžky matematiky pre svojich žiakov.

Literatúra

[1] Moravčík, J., Vyšín, J.: *Dvacet pět let matematické olympiády v Československu.* Sborník, Mladá fronta, Praha, 1976.

[2] Dolinar, G.: *Cumulative results by year.* [online] IMO Advisory Board, 2012. `http://www.imo-official.org/results_year.aspx` [cit.2013-05-07].

[3] *Dvacátý devátý ročník Matematické olympiády.* SPN, Praha, 1982, s. 41.

[4] *Třicátý první ročník Matematické olympiády.* SPN, Praha, 1984, s. 52.

[5] Slovenská komisia MO: *58. Ročník matematickej olympiády.* Leták kategórií Z4–Z9, domáce kolo. [online] IUVENTA, Bratislava, 2008, s. 6. `http://skmo.sk/dokument.php?id=291` [cit.2013-05-07].

[6] Krállová, M.: Typológia návodných úloh. In: *Zborník Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky.* KZDM, Bratislava, 1999, s. 62–67.

Výsledky českých žáků v šetření TIMSS a PISA

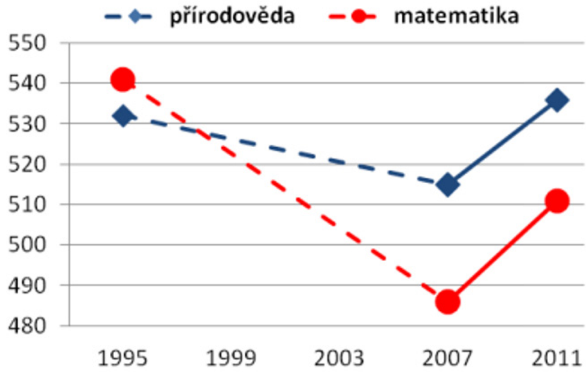
Vladislav Tomášek, ČŠI Praha [1]

Abstrakt. *Česká republika se účastní projektu TIMSS, který sleduje matematické vědomosti žáků prvního a druhého stupně ZŠ, od roku 1995, a projektu PISA, který zjišťuje úroveň matematické gramotnosti patnáctiletých žáků, od jeho počátku v roce 2000. V uplynulém období jsme pozorovali klesající trend úrovně matematických vědomostí a dovedností českých žáků u všech sledovaných věkových kategorií. Pokles průměrného výsledku se také projevil snížením podílu žáků s nejlepšími výsledky v matematice. V posledním šetření TIMSS 2011 jsme zaznamenali statisticky významné zlepšení českých žáků 4. ročníku oproti roku 2007. S napětím proto můžeme očekávat, jaký bude výsledek patnáctiletých žáků v šetření PISA 2012.*

Mezinárodní projekt TIMSS zjišťuje matematické a přírodovědné znalosti a dovednosti žáků 4. a 8. ročníků povinné školní docházky. Jedná se o projekt asociace IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), který se od roku 1995 pravidelně opakuje ve čtyřletých cyklech. Česká republika se do něj zapojila v letech 1995, 1999, 2007 a 2011, v roce 2003 se do šetření nezapojila. [4] PISA je projektem OECD a zjišťuje úroveň čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti patnáctiletých žáků, tedy žáků na konci povinné školní docházky. První šetření se uskutečnilo v roce 2000 a opakuje se každé tři roky. Česká republika se zapojila do všech dosavadních šetření. Současná šetření obou projektů TIMSS 2011 a PISA 2012 realizuje Česká školní inspekce v rámci projektu Kompetence I spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

V šetření TIMSS 2011 měli čeští žáci 4. ročníku nadprůměrný výsledek v matematice (511 bodů) i v přírodovědě (536 bodů). [2] Výsledky zemí jsou pro oba předměty prezentovány na škálách TIMSS, které byly zkonstruovány na základě šetření TIMSS 1995 tak, že mezinárodní průměr odpovídal hodnotě 500 bodů a směrodatná odchylka byla 100 bodů. Tyto univerzální škály nám umožňují sledovat trend ve výsledcích jednotlivých zemí v čase. Na obr. 1 je zachycen trend ve výsledcích českých žáků 4. ročníku.

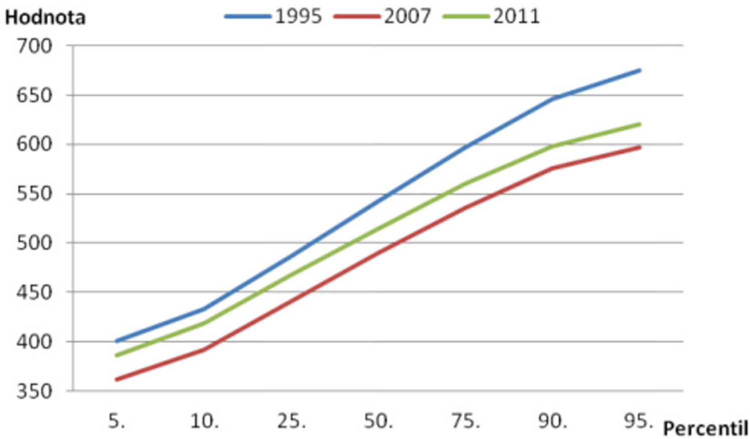
[1] e-mail: vladislav.tomasek@csicr.cz



Obr. 1: Trend ve výsledcích českých žáků, 4. ročník

Bohužel máme k dispozici pouhá tři měření, a nevíme proto, jak se průměrné výsledky měnily mezi roky 1995 a 2007. V matematice jsme v roce 2007 zaznamenali velký propad v průměrném výsledku. Přestože se výsledek ČR od roku 2007 statisticky významně zlepšil, zůstáváme zemí s největším propadem od roku 1995.

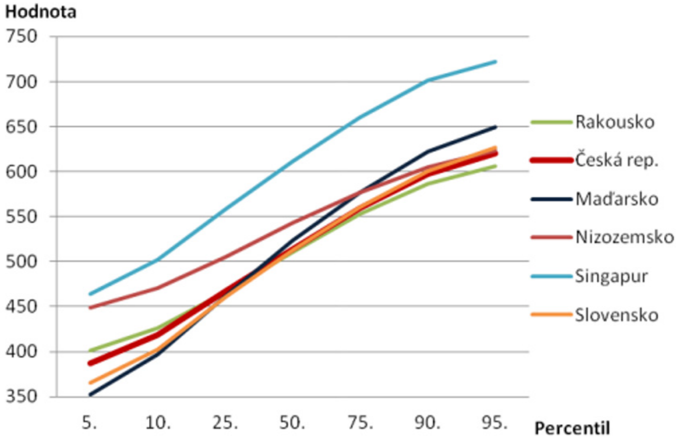
Co znamená velké zhoršení průměrného výsledku v matematice, vidíme z profilu výsledků žáků (obr. 2) znázorněného pomocí hodnot různých percentilů.



Obr. 2: Porovnání profilů výsledků českých žáků v matematice v čase, 4. ročník

Od roku 1995 do roku 2007 se výrazně zhoršil výsledek všech skupin žáků, největší pokles přitom pozorujeme u žáků s nejlepšími výsledky. Profil výsledků českých žáků v roce 2011 má přibližně stejný charakter jako v roce 2007, zhruba stejné zlepšení prokázali všechny skupiny žáků, od těch nejslabších až po žáky s nejlepším výsledkem v matematice. Z obr. 2 je patrné, že přetrvává propad zejména ve výsledku lepších žáků, znamená to, že se výrazně snížil podíl českých žáků s výbornými znalostmi z matematiky.

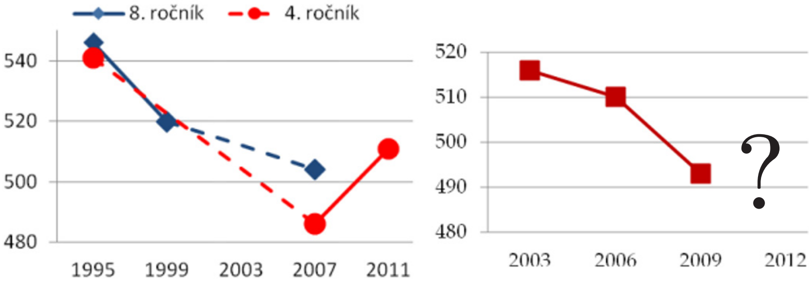
V obr. 3 je porovnán profil výsledků českých žáků v šetření TIMSS 2011 s profily výsledků žáků některých evropských zemí a Singapuru, který dosáhl nejlepšího výsledku.



Obr. 3: Profily výsledků žáků šesti zemí, TIMSS 2011 – matematika

Profil výsledků českých žáků se nejlépe shoduje s profily žáků z Rakouska a ze Slovenska. Přibližně čtvrtina slovenských žáků s nejslabšími výsledky vykazuje horší výsledek než stejná skupina českých žáků, jinak se profily výsledků obou zemí téměř překrývají. Výraznější rozdíl je patrný mezi profily výsledků českých a maďarských žáků. Maďarsko vykazuje ze skupiny vybraných zemí největší rozdíly mezi výsledky nejslabších a nejlepších žáků. Opačným příkladem je Nizozemsko – nejmenší rozdíl mezi hodnotami pátého a devadesátého pátého percentilu. Nejslabší nizozemští žáci jsou významně úspěšnější než stejní žáci uvedených středoevropských zemí a téměř se vyrovnají stejné skupině singapurských žáků.

Klesající trend ve výsledcích českých žáků v matematice byl také pozorován v šetření TIMSS u žáků 8. ročníku (obr. 4a) a rovněž u patnáctiletých žáků v šetření PISA (obr. 4b).



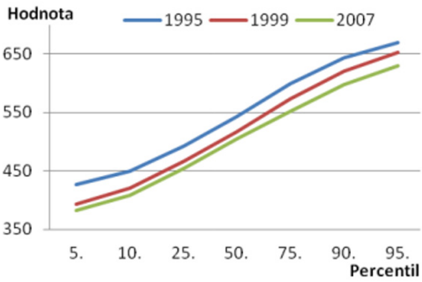
a) TIMSS b) PISA

Obr. 4: Trend ve výsledcích českých žáků v matematice

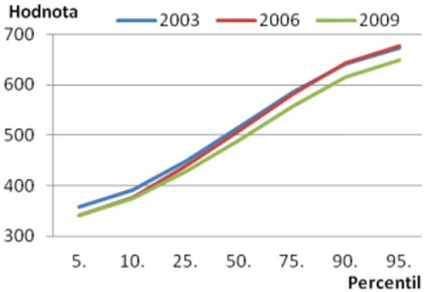
Průměrný výsledek českých žáků 8. ročníku v matematice poklesl nejvíce ze všech zemí do roku 1999, zde určitou roli sehrálo prodloužení základní školy z osmi na devět let a přesun části učiva do vyšších ročníků. Do roku 2007 došlo k dalšímu poklesu, který však nebyl tak výrazný jako u žáků prvního stupně. [1] Protože se ČR nezapojila do šetření TIMSS v roce 2003, nemáme informace o vývoji v tomto mezidobí. Projekt PISA má odlišné pojetí testované oblasti, přesto od roku 2003, kdy byla matematická gramotnost hlavní testovanou oblastí, pozorujeme klesající trend v průměrném výsledku českých žáků podobně jako v šetření TIMSS. V roce 2012 byla matematická gramotnost opět hlavní oblastí, výsledky však budou zveřejněny v prosinci 2013. Zatím se proto můžeme pouze dohadovat, zda dojde k dalšímu zhoršení, nebo zda se klesající trend zastaví.

Podívejme se, jak se klesající trend průměrného výsledku českých žáků promítl do změny profilu jejich výsledků v matematice. Na obr. 5 jsou pomocí vybraných percentilů znázorněny profily výsledků žáků 8. ročníku pro tři šetření TIMSS, do kterých se ČR zapojila, a pro tři šetření PISA v oblasti matematické gramotnosti patnáctiletých žáků.

Od roku 1995 do roku 1999 se v šetření TIMSS u žáků 8. ročníku snížily hodnoty všech uvedených percentilů s tím, že o málo větší zhoršení pozorujeme v dolní polovině spektra (u slabších žáků). Do roku 2007 pak došlo k mírnějšímu zhoršení s tím, že se tentokrát o málo více zhoršili žáci dosahující lepších výsledků. Profil výsledků žáků 8. ročníku z roku 2007 má přibližně stejný průběh jako profil z roku 1995, ale hodnoty percentilů jsou nižší přibližně o 40 bodů na škále výsledků TIMSS.



a) TIMSS, 8. ročník



b) PISA

Obr. 5: Porovnání profilů výsledků českých žáků druhého stupně v matematice v čase

Profil úrovně matematické gramotnosti patnáctiletých žáků v projektu PISA se měnil méně než v projektu TIMSS. Jistou roli zde může sehrávat kratší cyklus (3 roky místo 4) a poloviční sledované období. Od roku 2003 do roku 2006 došlo k poklesu úrovně matematické gramotnosti u žáků s horšími výsledky – asi dolní čtvrtina, u zbývající části spektra se profil prakticky nezměnil. Naopak od roku 2006 do roku 2009 se žáci s nejslabším výsledkem již dále nezhoršili (přibližně dolní pětina), ale hodnoty percentilů počínaje 25. se snížily, zhoršili se tedy žáci s průměrným a dobrým výsledkem.

V projektu PISA je pro každou testovanou oblast definováno šest úrovní způsobilosti, kterých mohou žáci dosáhnout. [3] Tabulka 1 uvádí zastoupení žáků s velmi dobrým výsledkem (čtvrtá a vyšší úroveň způsobilosti) v jednotlivých oblastech testování pro různé typy studia (základní škola, gymnázium víceleté, gymnázium čtyřleté, středoškolské odborné obory ukončené maturitní zkouškou a nematuritní středoškolské obory).

Podle očekávání je nejvyšší podíl žáků s velmi dobrým výsledkem alespoň v jedné oblasti testování na gymnáziích, přesto považuji podíl 18 % žáků víceletého gymnázia, kteří nedosáhli čtvrté úrovně v žádné ze tří oblastí, za příliš vysoký. Většina těchto žáků na výběrovou všeobecně vzdělávací školu nepatří.

Oblast	Zastoupení žáků (%)					
	ČR	ZŠ	Gv	G4	SŠmat	SŠnemat
žádná	74,5	88,3	18,5	23,7	72,5	97,4
jen čtení	1,6	0,9	1,6	6,6	2,4	0,0
jen matematika	4,2	2,3	8,5	4,4	7,0	1,9
jen přírodní vědy	2,4	2,5	2,1	3,7	2,9	0,5
čtení + matematika	1,3	0,3	3,3	6,1	1,7	0,0
čtení + přírodní vědy	1,2	0,8	1,6	5,3	1,1	0,3
mat. + přír. vědy	4,9	2,6	12,5	11,9	6,6	0,0
všechny tři	10,0	2,3	51,9	38,3	5,8	0,0

Tab. 1: Žáci s velmi dobrým výsledkem podle typu studia, PISA 2009

V České republice je přibližně 20 % žáků, kteří dosáhli alespoň čtvrté úrovně způsobilosti v matematické gramotnosti. Na základní škole tito žáci tvoří přibližně 7 %, na víceletém gymnáziu 76 %, na čtyřletém gymnáziu 61 %, ve středoškolských odborných oborech ukončených maturitou jich je 21 % a v nematuritních oborech asi 2 %.

Literatura

[1] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P.: *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's Trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2008.

[2] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Arora, A.: *TIMSS 2011 international results in mathematics.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, 2012.

[3] OECD: *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I).* `http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en`, 2010.

[4] Tomášek, V. et al.: *Národní zpráva TIMSS 2011.* Česká školní inspekce, Praha, 2012.

Program Hodnocení žáků a škol podle výsledků v soutěžích – Excelence středních škol

Michal Urban, MŠMT, Praha [1]

Abstrakt. *Článek krátce informuje o tzv. programu Excelence středních škol, a to hlavně o jeho významu, cílech a možnostech využití. Také uvádí statistiku udávající počet zapojených škol a vynaložené částky na projekt.*

V roce 2011 Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT) vyhlásilo pilotní rozvojový program Hodnocení žáků a škol podle výsledků v soutěžích – Excelence středních škol (dále jen program), jenž měl za cíl:

- podporu zvyšování kvality a rozšiřování péče o talentované středoškolské žáky, kteří jsou schopni dosahovat vynikajících výsledků
- posílení zájmu a motivace žáků, pedagogických pracovníků a škol vzhledem k účasti v soutěžích a přehlídkách, a tak zvyšování vědomostní úrovně žáků nad rámec školních vzdělávacích programů
- podporu zájmu žáků o přírodovědné, technické a další vybrané předměty a vytváření předpokladů pro přípravu dostatečného počtu špičkových odborníků v preferovaných oborech
- podporu aktivit pedagogických pracovníků zaměřených na žáky, v jejichž silách je schopnost dosahovat výborných výsledků, a to i v rámci mimoškolních vzdělávacích aktivit
- finanční ocenění úsilí pedagogických pracovníků středních škol při vzdělávání žáků podle výsledků v soutěžích vyhlašovaných a spoluvyhlašovaných MŠMT

Program umožňuje:

- středním školám získat, na základě podané žádosti, dotaci podle výsledků, kterých jejich žáci dosáhli v soutěžích vyhlašovaných a spoluvyhlašovaných MŠMT v předcházejícím školním roce ve věkové kategorii nad 15 let
- cílení finančních prostředků na platy těch pedagogů, kteří se podíleli na vzdělávání žáka v oboru, v němž byl úspěšný v soutěži (krajské, ústřední a mezinárodní kolo)

[1] e-mail: michal.urban@msmt.cz

Databáze programu umožňuje:

- jednoduché vygenerování žádosti školy (školy mají na podání žádosti 4 týdny) z elektronického systému na adrese

  `http://excelence.nidm.cz/`
- snadné zapisování údajů o účastnících do předem připravených výsledkových formulářů (jméno a příjmení, pořadí, škola, rok narození)
- informování veřejnosti o výsledcích jednotlivých kol soutěží
- automatické přidělování bodů: krajská kola – do šestého místa; ústřední kola – dostává 30 % účastníků; vítězové krajských a ústředních kol – obdrží ještě body za umístění do 3. místa; mezinárodní kola – ohodnoceni jsou všichni účastníci

Následující tabulka uvádí přehled dosavadních základních parametrů realizace dotačního programu:

Rok	Počet zapojených škol	Počet soutěží a kategorií	Počet výsledkových listin	Počet hodnocených žáků	Hodnota bodu v Kč	Počet škol s dotací nad 100 tis. Kč	Celková částka v mil. Kč
2011	291	33	262	1 915	17 060	65	20
2012	385	98	706	3 800	9 580	56	20

MŠMT vyhlásilo program v letošním roce dne 1. dubna 2013. S úplným textem programu je možné se seznámit na webových stránkách [1].

MŠMT předběžně počítá s tím, že částka alokovaná v roce 2014 pro program bude mít výši 20 mil. Kč.

Literatura

[1] `www.msmt.cz/mladez/podpora-soutezi-a-prehlidek-v-zajmovem-vzdelavani`.

Matematika, fyzika a výchova ke kritickému myšlení

Ivo Volf, Univerzita Hradec Králové [1]

ABSTRAKT. „Kritické myšlení, kritický postoj *nebo také* kritičnost *(z řeckého krinein, rozlišovat, posuzovat) znamená schopnost nepodléhat prvnímu dojmu, obecnému mínění nebo naléhavosti nějakého sdělení, nepřebírat naivně tradované názory, nýbrž dokázat zaujmout odstup a vytvořit si vlastní názor na základě vědomostí a zkušeností jak vlastních, tak jiných důvěryhodných osob.“ (podle Wikipedie)*

Učení se o životě a pro život

Není divu, že jedním z cílů středoškolského vzdělávání je vést žáky ke kritickému myšlení, stejně jako rozvíjet jejich čtenářskou, matematickou, finanční či přírodovědnou gramotnost. Prostě absolvent střední školy, zejména pak ten, který nebude dále rozvíjet své vzdělání na školách vyššího stupně, by měl získat nejen dovednost logického myšlení, k čemuž mu nejvíce napomáhá především matematika, popř. matematická logika, ale měl by umět výsledky své myšlenkové činnosti dát do souvislosti se svými životními zkušenostmi i s okolím, které ho obklopuje. Stručně se dá říci, že jde tedy o *učení se o životě i pro život*, což se sice o středoškolské přípravě dlouhodobě a všeobecně tvrdí, ale současně se o tom také mnohdy pochybuje.

Čím přispívá MATEMATIKA k výchově žáků pro ŽIVOT?

Není divu, že jedním z cílů středoškolského vzdělávání je vést žáky ke kritickému myšlení, stejně jako rozvíjet jejich čtenářskou, matematickou, finanční či přírodovědnou gramotnost. Prostě absolvent střední školy, zejména pak ten, který nebude dále rozvíjet své vzdělání na školách vyššího stupně, by měl získat nejen dovednost logického myšlení, k čemuž mu nejvíce napomáhá především matematika, popř. matematická logika, ale měl by umět výsledky své myšlenkové činnosti dát do souvislosti se svými životními zkušenostmi i s okolím, které ho obklopuje. Stručně se dá říci, že jde tedy o učení se o životě i pro život, což se sice o středoškolské přípravě dlouhodobě a všeobecně tvrdí, ale současně se o tom také mnohdy pochybuje.

[1] e-mail: ivo.volf@uhk.cz

Čím vlastně přispívá FYZIKA k výchově žáků PRO ŽIVOT?

Zvážíme-li cíle výuky fyziky, dospíváme k tomu, že základním cílem je naučit žáky pohledu na život z hlediska jiného, než je popis obecně lidský (tedy s použitím obecného jazyka) – pomocí exaktních fyzikálních charakteristik, které dokážeme spojit do fyzikálních zákonů, dokážeme řešit životní problémové situace, ale ve všech případech jenom v určitých modelových situacích, které vedou k hypotézám, jež musíme potom ověřovat na základě své zkušenosti či podle již dříve získaných informací jinými lidmi. Výuka školské fyziky je tedy výukou fyzikálních modelů, která postupně vede k tzv. fyzikálnímu popisu reality nás obklopující. K tomu však potřebujeme zvládnout „kritické myšlení“.

Lze učit žáky teorii kritického myšlení?

Bohužel, místo toho, aby výchova ke kritickému myšlení a uvažování dnes doprovázela učitele i žáky ve všech školních vyučovacích předmětech, kde se to hodí, se na školách zavádějí speciální předměty nebo kursy, v nichž se účastníci zaměřují na tuto výchovu. Víme však již z logiky, že vyučovat „čistému“ logickému myšlení je nemožné, a také asi výchovně nezdravé – logické myšlení na jednotlivých případech, vypreparovaných ze skutečnosti, opomíjí vzájemný přirozený vztah daného problému a jeho okolí, a také postupné vytváření vhodného modelu pro zobrazení této skutečnosti, v němž potom mohou platit zjednodušené zákonitosti, jež jsou však obsahem výuky humanitních, ale i přírodovědných předmětů. Ty totiž formulují určité obecně platné objektivní zákonitosti platící nejen v jednotlivostech.

Jak se to může projevovat při výuce na ZŠ a SŠ?

Základním prostředkem modelování ve výuce fyziky je možnost formulovat situaci jako fyzikální úlohu. Její řešení dokážeme podle známé strategie rozložit na několik kroků, z nichž některé mají „výzkumný“ charakter a je nutno během nich vytvářet hypotézy a ty následně ověřovat, jiné využívají ryze logických důsledků, jež plynou z přijatých a ověřených zákonitostí. Pochopitelně řadu tvrzení v procesu řešení problému je třeba přijmout bez větších námitek, ale mnoho z nich musíme kriticky zhodnotit. Výchova žáků ke kritickému myšlení v procesu řešení fyzikálních úloh je tedy zcela přirozeným procesem. Jednotlivé situace se ve výuce fyziky objevují „zcela přirozeně“.

V kterých fázích strategie řešení se kritické myšlení objevuje?

Rozložíme-li proces řešení daného problému do jednotlivých etap strategie jeho řešení, potom kritické myšlení se objevuje v některých etapách více a jinde zase méně; podívejme se tedy na tento proces s ohledem na to, kdy se kritické myšlení uplatňuje či kdy ho nenalézáme:

- seznámení se s obsahem úlohy a předloženým problémem;
- zjišťování informací daných v textu úlohy či v jiném zadání, ověření jejich objektivní pravdivosti;
- nalezení vhodných fyzikálních modelů, nutných k řešení dané problémové situace;
- posouzení vhodných matematických přístupů na základě zkušeností řešitelů a jejich předchozí přípravy;
- posouzení získaného výsledku a porovnání dané otázky a možnosti stanovení odpovědi na ni;
- diskuse získaného výsledku s ohledem na vytvořený model k řešení a k zjednodušujícím podmínkám, které byly v procesu řešení použity

Uvedeme několik ilustračních příkladů:

Úloha 1 *Podivné dědictví*
Než zemřel starý kočovník, který vlastnil stádo 17 velbloudů, vyslovil své rozhodnutí – až zemře, bude jeho dědictví rozděleno takto: nejstarší syn obdrží polovinu stáda, druhorozený syn třetinu a třetí syn jako nejmladší devítinu stáda. Při realizaci posledního přání kočovníka se dostali dědicové do zvláštní situace – polovinu stáda představovalo osm nebo devět kusů, přesně 8,5 velblouda, což by vedlo k zabití jednoho zvířete. Stejně tak třetinu představovalo pět nebo šest velbloudů a devítinu nejvýše dva kusy.

Když se o tomto dědictví dozvěděl nedaleko žijící kočující matematik, chtěl zabíjení zvířat zabránit a navrhl, aby si od něj vypůjčili jednoho velblouda, kterého užijí při dělení – teď jich budou mít 18, přičemž polovinu bude představovat 9 zvířat, třetinu 6 a devítinu 2 zvířata, což je dohromady 17, a vypůjčeného velblouda mu potom vrátí. Otázka zní: bylo dědictví rozděleno spravedlivě a podle přání kočovníka?

Zde nastoupí matematika: Jestliže počet 17 rozdělíme podle posledního přání kočovníka, potom polovinu představuje $8\frac{1}{2}$ zvířete, třetinu $5\frac{2}{3}$ a devítinu $1\frac{8}{9}$, tedy dohromady je to 14 celých zvířat a 3 zvířata se musí „rozdělit“; to ovšem přináší nepříjemné důsledky pro kočovníkovy syny. Navrhované řešení kočovným matematikem vede k tomu, že

9 zvířat představuje pro nejstaršího syna 0,53 dědictví, pro druhého syna 0,35 dědictví a nejmladší by dostal 0,12 dědictví, což dává celkově 1,00. Když výpočet provedeme s větší přesností, potom jsou uvažované údaje tyto: $0{,}526\,4 + 0{,}353\,0 + 0{,}117\,6 = 0{,}997$, chybí tedy v součtu 0,3 %, což je vzhledem k navrhovanému způsobu zanedbatelná „nepřesnost“. Zajímavé na tom je, že se vypůjčený velbloud vrátil celý k majiteli, ale každý ze synů dostal víc, než měl: první měl dostat 0,500, druhý 0,333 a třetí 0,111. Všichni tedy byli spokojeni.

Úloha 2 *Je polovina opravdu 50 %?*
Ve školské matematice se žáci učí, že polovina celku představuje přesně 50 %. Je to však celá pravda? Ve školské fyzice jsou (bývají?) zařazeny laboratorní práce, v nichž se žáci seznamují s teorií chyb (dneska správněji: nepřesností měření). Celek rozdělíme na dvě zcela stejné části, avšak to můžeme učinit pouze na základě (nepřesného) měření a na něj navazujícího dělení. Při řešení úloh pak žáci poznávají, že délka 0,5 m = 5 dm je zjištěna s přesností na jednu číslici. Při přesnějším měření můžeme dospět k hodnotám 0,50 m = 50 cm, 0,500 m = 500 mm. V prvním případě spadá naměřená hodnota do intervalu 0,45 m až 0,55 m, ve druhém do intervalu 0,495 m až 0,505 m, tedy 49,5 cm až 50,5 cm, ve třetím 495 mm až 505 mm. Nemůžeme tedy jednoznačně napsat, že $1/2 = 0{,}5 = 0{,}50 = 0{,}500$, neboť výsledek záleží na míře přesnosti, kterou jsme zvolili.

Úloha 3 *Proč není správné psát 1 dkg?*
Dekagram (oficiální značka v soustavě SI je dag, ale v běžném životě se častěji používá zastaralé označení dkg) je deset gramů, tedy jedna setina kilogramu. Je to jednotka používaná převážně v maloobchodě s potravinami. Čech mluvící hovorovou češtinou, kupující množství menší než jeden kilogram, většinou definuje požadované množství v dekagramech (Dejte mi 20 deka šunky, prosím.). Přestože jednotková cena se v maloobchodě zpravidla udává na 100 gramů nebo na kilogram, český zákazník kupuje na deka. `http://cs.wikipedia.org/wiki/Kilogram`

Jak lze jednotku dekagram, tedy dkg, chápat? Zkratku dkg rozložíme správněji na dvě na sebe navazující předpony d = 1/10 a k = 1 000, tedy 1 dk = 100. Odtud 1 dkg = 1 hg = 100 g, a proto 10 dkg = 1 000 g = = 1 kg. Cena, např. uzenin, za 10 dkg je potom rovna ceně za 1 kg, což odporuje „obchodní“ zkušenosti, zůstaneme tedy raději u značky dag, eventuálně Dg.

Úloha 4 *Lze pomocí kompasu či buzoly stanovit přesně severní směr?* Ve výuce přírodovědy, v turistice a dříve i ve výuce fyziky bychom našli jednoduchou odpověď na tuto jednoduchou otázku – podélná osa magnetické střelky směřuje k severu, popř. směrem severojižním. Současně se však žáci učili, že dva tyčové magnety se tzv. nesouhlasnými póly přitahují a souhlasnými odpuzují. Tzv. severní pól magnetu tedy nemůže směřovat k severnímu pólu „velkého magnetu Země“, nýbrž k pólu jižnímu. Proto již delší dobu se při výuce fyziky tvrdí, že magnetická střelka směřuje k jižnímu magnetickému pólu, který je však umístěn na severní polokouli, konkrétně v oblasti severní Kanady – podle údajů byl umisťován v roce 2005 na $82°42'$ severní šířky a $114°24'$ západní délky. Tato poloha se neustále mění. Pro přesné stanovení rozložení magnetického pole Země je nutno tyto změny sledovat, proto se stanovuje odchylka směru zeměpisného a magnetického severu, jak můžeme zjistit z odborné literatury.

Úloha 5 *Jak stanovit přesně severní směr pomocí ručkových hodinek?* V turistickém kroužku, ale i v hodinách zeměpisu jsme se učili, jak stanovit severní směr pomocí ručkových hodinek: Hodinky umístíme do vodorovné polohy, malou ručku hodinek nasměrujeme na Slunce a rozpůlíme úhel mezi malou ručkou a dvanáctkou; toto je jižní směr.

