Univerzita Hradec Králové – Přírodovědecká fakulta a Fakulta informatiky a managementu

Královéhradecká pobočka JČMF

Ani jeden matematický talent nazmar 2022

Sborník příspěvků 10. ročníku celostátní konference učitelů matematiky a přírodovědných oborů na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2022

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Univerzita Hradec Králové
Fakulta informatiky a managementu

Programový výbor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
doc. PhDr. Michal Musílek, Ph.D., PřF UHK, Hradec Králové
Mgr. Iva Vojkůvková, GJKT, Hradec Králové

Editor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha

Recenzent:
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7435-913-2 (on-line, PDF)
ISBN 978-80-7435-912-5 (brožovaná vazba)

OBSAH

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 27. 5.

10.00–10.15	Zahájení
10.15–11.00	Zhouf, J.: 70 let Matematické olympiády v Československu (České republice) a 100 let její předchůdkyně
11.00–11.15	Informace o 30. jubileu konference MAKOS, blahopřání oslavencům
11.21–12.21	Janeček, K.: Hra Mathesso jako novodobý fenomén
12.30–14.00	Přestávka
14.00–15.00	Hraní hry Mathesso
15.00–15.30	Kaslová, M.: Herní strategie u nadprůměrných dětí ve věku 5–6,6 roku v komparaci se strategiemi u učitelů mateřských a základních škol
15.30–16.00	Vávrová, A.: Lze žít bez Abaku?
16.00–16.45	Přestávka plus hraní hry Abaku
16.45–17.15	Bočková, J.: Česka maturita dostává mezinárodní rozměr
17.15–18.00	Fuchs, E., Zelendová, E.: Rozvíjíme nadání s Máťou a Vesmou

Sobota 28. 5.

09.00–09.45	Kuřina, F.: Několik krás elementární geometrie
09.45–10.30	Musílek, M.: Hillova šifra a lineární diofantovské rovnice
10.30–11.00	Königsmarková, S.: Soustavy polynomiálních rovnic
11.00–11.30	Přestávka
11.30–12.15	Jůzová, K.: Různé pohledy na nadání a nadané
12.15–12.45	Zhouf, J.: Informace o publikacích vydavatelství Portál II
12.45–13.00	Molnár, J., Zhouf, J.: Podzimní škola péče o talenty s mezinárodní účastí MAKOS v datech
13.00–13.30	Kocanda, L., Zhouf, J.: Tvorba pythagorejských trojic
13.30–13.45	Zakončení

ÚVODEM

Úvodní slovo k desátému setkání

V letošním roce 2022 proběhl již desátý ročník konference *Ani jeden matematický talent nazmar*. Tato konference se v předchozích letech konala jako bienále a přímo předchozí setkání bylo v roce 2019. Desátý ročník byl naplánován na rok 2021. Víme ale, že v té době byla velice složitá situace s kovidem, tak se konference neuskutečnila. Jsme rádi, že v roce 2022 bylo již možné setkání znovu uskutečnit.

Konference *Ani jeden matematický talent nazmar* je tematicky orientována na talentované žáky v matematice a přírodovědných oborech. Jde o velice důležitou skupinu žáků, kteří budou v budoucnu hybateli pokroku, a to nejen v naší republice.

Konference měla tradiční průběh. Počtvrté v historii se organizace i finanční podpory ujala Univerzita Hradec Králové, konkrétně Přírodovědecká fakulta, a Královéhradecká pobočka JČMF.

Na konferenci zazněla řada zajímavých a podnětných přednášek. Témata byla psychologická, matematická, informatická, z oblastí odborných soutěží, velká část byla věnována jedné již populární matematické hře, a také nově vznikající ambiciózní stolní hře.

Přednášky byly věnovány věku žáků prvního stupně základní školy až studentům vysokých škol. Určitě přinesly novou inspiraci, nové náměty a podněty učitelům k jejich práci s talentovanými žáky, avšak inspiraci, náměty a podněty i žákům samotným pro jejich profesionální rozvoj.

Konference probíhala jako obvykle v přátelské atmosféře, a to nejen během jednání, ale i při trávení volného času. Letošního setkání se zúčastnilo několik významných osobností, které slavily kulatá výročí, takže došlo i na malé oslavy. Nezbývá, než se opět těšit na příští konferenci *Ani jeden matematický talent nazmar*.

Jaroslav Zhouf

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Hra Mathesso jako novodobý fenomén

Karel Janeček, Leonard Bernau, Tomáš Benka, Nadace Science 21, Praha

ABSTRAKT. *Tento článek představuje stolní hru Mathesso, která je zaměřena na výuku elementární matematiky určenou dětem všech věkových kategorií. Mathesso využívá principu „učení hrou“ a umožňuje získat intuici o struktuře číselné soustavy. Při hře Mathesso mohou děti rychle a přirozeně pochopit princip násobení, dělení, mocnin, prvočísel, Fibonacciho čísel, faktoriálů a vysvětlit jejich principy.*

1. Úvod

Cílem hry je aktivovat kognitivní procesy [1], které jsou zodpovědné za vznik a rozvoj matematické intuice [2]. Hra Mathesso je navržena tak, aby na děti při hře působila podvědomě a využívala bazální aritmetiku [3], seznamovala je s vybranými matematickými operacemi.

Při hraní hry Mathesso se u předškolních dětí může rychle vyvinout tzv. páteřní algoritmický systém [4, 5]. Děti nemusí znát ani jedno číslo a pouhou orientací podle barev pochopí princip násobení, prvočísla, mocniny a mimo jiné získají intuitivní znalost tabulky násobení.