Platí tento způsob vždy a všude? Dlouho mě osobně trápilo, proč se úhel musí půlit – nikdo mi to ve škole nikdy nevysvětlil. Později jsem zjistil, že úhlová rychlost pohybu Slunce po obloze je poloviční, než je úhlová rychlost malé, tedy hodinové ručky (Slunce vykoná při zdánlivém pohybu úhel $360°$, tedy jednu otočku za dobu 24 h, hodinová ručka při skutečném pohybu za 12 h).

Když je Slunce přesně na jihu, je na daném místě tzv. pravé poledne. Hodinky však ukazují ne pravý sluneční čas, ale pásmový čas, který může ideálně platit v pásmu míst, které se liší co do zeměpisné délky nejvýše o $\pm 7{,}5°$, tedy celkem o $15°$, což představuje celkem časový rozdíl 1 hodiny pro místní poledne. To, co u nás platí pro body dané polohou $15°$ východní délky, vede k nepřesnosti ve stanovení severojižního směru o úhel, daný polovinou ze $7{,}5°$, tedy o $3°75'$. Druhým problémem je tzv. letní čas – v okamžiku, kdy Slunce na $15°$ východní délky kulminuje, je během platnosti letního času na našich hodinkách již 13 h, tedy nutno půlit jiný než jmenovaný úhel. Rozdíl může činit polovinu z úhlu, který přísluší středovému úhlu mezi 12 a 1, tedy po vydělení dalších $15°$.

Úloha 6 *Může být na obloze Mars stejně velký nebo větší, než je Měsíc?* Dostal jsem loni v květnu po internetu zprávu, že dne 27. srpna 2012 bude pozorovaný Mars větší než Měsíc v úplňku. V průběhu června a července se prý bude Země stále více přibližovat k Marsu, a v tento den budou nejblíže. Mars bude vidět stejně velký jako Měsíc, takže bude dobře viditelný prostým okem. Jev bude způsoben přitažlivostí planety Jupiter. Dále se ve zprávě hovoří o tom, že planety se budou přitahovat s intenzitou $-2{,}9$ a Mars se objeví v oblouku 25,11 vteřin.

A proto nastoupila opět matematika a fyzika jako prostředky k pěstování kritického myšlení. Na základě předchozích informací týkajících se Marsu a Měsíce jsem byl opatrný a začal počítat, tedy snažil se kriticky přistupovat k této přijaté informaci. Zprávy na internetu mohou být různé, některé pravdivé, jiné nepravdivé, některé nepřesné. Ovšem pravda o tom, že koncem srpna bude vidět Mars jako větší, než je Měsíc, patří mezi obrovské nesmysly. Podívejme se na fakta, kvůli zjednodušení některé údaje zaokrouhlíme, což však nebude ve výsledku mít negativní důsledek pro kritický přístup k výše uvedené informaci.

Problémy budeme rozkrývat per partes. Nejprve dekódujeme informaci týkající se přitahování Marsu Jupiterem – tím by se Mars od Země asi vzdálil na větší vzdálenost a přibližování planet by nebylo tak výrazné. Informace $-2{,}9$ se možná týká hvězdné velikosti – Mars bude opravdu dosti jasným objektem. Výpočty úhlové velikosti Marsu dávají potom hodnotu 25,12 úhlové vteřiny, pro Měsíc vychází 30,5 úhlové minuty. Údaj o vzájemné nejmenší vzdálenosti obou těles – Země a Marsu byl zapsán jako 34.649.589 miliónů km, což je zřejmý nesmysl.

Země obíhá Slunce po mírně excentrické (výstředné) elipse, dost podobné kružnici. Od Slunce je nejdále 152 miliónů km, nejblíže 147 miliónů km, tedy průměrně je vzdálena 149,5 miliónů km. Mars se pohybuje po značně výstředné eliptické trajektorii ve střední vzdálenosti od Slunce asi 228 miliónů km, nejblíže Slunci je 206,6 miliónů km a nejdále 249,2 miliónů km. Pro dráhy Země a Marsu v místě jejich nejmenší vzájemné vzdálenosti pak vychází asi 54,5 miliónů km. Údaj uvedený ve zprávě je pravděpodobně v anglických mílích (1 míle = 1 609 m).

Dále uvedeme: Měsíc má průměr 3 474 km a je ve střední vzdálenosti od Země 384 400 km (tedy nejméně asi 357 tisíc km a nejvíce 407 tisíc km). Mars má průměr 6 772 km, který je tedy ve skutečnosti asi dvakrát větší než Měsíc; bude však 54 500 : 384 = 142krát dále než Měsíc. Takže uvažujme: dvakrát větší průměr, ale 142krát dále dává zdánlivý úhlový průměr asi 70 krát menší. Kritické myšlení je způsob, jak zabránit tomu, že bezmezně uvěříme každé informaci, kterou získáme. A ještě jsme případ, který to vlastně vše vyvolal, podrobně prozkoumali.

Úloha 7 *Jak prožít jeden den dvakrát či jak se naopak jednomu dni vyhnout?*
Hrdinové z knížky J. Verna Cesta kolem světa za 80 dní se vrátili do Londýna s přesvědčením, že prohráli sázku: urazit cestu kolem světa za 80 dní – vydali se na cestu směrem východním a vrátili se od západu.

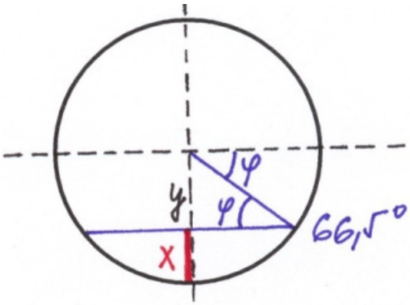
K měření času se používá tzv. pásmového času, kdy zpravidla poté, co se posuneme o 15° východně, musíme s ohledem na rotaci Země posunout hodinky o 1 hodinu napřed. Je-li na Greenwichské hvězdárně, kde měří WTO, 12:00 h, potom na 180° východní délky je již 24:00 a na 180° západní délky 0:00 h téhož dne. Překročením směrem východním se tedy dostaneme z konce dne na jeho počátek, a tak ho musíme prožívat znovu; na tomto faktu postavil J. Verne zápletku svého fantastického románu. Půjdeme-li směrem opačným, budeme muset jeden den vynechat, neboť z počátku dne překročíme na jeho konec.

Úloha 8 *Nejvyšší kolo (Ferris Wheel) je umístěno na mořském břehu v Singapuru a dosahuje do výšky 168 m.*
Do jaké vzdálenosti lze vidět z nejvyššího bodu, do něhož se dostane cestující v kabince? Užitím Pythagorovy věty a zanedbáním výšky h oproti poloměru Země (Singapur je skoro na rovníku, tedy 6 378 km) dostaneme pro vzdálenost dohledu na úrovni mořské hladiny přibližně 42,3 km, tedy z kabinky je vidět celý ostrovní stát.

Úloha 9 *Velitel kosmické lodi hlásil kosmickému středisku Tidbinbilla nedaleko Canberry, že se nachází nad Austrálií a že právě vidí celý světadíl. V jaké výšce se kosmická loď nacházela? Jakou rychlostí se kosmická loď pohybovala?*
K výpočtu potřebujeme odhadnout rozměry australského kontinentu, což zjistíme použitím atlasu nebo satelitní mapy. Zjistíme, že pozorovaný rozměr je menší než 4 100 km, tedy že Austrálie se vejde do kruhu o poloměru asi 2 050 km. Odtud odhadneme výšku kulového vrchlíku na 330 km a následně výšku kosmické lodi nad povrchem asi 332 km. Tento údaj pak použijeme při výpočtu doby oběhu i rychlosti kosmické lodi, což půjde nejlépe za předpokladu, že její trajektorie má tvar kružnice.

Úloha 10 *Určete plošný obsah Antarktidy.*
Při pohledu na mapu světa zjistíme, že Antarktida zabírá přibližně dvě

třetiny území, které je ohraničeno jižním polárním kruhem. Využijeme tohoto poznatku pro výpočet povrchu Antarktidy. Zemi považujeme za ideální kouli s poloměrem 6 371 km. Nejprve musíme určit výšku x vrchlíku, který je určen na kouli polárním kruhem, tedy rovnoběžkou 66,5°. Z obr. 1 plyne závěr pro délku $y = 5845$ km. Potom $x = 528$ km. Pro povrch vrchlíku platí: $S = 2\pi R_Z x = 21\,135\,932\ \mathrm{km}^2$, přičemž dvěma třetinám odpovídá povrch přibližně $14\,000\,000\ \mathrm{km}^2$.



Obr. 1

Několik slov závěrem

Ve všech našich úvahách jsme experimentovali; tyto experimenty však neproběhly s reálnými pomůckami. Pracovali jsme s internetem, potřebné hodnoty jsme získávali na satelitních mapách, případně jsme hledali potřebné údaje ve Wikipedii. Na druhé straně jsme však zjistili, že jsme museli postupovat stejně, jako bychom dané údaje získali přímým nebo nepřímým měřením. Tak, jako žijí lidé ve virtuálním světě, vytvořeném pomocí počítače a příslušných programů, také my jsme pracovali s virtuálními hodnotami, a to ve *virtuálních fyzikálních experimentech*. Tak se svět reálné fyziky, jenž děti moc nezajímá a nedokážeme někdy překročit hranice k dětem, začal podobat světu dětské hry s počítačem. Co když právě toto je cesta ke „zlidštění" (pro děti) málo zajímavé fyziky?

Literatura

[1] Volf, I., Klapková Dymešová, P: *Na rozhraní mezi fyzikou a zeměpisem.* `http://cental.uhk.cz`.

[2] Volf, I.: Kritické myšlení a zpracování informací. *Media4u Magazíne* **3** (2012), s. 21–25.

KRÁTKÉ PŘÍSPĚVKY A PRACOVNÍ DÍLNY

Optimální mince a bankovky

Ľubomíra Balková, FJFI ČVUT, Praha [1]

ABSTRAKT. *Už jste se někdy zamysleli nad tím, v čem je výhoda našich mincí a bankovek? A je vůbec nějaká? Je pravda, že zaplatíme libovolnou částku relativně malým počtem bankovek a mincí? Platí, že dostaneme minimální počet použitých bankovek a mincí pomocí tzv. hladového algoritmu? A nehodilo by se přidat mezi české bankovky či mince nějakou novou hodnotu, která by umožnila průměrný počet bankovek použitých při placení o hodně zmenšit? Téma bankovek by mohlo být vhodné pro středoškolské studenty s hlubším zájmem o matematiku či programování.*

Platba pomocí mincí

Cílem je platit (skládat pomocí mincí všechny možné částky – v praxi stačí obvykle částky do výše nejmenší bankovky) co nejefektivněji. Příklady budeme uvádět na US centech; mají hodnoty $1, 5, 10$ a 25 centů. Studenti si pak mohou popřemýšlet nad analogiemi v českém platebním systému s mincemi v hodnotách $1, 2, 5, 10, 20$ a 50 Kč.

Efektivita placení pak může mít různé podoby, jak ukážeme v následujícím textu (není ovšem zahrnuta podmínka, že se má v daném systému lidem co nejlépe počítat zpaměti).

Nejdříve ale ještě zavedeme pojem reprezentace. Nechť jsou dány hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ (uspořádané vzestupně), přičemž $e_1 = 1$ (aby šlo zaplatit každou částku). Uvažujme částky n v hodnotách od 1 do N, kde N je hodnota nejmenší bankovky. Každou D-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, kde $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, takovou, že

$$n = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_De_D,$$

nazveme *reprezentací* částky n. Počet použitých mincí v dané reprezentaci značíme $\operatorname{cost}(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, tedy

$$\operatorname{cost}(a_1, a_2, \ldots, a_D) = a_1 + a_2 + \cdots + a_D.$$

[1] e-mail: lubomira.balkova@fjfi.cvut.cz

Příklad 1 V US centech platí, že reprezentace 30 je např. $(30, 0, 0, 0)$, protože $30 = 30 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 25$, nebo $(0, 2, 2, 0)$, protože $30 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10$. Pak platí $\mathrm{cost}(30, 0, 0, 0) = 30$ a $\mathrm{cost}(0, 2, 2, 0) = 4$.

Použití minimálního počtu mincí

Má-li nám prodavačka vrátit 30¢, pak je lepší dostat 25¢ a 5¢ než 30krát 1¢. Definujeme *optimální reprezentaci* částky n následovně: Pokud je součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_D$ v reprezentaci n minimální mezi všemi možnostmi, tj. podle zavedeného značení je minimální $\mathrm{cost}(a_1, a_2, \ldots, a_D)$, pak nazveme $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$ *optimální reprezentací* částky n.

Příklad 2 V US centech platí, že $(0, 1, 0, 1)$ je reprezentace $30 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 25$ a $\mathrm{cost}(0, 1, 0, 1) = 2$. Zároveň jde o optimální reprezentaci – méně než dvěma mincemi 30¢ nezaplatíme.

Optimální systém mincí

Cílem je najít hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ pro dané D tak, aby průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do N byl minimální. Předpokládáme, že všechny částky jsou stejně pravděpodobné, což v reálném životě díky oblibě částek končících devítkou není pravda.

Příklad 3 Pro centy je průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do 100 roven $4,7$. Se systémy $1, 5, 18, 25$ a $1, 5, 18, 29$ by to bylo $3,89$, což jsou optimální systémy pro $D = 4$. Podle systému $1, 5, 18, 25$ se jmenuje článek [1], z kterého čerpáme. Je totiž vidět, že kdyby se v US systému nahradil desetník mincí v hodnotě 18¢, pak by vznikl optimální systém. Samozřejmě k tomu nedojde, protože lidé neumí rychle zpaměti počítat s číslem 18.

Jakou minci přidat pro přiblížení optimalitě

Jakou jednu minci přidat, aby se snížil co nejvíce průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do N?

Příklad 4 Pro centy je nejvýhodnější přidat 32¢, pak v systému $1, 5, 10, 25, 32$ je průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do 100 roven $3,46$. Ovšem optimální systém obsahující 5 mincí je $1, 5, 16, 23, 33$ a průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci částek od 1 do 100 je roven $3,29$.

Optimalita versus hladový algoritmus

Platí v daném systému, že optimální reprezentace vždy odpovídá reprezentaci získané hladovým algoritmem? *Hladovou reprezentaci* částky n získáme tak, že vezmeme co nejvíce mincí v hodnotě e_D, co se do n vejdou, a označíme tento počet a_D. Pak vezmeme co nejvíce mincí v hodnotě e_{D-1}, co se vejdou do $n - a_D e_D$, atd. Pak získaná reprezentace $(a_1, a_2, \ldots, a_D)$ bude hladová.

Příklad 5 Pro centy je hladová a optimální reprezentace každé částky od 1 do 100 stejná. Ale pro systém mincí v hodnotách $1, 7, 10$ není hladová reprezentace $14 = 10 + 1 + 1 + 1 + 1$ optimální, protože také platí $14 = 7 + 7$.

Optimální systém mincí pro hladový algoritmus

Cílem je najít hodnoty mincí $e_1, e_2, \ldots, e_D$ pro dané D tak, aby průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci částek od 1 do N byl minimální.

Příklad 6 Pro centy je průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci částek od 1 do 100 roven $4,7$ (protože hladové a optimální reprezentace se pro US centy neliší). Optimální systémy pro hladový algoritmus obsahující 4 mince jsou $1, 3, 11, 37$ a $1, 3, 11, 38$, pak průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci částek od 1 do 100 je roven $4,1$.

Jakou minci přidat pro přiblížení hladového algoritmu optimalitě

Jakou jednu minci přidat, aby se snížil co nejvíce průměrný počet použitých mincí v hladové reprezentaci částek od 1 do N?

Příklad 7 Při přidání centů v hodnotě 2 nebo 3 k $1, 5, 10, 25$ se nejvíce sníží průměrný počet mincí v hladovém algoritmu, a to ze 4.7 na 3.9. (USA v historii mince v hodnotě 2¢ a 3¢ používaly.)

Otázky a úkoly pro studenty

1. Najděte optimální reprezentace částek od 1 do 100 v českém systému mincí (1, 2, 5, 10, 20, 50 Kč).
2. Jaký je průměrný počet mincí v optimálních reprezentacích částek od 1 do 100 českými mincemi?

3. Český systém mincí není optimální. Optimální systémy obsahující 6 mincí jsou $(1, 4, 6, 21, 30, 37)$ a $(1, 5, 8, 20, 31, 33)$. Pro tyto sytémy spočtěte průměrný počet mincí v optimálních reprezentacích částek od 1 do 100 a ukažte tím, že jde o číslo menší než pro český systém.
4. Jakou minci přidat, aby se co nejvíce snížil průměrný počet použitých mincí v optimální reprezentaci v českém systému?
5. Platí i v českém systému, že optimální a hladová reprezentace jsou pro každou částku od 1 do 100 stejné?
6. Jaký je průměrný počet mincí při placení částek od 1 do 100 hladovým algoritmem českými mincemi? (Navazuje na předchozí bod.)
7. Jakou minci přidat, aby se co nejvíce snížil průměrný počet použitých mincí v hladovém algoritmu?
8. Vymyslete další podmínky na efektivitu platby mincemi. Navrhněte systémy, které budou efektivní podle nového kritéria.

Literatura

[1] Kleber, M., Vakil, R., Shallit, J.: What this country needs is an 18¢ piece. *Mathematical Intelligencer* **25**, 2 (2003), s. 20–23.

Aritmetické a geometrické posloupnosti, mnohočleny

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu [1]

Abstrakt. *Článek se pokouší zdůraznit a dokázat vztah mezi dvěma odlišnými matematickými objekty. Jde o bijakci mezi polynomy a aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů. Toto téma je vhodné jako diskusní téma pro talentované studenty.*

Motivací tohoto skrovného příspěvku jsou následující tři záměry:

1. Zdůraznit *jednotu matematiky*, tj. atribut, který výstižně vyjádřil znamenitý francouzský matematik Jules Henri Poincaré (1854–1912) (volně přeloženým) citátem *Matematika je umění přiřadit celé řadě jevů*

[1] e-mail: vdlab@math.carleton.ca

tentýž pojem (na rozdíl od poezie, která přiřazuje jednomu jevu celou řadu pojmů). V názvu příspěvku se vyskytují hned tři situace, které jsou navzájem spřízněné.

2. Vyjádřit tyto tři situace na úrovni *gymnaziální matematiky* a ukázat, že jsou vhodné pro program kroužků pro talentované studenty. Domnívám se, že to jsou přitažlivá témata.

3. Přispět k objasnění *(matematické) ekvivalence pojmů*, která se zdá být někdy nepochopena i vlivnými didaktiky matematiky. Loňská čísla časopisu Učitel matematiky jsou toho nepopiratelným dokladem.

Začněme zdánlivě jednoduchou úlohou týkající se n obecně položených bodů $B_1, B_2, \dots, B_n$ (v tomto pořadí) na dané kružnici. Tyto body propojme navzájem tětivami, tedy úsečkami B_iB_j, $1 \le i < j \le n$.

Snadno vidíme, že počet těchto tětiv je

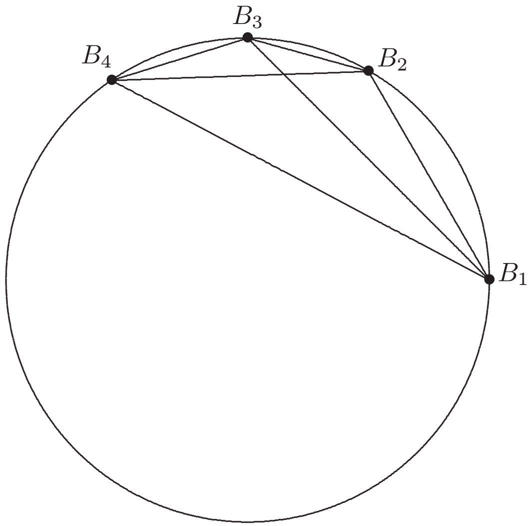
$$(n-1) + (n-2) + \cdots + (i-1) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \\ = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

Stejně snadné je nalézt počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží mezi body $B_1, B_2, \dots, B_n$. Ihned vidíme, že jich je $\binom{n}{3}$. Podobně snadno určíme maximální počet všech průsečíků těchto tětiv. Každý takový průsečík je určen dvěma různými tětivami, tedy čtveřicí bodů, a těchto čtveřic je $\binom{n}{4}$.

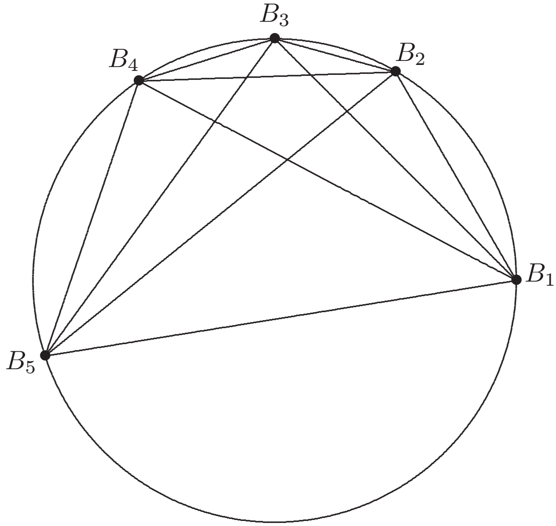
Úloha nalézt maximální počet oblastí, které jsou v kružnici určeny těmito tětivami, už tak snadná není. Označme tento počet $\mu(n)$. Je zřejmé, že pro $n = 1$ je takovou oblastí celý vnitřek kružnice, tj. $\mu(1) = 1$. Stejně snadno vidíme, že $\mu(2) = 2$, $\mu(3) = 4$, $\mu(4) = 8$ (obr. 1) a $\mu(5) = 16$ (obr. 2). Obr. 3 ukazuje (patrně k našemu překvapení), že $\mu(6)$ *není* očekávaných 32, ale 31, a obr. 4 ukazuje, že $\mu(7) = 57$.

Navíc obr. 3 a obr. 4 naznačují, jak je snadné počet $\mu(n+1)$ rekurentně z počtu $\mu(n)$ odvodit. Stačí totiž pouze spočítat kolik oblastí je každou z nových tětiv rozděleno na dvě. Tím určíme přírůstek nových oblastí. V případě $n = 5$ vidíme ihned, že přírůstek je $1+4+5+4+1 = 15$, a že v případě $n = 6$ je přírůstek $1 + 5 + 7 + 7 + 5 + 1 = 26$. Přesvědčte se sami, že další přírůstky jsou $1 + 6 + 9 + 10 + 9 + 6 + 1 = 42$, $1+7+11+13+13+11+7+1 = 64$, $1+8+13+16+17+16+13+8+1 = 93$ atd.

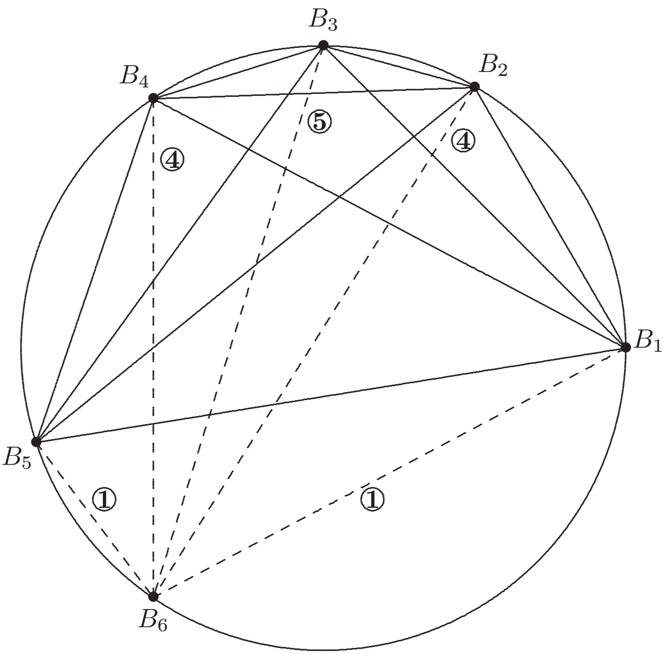
Dostáváme tedy posloupnost $\{1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, \dots\}$.



Obr. 1: $\mu(4) = 8$



Obr. 2: $\mu(5) = 16$



Obr. 3: $\mu(5) = 16$, $\mu(6) = \mu(5) + 1 + 4 + 5 + 4 + 1 = 31$

Budeme se zabývat nenulovými posloupnostmi čísel (buď racionálních, či reálných, a nebo komplexních, prostě z nějakého číselného pole) $p = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ a první jejich člen (pivot) označíme P_0; tedy $a_1 = P_0$.

Na množině všech posloupností definujme operaci *diference*

$$\Delta\colon \Delta p = \{a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n\},$$

a první člen této posloupnosti označíme P_1.

Tato operace hraje už v elementární matematice důležitou úlohu: (Nenulové) posloupnosti p, pro něž jsou posloupnosti Δp konstantní (stacionární), jsou nám právě velmi dobře známé *aritmetické posloupnosti.*

Navíc je možno operaci Δ opakovat (iterovat):

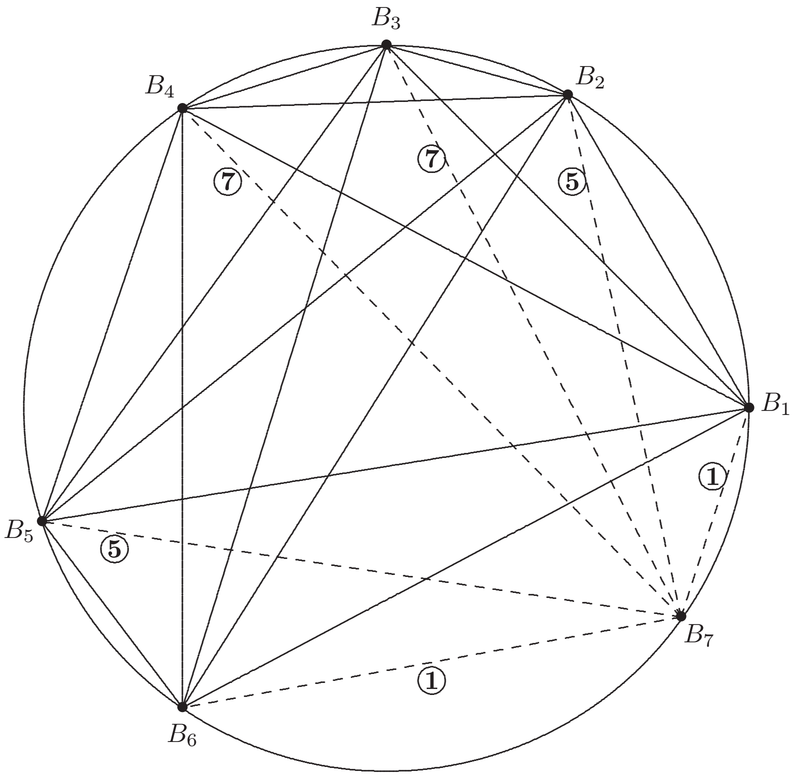
$$\Delta^2 p = \Delta(\Delta p) = \{a_3 - 2a_2 + a_1, a_4 - 2a_3 + a_2, a_5 - 2a_4 + a_3, \ldots\},$$

a obecně pro $n \geq 1$

$$\Delta^{n+1}p = \Delta(\Delta^n p);$$

první člen (pivot) této nové posloupnosti označíme P_{n+1}.

Tato definice nám umožní rozšířit a upřesnit pojem aritmetické posloupnosti. Nulovou posloupnost $\{0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ budeme značit $\mathbf{0}$.



Obr. 4: $\mu(6) = 31$, $\mu(7) = \mu(6) + 1 + 5 + 7 + 7 + 5 + 1 = 57$

Základní definice: Posloupnost p, pro níž

$$\Delta^n p \neq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \Delta^{n+1}p = \mathbf{0},$$

nazveme *aritmetickou posloupností řádu* $n-1$ (aritmetickou posloupností $(n-1)$-ho řádu).

Nenulové stacionární posloupnosti jsou tedy aritmetickými posloupnostmi řádu *nula* (středoškolské), aritmetické posloupnosti, které nejsou stacionární, jsou aritmetickými posloupnostmi řádu *jedna* (aritmetickými posloupnostmi prvního řádu).

Provedeme-li operace Δ na posloupnost čtverců (druhých mocnin) přirozených čísel, dostáváme následující schéma (tj. tato posloupnost je aritmetickou posloupností druhého řádu):

$$\begin{array}{r|ccccccccccc}
p = & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 & \cdots \\
\Delta p = & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & \cdots & \\
\Delta^2 p = & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & & \\
\Delta^3 p = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & &
\end{array}$$

Obr. 5: Aritmetická posloupnost druhého řádu

Při tom je možno vyjádřit n-tý člen této posloupnosti, tedy číslo n^2 pomocí označených pivotních hodnot $P_0 = 1$, $P_1 = 3$ a $P_2 = 2$:

$$a_n = n^2 = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + 3 \cdot \binom{n-1}{1} + 2 \cdot \binom{n-1}{2}.$$

Stejně tak snadno se můžeme přesvědčit, že posloupnost k-tých mocnin přirozených čísel je aritmetickou řadou k-tého řádu a že

$$a_n = n^k = 1 \cdot \binom{n-1}{0} + P_1 \cdot \binom{n-1}{1} + \cdots + P_k \cdot \binom{n-1}{k}.$$

Zde je na místě poukázat (bez důkazů, s odkazem na práci [1]) na *velmi důležitou vlastnost* schémat jako na obr. 6.

$$\begin{array}{r|cccccccc}
p = & P_0 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & \cdots \\
\Delta p = & P_1 & a_3 - a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\Delta^2 p = & P_2 & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\
\Delta^n p = & P_n & \cdots & \cdots & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Obr. 6: $a_n = \sum_{t=0}^{n-1} P_t \cdot \binom{n-1}{t}$ a $s_n = \sum_{t=1}^{n} a_t = \sum_{t=1}^{n} P_t \cdot \binom{n}{t}$

Povšimněte si, že výrazy pro a_n, $n > k$, aritmetické posloupnosti řádu k mají právě $k+1$ členů, tj. a_n je *hodnota jednoznačně určeného polynomu v proměnné n.*

Nyní se vraťme k úvodní úloze. Pro posloupnost $p = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, \dots\}$ dostáváme následující diferenční schéma na obr. 7.

$p =$	1	2	4	8	16	**31**	57	99	163	$\cdots$
$\Delta p =$	1	2	4	8	15	26	42	64	$\cdots$	
$\Delta^2 p =$	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$		
$\Delta^3 p =$	1	2	3	4	5	6	$\cdots$			
$\Delta^4 p =$	1	1	1	1	1	$\cdots$				
$\Delta^5 p =$	0	0	0	0	$\cdots$					

Obr. 7: $a_n = \sum_{t=0}^{n} \binom{n-1}{t} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ a $s_n = \sum_{t=1}^{n} a_t = \binom{n+1}{2} +$ $+ \binom{n+1}{4} + \binom{n}{5}$

Zde si všimněme, že prvních pět členů posloupnosti p tvoří *geometrickou posloupnost.* Diferenční schéma (až na konstantní činitel) obecné geometrické posloupnosti

$$g = \{1, q, q^2, q^3, \dots, q^{n-1}, \dots\} \tag{$*$}$$

je zcela jednoduché, neboť každá posloupnost $\Delta^n g$ je opět geometrická posloupnost s týmž kvocientem q a prvním, tj. pivotním, členem

$$P_n = (q-1)^n.$$

Odtud ihned odvodíme (na pomoc si můžeme napsat příslušné diferenční schéma), že pro danou geometrickou posloupnost $(*)$ existuje *jednoznačně* aritmetická posloupnost k-tého řádu

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q-1)^k \binom{n-1}{k},$$

splňující podmínku $a_n = q^{n-1}$ pro všechna $n = 1, 2, \dots, k+1$.