V dávné historii lidstva byla doba, kdy lidé neuměli počítat [6]. Neuměli spočítat ovce na pastvině ani spravedlivě rozdělit bochník chleba. Nedokázali určit, kolik mají dětí nebo zda mají dostatek jídla. Nedokázali ani spočítat dny, které jim zbývaly do příchodu jara. Představte si, že seděli v promrzlé chalupě, neměli už žádné jídlo a netušili, jak dlouho trvá sněhová bouře, protože jediný údaj, se kterým uměli pracovat, bylo včera nebo zítra. O dva dny dříve už pro ně bylo stejné jako vloni. A to všechno proto, že matematika ještě neexistovala. První velmi nesmělé náznaky matematiky se začaly objevovat už v pravěku, ale zrodila se až ve starověkém Řecku [7, 8]. Od té doby se neustále vyvíjí. Dnes je všude v každém předmětu kolem nás a v každém okamžiku našeho života. Bez matematiky bychom nemohli postavit dům ani uvařit čaj. Neměli bychom auta, letadla, sprchy ani kolotoče. Bez matematiky bychom nemohli telefonovat a co by bylo opravdu vážné, ani bychom se nemohli dívat na pohádky. Všechno, co si dokážete představit, je prostoupeno matematikou. Smutnou pravdou je, že navzdory tomu, jak moc je matematika důležitá, ji většina dětí nemá ráda. Bojí se jí a nerozumí jí a nikdy se ji doopravdy nenaučí. A ona jim potom celý život chybí.

Proč se děti tak rády učí mluvit, malovat, psát, číst, řešit hlavolamy a cokoli zajímavého, ale matematiku ne, která je podstatou zajímavosti? Jak je možné, že nevidí její vnitřní krásu a přes veškerou snahu rodičů a učitelů a přes všechno pozitivní a důležité, čím matematika zlepšuje náš život, ji většina lidí bytostně nesnáší [9, 10, 11]?

Zjistili jsme, jak se v mnoha případech u malých dětí vyvíjí schopnost vnímat čísla a co způsobuje, že si s čísly v určitém okamžiku přestanou rozumět. A jak se u nich toto nedorozumění obrací v nedůvěru v sebe sama a jak se dětem na čísla postupně vytváří určitý druh alergie a jak už o tom pak nechtějí nikdy slyšet [12, 13]. Proto jsme vytvořili univerzální matematickou hru, ve které hráči nemusí počítat a dokonce ani znát čísla. Hra může tato nedorozumění vyřešit. Hra, která baví děti i dospělé a která je nejen naučí počítat, ale především jim otevře cestu k základům matematiky. Protože počítání a matematika nejsou totéž [14]. To je první z mnoha nedorozumění, které se hraním hry Mathesso uvede na pravou míru.

Nejdůležitějším vzdělávacím mechanismem Mathessa je reverzní synestezie [15, 16, 17, 18, 19]. Ačkoli to může znít složitě, synestezie jako taková je dobře známá. Jedná se o jev, kdy si lidé spojují určité smyslové vjemy s jinými. Jde například o schopnost vnímat hudbu tak, že současně s tóny jsou vnímány i barvy nebo například vůně [20, 21, 22, 23]. Někteří z největších matematických géniů, kteří dokáží spočítat „pí“ na tisíc dvě stě dvacet jedna desetinných míst z hlavy, tuto schopnost mají a využívají ji. Získali ji však zvláštním a nepředvídatelným způsobem. Dobře, řekli jsme si tedy, co kdybychom místo těžko vysvětlitelné číselné soustavy použili smysluplným způsobem barvy? Například tak, že každou číslici bude reprezentovat jiná barva. Tato zdánlivě triviální záměna má potenciál otevřít novou úroveň výuky matematiky.

Všichni jsme se v raném věku učili násobilku nazpaměť, dokud jsme ji neznali. Důvodem je, že původ násobení je empirický a ne, jak si většina lidí myslí, nějaký chytrý vzorec. Absolutním základem matematiky a aritmetiky je tisícileté pozorování milionů lidí, kteří postupně zjistili, že pokud jsou tři lidé, nikdy si spravedlivě nerozdělí dvě ovce. Kdyby byli čtyři, dokázali by se domluvit. Rozdělili by se na dvě skupiny po dvou, každá skupina by si vzala jednu ovci a bylo by to mírové řešení. Pokud by jich však bylo pět a snažili se rozdělit dvě ovce, vznikl by konflikt.

Celá aritmetika je založena na souboru odpozorovaných vlastností různých situací. Tato pozorování tvoří násobilku [24, 25, 26]. A to je jádro problému, neboť neexistuje jiný způsob, jak získat znalost této velmi dlouhé a nudné řady podobných sloupců snadno zaměnitelných znaků, než se ji naučit nazpaměť. Není tedy divu, že to mnoho dětí nebaví. A pokud je to nebaví, mohou mít s jejich učením velké potíže. Čím jsou mladší, tím je to pro ně těžší [27, 28, 29].

Dalším problémem je nepřiměřený tlak na výkon a z toho vyplývající nízké sebevědomí. A hlavně příliš brzký přechod od aritmetiky k matematice, který je obtížné plně pochopit bez dokonalého zvládnutí základů. Vzniká tak začarovaný kruh, jehož výsledky tak dobře známe [30, 31, 32].

2. Princip hry Mathesso

My jsme vyvinuli myšlenku proměnit celý aritmetický aparát ve hru s využitím principu pelmanismu [33], neboli pexesa. Děti jsou v této hře úspěšné díky své mimořádné paměti, hra je proto baví. Základní princip hry Mathesso je stejný – najít dva žetony, které jsou stejné. Bez ohledu na to, co znamenají podivné znaky na horní a dolní straně žetonů (tyto znaky představují čísla). Díky reverzní synestezii je navíc možné vtisknout aritmetiku do jejich mentálního systému stejně snadno, jako kdyby se učily mluvit. Děti snadno nahradí čísla barvami pomocí barevného pravítka a čísla pochopí jako vedlejší produkt hry. To vše se jim však nemusí říkat. Nemusí se ani zatěžovat tím, že si hraním této hry vytvoří páteřní algoritmický systém, zahrnující jejich podvědomé znalosti všech čísel, násobení, dělení, mocnin, prvočísel, Fibonacciho čísel, faktoriálů a dalších. Nebudeme je také zatěžovat existencí fenoménu nuly a jeho specifik. Prostě je necháme hrát si. Ukázka grafického zpracování hry je na obr. 1.

Tato hra je výsledkem několikaletého výzkumu myšlení, chápání a učení. Její efekt má i přes svou relativní triviálnost nedocenitelný potenciál. Při dodržení námi vypracovaných metodických postupů mohou děti získat základní porozumění aritmetiky, hlubokou matematickou intuici [34] a procedurální logiku. Hra má totiž přesah do teorie čísel a teorie her. Vyšší varianty hry Mathesso vyžadují neustále se měnící strategii, nejen v závislosti na skóre každého hráče, počtu hráčů a jejich dovednostech a strategii. Hráči mohou v každém tahu odhalit jednu nebo dvě karty podle svého uvážení. Ve vyšších verzích hry Mathesso je totiž třeba uvažovat jak o pravděpodobnosti, že hráč získá pár, tak o tom, že otočení druhého žetonu poskytne ostatním hráčům další informace. Pochopení různých strategií se ve vyšších verzích stává klíčovým a vzniká zcela přirozeně.

Obr. 1: Grafické znázornění hry Mathesso

Přesto si připomínáme, že se stále jedná o princip hry pexeso. Nic z toho, co je zde popsáno, nevyžaduje žádné matematické znalosti. Hraní hry přichází s intuitivním pochopením pravděpodobnostního kalkulu, strategického uvažování, fluktuace rizika a schopnosti reflexivních výpočtů a paralelního myšlení [35]. A co je nejdůležitější – vhled do toho, jak je matematika krásná a její krása prostě není náhoda. Dalšími bonusy z hraní hry Mathesso jsou pokročilá koncentrace a schopnost orientace ve velkém množství nepřehledných informací. Děti si také procvičují paměť a jemnou motoriku. Přestože je Mathesso speciálně navrženo pro hraní předškoláky, kteří se ještě nenaučili číst a psát, i starším dětem a dospělým může velmi otevřít mysl. Aby se však dostavily výše zmíněné účinky, je třeba dodržovat metodické postupy a především hru pravidelně procvičovat. Čím více aktivních blokací v matematice, tím více úsilí bude třeba k jejich odstranění. Vývoj metodiky pro identifikaci blokací v matematice bude součástí připravovaného výzkumu.

Místo výuky násobilky mohou rodiče trávit čas s dětmi hraním Mathessa. Mohou své děti a dokonce i sami sebe naučit nesrovnatelně více za kratší dobu. Na začátku se doporučuje hrát lehčí varianty s menším počtem žetonů (následující kapitola) a nestydět se použít barevné pravítko, kdykoli ztratíte jistotu. Čím méně žetonů zůstane na stole, tím více paralelních výpočtů vznikne. Pokud se hráč ztratí v pravidlech, může vždy přejít na jednoduchý princip hry pexesa a orientovat se pouze podle pozice žetonů. Pokud se hráči zdá hra příliš složitá, může snížit počet žetonů, se kterými bude hrát. Po překonání počáteční nejistoty zjistíte, že Mathesso je svou složitostí srovnatelná s šachovou hrou. Krása hry Mathesso spočívá v její logické struktuře, která pracuje na základní úrovni uvažování. Dva krát čtyři se rovná osm a žádná hlubší myšlenka nebo analogie se za tím neskrývá. Podvědomě se tak ladí zdrojový kód logického myšlení a jeho efektivita se hraním výrazně zvyšuje. Mathesso pracuje tím nejjednodušším možným způsobem s nejsložitějším jevem – myšlením [36, 37, 38, 39].

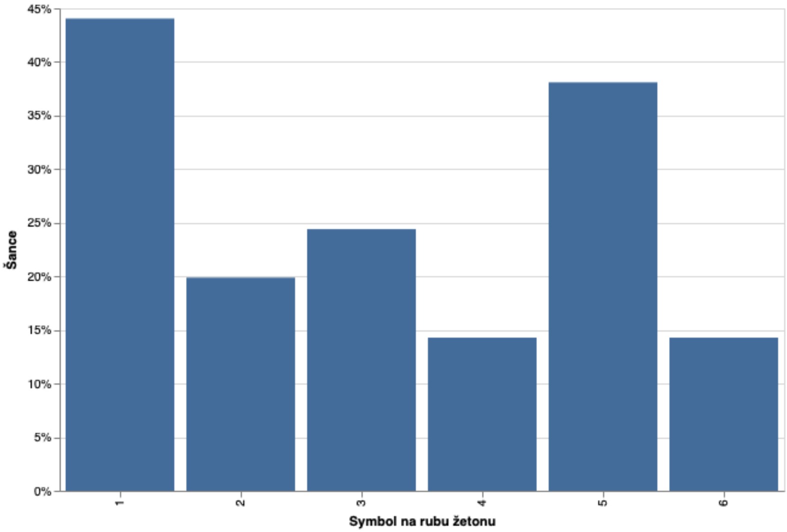
3. Jedna ze strategií hry Mathesso

Kromě výše popsaných funkcí, hra Mathesso dokáže do značné míry rozvíjet nejen matematické znalosti, ale také paměť, strategické myšlení a vnímání náhodnosti. V této kapitole se zaměříme výhradně na základy toho, kam může přirozeně vytvářená strategie směřovat.

V této hře se hráč často dostane do situace, kdy nezná nebo si nepamatuje ani jeden líc žetonu. Ukazuje se, že od druhé hry, kterou hráč hraje, začíná v těchto situacích přemýšlet o tom, které číslo rubu je nejlepší otočit, aby maximalizoval pravděpodobnost úspěšného otočení druhého žetonu.

Jako první příklad uvádíme počáteční stav nejmenší verze této hry, a to Mathesso ATTO, pro přímočarou interpretaci. Z grafu 1 je patrné, že nejvýhodnější je obracet žetony s číslem 1 (44 %), následně s číslem 5 (38 %). Ve hře je tato výhoda kompenzována tím, že před prvním tahem je pořadí hráčů určeno otočením žetonů s číslem 1, a pravděpodobnost ostatních čísel se tak zvyšuje. Dále číslo 5 obsahuje prvočíslo s menší bodovou hodnotou, tedy není tak výhodné ji obracet. I tato malá verze hry se tak z hlediska této strategie stává vyváženou a otevírá možnost využití dalších strategických technik.

Další významnou složkou je, že pravděpodobnost úspěšného otočení se s každým tahem zásadně mění. Graf 2 ukazuje, jak moc se mohou dané pravděpodobnosti změnit, když předchozí hráč sebere pouze jeden pár žetonů. Je patrné, že herní strategie se tak může zásadně změnit v závislosti na tom, které žetony jsou na začátku otočeny.