Pro geometrické posloupnosti s kvocientem 2 jsou příslušné výrazy jednodušší, neboť všechny nenulové pivotní hodnoty jsou rovny 1. Odtud dostáváme výraz uvedený pod obr. 7. Zde máme

$$a_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4},$$

a tento výraz lze použitím vzorce, který už v desátém století používal *Al Karaji* (953–1029), přepsat do tvaru

$$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n-1}{4}.$$

Porozumnění vztahu mezi polynomy a aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů ihned odhalí, že ve vztahu mezi aritmetickými a geometrickými posloupnostmi není nic speciálního. Neboť pro zcela libovolnou konečnou posloupnost n čísel $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ existuje jednoznačně polynom $A(x)$ stupně $n-1$ takový, že $A(k) = a_k$ pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Příslušné diferenční schéma určuje jeho explicitní tvar. Zároveň ukazuje, že

$$\left\{ \binom{n-1}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \ldots, \binom{n-1}{k}, \ldots \right\}$$

je (nekonečná) báze vektorového prostoru polynomů. Tedy každý polynom je jednoznačnou lineární kombinací prvků této báze. Např. pro polynom $A(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 10$ máme $A(1) = 1$, $A(2) = -6$, $A(3) = -19$ a $A(4) = -26$. Prvními členy příslušné aritmetické posloupnosti jsou tedy $1, -6, -19, -26$ a diferenční schéma můžeme snadno doplnit na schéma na obr. 8.

$p =$	**1**	-6	-19	-26	$\bullet -15$	$\bullet 36$	$\cdots$
$\Delta p =$	**−7**	-13	-7	$\bullet 11$	$\bullet 51$	$\cdots$	
$\Delta^2 p =$	**−6**	6	$\bullet 18$	$\bullet 40$	$\cdots$		
$\Delta^3 p =$	**12**	$\bullet 12$	$\bullet 12$	$\cdots$			
$\Delta^4 p =$	$\bullet 0$	$\bullet 0$	$\cdots$				

Obr. 8

Je tedy

$$A(n) = 2n^3 - 15n^2 + 24n - 10 =$$
$$= \binom{n-1}{0} - 7\binom{n-1}{1} - 6\binom{n-1}{2} + 12\binom{n-1}{3}.$$

Viděli jsme, že každá aritmetická posloupnost řádu k je jednoznačně určena svými prvními $k+1$ členy. Pro aritmetickou posloupnost (prvního řádu) to znamená, že jsou-li a_1 a $a_2 \neq a_1$ první dva členy, potom

$$a_n = (a_2 - a_1)n + (2a_1 - a_2).$$

Pro aritmetická posloupnost druhého řádu, jejíž první tři členy jsou a_1, a_2 a $a_3 \neq 2a_2 - a_1$, platí

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(a_1 - 2a_2 + a_3)n^2 + (-5a_1 + 8a_2 - 3a_3)n + 6a_1 - 6a_2 + 2a_3\right].$$

Na závěr shrňme všechny úvahy provedené v tomto článku: Každou konečnou posloupnost $f = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ lze rozšířit (tj. pokračovat) na aritmetickou posloupnost libovolného řádu $d \geq k - 1$. Přitom taková aritmetická posloupnost řádu $k - 1$ je jednoznačně určena. Její členy jsou hodnoty jednoznačně určeného polynomu $A_{\mathtt{f}}(x)$ stupně $k - 1$ pro $x = 1, 2, 3, \ldots$ Tím je definována *bijekce* mezi polynomy a aritmetickými posloupnostmi vyšších řádů (nad týmž polem). Tyto dva pojmy jsou navzájem (matematicky) ekvivalentní.

Literatura

[1] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. and Comp. Sc.* **9**, 2 (2011), s. 225–239 (český překlad je k dispozici na `http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/literatura/aritm-posl.pdf`).

[2] Patáková, E.: *Od aritmetiky k algebře*. Matfyzpress, Praha, 2013, (připravuje se k vydání).

[3] Dlab, V., Bečvář, J.: Aritmetická posloupnost druhého řádu *Rozhledy matematicko-fyzikální* **80**, 3 (2005), s. 3–11.

Nevšední matematika všedního dne

Dana Hilská, Gymnázium Jana Palacha, Mělník [1]
Eva Holá, ZŠ, Ratibořická, Praha 9 – Horní Počernice [2]

Abstrakt. *Za podpory EU (CZ 1.07/1.1.00/26.0038) vzniká doplňková elektronická učebnice matematiky využívající technologie interaktivní tabule a cvičebnice pro domácí přípravu v e-learningovém systému Moodle. Učebnice a cvičebnice je určena žákům 2. stupně ZŠ a nižšího stupně víceletých gymnázií. Od použití moderních technologií si autorky slibují větší zájem o matematiku ze strany žáků. Netradiční způsoby řešení úloh a úlohy s vyšší obtížnosti, které učebnice také obsahuje, může učitel využít v péči o talentované žáky.*

V rámci projektu Nevšední matematika všedního dne (projekt podpořený EU) vznikají materiály, které je možné využívat v hodinách matematiky na 2. stupni ZŠ a nižším stupni víceletých gymnázií. Projekt je zaměřen na praktické využití matematiky v reálných životních situacích. Postupně vznikají přípravy na interaktivní tabuli, jejichž výtvarná podoba už sama o sobě by měla u žáků vzbudit zájem o dané téma, a také domácí úkoly a procvičovací úlohy v prostředí Moodle. Náměty vznikají nejen z nápadů autorek, ale také dalších učitelů z celé republiky. Cílem je nejen zatraktivnění výuky matematiky, ale také pomoc učitelům s oběma technologiemi, které se ve školách více či méně již využívají. Oba materiály budou po skončení projektu přístupné z webových stránek projektu (`http://www.nmvd.cz/`), a to v licenci open source.

E-učebnice matematiky má zatraktivnit matematiku všem žákům tím, že

1. úlohy jsou tematicky propojeny se životními zkušenostmi dětí (popisují reálné situace a ukazují i na využití matematiky v praxi),
2. je aktuální (e-podoba umožňuje zpracovávat aktuální události a data – mistrovství světa, volby, ...),
3. zadání úloh jsou bohatě doprovázena barevnými fotografiemi,
4. má vlastní grafickou podobu, jejíž autorkou je profesionální výtvarnice Bára Buchalová

[1] e-mail: hilska@gjp-me.cz
[2] e-mail: eva.hola@zs-hp.cz

5. připravené jsou sady jednoduchých úloh vztahujících se vždy k jednomu tématickému celku, ale také úlohy komplexní, které předpokládají orientaci ve více tématech najednou,
6. je open source – každý učitel si může učebnici nebo její část stáhnout a libovolně s ní nakládat (vyměnit fotografie – žáci se rádi vidí), aktualizovat data a čísla, využívat grafiky, ilustrací, flashových animací, vypustit nebo přidat libovolné úlohy,
7. značná pozornost je věnována i kreativní tvorbě žáků (vymýšlení podobných příkladů) a vyhledávání dalších informací na internetu či v jiných zdrojích (žáci primy, kvarty a kvinty GJP Mělník se podíleli na tvorbě matematických ilustrací v programu Adobe flash),
8. součástí je také mnoho dobrovolných zábavných aktivit (skládačky, hádanky, hlavolamy, zebry, hry, ...)
9. domácí příprava je řešena e-learningovým systémem Moodle. Systém obsahuje více než 800 úloh rozdělených do několika kategorií. Úloha do domácího úkolu se losuje z konkrétní kategorie náhodnou volbou, což znesnadňuje opisování. Úlohy mají navíc naprogramované předpokládané chyby. Dítě, které např. namísto poloměru počítá s průměrem, je Moodlem při kontrole výsledku upozorněno, že udělalo tuto chybu a je mu dána šance vypočítat příklad bez této chyby. Učitel vidí, s jakou úspěšností třída domácí úkol řešila, může si zobrazit úlohu konkrétního žáka a ověřit, kdy a jak dlouho úkol dělal, jaké výsledky odeslal. Učiteli je umožněno stáhnout si různé statistiky a sestavy jako excelovský soubor.

Desková hra Mlsný kocour, kterou jsme převedly do podoby interaktivní tabule, inspirovala studentku sexty Gymnázia Jana Palacha Mělník Magdalénu Tydrichovou k sepsání SOČ „Strategie hry Mlsný kocour“, se kterou v roce 2011 v oboru 01 Matematika obsadila v celostátním kole 9. místo.

Přínosy NMVD pro učitele jsou:

1. mohou využívat hotové úlohy
2. dostávají prostor pro uveřejnění svých vlastních úloh se zachováním jejich autorství
3. mají k dispozici cvičebnici
4. mají k dispozici profesionální galerii, která jim pomůže udržet jednotný grafický vzhled vlastních prezentací

Cílem celého projektu je:

1. povzbudit zvídavost a kritické myšlení žáků
2. umožnit učiteli zařazovat do výuky témata každodenního života
3. zpříjemnit učiteli práci v prostředí interaktivní tabule a Moodle, poskytnout mu metodiku, lektorskou i technickou pomoc
4. usnadnit učitelům zařazení techniky do vyučovacích hodin

Na podzim 2014 je připraveno školení o používání a vytváření příkladů v učebnici (na interaktivní tabuli i v Moodle). Každý učitel dostane učebnici nahranou na USB disku, včetně instalace Moodle. Veškeré náklady (jízdné, ubytování, stravování, vložné) budou hrazeny z grantu.

Celý příspěvek včetně ilustračních fotografií naleznete na stránce `http://www.nmvd.cz/aktuality`.

Etnomatematika a antropodidaktika matematiky v programu nadprůměrných žáků

Michaela Kaslová, Pedagogická fakulta UK, Praha [1]

Motto: *Augmenter notre faculté de percevoir le Divers, est-ce rétrécir notre personnalité ou l'enrichir? Nul doute: c'est l'enrichir abondamment, de tout l'univers.*

Victor Sagalene, 1908

Abstrakt. *V příspěvku je uveden příklad využití etnomatematiky a antropodidaktiky v práci s nadprůměrnými žáky. Zkušenosti s tímto přístupem jsou zasazeny do kontextu současné problematiky etnomatematiky a antropomatematiky.*

Úvod

Proč etnomatematika v práci s nadprůměrnými? V akademickém roce 1990/91 byla za mnou na katedru matematiky poslána holandská studentka ke konzultaci s tím, že získala holandské stipendium (nevím již,

[1] e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

zda univerzitní či vládní), aby nám – porevolučnímu Československu – napsala učebnice matematiky pro první stupeň. Zdůrazňuji, že studentka ještě neměla dostudovánu (naší terminologií) ani pedagogickou fakultu, ani fakultu matematicko-fyzikální. Při dotazu, jak chce zavést přirozené číslo, v jaké roli, v kterých kontextech, jak je dále pojmout a zavádět operace a tak dále, prokázala hluboké neznalosti. Jak by to tedy dělala? No upravila by na místní kontext jejich učebnice. Přiznala, že „...se všichni (?) domnívali, že potřebujeme učebnice matematiky, abychom mohli vstoupit do Evropy“. Byla velmi překvapena, že tady existuje dlouholetá tradice povinné školní docházky, delší než v Holandsku, a navíc se sériemi učebnic, které podléhají odborné recenzi podle nařízení ministerstva školství. Její pohled na naše vzdělávání se v průběhu dopoledne měnil od polohy „texty pro analfabety“ po respekt. Dokonce byla překvapena, že existuje něco jako filosofie výchovy, etika, kognitivní a vývojová psychologie, ..., autorská práva, a dokonce i hygienické normy (velikost písma, řádkování), které musí být při psaní učebnice matematiky zohledněny a respektovány. Problém nastal, jak vyúčtovat ono stipendium, ale to je již jiná kapitola.

Událost je vhodným příkladem toho, že co neznáme, to máme tendenci podcenit. Možná, že kdyby na té „její fakultě“ měli kurs etnomatematiky, ušetřily by se peníze. Jsou jistě tací, kteří se domnívají, že tam, kde nepracují s počítačem nebo s extrémně velkými či malými čísly, musí užívat „horší matematiku“ či používat primitivnější myšlení, obdobně jako je tomu u žáků prvního stupně, kteří v průzkumu (250 dětí) vykázaly v 66 % (165 dětí) podceňování lidského myšlení v historii (např. „Před sto lety nic neuměli, neměli počítač.“), a podobné představy mají o dětech ze zemí, které neznají.

Obory etnomatematika a antropodidaktika matematiky

Oba termíny jsou systematicky rozvíjené v odborné literatuře především psané v románských jazycích, proto terminologii i pro vyhledávání zdrojů budeme uvádět jak ve francouzštině, tak v angličtině. Existují různá, avšak velmi blízká vymezení, zde se soustředíme především na to, v jakém kontextu, respektive v jakém smyslu jsou tyto termíny opravdu používány v současné literatuře. Významově se oba termíny liší, avšak v literatuře chybí porovnání. V práci s nadprůměrnými, či dokonce s matematickými talenty jsou oba obory zajímavé pro bohatost impulzů jak pro práci učitele, tak žáka takového.

Etnomatematika (ethnomathémaique/ethnomathematics)

Etnomatematika je obor zabývající se pojetím matematiky v jednotlivých kulturách od historie po dnešek (časově se neomezuje). Její kapitoly zkoumají specifika přístupu k různým pojmům, tematickým celkům, včetně nástrojů, které k tomu ta která oblast využívá, na čem staví, z čeho vychází, respektive na co navazuje, avšak je mnohem širší než historie matematiky. Na konferenci v Latinské Americe se D'Ambrosio [4] vyjádřil k pokusu o nové vymezování pojmu (snaha prezentovat etnomatematiku jako zpátečnický proud) následovně: „Etnomatematika má roli napomoci osvětlit nám podstatu matematického vědění a vědění obecně."

První mezinárodní kongres k etnomatematice se konal v roce 1998 ve Španělsku v Granadě, kde došlo poprvé k vytvoření mezinárodní databáze k dané problematice. J. Jama Musse (1998) zdůrazňuje některé aspekty etnomatematiky a zasazuje je do kontextu didaktiky matematiky: „... užívat matematiku, dělat matematiku je to, co ve skutečnosti děláme na počátku vyučování matematice, napomoci porozumění v matematickém jazyce... Nezbytnost sdělit, jak rodilé algoritmy představují/uvádějí danou operaci, je kulturně závislá, tedy (v každém jazyce, kultuře) odlišná."

A. Salon [15, s. 56] již v r. 1978, ale i v upravené verzi z r. 2013 uvádí ve slovníku „etnologii" jako humanitní vědu blízkou sociologii a lingvistice, která spočívá na etnografické analýze, aby mohla zavést syntézu, znalost všeho, co je charakteristické pro jedno určité etnikum, s propojením na ukazatele obecné ve struktuře a vývoji společností. Vyjdeme tedy z definice první části složeného výrazu etno-matematika a přijmeme etnomatematiku jako vědní obor – jedná se o takový vědní obor, který zasahuje zčásti do etnologie, zčásti do historie matematiky, ale i do didaktiky matematiky.

Z diskuse na CIEAEM 2013 je patrné, že etnomatematika je chápána jako obor zabývající se určitým způsobem kulturou vmyšlení v širším slova smyslu. Pochopení etnomatematiky umožňuje lépe pochopit vlastní specifika a tím napomáhá k pochopení i vlastní identity (v oblasti vyučování matematice). Uveďme příklad pohledu cizince na výuku matematice v ČR (1998). V Čechách počítáme po desítkách a ukazujeme na počitadle – „první drát plný kuliček" a říkáme „deset", „druhý drát" a říkáme „dvacet", přestože i na tomto drátu je opět jen deset kuliček. Cizinec se ptá: Dvacet – znamená druhá desítka, nebo se každý drát jmenuje jinak? Etnomatematika tedy zahrnuje i jisté tradiční rituály a hantýrku, které uživatelé nemusejí vnímat a které dokáže odkrýt cizinec nebo v podobě „nechápání“ i dítě.

Termínem etnomatematika je někdy charakterizován článek, který využívá některých prvků etnomatematiky v dílčí srovnávací studii ve snaze dokázat rovnocennost kultur (podobně, jako tomu bylo v národním obrození u nás, kdy překlady cizí literatury měly dokázat bohatost a rovnocennost češtiny ve srovnání s jazykem překládaného autora). Informace využívající prvků etnomatematiky někdy slouží jako podpůrné pro politickou argumentaci. Výše uvedené články jsou pro pochopení etnomatematiky zavádějící a označení etnomatematika jim v plném rozsahu nepřísluší.

Antropomatematika

Antropomatematika (Anthropo-didactique – anthropo-mathématique (fr.)/Anthropo-didactic, anthropo-mathematics (angl.)) jako součást antropodidaktiky sleduje užití matematiky v běžném životě a vyučování matematice v daném historicko–sociálně–kulturním kontextu (kdy – kdo – kde), a to s hlavním akcentem na osoby, kterých se to týká, respektive na jejich především orální komunikaci (mluvu).

Francouz B. Sarrazy [17] z Univerzity Bordeaux 2 akcentuje dialog v didaktické situaci, kde didaktická situace ve smyslu francouzského didaktika G. Brousseaua [1] je rozhodující pro utváření matematického poznání, a sleduje ho systematicky v hodinách matematiky. Klade si otázky typu „Kdy si bere žák sám slovo (na jaký podnět, v jakých podmínkách, jak a co sděluje)“ a srovnává různé typy podnětů a reakcí, efektivitu strategií.

P. Clanché [2, 3] z téže univerzity přednášel o antropodidaktice matematiky několikrát na UK v Praze. Sám k této problematice publikoval řadu článků a má následovníky mezi svými diplomanty a doktorandy.

M. P. Chopin (na mezinárodní konferenci SEMT13) [9] prezentovala antropodidaktický pohled na vybrané situace z aktuální výuky matematice v rámci experimentu realizovaném ve Francii. To je navíc vhodným příkladem pro to, abychom pochopili, že ani antropodidaktika, respektive antropomatematika se nemusí týkat jen vzdálených zemí ani dávné historie.

Antropomatematika musí být opatrná na zobecňování. V Klubu přátel matematiky (2011 a 2012) jsme prováděli antropomatematickou analýzu některých situací. Jednou z charakteristik byla otevřenost a bezprostřednost ve vyjadřování myšlenek, vzájemná důvěra mezi učitelem a žáky a samozřejmost v „braní si slova“, aniž by byl kdokoli přerušován (zájemce čeká, až mluvčí dokončí myšlenku, případně žádá rukou či očima o slovo), neakceptování myšlenky bez důkazu, argumentace. Charakteristiky procesu (učení v Klubu přátel matematiky) se nerodí naráz, jsou produktem dlouhodobé interakce. Zhodnocení ovšem neznamená, že takto vypadá v českých zemích jakákoli hodina práce s nadprůměrným žákem. Antropomatematika začíná analýzou reálných situací. Její zobecnění se pak může vztahovat na určitou skupinu, která pracuje v podobných podmínkách (včetně sociálních, jazykových či dalších) a vyznává tutéž filosofii výuky. Na rozdíl od pedagogiky antropomatematika (antropo-...) předem zdůrazňuje specifičnost prostředí, a to výuku matematice.

Na počátku jednadvacátého století se objevila v Evropě snaha postihnout evropské specifikum vyučování matematice a mapovaly se hodiny matematiky u vybraných (někdy i dobrovolně přihlášených) učitelů. Mimo jiné se porovnávaly délky vyučovacích hodin, jejich struktury, rituály, způsoby hodnocení a podobně. Ne vše, co se sledovalo, patřilo do antropomatematiky, a také ne vše, co patří do antropomatematiky, bylo sledováno. Nicméně se dospělo k tomu, že evropská kultura vyučování matematice není jednotná, že jsou zde pozoruhodná specifika. Ani přístup k analýze nebyl snadný. V některých případech najednou záleželo na tom, kdo ji provádí, což vedlo k širší diskusi. I hodnocení nafilmovaných situací podléhalo tomu kterému úhlu pohledu, ovlivněnému kulturou, ve které posuzovatel vyrůstal, byl vzděláván.

Porovnání

Brazilec E. D'Ambrosio shrnuje v úvodu k Proceedings [4] zkušenosti a vývoj etnomatematiky slovy: „...etnomatematika jako vědecký program a filosofie matematiky s pedagogickými aplikacemi získala významnou roli poprvé v roce 1985.“ Tím chápe rok, kdy se pod tímto názvem objevily první dokumenty – anglicky psané – především v americké literatuře. Tak se můžeme dočíst, že „etnomatematika se zrodila v USA z důvodů rasové diskriminace v roce 1983“, což tvrdí někteří, kteří mají problém číst v jiném než anglickém jazyce.

Například výzkumy Emmy Castelnuovo (významné italské průkopnice didaktiky matematiky, která již ve své publikaci didaktiky matematiky prezentovala prvky didaktického konstruktivismu s nutností vycházet ze zkušenosti dítěte a kulturního kontextu země) již mnohem dříve ukázaly cestu vědeckému šetření v oblasti etnomatematiky či didaktiky matematiky, kdy etnomatematika prokázala (publikováno na přelomu 60. a 70. let), že děti zemí Afriky, kde působila, vytvářejí také pojem číslo v roli počtu, sice trochu jinou cestou – a to v závislosti na jazyce a každodenních modelech, avšak s podobnými či stejnými obtížemi jako děti italské.

V jistém smyslu antropomatematika [3] ve spojení s antropodidaktikou jsou do určité míry obecnější; na jedné straně sleduje vliv podmínek na daný jev, projevy a jejich změny v dialogu – v interakci v rámci dané society, kde prioritu má lidský faktor, na druhé straně nejde tolik do hloubky v matematických otázkách jako etnomatematika, která ve svém dlouhém vývoji přešla od čistě popisného charakteru k hlubší analýze sledovaných jevů z pohledu matematického.

Etnomatematika je širší, či lépe komplexnější obor než historie matematiky, která především sleduje dvě roviny: (1) vývoj matematické osobnosti v daném kontextu pod vymezenými vlivy a přínos nových myšlenek pro daný obor, (2) vývoj pojmu, jevu v historii s tím, že jsou často tyto linie, z pochopitelných důvodů, oproštěny od dobových charakteristik, od přírodních a sociálních podmínek, od hierarchizace a řízení společnosti, od ekonomické situace, od mluveného jazyka a jeho potenciálu, od způsobu grafické komunikace a dostupnosti vzdělání – respektive míře dostupnosti a srozumitelnosti mluvené či psané oborové komunikace, nebo jsou tyto charakteristiky natolik zestručněny, aby nepřehlušily ústřední zaměřenost na matematiku.

Historie matematiky se více soustředí na samotnou matematickou podstatu myšlenek, jak se zrodily, i na to, jak tyto myšlenky ovlivnily další generace matematiků, případně jak zasáhly do dalších oborů. Etnomatematika má větší záběr a zpravidla matematika je zastoupena relativně vyváženě (přibližně v poměru 1 : 1, výjimečně až 1 : 2) k dalším oblastem, kterých se dotýká, ve kterých se rodí, užívá, a to podle toho, do jaké míry se předpokládají znalosti čtenáře o dané kultuře. Pracuje se širšími souvislostmi, stimuluje vztahové myšlení včetně kontextového.

Multikulturalismus v matematice ve věku globalizace nyní představuje obor, který se mimo jiné zabývá odlišnostmi a tendencí ke stírání kulturních diferencí. Multikulturalismus mimo jiné i srovnává práce z jedné doby opírající se o etnomatematiku. Zavádění nových technologií do škol ve světě ovšem vnucuje globální pohled bez respektování specifik. Kritický postoj k této skutečnosti zaujala již řada specialistů; např. F. Favilli (na CIEAEM65, [6]) upozorňuje na potřebu zachovávat specifika, ale současně je respektovat (součást etnomatematiky). Snaha po unifikaci v rámci integrací může podle něho přinést řadu nežádoucích průvodních jevů ve vyučování matematice.

Na CERME 2010 s A. S. Pais a M. Do Carmo Domite [13] uvádějí některé příčiny odporu k etnomatematice: „... (část slova) etno vyřadila najednou matematiku z místa, kam byla vynesena a kde byla oslavována a rozšířila matematiku do světa lidí, do různých kultur jejich každodenního života. ... Etnomatematika jako vědní program je komplementem matematiky právě tak jako kritikou znalostí, které byly vyhodnoceny jako matematické znalosti."

G. G. Joseph ve své populárně naučné knížce Multikultural Mathematics (1993) charakterizuje v úvodu význam multikulturality pro současnost: „Multikulturalismus matematiky spojuje učitelskou zkušenost a badatelův výzkum ve významný nový přístup k matematice." Jeho pojetí multikulturalismu se poněkud liší od Faviliho, publikace je spíše souborem kapitol z historie matematiky, avšak z různých „koutů světa".

Otázky učitele: Proč etnomatematika v práci s talenty? Pro který typ? Pro kterou věkovou skupinu?

Klíčem je zamyšlení nad tím, kde se etnomatematika zrodila. Etnomatematika má ve svém vývoji podle mého tři hlavní zdroje:

a) Zápisky cestovatelů (různých oborů), ve kterých jde často o informace kusé, ne vždy se pro danou lokalitu shodující, mají spíše charakter „perliček", rad pro další cestovatele. Informace se týkají především práce s číslem v roli počtu, měření času, vzdáleností, ploch (například české zdroje: Kořenský, ...), což je období relativně uzavřené 2. světovou válkou, respektive 50. a 60. lety 20. století (Hanzelka–Zikmund, ...).

b) Další zdroj představují práce historické, čerpající z vykopávek a muzejních či archivních materiálů, avšak tyto materiály nejsou vždy popularizovány.

c) Zdrojem je současná praxe, jednak zkušenosti učitelů po první vlně migrace z různých kontinentů po roce 1960 (zejména v Evropě, pak v dalších vlnách) v podobě kazuistik, jednak cílené výzkumy v této oblasti reagující na přetrvávající (především Evropa i USA) nacionalistické či rasistické tendence, dále výzkumy na pomoc praxi v prostředí zejména ZŠ a SŠ s národnostními menšinami. Posledních dvacet let se sem řadí i problémy kompatibility různých vzdělávacích systémů lišících se navíc jak jazykem mluveným, tak psaným – například výuka čínských studentů v Austrálii na VŠ 1990–95 (ICME 2004).

Etnomatematika, jak plyne z její charakteristiky, může představovat pro žáky určité dobrodružství, ukazuje aristotelský pohled – matematika se rodí ve světě kolem nás. Její zrod do jisté míry závisí i na tom, v jakém kontextu se pohybujeme. Zaměření matematiky i komunikace v ní jsou v každé době a kultuře ovlivněny nejen výjimečnými matematiky, ale i tím, jakou matematiku potřebujeme. Mezi další argumenty, které ze zařazení etnomatematiky do práce s žáky plynou, jsou: rozhodně vždy se musí myslet, svá tvrzení musíme o něco opřít, lépe ještě dokázat, lidé v jiných kulturách, v jiné době nemusí být hloupější, než my z relativně hospodářsky vyspělého světa.

Dokonce dětské strategie řešení matematických problémů, užívající dobové a lokální nástroje, ukazují, že jiná kultura nemusí automaticky být „horší“, může mít i své výhody, což vede k větší pokoře, k úctě k historii, vzbuzuje badatelské postoje, provokuje nové otázky, nabízí různé úhly pohledů. Využívat prvků etnomatematiky ve škole je náročnější než pracovat s učebnicí či pracovními listy a typickými pomůckami pro matematiku. Předpokládá žáky se schopností dobře se soustředit a alespoň v základu vztahově myslet.

Lze také tentýž problém pojmout čistě historicky (tedy do určité míry zredukovat, ale možná i jiným směrem rozšířit a prohloubit informace), avšak to vyhovuje především typu vědec, badatel [11] nebo žákům druhého či vyššího stupně, kteří již mají ukotvené postoje ke zkoumání, mají rozvinutější vzdělání v oborech zeměpis, historie, výchova k občanství, etika, znají již cizí jazyky a mají také lépe rozvinutý jazykový cit. V etnomatematice se k některým čistě matematickým rozšiřujícím a prohlubujícím informacím dostaneme také, ale jakousi oklikou, a předpokládá se, že si žák samostatně určité kontexty dohledá a uvědomí.

Někteří nadprůměrní se rádi koncentrují na jeden problém, nejraději na aritmeticko-algebraický, tedy na práci se symboly, pro jiné je to především práce v tabulce či grafu (k této skupině řadíme i takové, kteří mají dobrou slovně akustickou či vizuální paměť). Takoví žáci nemají příliš v oblibě slovní úlohy a kontextové uvažování berou jako přítěž, ale situace se mění – v etnomatematice jsou kontextové informace pro ně přitažlivé a funkční (viz dialogy).

Strategie učitele při práci s nadprůměrným žákem

Sledování různých hodin matematiky i vlastní zkušenosti umožnily sestavit řadu odlišných strategií učitelovy práce. Pořadí strategií nekoresponduje s preferencemi autorky, ale jde o pouhý výčet možností s dominancí v jednom jevu, přičemž existují další modifikace, či strategie, které odpovídají smísení dvou či tří uvedených strategií:

- více téhož, co ostatní (práce s kvantitativním minimem)
- totéž co ostatní, ale v kratším čase (práce v časovém limitu)
- hledání (žákovi dosud neznámé) metody řešení
- ekonomizace postupu
- řešení úlohy za specifických podmínek (minimálně dvěma různými způsoby, nejekonomičtěji, ...)
- pouze popis – návod k řešení
- zobecnění cvičeného, nastudovaného
- komparace zdrojů/postupů
- korekce hotového
- urychlení – napřed v látce, programu
- prohloubení učiva
- rozšíření učiva
- pomoc slabším
- tvorba úloh, testu
- samostudium (nejen nové látky, ale i nových technologií)
- aplikace – úlohy Z, P, Fy, úlohy s přesahem
- projekt, poloprojekt
- referát
- výklad nové látky (žák sám nastuduje a zastoupí učitele)
- soutěže
- hry (hlavně strategické)
- korespondenční seminář k vybranému tématu, zohledňující specifika řešitele
- izolované úlohy (zvané též „oříšky“, „lahůdky“, ...)

- gradované úlohy (od snadnějších po obtížnější)
- kaskády úloh (od nejtěžší k případně lehčím)
- programované učební texty
- práce s novými technologiemi
- specifické testy
- řešení zpaměti
- zadání i řešení úlohy v cizím jazyce
- koordinace práce ve skupině
- komplexně pojaté téma – průřezově napříč obory

Etnomatematika a příprava učitele

Zatímco etnomatematika více popisuje (jak to je nebo bylo a proč – s argumentací kontextovou), antropodidaktika matematiky se především zajímá o proces, o uplatnění daného matematického myšlení u jednotlivce nebo skupiny v kontaktu s jinou osobou, skupinou.

Pokud chceme mluvit o zařazení etnomatematiky do programu pro nadprůměrné, musíme do dané oblasti v přípravě i vyhodnocení práce promítnout i antropodidaktiku, aby bylo jasné, jak se proces odehrává.

Etnomatematika umožňuje učiteli volit současně jak rozšiřující strategii, tak prohlubující v jednom bloku, podobně práci s referátem, nebo komparativní a zobecňující strategie. Komplexnost práce s informacemi a současně jistá podmíněnost jsou typické pro danou práci. Pokud tedy chceme zabrousit do jiných kultur, pak etnomatematika dominuje v přípravě učitele.

Z pohledu učitele je nutné zvládnout aspoň částečně i antropodidaktický přístup, aby si mohl nejen s nadhledem připravit dané téma, ale především byl i schopen reagovat na dotazy žáků a hlouběji zvažovat další strategie především vzhledem k rozvoji jednotlivce. Jinak se k danému tématu staví žáci vyrůstající v naší kultuře, jinak děti přistěhovalců, což je jednak obohacením pro všechny přítomné, jednak ukazuje, jak vlastní zkušenost dítěte zasahuje do procesu učení. Pro učitele prvního stupně či učitele, který učí i další obor, představuje antropodidaktický pohled mimo jiné i nástroj pro reflexi: Mám jeden učební styl, nebo při výuce matematiky navozuji jiné sociální situace, vedu komunikaci jinak, vytvářím odlišné klima a je to pro žáky srozumitelné, akcentuji . . . ?

Témata historicko-etnomatematická – název volíme jako nabídku pro učitele s tím, že záleží na něm, na co dá ve svém působení větší akcent. Nabízí se jak užší matematický pohled vertikální měnící se v čase, tak širší horizontální s pestrými vazbami. V obou lze dobře uplatnit i etymologický přístup ke slovní zásobě.

Zkoumáme-li novodobé či současné informační zdroje (sledující posledních 10–25 let), pak můžeme mluvit o lokálních zdrojích, kde se zpravidla jedná o izolované zkušenosti, popsané osobou žijící/pracující v daných podmínkách. Druhým typem zdrojů jsou práce srovnávací nebo hlouběji analyzující nejen jednu lokalitu, ale více lokalit současně v širším kontextu (zeměpisném, sociálním, jazykovém, kulturním či matematickém).

Oba typy zdrojů mohou být cíleně etnomatematické nebo antropodidaktické, nebo tíhnout více k jednomu z popsaných pohledů. U obou lze sledovat dimenzi času: (a) práce popisující stav v určitém, relativně krátkém období (zpravidla 1–5 let); (b) práce sledující změny probíhající ve vymezeném, avšak delším časovém úseku, nebo práce porovnávající situaci ve dvou krátkých obdobích časově výrazně vzdálenějších (10 let a více). Zde je nutné si uvědomit, že např. výsledky, i když pocházejí z dlouhodobého (např. desetiletého) sledování v 90. letech XX. století nebo na počátku XXI. století, nemusejí již odpovídat současné zkušenosti, a to přesto, že jde o časový horizont nepříliš vzdálený dnešku.

Jsou specifické výzkumy, které jsou zřídka publikovány pro veřejnost. Zabývají se sledováním úzce omezené oblasti etnomatematiky (například jen rozvíjení a úrovně prostorové nebo časové orientace), aby bylo možné jednak využít specifik dané kultury pro obohacení procesů současného učení, jednak pochopit a případně pomoci překonat obtíže typické pro danou lokalitu, kulturu. Například porovnáním využívání jazykových prostředků ve vyučování v italských, švýcarských, francouzských a českých školách se ukázalo (Kaslová 2002, Sardinie – příspěvek pro Výbor Rallye Mathématique Transalpin), jakou roli hraje v ústní komunikaci (ne)existence určitých/neurčitých členů u podstatných jmen na rozlišení případu obecného od jedinečného: triangolo – jakýkoli, un triangolo – tento/daný trojúhelník (Kaslová, ICME 1996). L. Poirié (2005) prezentovala obtíže kanadanských Inuitů v procesu zobecňování pojmu číslo v závislosti na objektech a aktivitách jejich každodenního života. V šestihodinové dílně (SEMT 2013) bylo možné sledovat obtíže v transformaci mluveného slova vyjadřující počet či jiné číselné údaje do grafického záznamu v poziční desítkové soustavě. Dílna umožnila pochopit, jak je proces v dané kultuře závislý na jazyce; např.: jedna = „Atausiq“ (doslovně „nedělitelný“); dvě = „marruuk“; tři = „pingasut“; šest = „Pingasuujurutut“ (doslovně „je jich víckrát tři“), devět = „quliunngigartut“ (doslovně „není jich přesně deset“); deset = „quilit“ (doslovně „nejvíc“); dvanáct = „quilillu marruulu“ (doslovně „a deset a dvě“); sto čtyřicet šest = „avatit tallimat avatit maruuk Pingasuujuqtulu“ (doslovně „dvacet pětkrát (a) dvacet dvakrát a víckrát tři“). Popis diverzity někdy bývá chybně interpretován jako znevažování některé z kultur, ale etnomatematika či antropomatematika spatřují ve svém bádání mimo jiné i nástroj porozumění, nástroj profesionalizace učitele, východisko pro pochopení obtíží či chyb, start k volbě vhodnějších didaktických nástrojů.

Podobné studie nebývají vždy z nejrůznějších důvodů řazeny ani k etnomatematice, ani k antropodiaktice, i když vysvětlují na základě specifik dané kultury určité projevy, obtíže v rámci pojmotvorného procesu či hledání/volbě metod řešení.

Paici v KPM – zkušenosti

Východiska: žáci KPM (19 sledovaných žáků ve věku 6 let 6 měsíců až 10 let a 1 měsíc) již měli zkušenosti se zápisy čísla a s počítáním v historických kulturách (egyptská, mezopotamská, řecká, římská, mayská, aztécká), v kontrastu s tím se prezentoval přechod od počítání v římské soustavě k dosud používanému počítání v arabské soustavě. Dosavadní pohled byl spíše historický. Průzkum v dané škole vloni ukázal, že jsou žáci, kteří si myslí, že píšeme „. . . českými číslicemi, když Římané psali římskými číslicemi“. Od historie jsme tedy přistoupili k současnosti do vzdálenějších – neevropských kultur s akcentem na etnomatematiku.

Paici [pajči] je jedním z 28 jazyků Nové Kaledonie. Počítání v paici nemá svoji písemnou podobu, jenom mluvenou. Vyjádření počtu se opírá o modely čísla na lidském těle, takže například číslo 5 se vyjádří jako „jedna ruka“, 20 se řekne „jeden člověk“, protože to odpovídá počtu prstů, které má jeden člověk. Podobně 40 se vyjádří jako „dva lidé“, čísla 1, 2, 3, 4 mají specifická pojmenování a váží se k jednotlivým pojmenováním prstů ruky. Jazyk je zajímavý i tím, že dynamika a melodika výslovnosti téhož slova mění jeho význam.

Celé téma včetně počítání uvedl prof. Pierre Clanché z Université Bordeaux 2, který se po léta zabývá danou kulturou a pozoruje uplatnění matematiky ve škole i mimo ni přímo na Nové Kaledonii u Kanaků [6].

Forma přecházela od přednášky s využitím interaktivní tabule (mapy, fotografie, texty) k diskusi a k dílně (pořízen videozáznam). Na toto setkání navazovaly i další dvě lekce během měsíce).

U Kanaků existují poměrně složité příbuzenské vztahy, které dítě musí pochopit a respektovat, aby bylo i ostatními respektováno. Je na dítěti, aby pozorovalo, aby vědělo, koho se může zeptat. Silnou roli hrají tradiční komplikované rituály oslav, návštěv, pomoci, spolupráce. Podobně zde existuje (na přemýšlení náročný) ne plně stabilní systém obdarovávání a směny. Proces zobecnění je v různých kontextech na různě vysoké úrovni. Počítání v paici se tudíž odehrává v jiných kontextech a z odlišných motivací než u nás. Pro velkou jazykovou diverzitu a pro odlišné přístupy k číslu na Nové Kaledonii existuje jediné pojítko a tím jsou učebnice matematiky – pro Kaledonce v cizím – ve francouzském jazyce. Etnomatematickým problémem se stává i přechod od specifických kontextů k relativně jednotícím didaktickým situacím. Nelze opominout zvláštní postavení učitele v jednotlivých kulturách Nové Kaledonie, tudíž pro případné změny ve vyučování matematice je nutné vzít v potaz i antropodidiaktický pohled, respektive antropomatematiku jednotlivých kultur. Pokud do školy chodí pouze děti, jejichž rodným jazykem je jazyk paici (jeden z 28 jazyků Nové Kaledonie), je situace snazší, ale na druhou stranu nelze předpokládat, že se v takové škole nevyskytne dítě z jinojazyčného prostředí silně provázané na jiné tradice, rituály i sociální vazby. Jak pracovat s učebnicí, která by „vyhovovala“ celé Nové Kaledonii? Kde a jaké ústupky, co je pojítkem a co by mohlo být blokátorem? Že se podobné situace nemohou vyskytnout i u nás? Víme, kolik dětí ze třídy a jak v rodném jazyce zpracovává prostorové, časové a kvantitativní údaje a vztahy? Víme, zda ve své rodné kultuře smí oslovit dotazem otce/matku? A tak podobně.

Otevřít toto téma ve třídě bez přípravy může být značně riskantní. V Klubu přátel matematiky (kde převažují české děti a vyskytují se dvě až tři děti jiné národnosti) jsme měli jeden rok děti namíchané z více kultur: Turek, Arabka, Ital, Ukrajinec, Ruska, Vietnamec, Chorvat, Slovák. Několik let nazpět to byla Konžanka, Slovák, Moldavan, Bulhar a Rom. Ve školním roce 2013/14 bude složení méně pestré, jen Srb, Rus/ka, Azerbajdžánec a Vietnamec. To znamená nastudovat zdroje o těchto kulturách a citlivě je konzultovat případně i s rodiči těchto žáků (což bývá někdy velmi zajímavé a nabízí užší spolupráci rodiny se školou).

Dialogy jako zdroj pro antropodidaktický pohled – výběr z videozáznamu

Dialog 1 (setkání s PC – Pierrem Clanché)

PC: Řešte v paici: 3+5 = (žáci nepíší, pouze mluví, někteří si to modelují na „kaledonských modelech“, jiní překládají z paici do češtiny, tam řeší a překládají zpět)
R: ...
Š: ...
R: Proč to Šimon opravuje?
H: Protožes' to ne-vy-slo-vo-val správně.
R: Ale já vím, co chtěl říct, že $3 + 5 = 8$.
(D: Stejně všecko vodbejvá, tam by ho to vyléčilo.)
PC: ... jazyk paici závisí nejen na výslovnosti, ale i na intonaci – ta na rozdíl (?) od češtiny mění v paici význam.
R: Tak co by to bylo...?
K: Dá se to říct jinak? ... V češtině třeba i součet tří a pěti.
H: Mělo by to cenu? Má to nějakou cenu v češtině? ... Proč to tak vzniklo?

Dialog 2 (setkání s PC)

Š: Jak se řekne nekonečno, nebo spíš nekonečně moc?
PC: Listy na stromě.
J: Proč zrovna listy?
T: To je dobrý, jako v básničkách.
PC: Protože je nelze spočítat.
H: Jak to? Těch musí být konečně!
PC: V praxi to pro Kanaky vyjde nastejno, jestli to nedokážeme nebo nevidíme na první pohled, nebo snadno – oni nepotřebují ke svému životu zpravidla větší číslo než 50.
R: To je divný? Jak teda žijou?
PC: Moc se nenakupuje. Hodně směňují.
A: Ve škole taky ne?
PC: Ve škole je jiný svět, jazyky spojuje francouzština. Mají francouzské učebnice.

Dialog 3 (následující setkání vedené MK – Michaelou Kaslovou)

V: PC říkal, že počítaj francouzsky. To si to všechno překládaj? Proč?

M: Dyť říkal, že je tam 28 jazyků.

T: To by každej počítal jinak?

D: Cha, všude je jedna a jedna dvě.

MK: Má pravdu, v každém jazyce by to říkali jinak.

A: Takže když to napíšou, tak je to všude stejný?

Š: On (PC) říkal, že to jen řikaj. Tak to asi v tom jazyce nepíšou.

H: No asi. Ale nevíš to.

Š: To by nám to ukázal.

H: Třeba mu to neukázali. Nebo to už zapomněli.

J: No, taky řikal, že nepotřebujou víc než 50, tak proč by to psali. To si zapamatuješ.

H: Ale řikala (MK), že se dávno (v jiných kulturách) zapisovaly (dlužní) úpisy.

J: Jo. Ale tam (na Nové Kaledonii) se směňuje. . .

A: Dávaj se dárky,. . .

D: To bylo dobrý. . .

V: Tak francouzská matika je větší. . .

Š: Cha, ale neumějí směňovat. Víš, jak řek, jak přemýšlel s dárkem?

A: Máme to lehčí.

MK: Co?

A: Ve škole, s počítáním.

M: No a Egypťani?

MK: Nechodili všichni do školy. Myslíš, že se s jejich písmem líp počítalo než nám?

J: Museli myslet na to, jestli je to lotos nebo číslo!!!

L: . . . taky musíš myslet, někdy číslo není číslo, jako v těláku pět jsem já (hry družstev).

V: Když (v NK) nakupujou, to musej, že jo. Platěj. Tak to přitom počítaj francouzsky nebo v paici?

MK: To (PC) neříkal, ale uvažujme.

H: Někdo si zvykne. Třeba, když jsou ceny nízký, tak to stačí v paici. . . .

MK: To je Honzova teorie, ale musíme to ověřit. Napíšeme panu profesorovi.

A: Bude rád?
T: Víš, jak ho to baví?
...
J: Když je to napsaný jako arabskýma číslicemi, tak to můžou číst paici i francouzsky!
V: To je všude stejný, jen se to jinak říká.
H (k J): To taky neřek, druhej dotaz.
R: Umím francouzsky, ale počítal bych to stejně v češtině, pak to řek francouzsky ... nakonec.
M: Asi bych to rači ukazoval (modeloval v paici), než řikal v paici.
D: To by byla sranda ... ty a na fotbale.
...

Co se ukázalo v dialozích?

- Na první pohled bylo jasné, že téma žáky strhlo. Obraceli se na mě i rodiče, co jsme to dělali, že děti doma počítají i části domácích úkolů nahlas v jiném jazyce (nepřímo se doma chlubily), že mluví o Nové Kaledonii a zahrnují je informacemi (pravděpodobně i z důvodu, aby si je lépe zapamatovaly, i když je k tomu nikdo nenutil). Nebylo třeba podněcovat dále otázky, jedna řetězila druhou.
- Téma strhlo lavinu otázek, které by si žáci asi běžně nekladli.
- Téma vedlo k přehodnocení nástrojů, které běžně užívají.
- U některých vyprovokovalo autoreflexi, snahu po zpřesnění uvědomění si toho, jak sami pracují.
- Zvýšila se citlivost vzhledem k formulacím, k volbě slov a jejich pořadí.
- Přemýšleli, jak komunikovat své myšlenky a v jakém kontextu.
- Zamýšleli se nad rolemi čísla v naší kultuře.
- Začali přemýšlet o tom, jak málo toho o matematice v paici znají a pro příští setkání s profesorem Clanché požadují komunikaci o prostoru a měření u Kanaků.
- Nelení písemně komunikovat, aby dostali odpovědi na otázky kladené v dialogu 3.

Co navazovalo na povídání o kultuře a počítání v paici?

- počítání v paici
- sledování dalších systémů, které nemají písemnou podobu
- porovnávání systémů mezi sebou
- porovnávání s arabským systémem
- výhody psané podoby
- výhody lidského modelu a jeho limity – informace o severských kulturách
- vyjadřování „velkých čísel" a neurčitého množství, slov „mnoho" a „nekonečně mnoho"

Co bude následovat v roce 2013/14?

- Další spolupráce s profesorem Clanché, zaměření na rozvoj prostorové orientace v kultuře a paici, v jejich jazyce a ve školní matematice (2 hodiny a korespondence).
- Porovnání vyjadřování prostorových vztahů s dalšími kulturami – respektive s jazykovými prostředky pro vyjádření statických prostorových vztahů.
- Výzva k vyhledávání dalších kultur (projekty skupin mimo KPM v délce dle potřeby řešitelů, konzultace a prezentace projektů cca 2 hodiny).

Závěr

Zřejmě etnomatematika bude zařazena do přípravy budoucích učitelů, ale mohla by se stát součástí dalšího vzdělávání učitelů tak, jak je tomu nejen v řadě evropských zemí. Etnomatematika by takto mohla odborněji zasáhnout i do (u nás poněkud úzce či příliš obecně pojaté) problematiky multikulturalismu a integrace. Vedle použité literatury jsou uvedeny další zdroje, ve kterých čtenáři najdou další odkazy, aby se mohli inspirovat pro vlastní práci.

Literatura

[1] Brousseau, G.: *Théorie des situations.* La pensé sauvage, Grenoble, 1998.

[2] Clanché, P.: Anthropologie de l'éducation et didactique des mathématiques: pour une anthropo-didactique. In: *Přednáška na 3. Colloque international Recherche et formativ des enseignants*, 14. 2. 2000, Marseille.

[3] Clanché, P., Sarrazy, B.: Appoche anthropodidactique de l'enseignement d'une structure additive dans un cours preparatoire Kanak. *Recherche en didactique methématique*. Dostupné na http://web.ac-noumea.nc/mahts/IMG/359.pdf, 2002.

[4] D'Ambrosio U.: Ethnomathematics: A research Programme on the History and Philosophy of Mathematics with Pedagogical implications. *Notice American Mathematics Society* **39** (1992), s. 1183–1185.

[5] Favilli, F., et al: Ethnomathematics and Mathematics Education. In: *ICMI 2004*, Universita di Pisa Edice Difficulties in mathematics teaching/learning TEP, Pisa, 2005.

[6] Favilli, F.: Globalization in Mathematics Education: integrating indigenous and academic knowlage. In: *CIEAEM65*, Torino, 2013.

[7] Harris J.: Australian Aborriginal and Islandes mathematics. *Australian Aboroginal Studies*, č. 2 (1987), s. 29–37.

[8] Huylebrouck, D.: Mathematics in (central) Africa before colonization. *Antropologia et Prehistoria*, č. 117 (2006), s. 135–162.

[9] Chopin, M., Roiné, Ch.: Anthropological and didactical constraints of the selection of pupils' tasks in elementary teaching of mathematics. In: *SEMT13*, Charles University, Faculty of Education, Prague, 2013, s. 83–90.

[10] Jama Musse, J.: *Ethnomathematics*. Dostupné na http://www.dm.unipi.it/~jama/ethno/ (6. 4. 2013).

[11] Kaslová, M.: Talent na jazykové škole. In: *Ani jeden matematický talent nazmar 2011*. JČMF, Hradec Králové, 2011, s. 50–68.

[12] Kaslová, M.: *Etnomatematika jako součást programu klubu přátel matematiky.* Dostupné na http://branajazyku.cz (12. 3. 2011).

[13] Pais, A. S., Domite M. C.: Understuding ethnomathematics form its criticisms and contradiction. In: *Proceedings CERME 6 2010*, Lyon, 2009, s. 14–73.

[14] Poirié, L., Bissaillon, N.: From numbers to numeration, a new perspective. In: *SEMT13*, Charles University, Faculty of Education, Prague, 2013, s. 339–341.

[15] Roiné, Ch.: *Analyse anthropo-didactique de l'aide mathématique aux éleves en difficulté: l'effet Pharmakéia.*

[16] Salon, A.: *Vocabularie critique des relations culturelles internationales. La maison du dictionaire*. Paris, 1978, 2013.

[17] Sarrazy, B.: *Anthropo-didactic study of arithmetic teaching among pupils of 9–10 years*. Quaderni di Ricerca in Didattica, č. 17 (2007). Dostupné na http://math.unipa.it/~grim/quad17 BSarrazy 07.pdf (4. 3. 2013)

Další doporučené zdroje dostupné v období 10. 1. – 1. 5. 2013:

1. http://mitpress.mit.edu/books/explorations-mathematical-anthropology
2. http://www.languagesandnumbers.com/comment-compter-en-paici/fr/pri/
3. http://www.alk.gouv.nc/portal/page/portal/alk/langues/paici
4. http://fr.wikipedia.org/wiki/Langues_kanak
5. http://www.sorosoro.org/les-langues-kanak
6. http://fr.wiktionary.org/wiki/Cat%C3%A9gorie:Nombres

7. http://www.math.ens.fr/culturemath/actu/livres.htm
8. http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/109059/CasPestMatFys_032-1903-3_7.pdf (s. 249--259)
9. http://web.nmsu.edu/~pscott/isgem121.htm
10. http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/10/CERME7 WG10 Stathopoulou.pdf
11. www.dm.unipi.it/~favilli
12. sborníky konferencí: ICME 1996, 2000, 2004, CIEAEM 2006, CIEAEM-IACME, CERME a další
13. Bibliography Finder For ethnoMathematics
14. International Study Group on Ethnomathematics
15. Revue de l'interdisciplinarité Didactique, RID Université du Quebec a trois-revieres

Figurková školička – logika šachu ve školkách a školách

Martina Kořenová, Říčany [1]

ABSTRAKT. *Článek popisuje výukový program Figurková školička, který je zaměřen na propedeutiku výuky šachu na mateřských školách a základním stupni základní školy.*

Úvod

Snahy o využití šachu ve výuce jsou celosvětové a v průběhu času se opakují. Výukový program *Figurková školička* je metodou, která si nedává za cíl naučit děti šachové hře, využívá ale šachového prostředí pro rozvíjení konkrétních předmatematických, matematických a logických dovedností dětí starších čtyř let. Důraz je kladen na procvičování abstraktního myšlení, práci s logickými konstrukty nebo algoritmy, procvičování paměti a zdokonalování geometrického vnímání. Zdrojem metody jsou specifické rysy šachové hry. Metoda využívá tyto prvky pro vystavění originálního matematického a geometrického prostoru na půdorysu šachovnice v kombinaci s užitím oživených šachových figurek ve formě pohádkových postaviček pro motivování dětí [1].

[1] e-mail: martina@korenova.cz

Základní principy

Výukový program je rozvržen na dvě etapy. Aby se postupně v každé etapě rozvíjelo základní porozumění a schopnost řešit problémy, v definovaném pořadí se pracuje se cvičebnicemi, které jsou věnovány jednotlivým šachovým figurám.

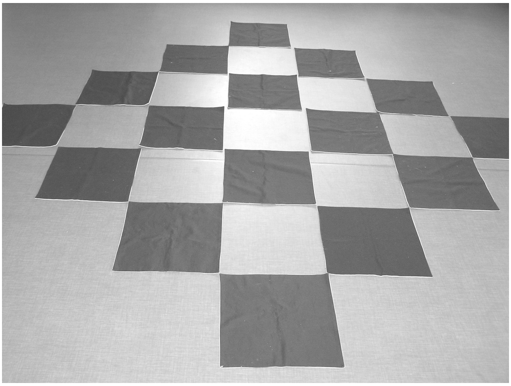
Výukový proces není primárně zacílen učit děti šachu. Šachové prostředí je užito ke kultivování intelektuálních dovedností založených na abstrakci, plánování a provádění jednoduchých algoritmů, na orientaci v prostoru. Jednoduchá logická cvičení jsou prováděna s pomocí dramatizace a vizualizace úloh, manipulování s drobnými předměty nebo použití osobních pracovních listů. Děti si tak pomocí těchto aktivit osvojují usuzovací schémata [2]. Výuka probíhá formou zájmových kroužků, speciální přípravy předškolních dětí v MŠ nebo v rámci vzdělávání na ZŠ, především v první třídě.

Program je určen pro všechny děti s ohledem na jejich individuální schopnosti, každé dítě zvládá přiměřené úkoly. Svět logiky je otevřený všem dětem bez rozdílu, jejich analytické myšlení a prostorová orientace jsou rozvíjeny, aby se podpořila jejich schopnost učit se a podílet se na výukovém procesu.

Matematické zákonitosti

Šachovnice je dobře definovaný systém geometrické sítě, kde se konkrétní úkony při řešení úloh prolínají s abstraktním pojmovým myšlením. Černé a bílé čtverce reprezentují svět jednoduchých pohybů, čísel a algoritmů. Specifické pohyby jednotlivých šachových kamenů na šachovnici lze přirovnat k různým matematickým vzorcům či funkcím. Na šachové síti se nepohybujeme po obvodě čtverců, ale jejich středem. Pravidelné umístění bílých a černých čtverců odlišuje dva pohyby po šachovnici, šikmý a rovný. Rovný pohyb je charakterizován střídáním černých a bílých polí v řadách a sloupcích, šikmý pohyb je veden úhlopříčkami po jedné barvě polí. Termín šachovnice vystihuje nejčastěji prostředí 8×8 polí, na kterém se hraje desková hra šachy (obr. 1).

Ve Figurkové školičce považujeme za šachovnici každé prostředí, kde se střídají černá a bílá pole. Děti se seznamují s pojmy střed šachovnice, krajní a rohové pole [3]. Střed šachovnice určujeme jen v prostředí, které má tvar čtverce, při lichém počtu krajních polí je středové pole jen jedno, při sudém počtu jsou středová pole čtyři. Strany šachovnice tvoří obvykle řady a sloupce, ve Figurkové školičce skládáme šachovnice, kde jsou obvodem i úhlopříčky sestavené ze šachových polí. Šachová pole můžou být obsazená nebo neobsazená, na jednom poli může být umístěn pouze jeden objekt. V žádné úloze se nevyskytují na šachovnici pouze šachové objekty, ty se v některých úlohách neobjevují vůbec.



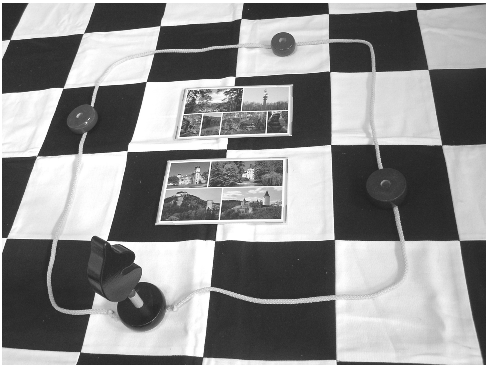
Obr. 1: Úhlopříčná šachovnice

Postupné zvyšování obtížnosti

První etapa: Figury liniového pohybu (věž, střelec, dáma)

Úlohy ve cvičebnicích Figurkové školičky jsou zadány vždy pro základní šachovnici 8 řad krát 8 sloupců, a to ve čtyřech pozicích podle obtížnosti. Další varianty pozic s volitelnou grafikou nabízí počítačový program *Učíme se s Figurkou.*

V první etapě se věnujeme liniovým pohybům. Tím nejjednodušším, a proto začínajícím, je pohyb po řadách a sloupcích (věž), následuje pohyb po úhlopříčkách (střelec), a potom se oba pohyby kombinují (dáma) v typově stejných nebo podobných úlohách. Opakujícím se hlavním tématem je hledání cesty. Cestu chápeme jako nejkratší nebo nejdelší dráhu po šachovnici, která může být uzavřená nebo otevřená [4] (obr. 2). Typy úloh představují sbírání, procházení, obcházení nebo bludiště. Dalším stěžejním tématem je hledání pole. Jedná se o umístění šachového i nešachového objektu na šachovnici, aby splňoval všechny podmínky v zadání úlohy. Ve všech liniových typech pohybu jsou dalšími tématy symetrie, dělení šachovnice a pokrývání šachovnice geometrickými tvary [5] (obr. 3).



Obr. 2: Uzavřená dráha

Obr. 3: Pokrývání geometrickými tvary

Druhá etapa: Figury specifického pohybu (kůň, král, pěšec)

V další etapě se seznamujeme s pohyby šachových figur na šachovnici, které mají svá vlastní pravidla. Kůň se pohybuje skokem na doplňková pole, kam nemíří dáma umístěná do středu šachovnice 5×5, to znamená, že žádný tah koně nesmí být veden ani rovně, ani šikmo. K procvičování užíváme syntetickou metodu, tah koně neprovádíme tak, že počítáme pole na šachovnici ve tvaru písmene L, ale na pole opačné barvy se dostane kůň skokem přes sousední pole.

Úlohy musí být motivačně zajímavé a poutavé, protože se tu vyskytuje převážně jen téma hledání cesty a hledání pole. Král má na rozdíl od liniových figur pohyb limitovaný. Kromě hlavních témat hledání cesty a hledání pole se vyskytují i šachová témata jako šach, mat a pat. Šachové terminologii se vyhýbáme určitou charakterizací krále, např. hledáme nebezpečná pole pro krále. V úlohách poprvé dochází k šachové interakci, konkrétně krále a již probraných šachových figur.

V šachové partii jsou pěšci duší hry (F. A. D. Philidor), ve Figurkové školičce prostřednictvím pěšců objevujeme pohyb orientovaný dopředu a dozadu. Postupně se v jednotlivých úlohách seznamujeme s pravidly pohybu pěšců, poté objevujeme jejich sílu při proměně na poslední řadě, až v poslední úloze hrajeme nejlepší možný tah – zatknutí krále.

Závěr – srovnání s přístupy ve světě

Šachy jsou součástí vzdělávacího kurikula ve více než 30 zemích světa. Výuku šachu zavádějí ve Španělsku, Polsku, na Slovensku. A například v Kolumbii se šachy učí ve školkách už od tří let věku dětí. Drtivá většina postupů je však vystavěna na získávání znalostí, jak se naučit hrát šachy. Není divu, hlavním motorem snahy zavést šachy do škol jsou samotní šachisté.

Pedagogická veřejnost včetně dětských psychologů však má vesměs jiné doporučení pro využití šachové hry v pedagogické praxi. „Rozhodně nejde o sport, do školy nepatří soutěžní šachy," řekl Pep Suarez, psycholog a expert na pedagogiku šachu, na prvním pedagogickém kongresu, který se zabýval sociálním významem šachové hry (Madrid 2013), a dodal: „Každé dítě má právo na vzdělávání, když jedno vyniká, nesmí se zapomínat na ty ostatní."

Leontxo García, ředitel kongresu, novinář a propagátor šachové hry, její pozitivní vliv na myšlení shrnul takto: „Šachy mají učit myslet, ne vyrábět hráče šachu. Není možné, aby se vědci a lékaři po 120 letech výzkumu spletli. Prostě nelze tvrdit, že šachy nerozvíjejí mysl. Vědecké studie mají prakticky stejné výsledky. Podle nich mají lidé hrající šachy lepší intelektuální dovednosti včetně kupříkladu čtenářského porozumění. Díky této hře dochází i ke snadnější dešifraci znaků."

Figurková školička se snaží jít právě tímto směrem. Logicky vystavěná struktura odpovídá snaze využít všechno pozitivní, co logika a matematika schovaná v šachu umožňuje. Už v detailu, jakým je řazení výuky jednotlivých figur či tvorba pro šachisty nejasných úloh, lze vypozorovat úmysl a přístup tvůrců. Je jen na odbornících, jak historií prověřenou hru dále využijí. Velký a zatím nevyužitý prostor je v oblasti vzdělávání na prvním stupni základních škol.