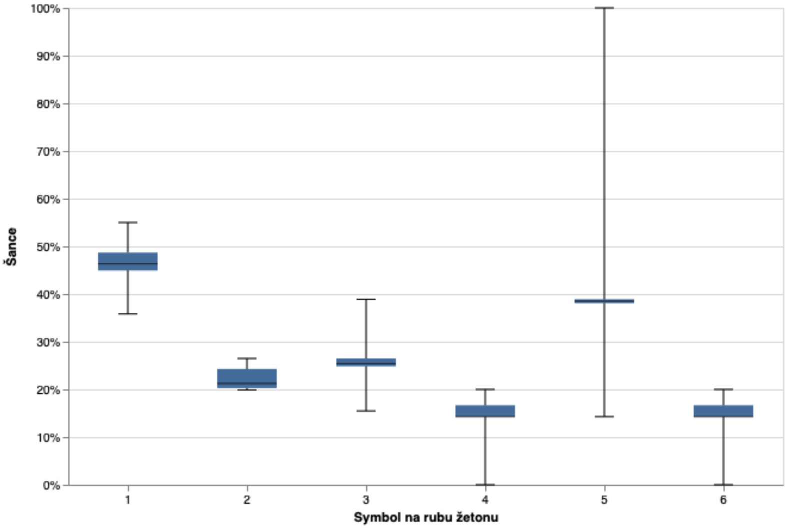


Graf 1: Pravděpodobnost úspěchu při otáčení prvního žetonu podle čísla na bílé straně žetonu Mathessa ATTO

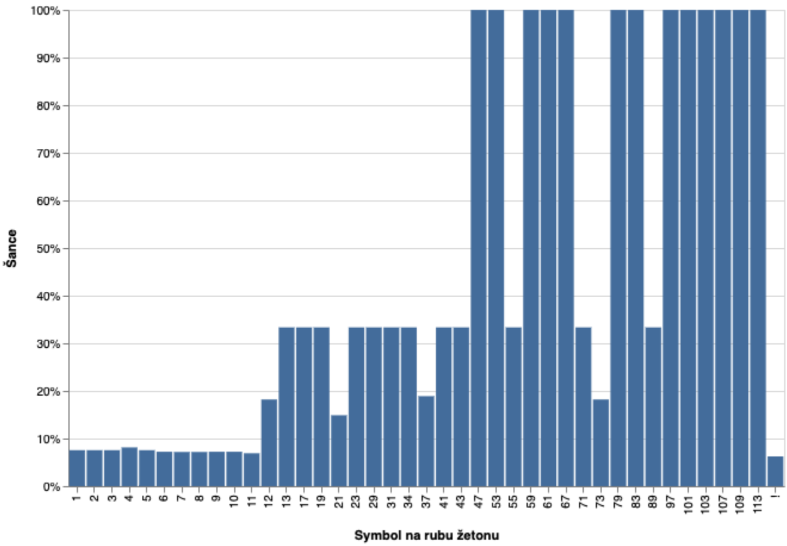
Tato strategie je pro plnou verzi hry Mathesso GIGA ještě významnější. Jak je vidět v grafu 3, vyplatí se zde znalost prvočísel, které lze díky této znalosti volně sbírat. Ty jsou však pouze za jeden bod. Naproti tomu žetony faktoriálů (!) mají hodnotu 4 bodů a na začátku hry jsou zastoupeny s nejnižší pravděpodobností (6,2 %). Hra je navíc koncipována tak, že žádné z nejčastěji se vyskytujících čísel nemá na začátku hry výhodu, jak je vidět na číslech 1 až 11, kde se pravděpodobnost pohybuje od 6,9 % do 8,1 %.

4. Metoda učení

Mathesso je matematická edukativní hra pro děti od 3 let, dospělé a studenty vysokých škol. Proto je hra navržena tak, aby měla co nejnižší vstupní bariéru [40] a zároveň obsahovala vysokou úroveň složitosti. Ze hry je proto možné vyřadit dvojice žetonů podle toho, jakou matematickou vlastnost se hráč učí. Existuje také soubor pravidel, která lze dodržovat v závislosti na věku nebo dohodě hráčů.



Graf 2: Změna úspěšnosti při odstranění jednoho páru žetonů z Mathesso ATTO



Graf 3: Pravděpodobnost úspěchu při otočení prvního žetonu podle čísla na bílé straně z Mathesso GIGA

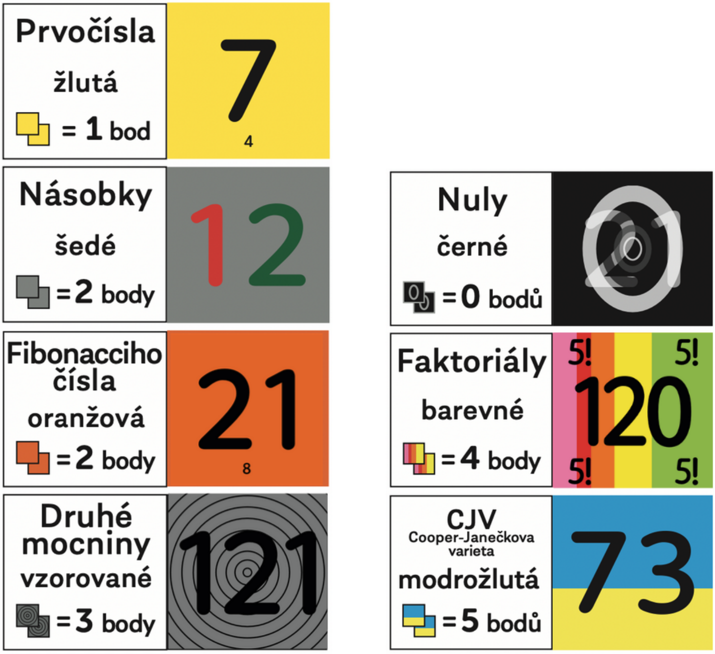
Mathesso lze hrát stejně jako Pexeso, Dvojice, Memory, Hra na koncentrační paměť nebo také známou hru Pelmanism systém [33]. Hru tedy v mnoha případech není třeba vysvětlovat. Pravidla lze shrnout do několika vět:

Žetony jsou rozloženy bílou stranou nahoru. Hráč otočí dvojici žetonů tak, aby je ostatní hráči viděli. Pokud mají otočené žetony stejný obrázek (barvu i číslo), hráč si je vezme. Pokud žetony nejsou stejné, otočí je zpět. Další hráč v pořadí pokračuje stejným způsobem. Hraje se tak dlouho, dokud nejsou rozebrány všechny žetony. Vítězem se stane hráč s největším počtem nalezených dvojic.