Literatura

[1] `www.figurka64.com`

[2] Kaslová, M.: *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. Raabe, Praha, 2010.

[3] Nimcovič, A.: Můj systém. *Koreách*, 2010.

[4] Pěnčík, J., Pěnčíková, J.: *Lámejte si hlavu*. Prometheus, Praha, 1995.

[5] Volfová, M.: *Matematika na šachovnici*. Centrum talentu M&F&I, Univerzita Hradec Králové, 2010.

S matematikou na fyziku

Martina Květoňová, Vydavatelství Didaktik, Brno [1]

ABSTRAKT. *Nasledujúci text obsahuje úlohy, v ktorých sa prelínajú matematické poznatky a fyzikálna tematika. Tieto úlohy sú vybrané tak, aby poukazovali na využitie niektorých poznatkov z planimetrie pri riešení fyzikálnej problematiky, čím môžeme žiakom ukázať, že medzi matematikou a fyzikou je úzka súvislosť.*

Či už ako učiteľ pracujete v hodinách matematiky s nadanými žiakmi, alebo pred vami nesedí skupina budúcich vedcov, pre každého žiaka je dôležitá motivácia. Pozitívnou motiváciou pre žiaka je zaiste aj vedomie toho, že matematika nie je odtrhnutá od reality, ale nadobudnuté poznatky sú využiteľné v praxi. Je mnoho spôsobov, ak poukázať na praktické využitie matematiky. Jedným z nich je využitie medzipredmetových vzťahov matematika–fyzika. Pre fyziku je matematika nezastupiteľným nástrojom, ktorý slúži k obecnému vyjadreniu poznatkov, a naopak fyzikálna tematika je vhodná na poukázanie na praktické aplikácie matematických poznatkov.

Matematické úlohy s fyzikálnou tematikou sú taktiež dobrou voľbou pre rozvíjanie logického myslenia žiakov. Veďme žiakov k tomu, aby si uvedomovali využiteľnosť matematiky, a to aj pomocou vhodného výberu úloh. Aj tie nasledujúce môžu slúžiť ako inšpirácia do vašich vyučovacích hodín.

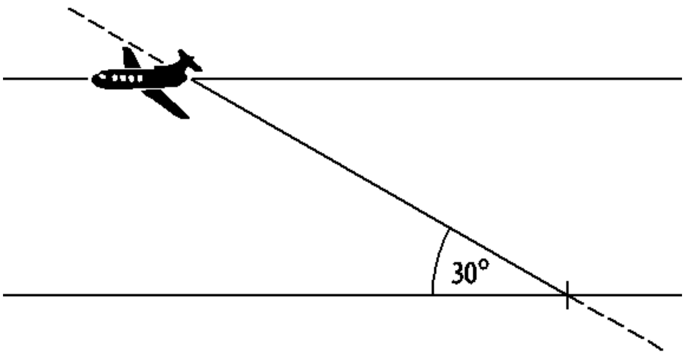
[1] e-mail: kvetonova.martina@email.cz

Nie je možné v pár úlohách obsiahnuť veľké množstvo matematických poznatkov, ktoré fyzika využíva. Preto sa vybrané úlohy zameriavajú na využitie najzákladnejších poznatkov z planimetrie. V prvých piatich úlohách je naznačené riešenie, a to pomocou obrázku, riešenie ostatných úloh je ponechané na prípadný záujem čitateľa. U každej úlohy nájdeme výčet matematických a fyzikálnych poznatkov, ktoré sú k riešeniu úlohy potrebné, poprípade, ktorých sa úloha týka. Úlohy 3, 4, 5, 8 sú vybrané z pracovného zošita k planimetrii, ktorý vydalo vydavateľstvo Didaktis [2].

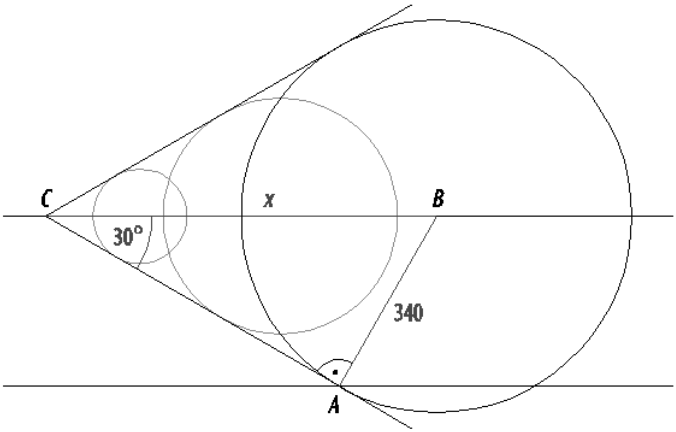
Úloha 1 *Lietadlo*

Pozorovateľ stojí na povrchu Zeme a sleduje lietadlo letiace stálou rýchlosťou rovnobežne s povrchom Zeme. Lietadlo preletelo nad hlavou pozorovateľa a ten počul zvuk v okamihu, keď lietadlo videl pod uhlom 30° (obr. 1, 2). Určte rýchlosť lietadla. [1, s. 115]

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: šírenie zvuku v homogénnom prostredí.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: goniometrické funkcie ostrého uhlu, vzájomná poloha priamky a kružnice, vlastnosti dotyčnice ku kružnici, vlastnosti striedavých uhlov.



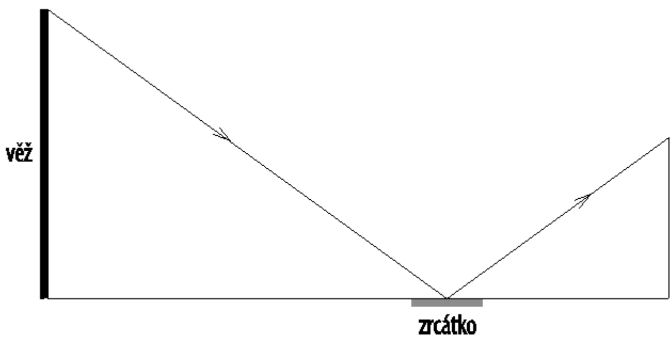
Obr. 1: Lietadlo



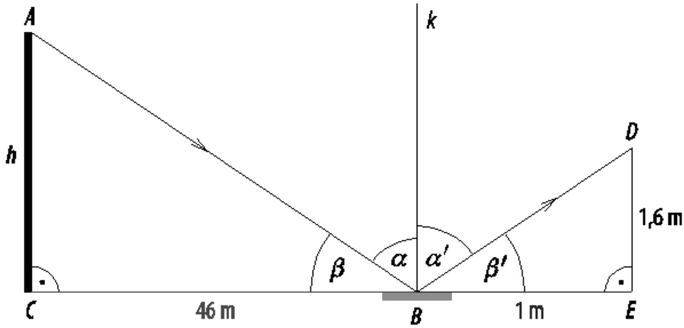
Obr. 2: Lietadlo – riešenie

Úloha 2 *Určenie výšky predmetu pomocou rovinného zrkadla*
Ak je okolie zameriavaného objektu (napr. veže) vodorovnou rovinou, je možné určiť výšku objektu s použitím malého rovinného zrkadla, ktoré položíme na zem do takej vzdialenosti, aby sme v ňom uvideli vrchol objektu (obr. 3, 4). Vypočítajte, aká vysoká je veža, ktorá je od pozorovateľa vzdialená 46 m. Oko pozorovateľa je vo výške 1,6 m nad povrchom zeme a zrkadlo leží na zemi vo vzdialenosti 1 m od pozorovateľa.

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: zákon odrazu svetla.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: vety o podobnosti trojuholníkov.



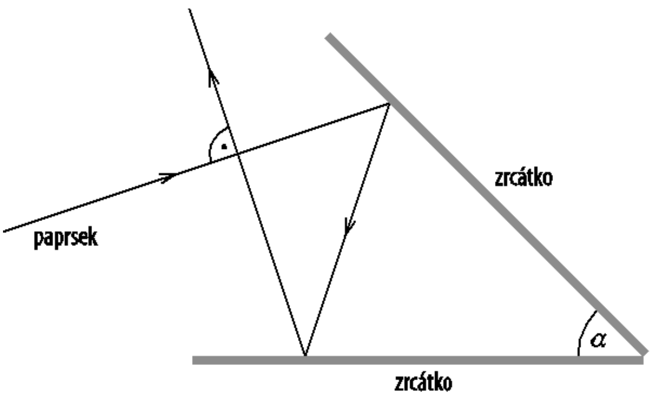
Obr. 3: Určenie výšky objektu



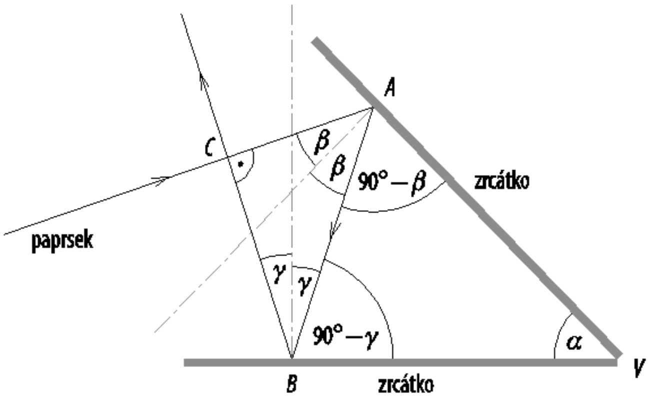
Obr. 4: Určenie výšky objektu – riešenie

Úloha 3 *Uhlové zrkadlá*
Uhlové zrkadlá sa v minulosti využívali v geodézii k vytyčovaniu pravého uhlu v teréne. Princíp vymeriavania pravého uhlu plyne z obr. 5 a 6 – lúč dopadajúci na sústavu zrkadiel je kolmý na lúč, ktorý zo sústavy vychádza. Určte veľkosť uhlu α zovretého zrkadlami. [2, s. 26]

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: zákon odrazu svetla.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: osová súmernosť, vlastnosti uhlov, súčet veľkostí uhlov v trojuholníku.

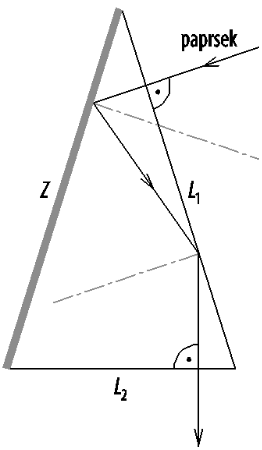


Obr. 5: Uhlové zrkadlá

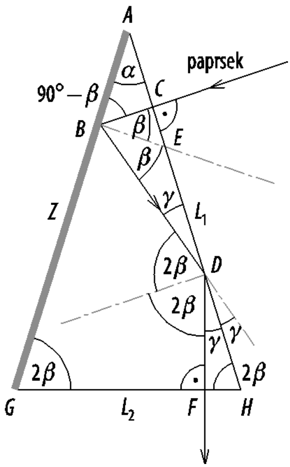


Obr. 6: Uhlové zrkadlá – riešenie

Úloha 4 *Optický hranol*
Optický hranol má podstavu tvaru rovnoramenného trojuholníka. Uhol oproti základni je α. Jedna zo stien hranolu Z je postriebrená a funguje ako zrkadlo. Lúč dopadajúci kolmo na lámavou plochu L_1 sa po prechode hranolom odráža od postriebrenej plochy Z. Po ďalšom úplnom odraze na vnútornej strane vstupnej lámavej plochy L_1 vychádza z hranolu plochou L_2 tak, že je k nej kolmý (obr. 7, 8). Určte veľkosť uhlu α. [2, s. 26]



Obr. 7: Optický hranol



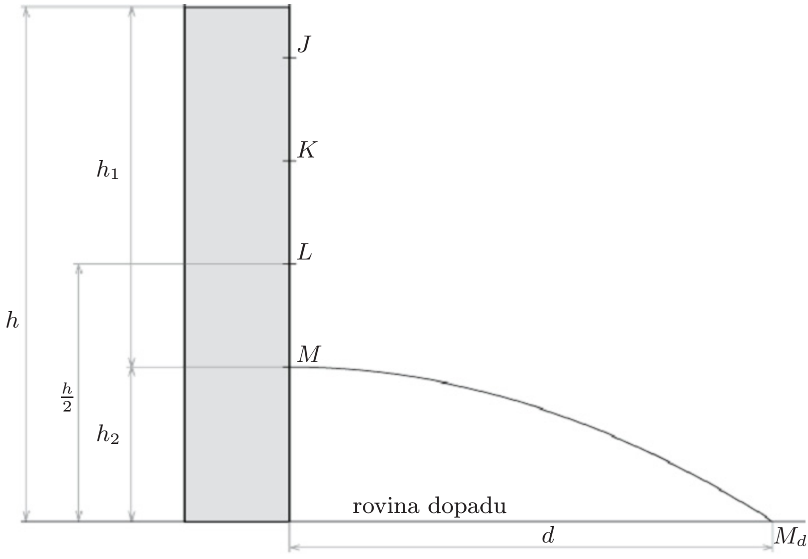
Obr. 8: Optický hranol – riešenie

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: zákon odrazu svetla.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: vety o podobnosti trojuholníkov, vlastnosti uhlov, súčet veľkostí uhlov v trojuholníku.

Úloha 5 *Fontána*

Kvapalina vyteká otvormi v bočnej stene nádoby. Hladina kvapaliny v nádobe je udržiavaná stále v rovnakej výške. Vzdialenosť, do ktorej kvapalina dopadne v dané rovine, stanovíme podľa vzťahu $d = 2\sqrt{h_1 \cdot h_2}$, kde h_1 je vzdialenosť otvoru od hladiny kvapaliny, h_2 je vzdialenosť otvoru od roviny dopadu. Graficky určte vzdialenosť d pre otvory J, K, L v obr. 9. [2, s. 51]

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: je možné riešiť bez akýchkoľvek znalostí fyziky.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: Euklidova veta o výške.



Obr. 9: Fontána

Úloha 6 *Lietadlá*

Minimálna povolená vzdialenosť medzi dvoma letiacimi lietadlami nad Atlantikom je 610 m vo vertikálnom smere a 110 km v horizontálnom smere. Predstavme si situáciu, že dve lietadlá letia oproti sebe v rovnakej výške a na jednej priamke. V akej minimálnej vzdialenosti musí jedno lietadlo začať klesať a druhé stúpať tak, aby si lietadlá navzájom zachovali požadovaný vertikálny odstup? Cestovná rýchlosť lietadiel je $800\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, rýchlosť bezpečného klesania je $600\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ a stúpania $300\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. [3]

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: vzťah medzi rýchlosťou, dráhou a časom u rovnomerného priamočiareho pohybu.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: premena jednotiek, vlastnosti trojuholníkov.

Úloha 7 *Plachetnica*

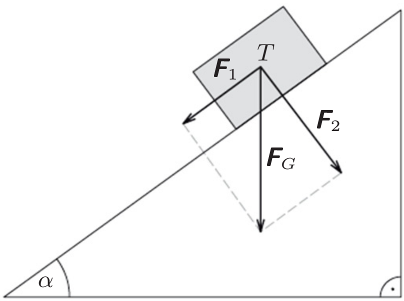
Kurz plachetnice zviera so smerom vetra uhol s veľkosťou 70°, zatiaľ čo plachta zviera so smerom plavby uhol s veľkosťou 50°. Určte rýchlosť lode, ak viete, že rýchlosť vetra je $2{,}5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Úlohu riešte konštrukčne. [4, s. 460]

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: rozklad síl.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: vlastnosti uhlov.

Úloha 8 *Rozklad síl na naklonenej rovine*

Na obr. 10 je znázornený rozklad tiažovej sily $\boldsymbol{F}_G$ pôsobiacej na teleso na naklonenej rovine na zložky $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$. Pohybová zložka $\boldsymbol{F}_1$ je rovnobežná s naklonenou rovinou, tlaková zložka $\boldsymbol{F}_2$ je kolmá k naklonenej rovine. Určte veľkosť uhlu, ktorý zviera zložka $\boldsymbol{F}_2$ s tiažovou silou $\boldsymbol{F}_G$. Sklon naklonenej roviny je α, tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$ má zvislý smer. [2, s. 18]

- Čo potrebujeme vedieť z fyziky: rozklad síl.
- Čo potrebujeme vedieť z matematiky: vlastnosti uhlov.



Obr. 10: Rozklad síl

Literatura

[1] Barták, F., Bednařík, M., Lepil, O., Svoboda, E., Široká, M.: *Sbírka úloh z fyziky pro studijní obory SOŠ a SOU.* SPN, Praha, 1988.

[2] Gazárková, D., Melicharová, S., Vokřínek, R.: *Matematika pro SŠ – 3. díl: Planimetrie – Pracovní sešit.* Didaktis, Brno, 2013.

[3] Tesař, M.: *Příklady ze středoškolské fyziky.* Diplomová práce. PřF MU, Brno, 2007. Dostupné z: `https://is.muni.cz/th/63659/prif_m/diplomova_prace.txt`

[4] Vejsada, F., Talafous, F.: *Zbierka úloh z matematiky pre stredné všeobecnovzdelávacie školy a gymnáziá.* SPN, Bratislava, 1973.

Úlohy Matematického klokana v projektu Matematika pro všechny *

Ivana Machačíková, Gymnázium Lesní čtvrť, Zlín [1]

Josef Molnár, PřF UP, Olomouc [2]

Abstrakt. *Čtenář je seznámen s možnostmi užití úloh Matematického klokana v metodických materiálech určených pro práci se žáky ve standardních hodinách matematiky na středních školách. Vybrané ukázky demonstrují zaměření pracovních materiálů zpracovaných v rámci řešení projektu ESF OPVK CZ.1.07/1.1.00/26.0047 na série gradovaných úloh a na příklady s odlišnými způsoby řešení.*

Úvod

V rámci řešení projektu ESF OPVK CZ.1.07/1.1.00/26.0047 jsme se zaměřili na tvorbu metodických materiálů s úlohami souvisejícími se zvolenými ústředními pojmy s gradující obtížností a na materiály, které ukazují různé přístupy k řešení jedné a téže úlohy. Jako dobrým zdrojem podkladů pro takovéto metodické materiály se ukázaly i úlohy Matematického klokana.

[1] e-mail: machacikova@gymzl.cz

[2] e-mail: josef.molnar@upol.cz

* Článek byl zpracován za podpory projektu ESF OPVK CZ.1.07/1.1.00/26.0047 „Matematika pro všechny“.

Hlavní cíle projektu a klíčové aktivity

Za hlavní cíle projektu je možné považovat:

- vytvoření motivujícího prostředí pro výuku matematiky na základních a středních školách
- vytvoření metodických materiálů pro učitele a jejich zpřístupnění na webovém portále – série gradovaných úloh, příklady s výrazně odlišnými přístupy k řešení
- ověření materiálů na školách (pilotáž)
- proškolení učitelů matematiky pro práci s těmito materiály

Metodické materiály

Je připraveno 250 metodických materiálů pro základní vzdělávání (2. stupeň) a gymnázia, které

- jsou členěny podle tematických okruhů RVP,
- obsahují
  - série gradovaných úloh,
  - příklady s odlišnými přístupy k řešení,
- zohledňují mezipředmětové vztahy,
- mají jednotnou formu,
- jsou označeny tematickým okruhem a stupněm náročnosti.

Klokanské úlohy

Jaký typ úloh považujeme za „klokanské“:

- vtipné, zajímavé, neotřelé (ne nutně originální)
- uzavřené (multiple-choice s nabídkou pěti odpovědí)
- s krátkým zadáním
- obzvlášť cenné jsou řešitelné několika způsoby
- přiměřeně obtížné dané kategorii

Ukázky úloh z metodických materiálů

Ukázka 1

Tematický okruh RVP G: Geometrie

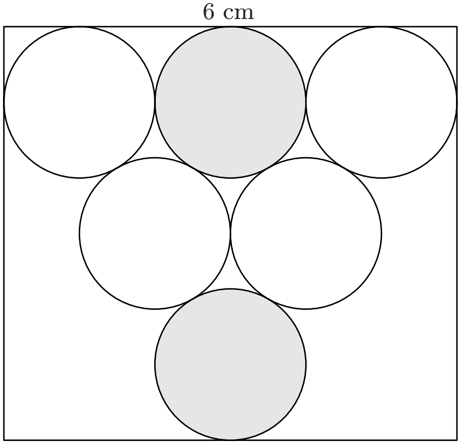
Téma: trojúhelník, kružnice

Klíčové pojmy: trojúhelník (rovnostranný, pravoúhlý), kruh, kružnice, polokružnice

Úloha 1 (úroveň 2)

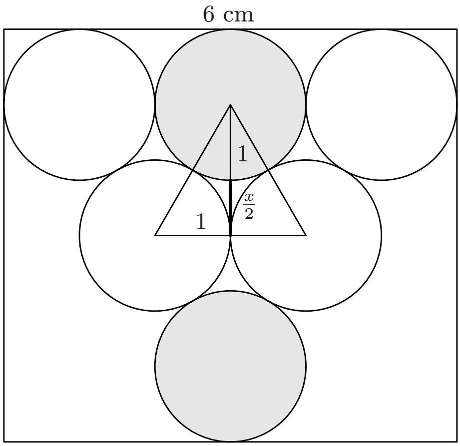
Předpokládané znalosti: kruh, rovnostranný trojúhelník, Pythagorova věta

Zadání: Do obdélníku o délce 6 cm jedné strany jsou vepsány shodné kruhy jako na obr. 1. Jaká je nejmenší vzdálenost mezi šedými kruhy?



Obr. 1

Řešení: Spojíme-li středy tří kruhů na obrázku, dostaneme rovnostranný trojúhelník (obr. 2).



Obr. 2

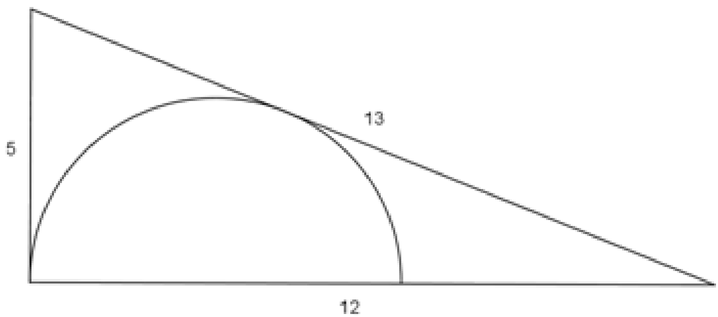
Délka jeho strany je 2, protože poloměr zadaných kruhů je 1. Hledanou vzdálenost x vypočítáme pomocí výšky v tomto rovnostranném trojúhelníku. Výška v má velikost $\sqrt{3}$. Polovina hledané vzdálenosti je rovna výšce rovnostranného trojúhelníku zmenšené o poloměr kruhu, tedy $\sqrt{3} - 1$, hledaná vzdálenost je tedy $2(\sqrt{3} - 1)$.

Metodické poznámky: V zadaném obrázku je třeba najít rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy daných kruhů.

Zdroj: Matematický klokan 2012, kategorie Junior

Úloha 2 (úroveň V2-3)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, délka tečny ke kružnici, Pythagorova věta (řešení 1), podobnost trojúhelníků (řešení 2)
Zadání: Je dán pravoúhlý trojúhelník s délkami stran 5, 12 a 13. Určete poloměr vepsané půlkružnice podle obr. 3.



Obr. 3

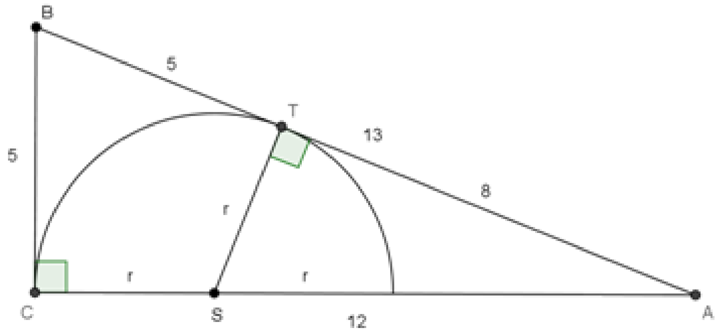
Řešení: Označme vrcholy pravoúhlého trojúhelníku A, B, C, velikost úhlu ACB je $90°$, střed vepsané půlkružnice označme S, bod dotyku půlkružnice s přeponou AB označme T (obr. 4). Délka úsečky BT je 5, protože délky tečen vedoucích z bodu ke kružnici jsou stejné ($|BT| = |BC| = 5$). Délka úsečky TA je tedy 8 ($|TA| = |BA| - |BT|$).

1. způsob řešení – řešíme užitím Pythagorovy věty

Pro délky odvěsen a přepony v pravoúhlém trojúhelníku AST platí:

$$|TA|^2 + |TS|^2 = |AS|^2$$

$$24r = 80, \qquad r = \frac{10}{3}$$



Obr. 4

2. způsob řešení – řešíme užitím podobnosti trojúhelníků

Pravoúhlé trojúhelníky ABC a AST jsou podobné (podle věty uu), platí tedy:

$$\frac{|BC|}{|ST|} = \frac{|AC|}{|AT|}$$

$$r = \frac{10}{3}$$

Metodické poznámky: Úlohu lze řešit různými způsoby (užitím Pythagorovy věty nebo užitím podobnosti trojúhelníků), tato řešení můžeme na závěr porovnat.

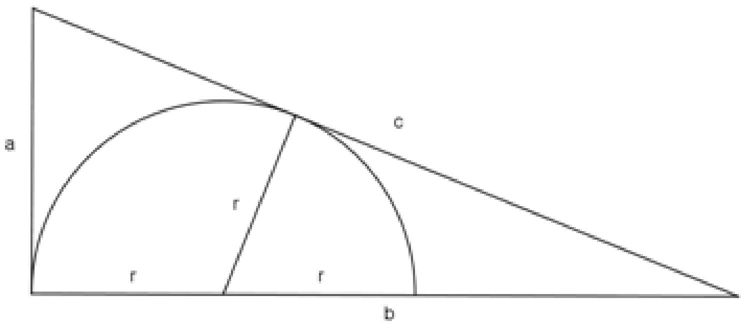
Zdroj: Matematický klokan 2012, kategorie Junior

Úloha 3 (úroveň 3)

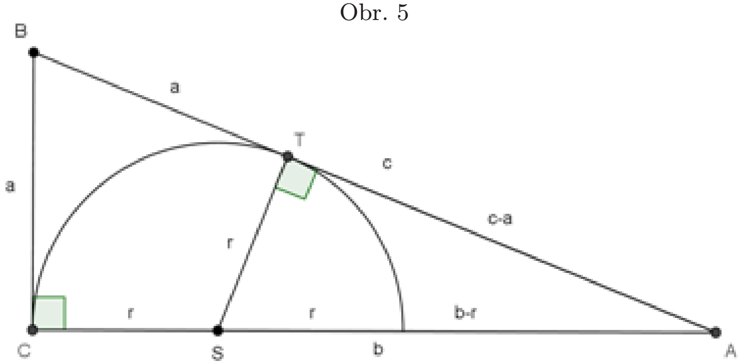
Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, délka tečny ke kružnici, Pythagorova věta (řešení 1), podobnost trojúhelníků (řešení 2)

Zadání: Je dán pravoúhlý trojúhelník se stranami délek a, b a c. Určete poloměr jemu vepsané půlkružnice podle obr. 5.

Řešení: Označme vrcholy pravoúhlého trojúhelníku A, B, C, velikost úhlu ACB je 90°, střed vepsané půlkružnice označme S, bod dotyku půlkružnice s přeponou AB označme T (obr. 6). Délka úsečky BT je a, protože úseky na tečnách vedoucích z bodu ke kružnici jsou stejně dlouhé ($|BT| = |BC| = a$). Délka úsečky TA je tedy $c-a$ ($|TA| = |BA|-|BT|$).



Obr. 5



Obr. 6

1. způsob řešení – řešíme užitím Pythagorovy věty

Pro délky odvěsen a přepony v pravoúhlém trojúhelníku AST platí:

$$(b-r)^2 = r^2 + (c-a)^2$$

$$b^2 - 2br + r^2 = r^2 + c^2 - 2ac + a^2$$

$$-2br = c^2 - 2ac + a^2 - b^2 \qquad (*)$$

V pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $c^2 = a^2 + b^2$, tedy $c^2 - b^2 = a^2$. Po dosazení do rovnice (*) dostáváme:

$$-2br = a^2 - 2ac + a^2$$

$$r = \frac{2a^2 - 2ac}{-2b} = \frac{a(c-a)}{b}$$

Pokud zlomek rozšíříme výrazem $c + a$, zlomek upravíme na tvar:

$$r = \frac{a(c-a)}{b} \cdot \frac{c+a}{c+a} = \frac{a(c^2-a^2)}{b(c+a)} = \frac{ab^2}{b(c+a)} = \frac{ab}{a+c}$$

2. způsob řešení – řešíme užitím podobnosti trojúhelníků

Pravoúhlé trojúhelníky ABC a AST jsou podobné (podle věty uu), platí tedy:

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{c-a}, \qquad r = \frac{a(c-a)}{b}$$

Pokud zlomek rozšíříme výrazem $c + a$, zlomek upravíme na tvar:

$$r = \frac{ab}{a+c}$$

Metodické poznámky: Úloha 3 je zobecněním úlohy 2 pro obecné délky stran a, b, c pravoúhlého trojúhelníku.

Zdroj: Matematický klokan 2012, kategorie Student

Obrazový materiál: autor

Ukázka 2

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Téma: exponenciální rovnice a jejich soustavy

Klíčové pojmy: exponenciální rovnice, soustavy exponenciálních rovnic

Úloha 1 (úroveň 1-2)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, počítání s mocninami

Zadání: Je-li

$$9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011},$$

jaká je hodnota n?

Řešení: Řešíme exponenciální rovnici, postupnými úpravami (použijeme pravidla pro počítání s mocninami) dostáváme:

$$3 \cdot 9^n = 3^{2011}$$

$$3 \cdot 3^{2n} = 3^{2011}$$

$$3^{2n+1} = 3^{2011}$$

Základy mocnin jsou na obou stranách rovnice stejné, musí se tedy rovnat i exponenty: $n = 1005$

Metodické poznámky: Při řešení zadané exponenciální rovnice využíváme pravidla pro počítání s mocninami.

Zdroj: Matematický klokan 2011, kategorie Junior

Úloha 2

Předpokládané znalosti: řešení soustavy rovnic dosazovací metodou, pravidla pro počítání s mocninami

Zadání: Pro reálná čísla x a y platí $2^x = 15$ a $15^y = 32$. Určete hodnotu součinu xy.

Řešení 1 (úroveň 1-2): Pro řešení úlohy použijeme dosazovací metodu. Z první rovnice víme, že $2^x = 15$, což dosadíme do druhé rovnice:

$$(2^x)^y = 32$$
$$xy = 5$$

Řešení 2 (úroveň 2-3)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, soustavy rovnic, logaritmování, počítání s logaritmy

Abychom z obou rovnic mohli vyjádřit neznámé, zlogaritmujeme je. Postupně dostaneme:

$$x \log 2 = \log 15, \qquad x = \frac{\log 15}{\log 2}$$
$$y \log 15 = \log 32, \qquad y = \frac{\log 32}{\log 15}$$

Vypočítáme součin xy:

$$xy = \frac{\log 15}{\log 2} \cdot \frac{\log 32}{\log 15} = \frac{\log 32}{\log 2} = \log_2 32 = 5$$

Metodické poznámky: V prvním řešení využíváme dosazovací metodu řešení soustav rovnic, ve druhém řešení využíváme logaritmování. S žáky můžeme porovnat oba způsoby řešení.

Zdroj: Matematický klokan 2011, kategorie Student

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, počítání s mocninami, řešení soustavy rovnic součinovou metodou

Zadání: Nechť pro reálná čísla x, y, z současně platí

$$x^2yz^3 = 7^3 \quad \text{a} \quad xy^2 = 7^9.$$

Jaká je hodnota výrazu xyz?

Řešení: Vynásobíme-li levé a pravé strany rovnic, dostaneme

$$\begin{aligned} x^3y^3z^3 &= 7^{12} \\ (xyz)^3 &= (7^4)^3 \\ xyz &= 7^4 \end{aligned}$$

Metodické poznámky: Vzhledem k tomu, že se ptáme na hodnotu součinu xyz, při řešení využíváme součinovou metodu řešení soustavy rovnic.

Zdroj: Matematický klokan 2008, kategorie Student

Jak se zapojit do řešení projektu?

Do projektu je možné zapojit se hlavně těmito způsoby:

- účastí na seminářích k vytvořeným materiálům, případně jejich organizací
- pilotním ověřováním vytvořených materiálů ve výuce matematiky (učitelé zapojení do pilotáže budou odměněni formou dohod o provedení práce, resp. pracovní činnosti, které budou pokrývat přípravu na výuku formou studia metodických materiálů a následné zpracování hodnocení úspěšnosti pilotního nasazení daného metodického prvku)
- tvorbou úloh Matematického klokana (motivací je vlastní potěšení, navíc pro dobrou věc)

Kde lze získat další informace?

- Informační web projektu:
  `info.mat4all.upol.cz`
- Hlavní řešitel (Univerzita Palackého v Olomouci):
  `jaroslav.svrcek@upol.cz`
- Řešitel partnera (Gymnázium Jakuba Škody Přerov):
  `raska@gjs.cz`

Literatura

[1] `www.matematickyklokan.net` (cit. 5. 5. 2013)

[2] Vankúš, P.: Zisťovanie efektívnosti vyučovacieho procesu v kontexte kľúčových kompetencií. In: *Matematika v škole dnes a zajtra.* Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity, Ružomberok, 2007, s. 317–320.

[3] Vankúš, P.: Postoje žiakov k matematike a ich vplyv na jej vyučovanie. In: *Zborník 9. Bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky.* Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2011, s. 103–117.

Transpoziční šifry, tabulkový procesor a rozvoj matematického myšlení

Michal Musílek, PřF, Univerzita Hradec Králové [1]

ABSTRAKT. *Příspěvek se věnuje využití klasických ručních transpozičních šifer jako motivaci k rozvoji logického myšlení žáků s matematickým nadáním. Transpozici jednotlivých znaků šifrovaného textu je možné popsat pomocí algebraických vztahů. Algoritmy požité při šifrování, či dešifrování lze naprogramovat pomocí jazyka MS VisualBasic for Applications, který je standardním nástrojem tabulkového procesoru MS Excel. Tabulkový procesor využijeme s výhodou také při luštění transpozičních šifer. Některé z úloh představených v rámci příspěvku byly součástí soutěže IQ UHK, čili Internet Quizzes at University of Hradec Králové v oblasti informatika – kryptologie.*

Úvod

Na minulém konferenci *Ani jeden matematický talent nazmar* jsem se snažil ukázat jako jednu z možných cest ke zvýšení atraktivity matematiky pro talentované žáky začlenění témat dotýkajících se základů kryptologie, tj. nauky o tajné komunikaci (z řeckého kryptós – skrytý), poněkud zjednodušeně řečeno nauky o šifrách. Zmínil jsem již tehdy silný mezipředmětový potenciál od matematiky směrem k mateřskému i cizím jazykům, dějepisu a informatice [2].

Zároveň jsme definovali některé základní pojmy, jako *otevřený text* (OT), což je běžný čitelný text v daném jazyce, z nějž pomocí *šifrování* (angl. encryption) vytvoříme na první pohled naprosto nečitelný

[1] e-mail: michal.musilek@uhk.cz

šifrový text (ŠT) pomocí předem daného algoritmu a většinou také klíče (hesla). Opačnému postupu, kdy ze ŠT získáváme OT se znalostí algoritmu a klíče, říkáme *dešifrování* (angl. decryption). Zcela jinou činností (intelektově mnohem náročnější) je *luštění* (angl. deciphering), kdy se luštitel snaží ze ŠT získat OT bez znalosti šifrovacího algoritmu nebo bez znalosti klíče [6].

Připomeňme si také, že všechny klasické šifry i jejich moderní počítačové obdoby vycházejí ze tří základních principů. Prvním je *substituce*, čili záměna znaku (písmene, resp. skupiny znaků) OT jiným znakem (resp. skupinou znaků). Druhým je *transpozice*, čili změna pořadí znaků zprávy (promíchání podle určitého klíče). Třetím je *jednotkové připočtení hesla*. Zatímco na minulé konferenci jsme se věnovali výhradně substitučním šifrám, tentokrát svoji pozornost zaměříme výhradně na transpozice.

Ukažme si nejprve tři jednoduché příklady transpozičních šifer. Podívejte se pozorně na následující šifrové texty a pravděpodobně vás alespoň u některých z nich po chvíli soustředění napadne, jakým způsobem byla písmena původního textu přeskupena. Stejně jako u substitučních šifer bývá u českého OT zvykem nejprve odstranit diakritiku a interpunkci, převést celý text na velká písmena a teprve potom šifrovat.

1) UDAZDO UTXET OHELEC INASP
2) OBEN EMESIP UKTAPZOP AVOLS
3) ETAMV CITAM DJENE TINAE OTOKA CICEV TAPAH SOKAJ ISSIP ZENAN ONKYV HOJTU NNOVN NAMUE ZYXWN

Řešení všech úloh z tohoto článku najdete na jeho konci.

Rail Fence Cipher

O něco složitější než šifry 1) až 3) je šifra nazývaná v anglicky mluvících zemích Rail Fence Cipher, česky buď šifra podle plotu, nebo také cik-cak šifra. Zatímco v Čechách a na Moravě dělá ŠT zašifrovaný pomocí tohoto systému potíže i docela zkušeným soutěžícím, v Anglii prý tento systém zná a používá lecjaký malý školák [5].

Existuje několik variant této šifry, my si ukážeme šifrování pomocí tabulky se třemi řádky (počet sloupců je dán počtem písmen šifrované zprávy). Zašifrujeme slavný výrok: „Kolik řečí umíš, tolikrát jsi člověkem.“

K				K				I				S			
	O		I		R		C		U		I		T		L
		L				E				M				O	

I				T				C				E			
	K		A		J		I		L		V		K		M
		R				S				O				E	

Pro zašifrování přepíšeme písmena textu po řádcích a přeskupíme je do pětimístných skupin:

KKISI TCEOI RCUIT LKAJI LVKML EMORS OE

Je zřejmé, že algoritmus šifrování lze snadno popsat a realizovat jako program, např. jako makro v tabulkovém procesoru Excel. Příslušný program v jazyce Visual Basic for Applications by mohl vypadat např. takto:

```
Podle_plotu()
 pltxt = InputBox("Zadejte otevřený text k~zašifrování:",
     "Podle plotu")
 pltxt = UCase(pltxt) ’ Přepíšeme text velkými písmeny.
 pltxt = Bez_mezer(pltxt) ’ Odstraníme mezery a inerpunkci.
 pltxt = Bez_diakr(pltxt) ’ Odstraníme diakritiku.
 Dim citxt(1 To 3) As String ’ Písmena textu přeskupíme do 3 částí,
 citxt(1) = vbNullString ’ které jsou zatím všechny 3 prázdne.
 citxt(2) = vbNullString
 citxt(3) = vbNullString
 n = Len(pltxt)
 For j = 1 To n
    i = (j - 1) Mod 4 + 1
    If i = 4 Then i = 2
    Cells(i, j) = Mid(pltxt, j, 1)
    Cells(i, j).Interior.Color = RGB(255, 255, 0)
    citxt(i) = citxt(i) & Mid(pltxt, j, 1)
 Next j
 Cells(5, 5) = citxt(1) & citxt(2) & citxt(3)
End Sub
```

Funkce pro odstranění mezer, interpunkce a diakritiky, které jsou použity v rámci makra `Podle plotu ()`, je možné najít na webu autora tohoto příspěvku [3]. Stejně tak je na webu k dispozici zdrojový text makra, které provede dešifrování ŠT získaného algoritmem „podle plotu“. Analýza tohoto problému je hezkou ukázkou využití zbytku po dělení číslem 4. Vyjde-li totiž dělení počtu znaků n šifrového textu čtyřmi beze zbytku, můžeme psát $n = 4c$. Pak bude mít první řádek přesně c znaků, druhý řádek přesně $2c$ znaků a třetí řádek opět c znaků. Tak např., máme-li dešifrovat ŠT „EESLU LIEZK AYKDA D“, rozdělíme ho na čtvrtiny, načež prostřední dvě čtvrtiny spojíme dohromady a získáme tři části: „EESL“, „ULIEZKAY“ a „KDAD“. Tyto 3 skupiny rozepíšeme postupně do 1., 2. a 3. řádku tabulky a cik-cak čtením zjistíme otevřený text:

E				E				S				L			
	U		L		I		E		Z		K		A		Y
		K				D				A				D	

Pokud počet znaků n šifrového textu není dělitelný 4 beze zbytku, označíme $n = 4c + z$, kde $z \in \{1, 2, 3\}$. Délka první části je $c + 1$, délka druhé části je $2c$ pro $z = 1$, nebo $2c + 1$ pro $z > 1$, a délka třetí části je c pro $z < 3$, nebo $c + 1$ pro $z = 3$. Ukažme si opět příklad. Máme dešifrovat ŠT „AEMMC ATMNJ DNAEA IKTLN NZAIE TTYEA R“. Počet písmen tohoto textu je $31 = 7 \cdot 4 + 3$, tj. části jsou dlouhé 8, 15 a 8 znaků. Části „AEMMCATM“, „NJDNAEAIKTLNNZA“ a „IETTYEAR“ rozepíšeme do řádků tabulky:

A				E				M				M			
	N		J		D		N		A		E		A		I
		I				E				T				T	

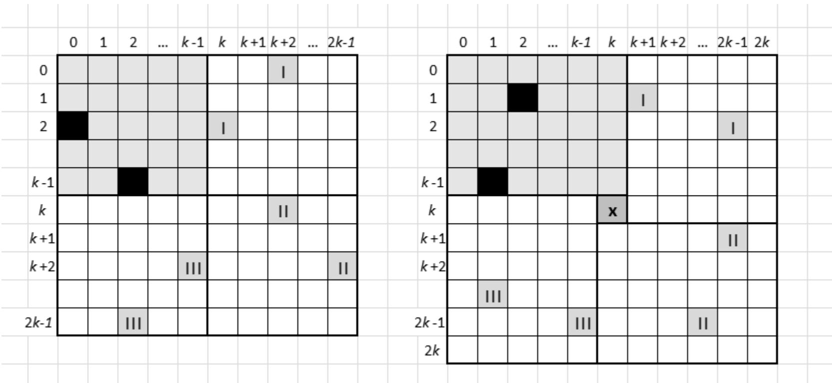
C				A				T			Z			R
	K		T		L		N		N			M		
		Y				E				A			A	

Cik-cak čtením opět zjistíme v tabulce otevřený text.

Fleissnerova mřížka

Fleissnerovu mřížku, nazývanou také otočná mřížka, používala německá armáda jako polní šifru ještě během první světové války [1]. Tuto šifru popsal rakouský jezdecký důstojník Edouard Fleissner von Wostrowitz ve své knize *Handbuch der Kriptographie*, vydané ve Vídni roku 1881 [6]. O čtyři roky později podrobně popsal šifrování pomocí otočné mřížky francouzský spisovatel Jules Verne ve svém románu *Matyáš Sandorf, aneb nový hrabě Monte Christo*. Je zajímavé, že šifrování otočnou mřížkou velikosti 6×6 polí považoval Verne za velmi bezpečný šifrový systém, bez znalosti rozložení otvorů v mřížce prakticky nerozluštitelný. Právě díky jeho románu se mřížka stala poměrně známou a používanou pomůckou, např. ve skautských oddílech.

Fleissnerovu mřížku vyrobíme ze silnějšího papíru (kreslicího kartonu) jako čtvercovou tabulku s $n \times n$ poli. Pomocí nůžek opatrně vystřihneme čtvrtinu polí. Přesněji řečeno pro sudé $n = 2k$ vystřihneme přesnou čtvrtinu polí, protože $n^2 = 4k^2$ je dělitelné čtyřmi beze zbytku. Pro liché $n = 2k + 1$ musíme nejprve odečíst jedničku a pak teprve dělit čtyřmi protože $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Při vystřihování otvorů musíme pečlivě dbát na to, aby se při otočeních mřížky o 90°, 180° a 270° otvor dostal jen na místa nevystřižená, nikdy ne na jiný otvor. Taková mřížka by nebyla použitelná.



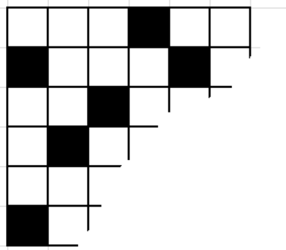
Obr. 1: Fleissnerova mřížka se sudým a s lichým počtem polí

Označíme-li souřadnice vystřiženého pole r a s (r jako řádek a s jako sloupec), pak při otočení mřížky o 90° ve směru chodu hodinových ručiček (na obr. 1 je příslušná pozice označena římskou číslicí I) bude souřadnice řádku s a souřadnice sloupce $n - 1 - r$. Při dalším pootočení, tj. celkem o 180° (označeno římskou číslicí II), budou souřadnice řádku $n - 1 - r$ a souřadnice sloupce $n - 1 - s$. Při třetím pootočení, tj. otočení o 270° ve směru chodu hodinových ručiček (do pozice III na obr. 1) budou souřadnice řádku $n - 1 - s$ a souřadnice sloupce bude r. Odvození těchto vztahů pro souřadnice a jejich využití při práci s dvourozměrným polem může být zajímavým cvičením při výuce programování. Opět můžeme využít tabulkový procesor Excel a jeho makrojazyk Visual Basic for Applications.

Transpoziční šifry v soutěži IQ UHK

Otáčení Fleissnerovy mřížky a s ním související změny polohy otvorů byly klíčem k řešení jedné z úloh internetové soutěže IQ UHK (Internet Quizzes at University of Hradec Králové). V této úloze měli soutěžící k dispozici neúplnou Fleissnerovu mřížku (s utrženým rohem) a šifru zapsanou ve čtvercovém schématu odpovídajícím rozměrům mřížky (obr. 2). Řešení úlohy ponecháváme čtenářům (na konci článku je uvedeno pod číslem 4).

N	H	R	M	D	A
A	E	O	C	T	H
R	B	H	R	E	I
F	I	S	M	A	N
O	O	V	T	Y	N
S	O	T	S	A	X



Obr. 2: Šifra a neúplná Fleissnerova mřížka v úloze soutěže IQ UHK

V soutěži IQ UHK je celkem 11 soutěžních oblastí. Jsou to matematika, informatika, fyzika, biologie, chemie, anglický jazyk, český jazyk, historické vědy, společenské vědy, hudba a hudební nauka, literatura a kultura. Informatické úlohy byly v prvním ročníku soutěže zaměřeny na kryptologii, v příštím ročníku však plánujeme jiná témata. Transpozičním šifrám byly věnovány dvě série úloh. První série nejjednodušším šifrám, o nichž jsme již částečně hovořili. Druhá série se podrobněji zabývala tzv. Jednoduchou sloupcovou transpozicí a jejím luštěním. Podívejme se, jak účastníci soutěže řešili úlohy na nejjednodušší transpoziční šifry. Celkem se soutěže zúčastnilo 126 studentů středních škol, ale pouze 31 z nich luštilo kryptologické úlohy.

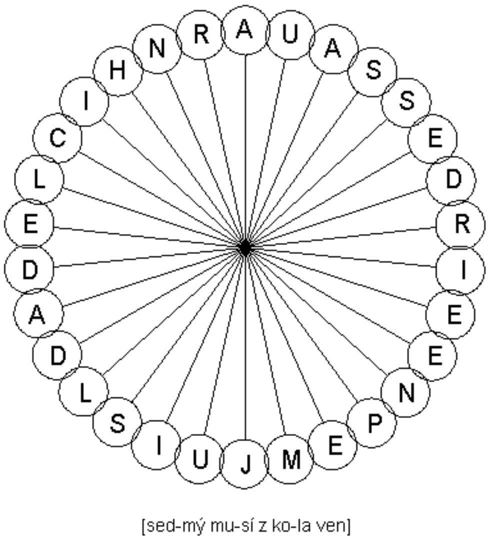
V tab. 1 vidíme, vždy kolik účastníků soutěže se pokoušelo danou úlohu řešit, kolik z nich bylo úspěšných a jaké bylo jejich průměrné skóre za danou úlohu. Pokud soutěžící vyřešil úlohu do 1 týdne od zveřejnění a na první pokus, získal 100 bodů. Za každý chybný pokus se odečítal 1 bod a za každý den nad týdenní limit se odečítaly 2 body. Tímto způsobem získal každý účastník soutěže skóre za danou úlohu. V tabulce vidíme aritmetický průměr skóre všech úspěšných účastníků.

Název úlohy	Počet řešitelů	Z toho úspěšných	Průměrné skóre
Nejjednodušší transpoziční šifra (odzadu)	31	28	88
Transpoziční šifra KOPRETINA	16	15	98
Transpoziční šifra PRVNÍ–DRUHÝ (cik-cak šifra)	17	17	91
Fleissnerova mřížka (viz obr. 2)	11	10	95
Jednoduchá řádková transpozice dle hesla	12	12	90

Tab. 1: Úspěšnost řešení nejjednodušších transpozičních šifer

Transpoziční šifra KOPRETINA

Typem transpoziční šifry, o němž jsme zatím nemluvili, je kopretina. Zajímavý je způsob generování obrazce této šifry pomocí programu v jazyce Logo, který je popsán v [4]. Luštění této šifry je založeno na principu rozpočítávání. Postupně vyřazujeme jednotlivá písmena a zapisujeme je v tom pořadí, v jakém jsou „utrženy“ jednotlivé lístky kopretiny. Řešení úlohy (obr. 3) ponecháváme čtenářům (na konci článku je uvedeno pod číslem 5).



Obr. 3: Kopretinová šifra ze soutěže IQ UHK

Jednoduchá sloupcová transpozice

Ke konci soutěže byla zařazena série pěti úloh na dešifrování, nebo dokonce luštění jednoduché sloupcové transpozice. V tabulce 2 vidíme, že tuto sérii už řešil mnohem menší počet soutěžících, ale že šlo o vytrvalé nadšence, jejichž průměrné skóre bylo vyšší než u první série úloh. Obtížnost úloh v sérii se poměrně razantně zvyšovala, takže čtvrtou úlohu, v níž šlo o luštění jednoduché sloupcové transpozice s neúplnou tabulkou, nevyluštil žádný soutěžící. Tento typ šifry byl používán jako jeden ze stavebních kamenů kombinovaných šifer používaných československými výsadkáři během 2. světové války.

Jednoduchá sloupcová transpozice	Počet řešitelů	Z toho úspěšných	Průměrné skóre
úloha č. 1	3	3	99
úloha č. 2	3	3	99
úloha č. 3	4	4	99
úloha č. 4	0	0	
úloha č. 5	1	1	100

Tab. 2: Úspěšnost řešení jednoduché sloupcové transpozice

Ukažme si postup luštění šifrového textu zašifrovaného jednoduchou transpozicí s úplnou tabulkou, který je jednodušší. Máme dán šifrový text:

BIRSM DCEMB NVJPL ERMCK UELLV STKYZ
HE**X**SP CROMS ENZ**X**E UAMEY UIRL**X** IOOAT SKCDJ
XASAE RAENU YI

Tento šifrový text má přesně 77 znaků. Protože se jedná o traspozici s úplnou tabulkou, zjistíme rozměry tabulky rozkladem tohoto čísla na prvočinitele: $77 = 7 \cdot 11$. Půjde tedy buď o tabulku se 7 řádky a 11 sloupci, nebo o tabulku s 11 řádky a 7 sloupci. Pro doplnění posledního řádku se často používají písmena, která se v českém textu vyskytují velmi vzácně. Zde bylo opakovaně použito písmeno X (v ŠT je zvýrazněno tučným písmen a podtržením). Vzdálenost mezi písmeny X v ŠT je vždy 11 znaků, v našem případě půjde tedy o tabulku s 11 řádky. Písmena ŠT přepíšeme do sloupců a dostaneme tabulku 3 vlevo.

B	V	L	S	E	I	A
I	J	L	P	U	O	S
R	P	V	C	A	O	A
S	L	S	R	M	A	E
M	E	T	O	E	T	R
D	R	K	M	Y	S	A
C	M	Y	S	U	K	E
E	C	Z	E	I	C	N
M	K	H	N	R	D	U
B	U	E	Z	L	J	Y
N	E	X	X	X	X	I

V	B	A	S	I	L	E
J	I	S	P	O	L	U
P	R	A	C	O	V	A
L	S	E	R	A	S	M
E	M	R	O	T	T	E
R	D	A	M	S	K	Y
M	C	E	S	K	Y	U
C	E	N	E	C	Z	I
K	M	U	N	D	H	R
U	B	Y	Z	J	E	L
E	N	I	X	X	X	X

Tab. 3: Luštění jednoduché sloupcové transpozice

Napínavou částí luštění je přeskupování sloupců tak, aby písmena čtená po řádcích dala smysluplný otevřený text. Luštění usnadňuje fakt, že na prvních pozicích zleva musí být sloupce nekončící „doplňkovým“ písmenem **X**, za nimi pak následují všechny sloupce končící **X**. Tuto fázi je možné realizovat pomocí tabulkového procesoru Excel, kdy pomocí kopírování (klávesová zkratka Ctrl + C) a vkládání (klávesová zkratka Ctrl + V) skládáme tabulku 3 vpravo.

Závěr

V článku jsme si ukázali několik zajímavých úloh, které na motivačně zajímavé oblasti kryptologických algoritmů rozvíjejí matematické myšlení a přirozeně zapojují do řešení problémů informatické nástroje, jako je například tabulkový procesor Excel a jeho jazyk maker VBA (Visual Basic for Applications). Úlohy mohou být inspirací pro práci se žáky gymnázií či středních odborných škol v rámci vhodných volitelných nebo nepovinných předmětů.

Řešení úloh

Řešení úlohy č. 1

UDAZDO UTXET OHELEC INASP . . . PSANI CELEHO TEXTU ODZADU

Psaní celého textu odzadu.

Řešení úlohy č. 2

OBEN EMESIP UKTAPZOP AVOLS ...
NEBO PISEME POZPATKU SLOVA

Nebo píšeme pozpátku slova.

Řešení úlohy č. 3

ETAMV CITAM DJENE TINAE OTOKA CICEV TAPAH SOKAJ
ISSIP ZENAN ONKYV HOJTU NNOVN NAMUE ZYXWN ...
VMATE MATIC ENEJD EANIT AKOTO VECIC HAPAT JAKOS
PISSI NANEZ VYKNO UTJOH NVONN EUMAN NWXYZ ...
V MATEMATICE NEJDE ANI TAK O TO VECI CHAPAT JAKO
SPIS SI NA NE ZVYKNOUT JOHN VON NEUMANN WXYZ

V matematice nejde ani tak o to věci chápat, jako spíš si na ně zvyknout.
John von Neumann

Řešení úlohy č. 4

Abychom se mohli pustit do dešifrování, musíme si nejprve mřížku doplnit na úplnou čtvercovou tabulku 6×6 polí, tj. doplnit utržený roh šablony. Do tabulky 4 si vyznačíme černě vystřižená políčka, o kterých ze zadání s jistotou víme. Pak si vyznačíme pozice, do kterých se tato políčka dostanou po otočení šablony o 90°, 180° a 270° ve směru chodu hodinových ručiček. V každé čtvrtině tabulky zbudou tři neoznačená políčka. Ze zadání vidíme, že vystřižení může být pouze v pravé dolní čtvrtině, tedy v té utržené, která není z obrázku v zadání úlohy vidět. Tato pole označíme k vystřižení velkým písmenem X.

90°				90°	180°
	270°	90°			
270°			90°	180°	
		270°	180°	**X**	90°
	180°		270°	90°	180°
	270°	180°	**X**	**X**	270°

Tab. 4: Schéma doplnění Fleissnerovy mřížky

Po vystřižení označených polí získáme postupným otáčením šablony a čtením písmen řádek po řádku následující čtyři devítice písmen:

0° ... MATHIASSA

90° ... NDORFNOVY

180° ... HRABEMONT

270° ... ECHRISTOX

Spojením těchto čtyř úseků a jejich rozdělením do šesti slov získáme otevřený text zprávy a tím také řešení úlohy: Mathias Sandorf, nový hrabě Monte Christo.

Řešení úlohy č. 5

Pro luštění je dobré si obrázek vytisknout a pastelkou, či zvýrazňovačem označovat ta písmena, která již byla použita. Tajenka představuje dlouhé jméno, které má celkem 6 slov tvořených 30 písmeny. Začneme „utržením“ prvního písmene A na horním okraji kopretiny a pak postupujeme buď ve směru, nebo proti směru chodu hodinových ručiček. Která z obou možností vede k cíli, je třeba zjistit metodou pokus–omyl. Při „otrhávání“ písmen rozpočítáváme „sed-mý mu-sí z ko-la ven“ a vždy sedmé písmeno vypíšeme a zároveň barevně označíme jako „utržené“. Počítají se pouze dosud „neutržená“ písmena. Postupujeme-li proti směru chodu hodinových ručiček, dostáváme AEUEA atd. Pět samohlásek po sobě nemůže tvořit žádné smysluplné slovo, ani jméno. Postupujeme-li ve směru chodu hodinových ručiček, dostaneme správné řešení: Armand Jean Du Plessis De Richelieu.

Literatura

[1] Klíma, V.: Utajené komunikace, 2. díl. *CHIP: magazín informačních technologií* **4**, 6 (1994), s. 184–188.

[2] Musílek, M.: Inspirující svět klasických jednoduchých substitučních šifer. In: J. Zhouf, ed.: *Ani jeden matematický talent nazmar 2011*, PedF UK, Praha, 2011, s. 85–105.

[3] Musílek, M.: *Šifry a kódy.* [online] Dostupné z: `http://www.musilek.eu/michal/sifry.html?menu=mat` [cit. 2011-04-15].

[4] Musílek, M., Hubálovský, Š.: A systems approach to visualization of the problem solved algorithms and the programming language LOGO. *Visualization, imaging and simulation* (2012), s. 205–210.

[5] Singh, S.: *Kniha kódů a šifer.* 2. vyd. Argo a Dokořán, Praha, 2009.

[6] Vondruška, P.: *Kryptologie, šifrování a tajná písma.* 1. vyd., Albatros, Praha, 2006.

Proces tvorby úloh pro nadané žáky *

Eva Patáková, Pedagogická fakulta UK, Praha [1]

Abstrakt. *Článek má dva cíle. Jedním z nich je ukázat dvě konkrétní úlohy a proces, jakým byly vytvořeny. (Jedna z nich je dílem člena Úlohové komise Matematické olympiády, druhá je práce studentky s tvorbou úloh teprve začínající.) Druhým cílem je ukázat na prezentovaných úlohách rozdíly ve tvorbě úloh expertem a začátečníkem, a to konkrétně na typech úvah. Vysvětleny jsou charakteristiky úvah typu pokus–omyl, úvah s částečným vědomím následku a úvah s plným vědomím následku. Závěrem výzkumu, ze kterého článek vychází, je, že se stoupajícími zkušenostmi ve tvorbě úloh stoupá i pravděpodobnost, že se v procesu tvorby objeví úvaha s plným vědomím následku.*

Úvod

Každý tvoříme úlohy jinak. A neexistuje k tomu žádný obecný způsob nebo návod. Sami dokonce můžeme tvořit úlohy výrazně různými metodami. Přesto je však možné vysledovat jisté společné znaky, které se v procesu tvorby úloh objevují často.

Rozdíly mezi začínajícím a zkušeným tvůrcem se zabývá několik výzkumů. O lineárním modelu tvorby úloh typickém pro začátečníky a cyklickém modelu typickém pro zkušené tvůrce píše I. Pelczer v [3]. O rozdílech ve vnímání kvality úlohy a z něj plynoucích rozdílů ve tvorbě úloh píšu v [2]. Tvorbu úloh zkušenými tvůrci popisuje J. Zhouf v [4].

My se v článku podíváme na jeden z rozdílů mezi začínajícím tvůrcem úloh a zkušeným tvůrcem. Ukážeme si jeden ze závěrů výzkumu, které se takovým porovnáním zabývá, a vše doložíme na ukázkách práce jednoho člena Úlohové komise matematické olympiády a jedné začínající tvůrkyně.

Typy úvah

Při analýzách rozdílů v procesu tvorby úloh mezi začátečníky a experty se ukázaly jako zajímavé typy úvah (viz např. [1]). Jedná se o úvahy pokus–omyl, úvahy s částečným vědomím následků a úvahy s plným vědomím následků. Podívejme se na jejich vymezení:

---

* Příspěvek vznikl za podpory grantu GAUK 303511.

[1] e-mail: eva.patakova@email.cz

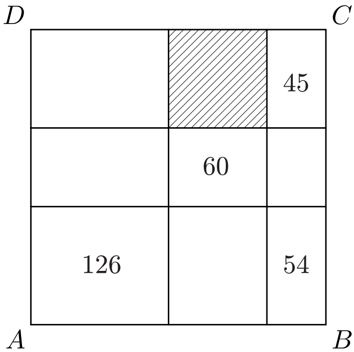
1. Úvahy typu *pokus–omyl* užíváme v základním smyslu tohoto slovního spojení. Provádíme-li úvahu pokus–omyl, náhodně zkoušíme různé možnosti. (Např. zkoušíme různá čísla, různé tvary, ...). Přitom je šance, že naše úvaha bude nosná a povede k dalšímu rozvíjení a k celkové úloze; je však také možné, že úvaha povede do slepé uličky.

2. Úvahy *s plným vědomím následku* tvoří protipól úvahám pokus–omyl. Při takové úvaze naprosto přesně víme, co chceme a jak toho chceme docílit. Úvaha s plným vědomím následku je předem naplánovaná, nemůže se stát, že při jejím správném provedení nedojdeme k zamýšlenému cíli. Velmi často je spojena se zpětným výpočtem. Častým příkladem je získávání hodnot, které budou v zadání naší úlohy. Jednoduchý příklad: Chceme např., aby řešení naší úlohy vyšlo jako přirozené číslo. Prořešíme si celou naši nehotovou úlohu bez hodnot jako rovnici s parametrem a zjistíme např., že se v průběhu řešení musí dělit patnáctkou – tudíž „naše“ hodnota v zadání musí být dělitelná patnácti.