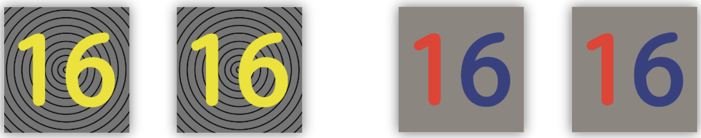
S pravidly Pexesa a bez znalosti významu čísel mohou hráči po několika krátkých hrách začít vidět souvislosti a otáčet správné žetony, aniž by byly předtím otočeny. Ve chvíli, kdy hráči umí používat pravítko nebo znají tabulku násobení, prvočísla a další typy žetonů, aby byla zachována dynamika hry, je třeba přidat další jednoduché pravidlo. A to, že dvojice žetonů jsou ohodnoceny body podle obtížnosti. Hráč toto ohodnocení najde ve hře v grafické úpravě dle obr. 2:

- 0 bodů za každý pár ze skupiny nuly (černé pozadí)
- 1 bod za každý pár ze skupiny prvočísla (žluté pozadí)
- 2 body za každý pár ze skupiny Fibonacciho čísla (oranžové pozadí)
- 2 body za každý pár ze skupiny malá násobilka (barevné na šedém pozadí)
- 3 body za každý pár ze skupiny mocniny (barevné na kruhovém pozadí)
- 4 body za každý pár ze skupiny faktoriály (duhové pozadí)
- 5 bodů za každý pár ze skupiny CJV (žlutomodré pozadí)

Při výuce tabulky násobení jsou žáci často zmateni tím, že číslo 16 je 2 krát 8 a zároveň 4 krát 4. Tento zmatek může vést k dalším nedorozuměním ve studiu žáka. Tato hra tento jev obrací ve výhodu díky pravidlu násobení bodů z dvojic žetonů se stejným číslem, jak je znázorněno na obr. 3. Ve zmíněném případě má tak hráč 2 body za 2 krát 8 a 3 body za mocninu 4. Výsledný počet bodů této kombinace je tedy $(2 + 3) \cdot 2 = 10$ bodů. Student s tímto pravidlem záměrně hledá stejná čísla a snaží se je vybírat.



Obr. 2: Typy žetonů a jejich bodové ohodnocení



Obr. 3: Ukázka žetonů, které se při závěrečném počítání bodů násobí

Jedním z posledních významných typů žetonů jsou Cooperovy–Janečkovy variety (CJV). Tyto žetony jsou jediné, které porušují pravidla Pexesa a jsou odebrány, pokud mají pouze stejné pozadí, nikoli číslo. Zároveň platí, že pokud si hráč vezme kombinaci dvou, mají tyto žetony hodnotu 12 bodů a hráč má kdykoli ve hře jeden tah navíc. Tento typ žetonů dává hře mnoho možných strategií a ještě lepší herní dynamiku, která bude podrobně popsána v následném výzkumu a publikaci.

5. Závěr

Nová stolní hra Mathesso je postavena na pelmanism principu spojeným s matematickými operacemi. Díky reverzní synestezii jako mechanismu učení [15, 19, 17, 18, 19] a systému unikátních barev hra slouží k vtištění matematických závislostí do paměti. Hráč nemusí znát číselné symboly, aby mohl hrát. Díky tomu je možné se nenásilnou metodou naučit násobení, dělení, mocniny, prvočísla, Fibonacciova čísla, faktoriály a další, a to pouhým hraním této hry.

Připravovaný výzkum se bude zabývat vytvořením metodiky pro zlepšení učení se nejen matematice, a to u různých skupin lidí, zejména u dětí předškolního věku. Hra byla předběžně testována (hrána) s jednotlivci a díky zpětné vazbě upravena do současné podoby. Předběžné výsledky na základních školách v České republice ukazují, že po hraní hry Mathesso mají děti předškolního věku nebo prvního stupně základní školy výrazně vřelejší vztah k matematice. Základní znalosti dělení a násobení byly prokázány i bez dalšího učení. V několika případech děti pochopily význam prvočísel čistě na základě hry. Averzi k matematice lze často u dospělých hráčů vyřešit pouhým hraním hry. Kromě toho bylo předběžně zjištěno, že hra Mathesso u několika jedinců výrazně zlepšuje paměť, strategické myšlení nebo vnímání náhodnosti.

Literatura

[1] Petty, R. E., Briñol, P.: Emotion and persuasion: Cognitive and metacognitive processes impact attitudes. *Cognition and Emotion*, roč. 29 (2015), č. 1, s. 1–26.

[2] Johnson, S. G. B., Steinerberger, S.: Intuitions about mathematical beauty: A case study in the aesthetic experience of ideas. *Cognition*, roč. 189 (2019), s. 242–259.

[3] Song, Ch. S., Xu, Ch., Maloney, E. A., Skwarchuk S.-L., Di Lonardo Burr, S., Lafay, A., Wylie, J., Osana, H. P. Douglas, H., LeFevre J.-A.: Longitudinal relations between young students' feelings about mathematics and arithmetic performance. *Cognitive Development*, roč. 59 (2021), 101078.

[4] Spelke, E. S.: Core knowledge, language, and number. *Language Learning and Development*, roč. 13 (2017), č. 2, s. 147–170.

[5] Kinzler, K.-D., Spelke, E.-S.: Core systems in human cognition. In: From Action to Cognition (eds. von Hofsten, C., Rosander, K.). *Progress in Brain Research*, Elsevier, 2007, s. 257–264.

[6] Osterlind, S. J.: 15The Context. In: *The Error of Truth: How History and Mathematics Came Together to Form Our Character and Shape Our Worldview*. Oxford University Press, 2019, DOI: https://doi.org/10.1093/oso/9780198831600.001.0001.

[7] Narlikar, J. V.: *Science and Mathematics: From Primitive to Modern Times*. Taylor and Francis, 2021.