3. Úvahy *s částečným vědomím následku* vymezujeme jako úvahy, které nejsou ani typu pokus–omyl ani s plným vědomím následku. Jedná se o všechny úvahy, kde řešitel jistou představu, kam daná úvaha povede, má. Nezkouší slepě, jestli náhodou z nápadu nevznikne něco použitelného. Často se jedná o přímé rozvíjení předchozí myšlenky, na níž už tvůrce příslušnou situaci prozkoumal. Na druhé straně však zkoušení v práci přece jen je. Tvůrce cítí, že příslušná úvaha by mohla být dobrá, ale narozdíl od úvahy s plným vědomím následku to není jisté.

Úloha Libora – člena Úlohové komise Matematické olympiády

Úloha: Na obr. 1 je čtverec $ABCD$ rozdělený dvěma rovnoběžnými přímkami a dalšími dvěma přímkami na ně kolmými na devět rovnoběžníků. Ve čtyřech z nich je zapsaný jejich obsah, a to v cm^2. Určete obsahy ostatních pěti rovnoběžníků, víte-li, že vyšrafovaný rovnoběžník je čtverec.



Obr. 1: Úloha Libora

Řešení: 105 cm^2, 75 cm^2, 84 cm^2, 36 cm^2, 90 cm^2

Trajektorie tvorby: Libor[2] si nejprve vzpomněl na jednu svou starší úlohu, kde byl obdélník rozdělen vodorovnou a svislou čarou na 4 menší obdélníky a byl zadán obsah tří z nich, čtvrtý se měl dopočítat. K úloze nebyl přidán obrázek, pointa byla v tom, že žák si měl všimnout, že není zadáno, který z obsahů je vepsán v kterém poli, tudíž úloha měla tři řešení.

Myšlenka s částečným vědomím následku: Uvědomuje si, že má v ruce prostředí s velkým potenciálem, které by se různými úpravami dalo rozpracovat na složitou úlohu.

Libor dále experimentuje s různě rozdělenými obdélníky (2×3 pole, 3×3 pole) a různým počtem a prostorovým uspořádáním polí, kde je zadán obsah. Vždy dochází k příliš snadné úloze, nebo k úloze s nekonečným množstvím řešení, což nechce. *Myšlenky typu pokus–omyl.*

V jistou chvíli přestává náhodně experimentovat. Zkouší systematičtěji hledat vhodný úkol pro žáky. V obdélníku 3×3 pole zkouší hledat invarianty (např. zda i přesto, že možností vyplnění polí je nekonečně mnoho, není „něco“ – např. obsah – konstantní apod.). Žádnou zajímavou závislost však nenachází. *Myšlenky s částečným vědomím následku: Zná již nějaké vlastnosti svých objektů, na základě jejich znalosti se snaží nacházet zajímavé vztahy. Tuší, jaký tvar by tyto vztahy mohly mít, neví to ale přesně.*

[2] Libor Šimůnek, celé jméno je zveřejněno s jeho souhlasem.

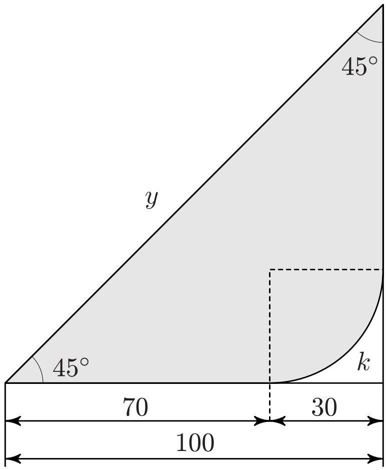
Přichází k důležitému zjištění. V obdélníku 3×3 pole nestačí pro jednoznačné řešení zadat obsahy čtyř polí. Pokud se však zadá obsahů pět, úloha je příliš snadná. Je proto potřeba zadat ke čtyřem obsahům další informaci, ale ne rovnou pátý obsah. Zde Libor začíná experimentovat s myšlenkou, že některý/některé z obdélníků budou čtverce. *V této fázi se střídají myšlenky typu pokus–omyl s myšlenkami s částečným vědomím následku.* Na konci této fáze procesu tvorby Libor získává finální tvar zadání. Ví, že celý útvar bude čtverec, ví, které z polí bude čtverec i obsahy kterých polí budou zadány. Ví, jak úlohu vyřešit, ví, že úloha je tak obtížná, jak chtěl. Chybí mu jen vhodná čísla, která zadá jako obsahy jednotlivých polí. Pokusí se najít vhodná čísla systémem pokus–omyl, zjišťuje ale, že mu nejde tipnout taková čísla, aby s nimi byl spokojený.

Nyní si ujasňuje požadavky, které na čísla, jež by chtěl v úloze zadat, má: Čísla by měla být přirozená, aby úloha vypadala lákavě. Zároveň by ale měla být taková, aby nebylo možné řešení bez výpočtu uhodnout. (Pokud by např. zadal obdélník o obsahu 15 cm^2 a nakonec by vyšly jeho rozměry 3 cm $\times$ 5 cm, tipující student by nejspíš došel k výsledku rychle.) Řekl si, že toho nejsnáze docílí, pokud délky stran obdélníků nebudou přirozená čísla. Vyšel proto vlastně od konce – začal navrhovat rozměry obdélníků, ke kterým se žáci v úloze musí dopočítat. Všechny je navrhl ve tvaru $k\cdot\sqrt{3}$, kde $k\in\mathbb{N}$. (Dbá samozřejmě na to, aby čtvercová pole opravdu vyšla čtvercová.) Tato iracionální čísla je zcela nepravděpodobné uhodnout, po jejich vzájemném pronásobení však získáme příjemně vypadající přirozená čísla, která vyjadřují obsahy obdélníků. *Myšlenka je s plným vědomím následku: Libor přesně ví, co a proč dělá. Používá zpětný výpočet. Nastavil si kritéria a provádí takový výpočet, který k jejich naplnění nutně vede.*

Téměř hotovou úlohu si Libor prohlédne a zhodnotí. Nelíbí se mu, že čísla, která zvolil, vedou k tomu, že rozdíly mezi obsahy obdélníků jsou příliš velké. Představil si korektní náčrtek a zjistil, že by se mu nelíbil z estetického hlediska. Navolí tedy opět čísla ve tvaru $k\cdot\sqrt{3}$, kde $k\in\mathbb{N}$, ale nyní tak, aby rozdíly mezi nimi byly menší. *Toto je další ukázka myšlenky s plným vědomím následku. Opět přesně ví, co dělá, opět provádí zpětný výpočet. K již aplikovaným požadavkům na čísla, která hledá, přidal další. Zpřesní podmínky zpětného výpočtu a získává nová čísla.* Novou sadu čísel vyhodnocuje jako vhodnou, úloha je hotová.

Úloha Barbory – začátečnice v tvoření úloh

Úloha: Vypočítejte obvod a obsah podložky uvedené na obr. 2. Oblouk představuje čtvrtkruh. Údaje jsou uvedeny v centimetrech.



Obr. 2: Úloha Barbory

Řešení: $o = 328{,}5$ cm, $S = 4\,806{,}5$ cm^2

Trajektorie tvorby: Barbora[3] nejdřív kreslí různé geometrické objekty, čeká, zda se nedostaví inspirace. Nakonec se rozhodne, že bude pracovat se čtvercem. Zaoblí mu části okolo vrcholů – udělá z něj „kružnicočtverec“. Chce spočítat jeho obvod a obsah, situace se jí ale příliš nelíbí. *Myšlenky typu pokus–omyl.*

Situaci zcela opouští a vybírá si trojúhelník. Přemýšlí nad typy trojúhelníků, vybírá pravoúhlý, protože v něm funguje Pythagorova věta, která může vnést nové myšlenky do řešení. Trojúhelníku opět zaobluje části u vrcholů. *Myšlenka je opět typu pokus–omyl. Aniž by se zamýšlela nad následky, vybírá trojúhelník místo čtverce. Zkusí tedy geometrický útvar různý od původního a zkouší, zda bude, nebo nebude situace fungovat lépe. Všimněte si jedné důležité věci. Útvar ve finálním zadání vypadá, jako by byl odvozen od obdélníku jeho rozpůlením, jako by vznikl*

[3] Studentka prvního ročníku učitelství matematiky na Pedagogické fakultě UK, úlohy nikdy předtím netvořila.

úpravou výchozí myšlenky. To ale není pravda, autorka dokonce zmiňuje, že papír s „kružnicočtvercem“ hodila do koše. K finálnímu zadání dochází zcela jinou cestou – cestou přes myšlenku trojúhelníku.

Pak ještě chvíli upravuje, kolem kterého z vrcholů útvar zaoblí a které rozměry zadá. Původně chtěla zaoblovat útvar kolem vrcholů, u nichž je ostrý úhel, nakonec se rozhodla pro oblast okolo pravého úhlu. *Všechno jsou úvahy s částečným vědomím následku – Barbora už situaci chápe. Zkouší sice, zda by zaoblení kolem jiného vrcholu bylo, nebo nebylo lepší. Není to ale pouze náhodné trefování, ví, že výměna vrcholu situaci nejspíš zjednoduší.*

Závěr

Podívali jsme se na jednu trajektorii tvorby úloh expertem pravidelně vytvářejícím úlohy pro Matematickou olympiádu a jednu trajektorii tvorby úloh začátečnicí. Zhodnotili jsme typy úvah, které se v procesu tvorby vyskytovaly.

Závěrem širšího výzkumu, kterého se účastnilo cca 80 respondentů, je, že s přibývajícími zkušenostmi v tvorbě úloh se zvyšuje pravděpodobnost, že se objeví úvaha s plným vědomím následku. (U respondentů, kteří s tvorbou úloh nemají zkušenosti, jsem žádnou úvahu tohoto typu neidentifikovala. Naopak u nejzkušenějších tvůrců se vyskytovala poměrně často – cca u třetiny z nich.)

Dovolte jednu malou poznámku na závěr. Ač to v článku nikde psáno není, někdo by si výsledky mohl zabsolutizovat a říkat si, že máme jeden „správný“ přístup k tvorbě úloh a jeden začátečnický, tudíž „špatný“. Tak to vůbec není. Úloha, kterou vytvořila Barbora, je zajímavá. Projít začátečnickou fází je nezbytné, pokud se chce někdo vytrénovat tvořit kvalitní úlohy. Zároveň netvrdím, že začátečnická (popř. expertní) fáze vypadá u každého stejně. Důležitá je jediná věc. Nezaleknout se počátečních obtíží a zkoušet úlohy tvořit.

Literatura

[1] Patáková, E.: *Teachers’ Problem Posing in Mathematics.* Procedia – Social and Behavioral Sciences, Elsevier, 2013, (Forthcoming).

[2] Patáková, E.: The quality of mathematical problems – how we evaluate it. In: Kvasnička, R. (ed.) *Efficiency and responsibility in education*, Czech university of life sciences, Praha, 2013.

[3] Pelczer, I., Gamboa, F.: Problem Posing: Comparison between Experts and Novices. In: *Proceedings of the 18th International Conferrence of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Atlanta, 2009, s. 353–360.

[4] Zhouf, J.: *Tvorba matematických problémů pro talentované žáky.* PedF UK, Praha, 2010.

Skládačky, kresby, modely

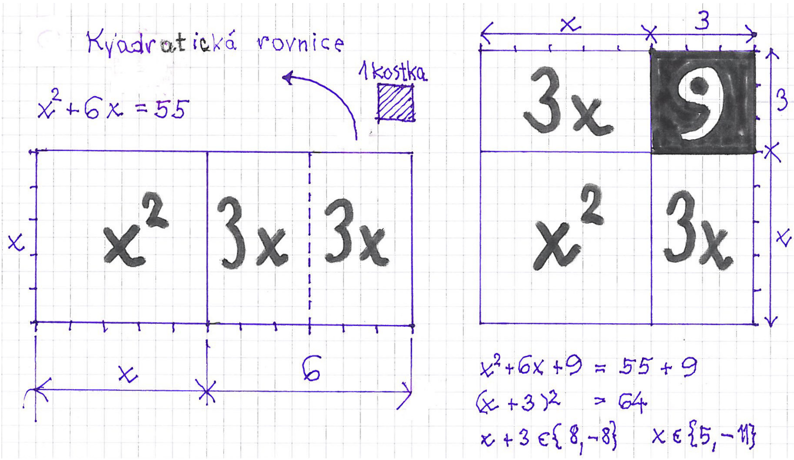
Karel Popp [1]

Abstrakt. *Tento příspěvek patří hravým a zvídavým žákům a žákyním s trochou řemeslných dovedností a dále jejich učitelkám, vychovatelkám, příbuzným a přátelům. Poznamenejme, že obrázek není důkaz, ani kostka není přesná krychle. Žádný hmotný předmět není totožný s nějakým matematickým pojmem. Mohou však pomoci pozdějšímu pochopení a hlavě při zapamatování – propedeutika. Při hře může děti leccos napadnout a také třeba se budou ptát. Bude na to budoucí škola připravena?*

Často se stane, že návrhář zjistí, že už jeho příspěvek objevil někdo jiný, že se to kdysi používalo i ve školách, než to upadlo v zapomnění. Dbejme na to – když úloha nevyžaduje, aby dvě úsečky byly stejné – že se mají na vyučovacích pomůckách nebo v příkladech výrazně lišit. Totéž platí i o úhlech. Zvláštní úlohu hrají pomůcky ve výuce nevidomých a neslyšících. V každém případě hledejme vhodné materiály. Některé obrázky budou označeny skupinou písmen jako (UPA) nebo (SBG).

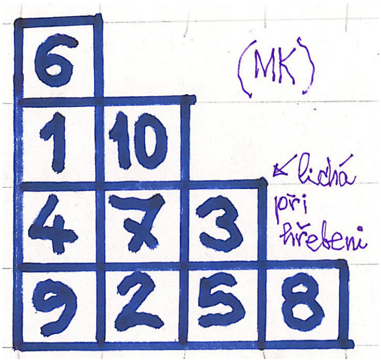
Jednou skupinou názorných vyučovacích pomůcek jsou skládačky. Jak název „tangram“ naznačuje, je tento prostředek pro tříbení ducha starý a v jistých vrstvách oblíbený. Neuškodí pohrát si jen tak, než tuto věc použijeme jako didaktické vnadidlo. Skládačky roztřídíme podle rozmanitosti jejich částí (kamenů). Mohou být všechny shodné, ale nemusí. V prvním případě to nemusí být pravidelné obrazce, ale mohou. To jsou mozaikové kameny. Začneme čtvercovými. Předvedeme jedno řešení vhodně zvolené kvadratické rovnice (obr. 1).

[1] e-mail: poppk@post.cz



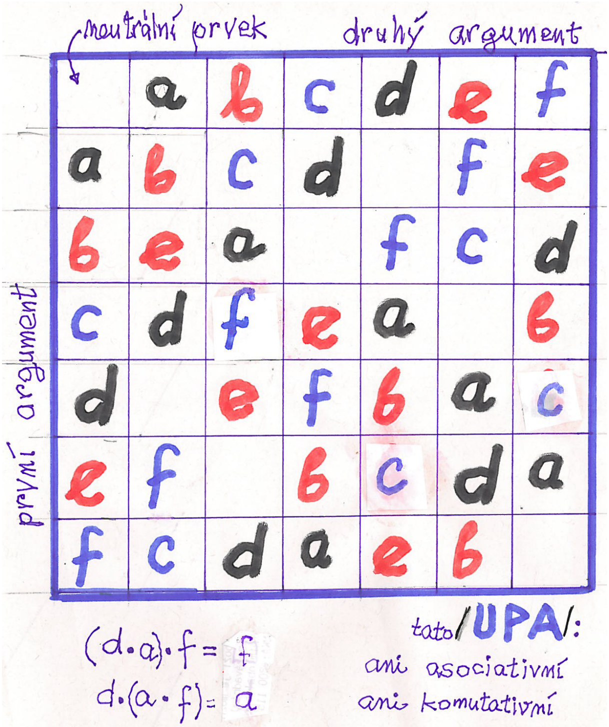
Obr. 1: Kvadratická rovnice

A co to druhé? Usnadní mozaiky pochopení Schwarzovy nerovnosti? Pokud jsou na nich vyznačeny číslice, hodí se k hledání magických čtverců (obr. 2) nebo k řešení různých jiných úloh, například autorské úlohy [4], kde je možno objevit i neočekávané řešení.



Obr. 2: Konstrukce magických čtverců

Máme-li po k kostkách v k různých barvách, můžeme skládat čtverce o k řádcích a k sloupcích tak, aby se v každém řádku a v každém sloupci vystřídaly všechny barvy. Taková struktura splňuje s výjimkou asociativního zákona axiomy grupy (UPA, obr. 3).

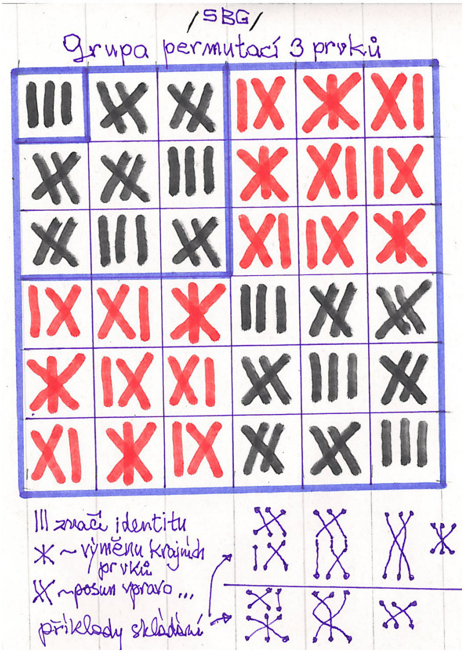


Obr. 3: Vytváření grupy

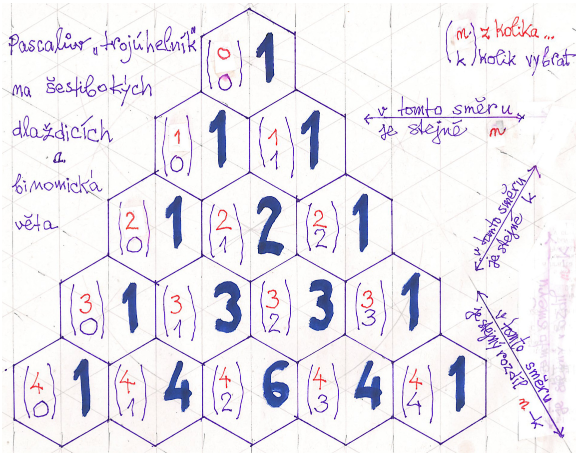
Ve zvláštním případě můžeme na mozaikové kostky napsat symboly pro permutace ze šesti prvků. Tak vznikne grupa, jestliže za grupovou operaci zvolíme skládání permutací. Pak v tabulce o 6×6 polích ukážeme, co jsou podgrupy této grupy. Je to minimální nekomutativní grupa (SBG, obr. 4).

Čtvercových mozaikových kostek je možno využít při odvozování vzorců pro součty prvních, druhých i třetích mocnin přirozených čísel [6 a jiné prameny].

Na shodné šestiúhelníky můžeme napsat symboly i hodnoty binomických koeficientů a předvést Pascalův trojúhelník (obr. 5). O rozkladu roviny (to jest o pokrytí bez překrývání) píše Csachová ve svém článku [1]. Netrváme-li na tom, aby kameny skládačky byly jediného druhu, zaujme nás článek [5] autorů Křížka a Šolce.



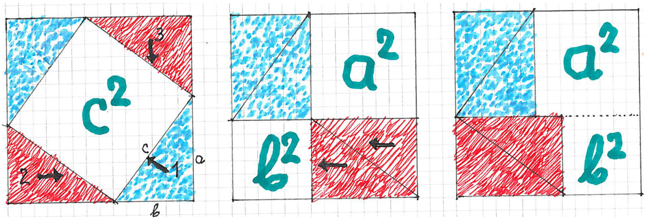
Obr. 4: Minimální nekomutativní grupa



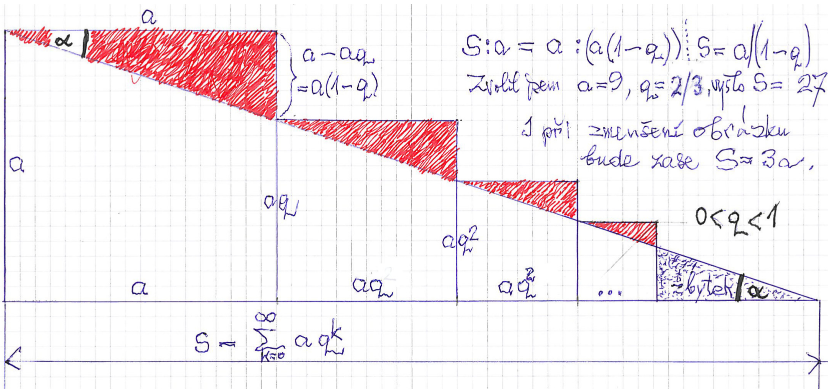
Obr. 5: Pascalův trojúhelník

Vzpomeňme na domino, tetramino a pentamino. Programováním, co se z takových kamenů dá složit, se mimo jiné zabýval v dávných dobách počítačové historie i de Bruijn.

Kromě toho můžeme navrhovat skládačky jako názorné pomůcky pro Pythagorovu větu (obr. 6) [2] (viz Vopěnkův komentář o napínačích provazů), geometrickou posloupnost v komplexním oboru (obr. 7) [6] (objevuje se i na obálce Olšákových skript s motýli), či determinant (obr. 8).



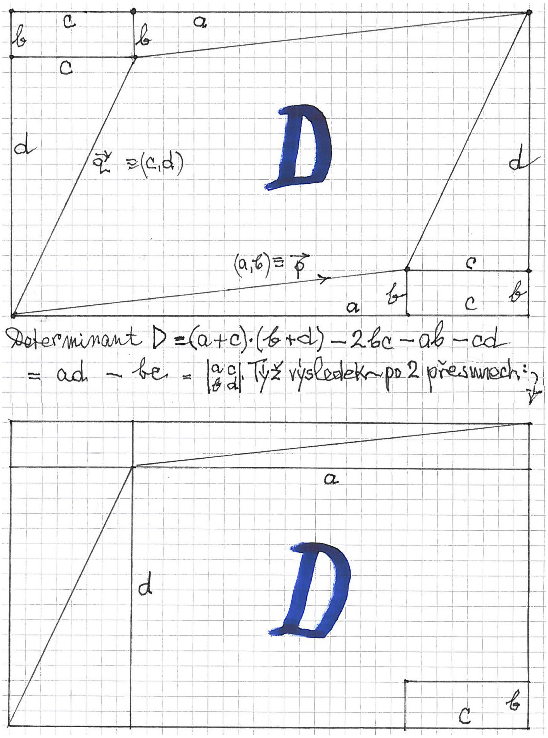
Obr.6: Pythagorova věta



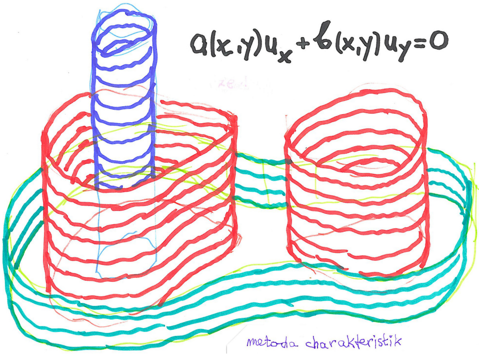
Obr. 7: Nekonečná geometrická řada

Dále se nabízí druhý Keplerův zákon. Co všechno nás napadne, kráčíme-li po různých druzích dlažeb? Zajímavosti najdete na příklad v knize Františka Kuřiny [6]. Na obálce časopisu Journal of Combinatorial Theory spatříme čtverec, složený z menších čtverců.

Některé kresby zde předkládané vznikly během mého studia skript [3], když jsem s autorem korespondoval a navrhoval úpravy (obr. 9).

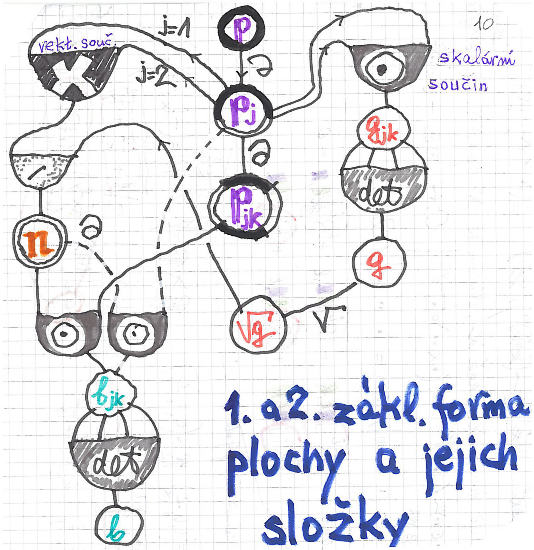


Obr. 8: Determinant



Obr. 9: Parciální diferenciální rovnice

Jiná kresba představuje operace, užité při počítání složek tenzorů první a druhé základní formy (obr. 10). Uvádím to zde také proto, abych připomněl, že budova, kde se naše konference konala, byla kdysi c. a k. reálkou a že její ředitel Antonín Libický napsal pojednání o tenzorovém počtu, první v českém jazyku.



Obr. 10: Výpočet složek tenzorů

Modely umožňují často snazší pochopení než obrázky, ale zabírají mnoho místa v budovách.

V Litomyšli během konference Jak učit matematice děti ve věku 11–15 let jsem ukázal prostorovou skládačku pro rovnosti

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Byla zobrazena ve sborníku této konference.

Další model se týkal roztínání kulové plochy hlavními kružnicemi. To souvisí s dizertací [7]. Pro lepší pochopení se nabízí možnost kreslit na pomeranče, grepy nebo na balonky.

Na závěr si dovolím dotaz, kdo byl autorem hesla: „Špatný žák přísahá na slova učitelova“.

Literatura

[1] Csachová, L: Pentagonálne teselácie. *PMFA* **55** (2010), s. 125–132.

[2] Eukleides: *Základy, Knihy I–IV*. Západočeská Univerzita, Plzeň, 2010.

[3] Franců, J.: *Parciální diferenciální rovnice*. CERM, Brno, 2011.

[4] Kaslová, M.: Rozdíly ve strategiích řešeníu devítiletých žáků. In: Zhouf, J. (ed.): *Sborník konference Ani jeden matematický talent nazmar 2007*, PedF UK, Praha, 2007, s. 138–146.

[5] Křížek, M., Šolc, J.: Od Keplerových mozaik k pětičetné symetrii. *PMFA* **54** (2009), s. 41–56.

[6] Kuřina, F.: *Deset geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.

[7] Philips, M.: *Combinatorial Properties of Arrangements of Halfspaces*. Dissertation, University, Salzburg, 1994.

Příprava studentů nižšího gymnázia na účast v matematických soutěžích

Lucie Růžičková, PedF UK, Praha [1]

ABSTRAKT. *Příspěvek popisuje využití disponibilní časové dotace v sekundě, tercii a kvartě nižšího gymnázia pro předmět Aplikovaná matematika, v němž si žáci osvojují strategie řešení komplexních matematických úloh i způsob argumentace a komunikace typický pro matematiku. Jedním z cílů předmětu je připravit žáky na řešení úloh matematických soutěží, především Matematické olympiády.*

Úvod

Volitelný předmět Aplikovaná matematika, pro který jsou například ve 2. ročníku osmiletého gymnázia se zaměřením na matematiku využity 3 vyučovací hodiny z disponibilní časové dotace, rozšiřuje a prohlubuje znalosti získávané v rámci studia povinného předmětu Matematika.

[1] e-mail: lucie_ruzickova@seznam.cz

Kromě konkrétních tematických celků je důraz kladen zejména na vzájemnou provázanost mezi jednotlivými partiemi matematiky, ale i mezi matematikou a dalšími obory (např. využití matematických poznatků ve fyzice, informatice, ekonomii, geografii). Součástí výuky je podrobná analýza matematických problémů, jejichž struktura je typická pro úlohy matematických soutěží (např. MO).

Náplň práce v hodinách

Cílem práce v hodinách je umožnit žákům osvojit si strategie řešení matematických úloh i způsob argumentace a komunikace typický pro matematiku. Dále je rozvíjena schopnost žáků samostatně analyzovat zadání komplexních matematických úloh a na základě této analýzy dané úlohy úspěšně řešit. Žáci jsou rovněž vedeni k aktivnímu vyhledávání poznatků z různých oblastí školské i vyšší matematiky a k jejich smysluplné integraci při řešení problémů.

V průběhu školního roku se žáci podrobněji seznámí s typickými náročnějšími i netradičními úlohami několika tematických celků a osvojí si některé rozšiřující znalosti. Například ve školním roce 2012/2013 se žáci v tercii zabývali tematickými celky Dělitelnost v oboru přirozených čísel, Poziční soustavy o různých základech, Trojúhelníky a jejich vlastnosti, Čtyřúhelníky a jejich vlastnosti, Jednoduché kombinatorické úlohy.

Těžiště práce v hodinách spočívá v analýze a řešení úloh jednotlivých tematických celků a úloh aktuálního i předchozích ročníků Matematické olympiády, které čerpáme z ročenek MO a webových stránek soutěže [1].

Žáci ovšem také aktivně vyhledávají a řeší úlohy z prostředí jiných vědních oborů, seznamují se s výukovým softwarem, hrají matematické, logické a geometrické hry, osvojují si základní matematickou terminologii v angličtině a účastní se řady matematických soutěží a korespondenčních seminářů. Vyučovací hodiny rovněž obohacujeme řešením matematických úloh zasazených do kontextu beletristických příběhů (např. [2], [3]).

Práce s matematickými úlohami

Značný důraz je kladen na rozvoj samostatnosti při řešení úloh a na podporu kreativního přístupu žáků. Zároveň se snažíme vytvořit pro žáky kognitivně motivující prostředí, proto jsou řešeny především úlohy vyšší obtížnosti. Například v tercii tedy žáci běžně řeší úlohy na úrovni Matematické olympiády kategorií Z8 a Z9, ale i C a B.

Zadání každé úlohy je nejprve podrobně rozebráno v rámci celotřídní diskuze, pak mají žáci dostatek času k samostatnému řešení úlohy. Jednotlivé zvolené způsoby řešení nebo pokusy o řešení jsou pak porovnány z hlediska efektivity a jsou zkoumány možnosti jejich využití v obdobných úlohách. Nakonec je podrobně rozebráno vzorové autorské řešení úlohy a jsou diskutovány možnosti dalšího rozpracování námětu úlohy. Práce s jednou náročnější matematickou úlohou se tak často stává náplní celé vyučovací hodiny.

Účast v Matematické olympiádě

Žáci tercie řeší vždy úlohy domácího kola aktuálního ročníku Matematické olympiády kategorií Z8, Z9 a C. Zadání těchto úloh vždy společně rozebereme ve třídě, případně společně vyřešíme některé návodné úlohy, žáci pak úlohy samostatně vyřeší doma. Po odevzdání všech řešení prezentuje každý z žáků své vzorové řešení jedné z úloh a společně podrobně rozebereme všechna odevzdaná žákovská řešení, přičemž se soustředíme na možná zpřesnění předkládaných zdůvodnění. Nakonec je podrobně rozebráno vzorové autorské řešení úlohy a jsou diskutovány možnosti dalšího rozpracování námětu úlohy, což je pro žáky významným přínosem při účasti v dalších kolech.

Hodnocení v předmětu a výsledky žáků

Přestože je práce v předmětu Aplikovaná matematika zaměřena především na společnou tvořivou práci se zajímavými matematickými náměty, žáci jsou na konci každého klasifikačního období hodnoceni známkou na vysvědčení. Podklady pro klasifikaci představuje především hodnocení odevzdaných úloh MO a dalších soutěží, dále hodnocení připravených ústních prezentací řešení zadaných úloh, ale i známky z písemných prací z probíraných tematických celků.

Závěr

Realizaci povinně volitelného předmětu Aplikovaná matematika lze hodnotit kladně. Především je zřejmé, že žáci jsou pro matematiku více motivováni na základě studia rozšiřujících témat a dílčích prohlubujících poznatků standardních témat. Žáci úspěšně reprezentují školu v matematických soutěžích nejen v kategorii, která odpovídá jejich ročníku, ale i ve vyšších kategoriích. Zároveň si osvojují odpovídající matematickou kulturu grafického, písemného i ústního projevu, která jim v budoucnu usnadní nejen další studium matematiky, ale například také účast ve vyšších kategoriích Matematické olympiády.

Literatura

[1] Matematická olympiáda. [online] Dostupné z `https://www.math.muni.cz/mo/`.

[2] Carroll, L.: *Zamotaný příběh.* Volvox Globator, Praha, 1996.

[3] Hozová, L.: *Matematické pohádky.* HAV, Praha, 2006.

Česko–polsko–slovenská MO juniorů *

Jaroslav Švrček, PřF UP, Olomouc [1]

Pavel Calábek, PřF UP, Olomouc [2]

Počátkem roku 2012 dostala Ústřední komise Matematické olympiády od polských kolegů pozvánku k účasti českého družstva na 1. česko-polsko-slovenské MO juniorů (CPSJ). Uvedená soutěž se poprvé uskutečnila od 20. do 23. května 2012 v krásném prostředí polských Beskyd (v Mszaně Dolné). Již během vlastní soutěže navrhli polští organizátoři zástupcům všech tří zúčastněných zemí možnost navázat na úspěšný 1. ročník této soutěže hned v roce příštím. Pozvánku tehdy akceptovali zástupci všech tří zemí, a tak se od 13. do 16. května 2013 na stejném místě uskutečnil (na základě iniciativy polské strany) také 2. ročník CPSJ.

Soutěže se v obou ročnících zúčastnily šestičlenné reprezentační týmy Polska, Slovenska a České republiky. Polské družstvo bylo sestaveno z nejlepších řešitelů republikového finále polské Olimpiady Matematyczne Gimnazjalistów (OMG) odpovídající naší MO v kategorii C. České družstvo bylo sestaveno na základě žákovských výsledků dosažených ve II. (krajském) kole kategorie C vždy v aktuálních dvou ročnících MO a dále pak na základě dodatečného výběrového soustředění, které se uskutečnilo počátkem května v Karlově (2012) a v Malé Morávce (2013) v Jeseníkách.

[1] e-mail: jaroslav.svrcek@upol.cz

[2] e-mail: pavel.calabek@upol.cz

Tato nová mezinárodní soutěž mladých matematických talentů má dvě části. Vždy první soutěžní den probíhá jako soutěž jednotlivců, kdy žáci řeší v časovém limitu 4 hodin pětici původních matematických úloh. Druhý soutěžní den se koná soutěž tříčlenných týmu, přičemž v každém týmu je po jednom soutěžícím z každé země. Složení soutěžních družstev je vylosováno ihned po skončení soutěže jednotlivců. V horizontu 5 hodin pak jednotlivé týmy řeší šestici úloh (zadání první dvojice úloh jsou přitom napsána ve slovenštině, druhé dvojice úloh v polštině a třetí dvojice úloh je zadána v češtině). Svá řešení pak týmy odevzdávají v předem stanovených jazycích (po dvou opět slovensky, polsky a česky). Jednacím jazykem uvnitř jednotlivých družstev je ale nezřídka angličtina. V každém případě je tato týmová soutěž vítané novum, které podporuje mladé matematické talenty v dnes velmi důležité týmové práci.

Autorsky se na přípravě úloh obou soutěží (jednotlivců i družstev) podílejí rovnoměrně (vždy) všechny tři zúčastněné země.

České reprezentační družstvo na 1. CPSJ tvořili tito žáci a žákyně: *Karolína Kuchyňová* (1/4), G Matyáše Lercha v Brně, *Viktor Němeček* (5/8), G Jihlava, *Radovan Švarc* (1/4), G Česká Třebová, *Pavel Turek* (3/8), G Olomouc–Hejčín, *Petr Vincena* (5/8), G Jakuba Škody v Přerově a *Martin Zahradníček* (5/8), G Šlapanice.

Na 2. CPSJ Českou republiku reprezentovali: *Jan Gocník* (5/8) a *Marian Poljak* (5/8), oba G Jakuba Škody v Přerově, *Pavel Turek* (4/8), G Olomouc–Hejčín, *Filip Bialas* (4/8), G Opatov, Praha 4, *Jan Šorm* (5/8), G v Brně na tř. Kpt. Jaroše a *Daniel Pišťák* (5/8), G Ch. Dopplera v Praze 5.

Po oba ročníky soutěže náš tým doprovázeli členové ÚK MO – *doc. Jaromír Šimša* (z PřF MU v Brně), *dr. Jaroslav Švrček* a *dr. Pavel Calábek* (oba z PřF UP v Olomouci), kteří byli současně také členy mezinárodní jury.

V prvním ročníku soutěže jednoznačně dominovali polští soutěžící, když se projevila jejich větší zkušenost z celostátního kola OMG. Pro většinu našich (i slovenských) žáků se jednalo o jejich první cenné zkušenosti v silné konkurenci. Je však potěšitelné, že již ve druhém ročníku soutěže české družstvo prokázalo velmi dobrou kvalitu. Absolutním vítězem v soutěži jednotlivců se stal *Pavel Turek*, na velmi pěkném 5. místě skončil *Marian Poljak* a na 8. místě pak skončil *Jan Šorm.* Pavel Turek byl navíc také členem vítězného týmu v soutěži družstev.

Veškeré informace o soutěži, včetně řešení všech soutěžních úloh z prvních dvou ročníků CPSJ můžete najít mj. na oficiálních stranách [1] polské Olimpiady Matematyczne. Pro lepší představu o náročnosti soutěžních úloh dále uvádíme texty úloh soutěže jednotlivců z prvních dvou ročníků CPSJ.

1. ročník CPSJ – soutěž jednotlivců (21. 5. 2012)

1. Nechť P je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Body K, L, M jsou souměrně sdružené s bodem P po řadě vzhledem ke středům stran BC, CA, AB. Dokažte, že přímky AK, BL, CM se protínají v jednom společném bodě.

2. Určete všechny trojice (a, b, c) prvočísel, které vyhovují rovnici

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + 3\,.$$

3. Na kružnici se středem O uvažujme čtyři navzájem různé body A, B, C, D, pro něž platí

$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle COD| = 60^\circ.$$

Nechť P je libovolný bod kratšího oblouku BC této kružnice. Označme dále K, L, M paty kolmic z bodu P po řadě k přímkám AO, BO, CO. Dokažte, že

a) trojúhelník KLM je rovnostranný,

b) obsah trojúhelníku KLM nezávisí na volbě bodu P.

4. Zvolíme-li libovolně 51 vrcholů pravidelného 101úhelníku, pak mezi nimi existují tři, které jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníku. Dokažte.

5. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla splňující podmínku $a^2 + b^2 = c^2$. Dokažte, že číslo

$$\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$$

je druhou mocninou některého celého čísla.

2. ročník CPSJ – soutěž jednotlivců (14. 5. 2013)

1. Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které vyhovují rovnici

$$\sqrt{x - \sqrt{y}} + \sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{xy}.$$

2. Každé přirozené číslo je obarveno buď červenou barvou, nebo zelenou barvou tak, že jsou splněny následující dvě podmínky:

– Nechť n je libovolné červené číslo, pak součet libovolných n (nikoliv nutně různých) červených čísel je také červené číslo.

– Nechť m je libovolné zelené číslo, pak součet libovolných m (nikoliv nutně různých) zelených čísel je také zelené číslo.

Najděte všechna taková obarvení.

3. Je dán tětivový pětiúhelník $ABCDE$, kde

$$|AB| = |BC| = |CD|.$$

Označme K průsečík jeho úhlopříček AC, BE a L průsečík jeho úhlopříček AD, CE. Dokažte, že $|AK| = |KL|$.

4. Určete největší dvojmístné číslo d s vlastností: Pro každé šestimístné číslo tvaru $\overline{aabbcc}$ je d dělitelem čísla $\overline{aabbcc}$, právě když d je dělitelem odpovídajícího trojmístného čísla $\overline{abc}$.

Pozn.: Číslice $a \neq 0$, b a c nemusí být nutně různé.

5. Nechť M je střed strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC. Uvnitř strany AB je libovolně zvolen bod P. Označme S_1 a S_2 po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům APC a BPC. Dokažte, že střed úsečky S_1S_2 leží na ose úsečky CM.

Literatura

[1] `http://www.om.edu.pl`

Abaku – početní hra

Vladimír Tesař, Včelička, Praha [1]

Abstrakt. *Článek pojednává o nově vzniklé hře Abaku, v níž se používají základní početní operace, takže je vhodná pro všechny věkové kategorie. Jsou pořádány turnaje v této hře a ukazuje se, že je velmi náročná i pro dospělé hráče.*

V chovném rybníčku je v průměru každá ryba parádní, ale opravdu velké kusy plavou někde v širé vodě.

Pokud se shodneme na tom, že talenty je dobré získávat, ale především je dobré je neztrácet, že čím širší bude základna dětí s dobrými základy matematiky, tím méně případných talentů zapadne, pak navrhuji k zamyšlení, že tím úhelným kamenem, který rozhodující měrou dělí děti do dvou směrů – na ty, co budou připraveni stačit výkladu, a ty, co toho schopni nebudou – jsou na začátku prosté počty (které už skoro do matematiky nepočítáme), začínající u $1 + 1$.

Tím nechci napadnout smysl projektu *Ani jeden matematický talent nazmar* a ani se tím nechci vyvyšovat. Jsem si dobře vědom, že práce všech, co na tomto projektu spolupracují a kteří ho vytvářejí, je smysluplná a obecně prospěšná – můj příspěvek je v tomto smyslu na pozici „zábavné kuriozity“. Jde zde pouze o můj úhel pohledu na věc, který je z její povahy nucen koukat na danou problematiku odspodu a zabývá se primárně otázkami předškolního institucionalizovaného školství (a není přímo z vašeho oboru).

Vraťme se ale k našemu $1 + 1$. Tedy přesně k tomu, co si nakonec jako jediné z matematiky alespoň v základu odnáší většina absolventů školského systému a co nakonec pro život jako jedinou věc z matematiky prakticky využije a bude nucen využít, bez ohledu na to, jestli bude chtít. Tvrzení „Není potřeba talentu, aby jedinec takto vybaven naše školství opustil.“ lze s trochou představivosti v dnešní době rozporovat. To je realita.

No a to je naše parketa a důvod, proč zde prezentuji hru Abaku. Není to lék, je to jen hra, ale… Působí na dítě jako kouzlo a triky, je napínavá a za chvilku ji rádo hraje, a to přitom normálně všude vykládá, že ho matika teda moc „neba“.

[1] e-mail: abakuman@seznam.cz

No řekněte sami: není to náhodou kouzlo a trik, že můžete objevit, že variace čísel 849756 v sobě skrývá operace: $84 \cdot 9 = 756$, $84 + 9 = 75$, $49 - 7 = 56$, a také ještě $7^2 = 49$. Tedy tohle není ten trik, trik je to, že to může objevit každý a už ten trik nezapomene.

Za jak dlouho budete vnímat a znát podobné lehčí či těžší variace a to, co skrývají? Mohu vám slíbit, že pokud nasadíte tuto hru přímo do výuky a budete ke hraní děti pěkně motivovat, ubude vám práce a přibude nám talentů – v nečekaně krátké době.

Pokud vás uvedené oslovilo, najdete na stránkách [1] pravidla hry. Metodiku výuky „Matematické výchovněvzdělávací školní pomůcky" pro krabicovou i online podobu verze navrhnul a sestavil tým A. Vávrové a V. Lisseho. Volně ke stažení ji naleznete na adrese [2].

Pokud máte chuť hledat a najít skrze tuto hru počtářské talenty i na vaší škole, můžete se se svojí třídou či celou školou přihlásit na adrese `http://abakuliga.seznam.cz/default.aspx#uvod` do online školní celostátní ligy.

Literatura

[1] www.abaku.cz.

[2] http://abakuliga.seznam.cz/default.aspx#pedagogum

První zkušenosti s Abaku na lounské základní škole

Vlastimil Lisse, ZŠ a MŠ, Louny [1]

Abstrakt. *Od konce roku 2012 se dobrovolníci z 8. a 9. ročníku základní školy kpt. Otakara Jaroše v Lounech zapojili do výzkumu vztahu mezi matematikou a matematickou pomůckou Abaku. Na základě hraní Abaku a zaznamenaných výsledků her byly odvozeny první obecné zákonitosti a překvapivé závěry. Pravidelným hraním Abaku dochází ke spontánnímu tréninku, upevňování a rozvoji aritmetických dovedností, později logického myšlení, a to pouze využitím přirozené dětské hravosti. Tato zjištění pasují Abaku do role výborné matematické pomůcky rozvíjející obecné matematické předpoklady žactva s využitím již od prvního stupně základní školy.*

[1] e-mail: zslouny@3zslouny.cz

Obecná nechuť žáků k matematice je velmi častým jevem na současných základních školách. Klesá počtářská gramotnost našich žáků, kteří se ani při základních matematických operacích neobejdou bez kalkulačky. Přitom snem každého kantora je zapálení jiskry poznání v očích žáka, aby sami chtěli. Je tento sen uskutečnitelný?

Před rokem jsme v Lounech začali s několika žáky pilotovat hru Abaku. Po počátečních nezdarech a plném pochopení pravidel, bez rozdílu „známky z matematiky", docházelo k zajímavému žádoucímu jevu. Žáci počítají sami a rádi. Malá, velká násobilka, komutativnost, mocniny, odmocniny … vše formou hry. Během her dochází k pozvolnému vylepšování výsledků, což samo o sobě motivuje k další hře a tím pádem k dalšímu tréninku s čísly. Po nesmělém používání 2 cifer v úvodu se nakonec nebáli přiložit všech 5 čísel, a to tak, aby vzájemnou kombinací řádků, sloupců i čísel samotných proběhlo co nejvíce operací.

Při prvním posouzení nashromážděných výsledků byly odhaleny zvláštní bodové skoky. Pozvolné vylepšování skóre se oproti původním předpokladům u všech hráčů v určitý moment na čas zastavilo. Důležité bylo najít odpověď na otázku, co způsobuje opětovný nárůst skóre a proč se hráč nemůže několik her bodově pohnout z místa.

Jednoduše řečeno, hráč potřebuje plně pochopit strategii hry a zapojit co nejvíce cifer. Hraním se žáci učili z vlastních chyb a z tahů soupeře. Dokola využívali znalosti a dovednosti, které získali již na 1. stupni základní školy a nadále je upevňovali. Během jedné hry dokázali prohlédnout a propočítat až stovky jednoduchých příkladů.

Přitom úvodní hra dopadla u všech hráčů obdobně. S letmo přečtenými pravidly nepřekročila 200 bodů (spíše o dost méně než 200), protože se přikládala především 2 čísla bez jakékoli strategie. Naštěstí to trvalo jen pár úvodních her, než přišel první rychlý posun až ke 400 bodům. Spočíval v důkladném pročtení pravidel a hlavně ve využití mocnin (i u mladších žáků, kteří mocniny neprobírají). Před dalším výkonnostním skokem se žáci naučili přikládat 3 cifry, i když zatím jen nahodile.

Další posun přišel s pochopením toho, že lze kombinovat operace v řádku i sloupci najednou a zároveň využívat komutativní zákon v rámci položených cifer (je lepší 842 nebo 824?). V této fázi žáci většinou nepřekročí 600 bodů. Řada žáků se zde i na několik desítek her „zasekla" a přitom stačilo velmi málo. Přemýšlet o strategii. Všimnout si postavení bonusových polí a zaměřit se na ně, zejména pak na trojnásobná bonusová pole (3×). V této fázi žáci získávali od 700 do 1 000 bodů, nejčastěji 800 až 900. Doba posunu odpovídala desítkám her.

Hlavní posun přišel ve chvíli, kdy se začalo vše kombinovat. Cíleně se zaměřovat na bonusy a do nich vkládat vyšší cifry v co nejvyšším počtu, využívat řádky a sloupce a vícenásobné operace. V tento moment jsme se pohybovali pravidelně na hranici 1 200 bodů.

Na závěr bych zmínil 2 osudy konkrétních hráčů a poznávací znak každého zapáleného hráče Abaku.

Lukáš. Podprůměrný žák, který byl dlouhodobě na 4 z matematiky a v některých jejích partiích dokonce na 5. Na podzim 2012 začal s Abaku a 31. 1. měl na vysvědčení 2 z matematiky a později patřil mezi nejlepší ve třídě v geometrických úlohách řešených výpočtem. Část zásluh přikládám Abaku – získal sebevědomí a numerickou jistotu. Hru Abaku hraje pravidelně.

Bára. Druhým příkladem je žákyně, která se pro přirozenou lenost nikdy moc matematicky neangažuje. Přesto si Abaku doma ze zvědavosti vyzkoušela a v hodině informatiky jako první přesáhla 1 000 bodů a později dokonce hranici 1 300 bodů. Má talent a je na ní vidět, že ji hra baví. Zároveň je to důkazem, že ne každý musí začínat na 200 bodech.

Jak poznat pravidelného hráče Abaku? Dříve než zvedne telefon, má tendenci přeskupit čísla volaného pro větší bodový zisk. Má velmi silné nutkání číslo popisné změnit, popřípadě již nyní ví, které číslo v něm chybí. V automobilové značce vidí matematickou operaci. Zkrátka ví, které číslo a kam přiložit, aby čísla dávala smysl. Pokud i vy máte podobná nutkání, pak vás hra donutila přemýšlet v číselných souvislostech. A to je úspěch.

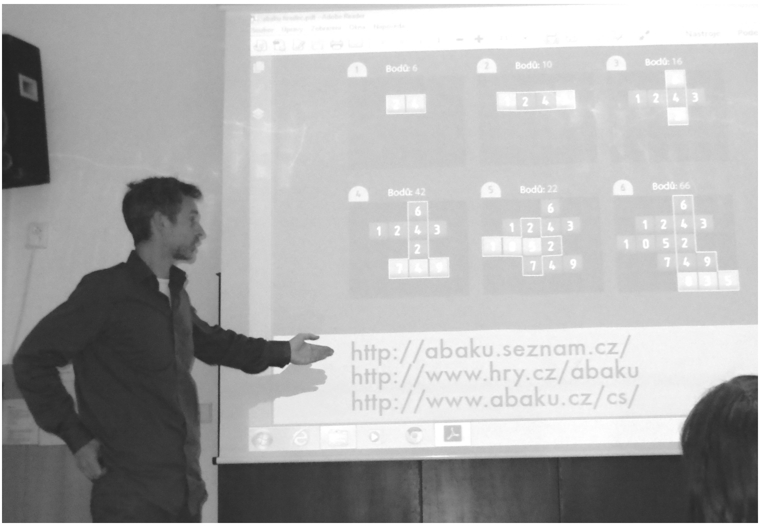
Zkrátka, pokud hledáte pro své žáky nástroj, který v krátké době nastartuje a postupně vylepšuje jejich základní počtářské dovednosti, zkuste využít ověřenou matematickou hru Abaku.

ABAKU®

FOTOGALERIE

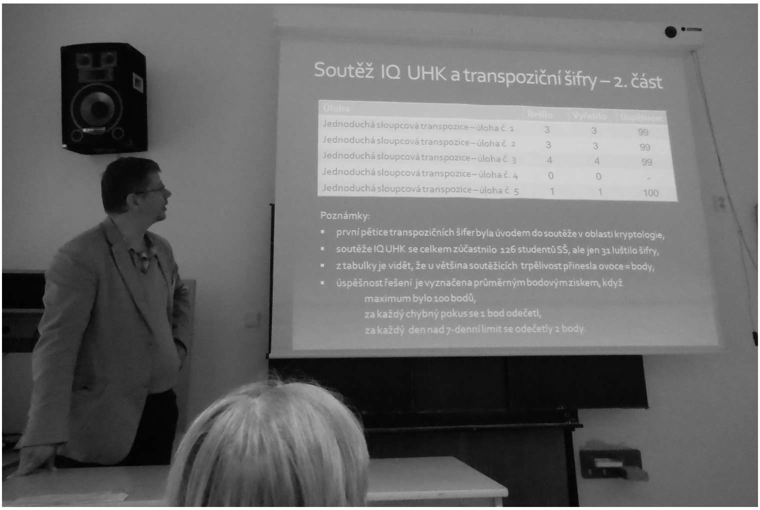

Š: Jak se řekne nekonečno, nebo spíš nekonečně moc?
PC: Listy na stromě.
J: Proč zrovna listy? T: To je dobrý, jako v básničkách.
PC: Protože je nelze spočítat.
H: Jak to? Těch musí být konečně!
PC: V praxi to pro Kanaky vyjde na stejno
to nedokážeme – oni nepotřebují ke své
životu zpravidla větší číslo než 50.
R: To je divný? Jak teda žijou?
PC: Moc se nakupuje. Hodně směňují.
A: Ve škole taky ne?
PC: Ve škole je jiný svět, jazyky spojuje Frj.

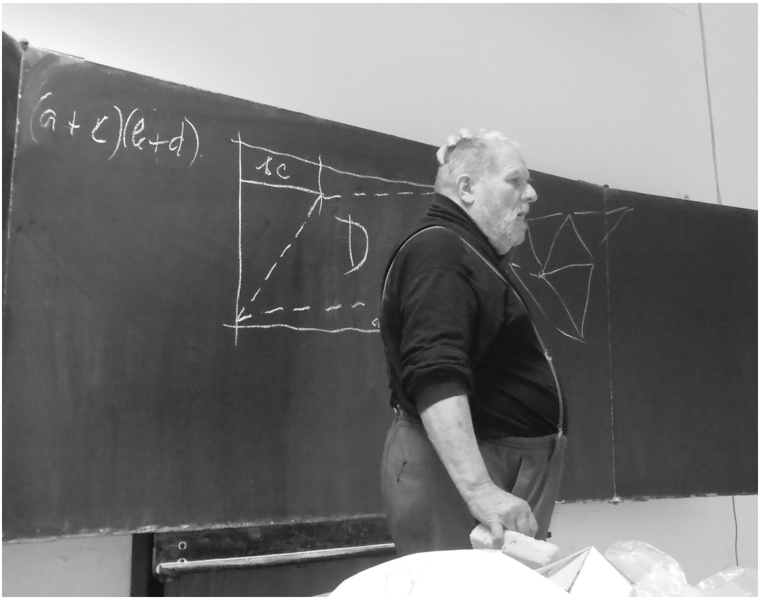

50-150
400
600
800


Bodů: 6
Bodů: 10
Bodů: 16
Bodů: 42
Bodů: 22
Bodů: 66
http://abaku.seznam.cz/
http://www.hry.cz/abaku
http://www.abaku.cz/cs/


esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Pavouk a věž
Autor námětu: PaedDr. Bc. František Jáchim
Projekt realizovaný Gymnáziem Jana Palacha Mělník
leden 2012 - prosinec 2014
CZ.1.07/1.1.00/26.0038
Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky


Matematická
olympiáda
ABAKU
Magická hra s čísly


Soutěž IQ UHK a transpoziční šifry – 2. část
Úloha
Řešilo
Vyřešilo
Úspěšnost
Jednoduchá sloupcová transpozice – úloha č. 1
3
3
99
Jednoduchá sloupcová transpozice – úloha č. 2
3
3
99
Jednoduchá sloupcová transpozice – úloha č. 3
4
4
99
Jednoduchá sloupcová transpozice – úloha č. 4
0
0
-
Jednoduchá sloupcová transpozice – úloha č. 5
1
1
100
Poznámky:
první pětice transpozičních šifer byla úvodem do soutěže v oblasti kryptologie,
soutěže IQ UHK se celkem zúčastnilo 126 studentů SŠ, ale jen 31 luštilo šifry,
z tabulky je vidět, že u většina soutěžících trpělivost přinesla ovoce = body,
úspěšnost řešení je vyznačena průměrným bodovým ziskem, když
maximum bylo 100 bodů,
za každý chybný pokus se 1 bod odečetl,
za každý den nad 7-denní limit se odečetly 2 body



SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Balková Lubomíra* e-mail: lubomira.balkova@gmail.com
   Pracoviště: FJFI ČVUT, Břehová 7, Praha 1
2. *Calábek Pavel* e-mail: pavel.calabek@upol.cz
   Pracoviště: PřF UP, 17. listopadu 12, Olomouc
3. *Dillingerová Monika* e-mail: dillingerova@fmph.uniba.sk
   Pracoviště: FMFI UK, Mlynská dolina, Bratislava
4. *Divoká Jaroslava* e-mail: jdivoka@seznam.cz
   Pracoviště: SPŠS, Betlémská 287/4, Praha 1
5. *Dlab Vlastimil* e-mail: vdlab@math.carleton.ca
   Pracoviště: Bzí 46 u Železného Brodu
6. *Hálová Alena* e-mail: halova@mgplzen.cz
   Pracoviště: Masarykovo G, Petákova 2, Plzeň
7. *Hilská Dana* e-mail: hilska@gjp-me.cz
   Pracoviště: G JP, Pod Vrchem 3421, Mělník
8. *Holá Eva* e-mail: eva.hola@zs-hp.cz
   Pracoviště: G JP, Pod Vrchem 3421, Mělník
9. *Houser Jiří* e-mail: houser@spsnome.cz
   Pracoviště: SPŠ, ČSA 376, Nové Město nad Metují
10. *Jarolímková Jitka* e-mail: jarolimkova@zsrychnov.cz
    Pracoviště: ZŠ, Masarykova 563, Rychnov nad Kněžnou
11. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
    Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
12. *Kašpárková Simona* e-mail: simona.kasparkova@gmail.com
    Pracoviště: GEK, Omská, Praha 4
13. *Kořenová Martina* e-mail: martina@korenova.cz
    Pracoviště: Figurková školička, Ruská 2, Říčany
14. *Kovářičková Marie* e-mail: marie.kovarickova@seznam.cz
    Pracoviště: Biskupské G BB, Orlické nábřeží 1, Hradec Králové
15. *Kubát Josef* e-mail: kubat@math.cas.cz
    Pracoviště: JČMF, Žitná 25, Praha 1
16. *Kuřina František* e-mail: kurinovi@gmail.com
    Pracoviště: UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové

17. *Květoňová Martina* e-mail: kvetonova.martina@email.cz
Pracoviště: Didaktis, Brno

18. *Lisse Vlastimil* e-mail: zslouny@3zslouny.cz
Pracoviště: ZŠ, 28. října 2173, Louny 3

19. *Lukšová Hana* e-mail: marhamar@atlas.cz
Pracoviště: GEK, Omská, Praha 4

20. *Lupačová Marta* e-mail: lupacova@gjs.cz
Pracoviště: GJŠ, Komenského 29, Přerov

21. *Machačíková Ivana* e-mail: machacikova@gymzl.cz
Pracoviště: G, Lesní čtvrť 1364, Zlín

22. *Molnár Josef* e-mail: josef.molnar@upol.cz
Pracoviště: PřF UP, 17. listopadu 12, Olomouc

23. *Müller Evžen* e-mail: muller@gozhorice.cz
Pracoviště: G, SOŠ, SOU, VOŠ, Husova 1414, Hořice

24. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové

25. *Návarová Daniela* e-mail: navarova@kodanska.cz
Pracoviště: ZŠ KČ, Kodaňská 16, Praha 10

26. *Novák Miroslav* e-mail: novak@gjkt.cz
Pracoviště: G JKT, Tylovo nábřeží 682, Hradec Králové

27. *Patáková Eva* e-mail: eva.patakova@email.cz
Pracoviště: Mensa gymnázium, Španielova 19, Praha 6

28. *Pešková Blanka* e-mail: peskova@gekom.cz
Pracoviště: GEK, Ohradní 55, Praha 4

29. *Petelíková Marie* e-mail: petelikova.m@zskostelec.cz
Pracoviště: ZŠ GJ, Palackého n. 45, Kostelec nad Orlicí

30. *Popp Karel* e-mail: poppk@post.cz

31. *Růžičková Lucie* e-mail: lucie_ruzickova@seznam.cz
Pracoviště: G, Zborovská 45, Praha 5

32. *Smíšková Jaroslava* e-mail: sezam788@volny.cz
Pracoviště: OA, Dušní 7, Praha 1

33. *Souchová Marie* e-mail: souchova@gymvod.cz
Pracoviště: G Voděradská 2, Praha 10

34. *Šiklová Michaela* e-mail: zs.osice@seznam.cz
Pracoviště: ZŠ a MŠ FŠ, Osice 42

35. *Šrámková Libuše* e-mail: sramkova@zsrychnov.cz
Pracoviště: ZŠ, Masarykova 563, Rychnov nad Kněžnou

36. *Šváchová Jana* e-mail: svachova@gbn.cz
Pracoviště: G, Husova 470, Benešov

37. *Takáčová Lenka* e-mail: lenka.takacova@centrum.cz
Pracoviště: VZS a SZS, Komenského 234, Hradec Králové

38. *Tesař Vladimír* e-mail: tesar@vcelicka.cz
Pracoviště: Včelička, Národní 20, Praha 1

39. *Tomášek Vladislav* e-mail: vladislav.tomasek@csicr.cz
Pracoviště: ČSI, Fráni Šrámka 37, Praha 5

40. *Urban Michal* e-mail: michal.urban@msmt.cz
Pracoviště: MŠMT, Karmelitská 7, Praha 1

41. *Vávrová Alena* e-mail: vavrova@zskodanska.cz
Pracoviště: ZŠ KČ, Kodaňská 16, Praha 10

42. *Večeřová Simona* e-mail: vecerova@gjs.cz
Pracoviště: GJŠ, Komenského 29, Přerov

43. *Vlk Jan* e-mail: johan.vlk@email.cz
Pracoviště: Krausova 215, Velké Poříčí

44. *Volf Ivo* e-mail: ivo.volf@uhk.cz
Pracoviště: UHK, Rokytanského 62, Hradec Králové

45. *Zhouf Jaroslav* e-mail: jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz
Pracoviště: PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1

Název: Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba systémem LaTeX: Miloslav Závodný
Vydavatel: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Náklad: 100 kusů
Rok vydání: 2013

Text neprošel jazykovou úpravou.

Vydání sborníku bylo podpořeno granty
GAUK 303511

ISBN 978-80-7290-699-4

ISBN 80-7290-699-4

9 788072 906994