[8] R. L. Cooke, R. L.: *The History of Mathematics: A Brief Course*. Wiley, 2011.

[9] Larkin, K., Jorgensen, R.: 'I hate maths: Why do we need to do maths?' using ipad video diaries to investigate attitudes and emotions towards mathematics in year 3 and year 6 students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, roč. 14 (2016), DOI: https://doi.org/10.1007/s10763-015-9621-x, s. 925–944.

[10] Xolocotzin, U.: *Understanding emotions in mathematical thinking and learning*. Academic Press, 2017.

[11] Perschbacher, E.: "Kids don't hate math; they hate being frustrated". Chicago Tribune, Aug 24, 2016.

[12] DiStefano, M., O'Brien, B., Storozuk, A., Ramirez, G., Maloney, E. A.: Exploring math anxious parents' emotional experience surrounding math homework-help. *International Journal of Educational Research*, roč. 99 (2020), 101526.

[13] Stearns, M.: Learning math: Why kids get frustrated and what parents can do. *The Education Digest*, roč. 78 (2013), č. 5, s. 38–40.

[14] Ziegler, G. M., Loos, A.: "What is mathematics?" and why we should ask, where one should experience and learn that, and how to teach it. In: *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham, 2017, s. 63–77.

[15] Jansari, A. S., Spiller, M. J., Redfern, S.: *Number synaesthesia: When hearing "four plus five" looks like gold. Cortex*, roč. 42 (2006), č. 2, s. 253–258.

[16] Simner, J., Bain, A. E: Do children with grapheme-colour synaesthesia show cognitive benefits? *British Journal of Psychology*, roč. 109 (2018), č. 1, s. 118–136.

[17] Green, J. A. K., Goswami, U.: Synesthesia and number cognition in children. *Cognition*, roč. 106 (2008), č. 1, s. 463–473.

[18] Gebuis, T., Nijboer, T. C. W., Van der Smagt, M. J.: Multiple dimensions in bi-directional synesthesia. *European Journal of Neuroscience*, roč. 29 (2009), č. 8, s. 1703–1710.

[19] Rinaldi, L. J., Smees, R., Alvarez, J., Simner, J.: Do the colors of educational number tools improve children's mathematics and numerosity? *Child development*, roč. 91 (2020), č. 4, s. e799–e813.

[20] Lacey, S., Martinez, M., McCormick, K., Sathian, K.: Synesthesia strengthens sound-symbolic cross-modal correspondences. *European Journal of Neuroscience*, roč. 44 (2016), č. 9, s. 2716–2721.

[21] Tilot, A. K., Kucera, K. S., Vino, A., Asher, J. E., Baron-Cohen, Fisher, S. E.: Rare variants in axonogenesis genes connect three families with sound–color synesthesia. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, roč. 115 (2018), č. 12, s. 3168–3173.

[22] Ward, J., Huckstep, B., Tsakanikos, E.: Sound-colour synaesthesia: To what extent does it use cross-modal mechanisms common to us all? *Cortex*, roč. 42 (2006), č. 2, s. 264–280.

[23] Beeli, G., Esslen, M., Jancke, L.: Synaesthesia: when coloured sounds taste sweet. *Nature*, roč. 434(7029) (2005), č. 38, DOI: 10.1038/434038a.

[24] Parker, G.: Teaching multiplication tables. *Mathematics Teaching*, roč. 265 (2019), s. 11–13.

[25] Admin. How to memorize multiplication tables – best way to learn tables, Jun, 2022.

[26] McElderry, H.: *The Multiplication Tables Colouring Book: Solve the Puzzle Pictures While Learning Your Tables (Back to fundamentals).* Tarquin Publications, 1991.

[27] Spinillo, A. G., Lautert, S. L., De Souza Rosa Borba, R. E.: Mathematical reasoning: The learner, the teacher, and the teaching and learning. In: *Mathematical Reasoning of Children and Adults*, Springer, 2021, s. 1–15.

[28] Nunes, T., Bryant, P.: *Using mathematics to understand the world.* Routledge, London, 2021.

[29] Cheng, Y.-L., Mix, K. S.: Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, roč. 15 (2014), č. 1, s. 2–11.

[30] Tarafa, M., Roldán-Merino, J., Lorenzo-Seva, U., Hurtado-Pardos, B., Biurrun-Garrido, A., Molina-Raya, L., Morera-Pomarede, M.-J., Bande, D., Torreda, M., Casas, I.: Reliability and validity study of the Spanish adaptation of the "Educational Practices Questionnaire" (EPQ). *PloS one*, roč. 15 (2020), č. 9, e0239014. DOI: 10.1371/journal.pone.0239014.

[31] Safitri, R. E., Widjajanti, D. B.: The effect of inquiry in scientific learning on students' self-confidence. *Journal of Physics: Conference Series*, roč. 1157 (2019), s. 042073.

[32] Francis, B., Connolly, P., Archer, L., Hodgen, J., Mazenod, A., Pepper, D., Sloan, S., Taylor, B., Tereshchenko, A., Travers, M.-C.: Attainment grouping as self-fulfilling prophesy? A mixed methods exploration of self confidence and set level among year 7 students. *International Journal of Educational Research*, roč. 86 (2017), s. 96–108.

[33] Wilson, S., Darling, S., Sykes, J.: Adaptive memory: Fitness relevant stimuli show a memory advantage in a game of pelmanism. *Psychonomic bulletin and review*, roč. 18 (2011), č. 4, s. 781–786.

[34] Hipolito I.: Proof phenomenon as a function of the phenomenology of proving. Integral Biomathics: Life Sciences, Mathematics, and Phenomenological Philosophy. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, roč. 119 (2015), č. 3, s. 360–367.

[35] Yang, X., Zhao, G., Yan, X., Chao, Q., Zhao, X., Lu, T., Dong, Y.: Presetting stances for students during collaborative argumentation: Parallel thinking versus adversarial thinking. *Research in Science Education*, 2021, s. 1–22.

[36] Drukarch, B., Holland, H. A., Velichkov, M., Geurts, J. J. G., Voorn, P., Glas, G., De Regt, H. W.: Thinking about the nerve impulse: A critical analysis of the electricity-centered conception of nerve excitability. *Progress in Neurobiology*, roč. 169 (2018), s. 172–185.

[37] He, K.: *A Theory of Creative Thinking: Construction and Verification of the Dual Circulation Model*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2017.

[38] Baggs, E., Chemero, A.: Thinking with other minds. *Behavioral and Brain Sciences*, roč. 43 (2020), e92.

[39] O'Keefe, P. A., Horberg, E. J., Sabherwal, A., Ibasco, G. C., Zainal, A. B.: Thinking beyond boundaries: A growth theory of interest enhances integrative thinking that bridges the arts and sciences. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, roč. 162 (2021), s. 95–108, DOI: https://doi.org/10.1016/j.obhdp.2020.10.007.

[40] Schmidt-Jones, C.: Instrument-based music theory on youtube: Entries and barriers to lifelong learning. *Journal of Music, Technology and Education*, roč. 14 (2022), č. 1, s. 5–20.

70 let Matematické olympiády v Československu (České republice) a 100 let její předchůdkyně

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

Abstrakt. *Článek je vzpomínkou na v Československu a nyní v České republice známou soutěž pro žáky základních a středních škol. Soutěž u nás existuje již 70 let. Předchůdkyní soutěže byla časopisecká soutěž v Rozhledech matematicko-přírodovědeckých.*

1. Úvod

V článku se postupně objeví poukázání na několik výročí, které mají souvislost s letošním rokem 2022 a které se týkají Matematické olympiády a také aktivit, které matematické olympiádě v naší republice předcházely.

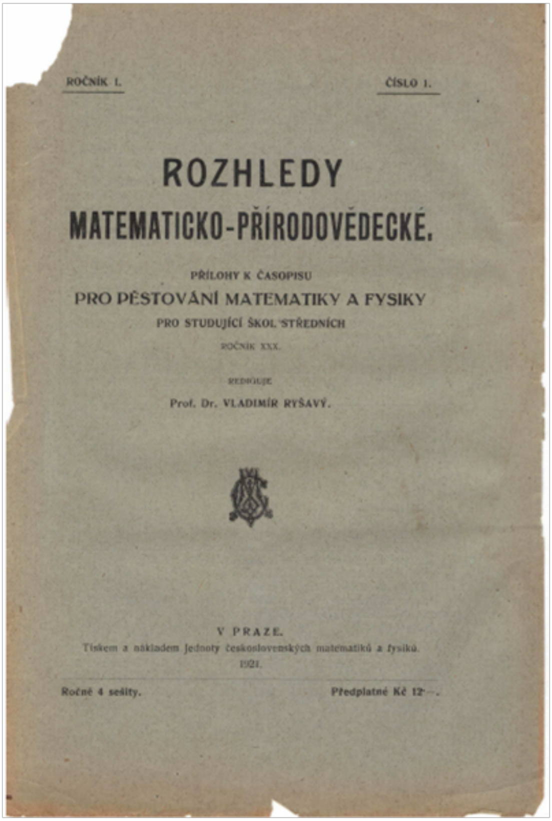
2. Rozhledy matematicko-přírodovědecké

Prvním výročím je vzpomínka na rok 1872, kdy Jednota Českých matematiků a fyziků začala vydávat *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*. V roce 1893 se pak časopis rozšířil o přílohu *Rozhledy matematicko--přírodovědné*.

Druhým výročím, které je dobré s uvedeným časopisem zmínit, je školní rok 1921–1922, kdy se příloha *Rozhledy* oddělila a začala vycházet jako samostatný časopis pod názvem *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*. Na obr. 1 je znázorněna přední strana obálky prvního čísla prvního ročníku tohoto časopisu [4].

3. Časopisecká soutěž v Rozhledech – předchůdkyně Matematické olympiády

Ve školním roce 1921–1922 se v Rozhledech objevila časopisecká soutěž s úlohami z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie. V roce 1922 byla tato soutěž vyhodnocena. Studenti byli oceněni cenami.



ROČNÍK I. ČÍSLO 1.

ROZHLEDY
MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

PŘÍLOHY K ČASOPISU
PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY
PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL STŘEDNÍCH
ROČNÍK XXX.

REDIGUJE
Prof. Dr. VLADIMÍR RYŠAVÝ.

V PRAZE.
Tiskem a nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků.
1921.

Ročně 4 sešity. Předplatné Kč 12·—.

Obr. 1

Mezi řešiteli se mj. objevili tyto studenti: Vladimír Knichal, František Ladislav Rieger, Václav Váňa. V roce 1923 to byli např. Karel Hruša, František Vyčichlo. V roce 1924 to byli např. Stanislav Horák, František Hradecký, Rostislav Košťál, Ota Setzer, František Zelinka. Mnozí z nich se pak v roli učitelů věnovali Matematické olympiádě [1].

Tehdejší úlohy byly obtížnější než současné v Matematické olympiádě. Úlohy byly sice spíše školské, ale bylo na jejich řešení třeba využít mnoho vzorců a jejich úprav. Byly tedy pracné, a tedy méně zajímavé. Hodně úloh bylo ze stereometrie, dále na kuželosečky a na práci s komplexními čísly.

Úlohy z prvního ročníku Rozhledů jsou uvedeny na obr. 2a–2f [2].

ÚLOHY.

Z mathematiky.

1.

Z rovnic $4x = 3a \cos\varphi + a \cos\varphi$ vyloučiti φ.
$4y = 3a \sin\varphi - a \sin 3\varphi$.

Prof. *Václav Hübner.*

2.

Určiti kužel kruhový přímý o maximálním obsahu při daném plášti a vyšetřiti poměr $r : v : s$. *Týž.*

3.

V kruhu sestrojiti daný úhel α tak, aby byl obvodový, a obvod plochy omezený rameny a příslušným obloukem byl největší. *Týž.*

4.

Sestrojiti kružnici tak, aby procházela dvěma danými body a aby byla viděna z bodu třetího v daném úhlu. *Prokop.*

5.

Sestrojiti parabolu, je-li dána řídící přímka její a dvě tečny svojí polohou. † Prof. *Rud. Hruša.*

Obr. 2a

6.

Řešiti dvojstředový čtyřúhelník, dány-li úhlopříčny svými délkami m, n a poloměr kruhu vepsaného ϱ. *Týž.*

7.

Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC budiž ϱ. Poloměry kolmé ke stranám svírají s libovolnou přímkou p úhly α, β, γ měřené v témže smyslu. Pak plocha tohoto trojúhelníka dá se vyjádřiti vzorcem:

$$\Delta = \varrho^2 \, tg\,\frac{\beta-\gamma}{2}\, tg\,\frac{\gamma-\alpha}{2}\, tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Prof. *Karel Koutský.*

8.

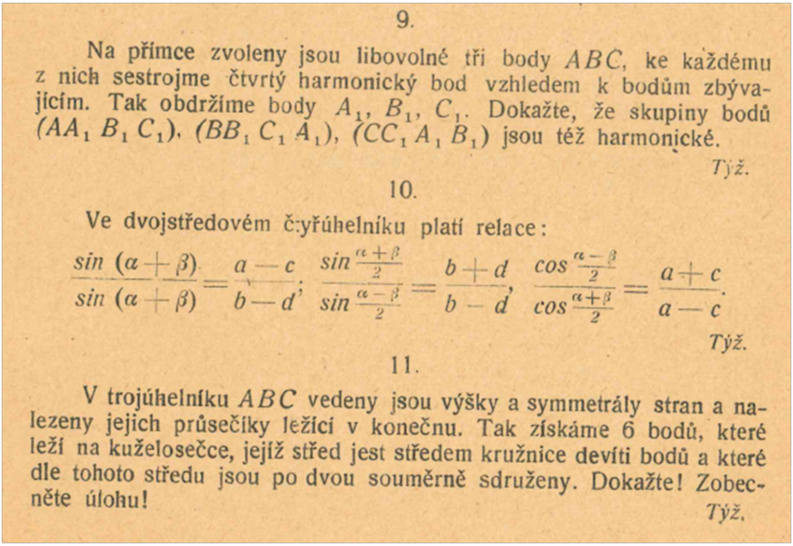
Ve vrcholech trojúhelníka ABC vztýčeny kolmice ke stranám a vyšetřeny průsečíky A_1, B_1, C_1 dvou kolmic, které neprocházejí současně některým z vrcholů trojúhelníka ABC a z nichž žádná není kolmá ke straně jeho, omezené vrcholy, jimiž tyto kolmice jdou.

Z bodů A_1, B_1, C_1 spuštěny kolmice na strany a tak získány body A_2, B_2, C_2 (mimo vrcholy trojúhelníka ABC). Dokažte bez užití analytické geometrie:

a) Příčky AA_2, BB_2, CC_2 protínají se v jednom bodě.

b) Přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 protínají se v bodě R, který jest souměrný s orthocentrem V trojúhelníka ABC dle středu S kružnice jemu opsané. *Týž.*

Obr. 2b



9.

Na přímce zvoleny jsou libovolné tři body ABC, ke každému z nich sestrojme čtvrtý harmonický bod vzhledem k bodům zbývajícím. Tak obdržíme body A_1, B_1, C_1. Dokažte, že skupiny bodů $(AA_1\,B_1\,C_1)$, $(BB_1\,C_1\,A_1)$, $(CC_1\,A_1\,B_1)$ jsou též harmonické.

Týž.

10.

Ve dvojstředovém čtyřúhelníku platí relace:

$$\frac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,(\alpha+\beta)}=\frac{a-c}{b-d};\quad \frac{sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{b+d}{b-d},\quad \frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{a+c}{a-c}.$$

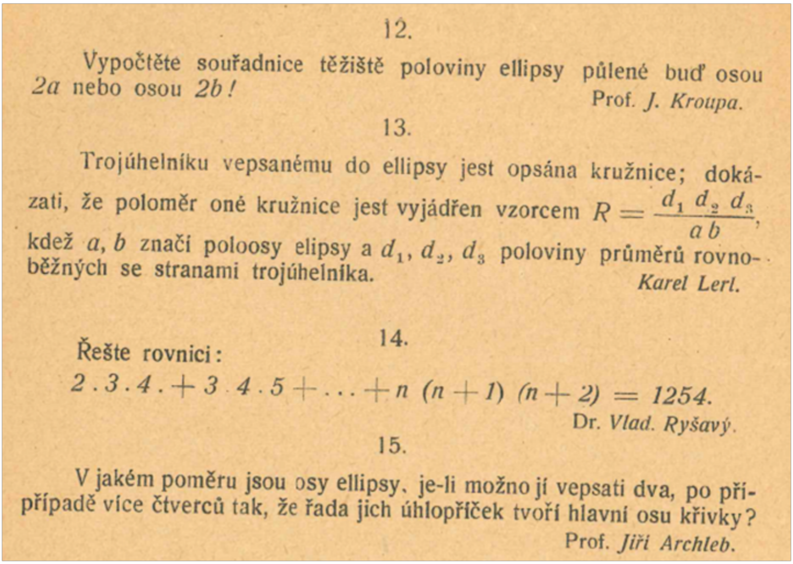
Týž.

11.

V trojúhelníku ABC vedeny jsou výšky a symmetrály stran a nalezeny jejich průsečíky ležící v konečnu. Tak získáme 6 bodů, které leží na kuželosečce, jejíž střed jest středem kružnice devíti bodů a které dle tohoto středu jsou po dvou souměrně sdruženy. Dokažte! Zobecněte úlohu!

Týž.

Obr. 2c



12.

Vypočtěte souřadnice těžiště poloviny ellipsy půlené buď osou $2a$ nebo osou $2b$!

Prof. *J. Kroupa.*

13.

Trojúhelníku vepsanému do ellipsy jest opsána kružnice; dokázati, že poloměr oné kružnice jest vyjádřen vzorcem $R=\frac{d_1\,d_2\,d_3}{a\,b}$, kdež a, b značí poloosy elipsy a d_1, d_2, d_3 poloviny průměrů rovnoběžných se stranami trojúhelníka.

Karel Lerl.

14.

Řešte rovnici:

$$2\,.\,3\,.\,4\,.+3\,.\,4\,.\,5+\ldots+n\,(n+1)\,(n+2)=1254.$$

Dr. *Vlad. Ryšavý.*

15.

V jakém poměru jsou osy ellipsy, je-li možno jí vepsati dva, po případě více čtverců tak, že řada jich úhlopříček tvoří hlavní osu křivky?

Prof. *Jiří Archleb.*

Obr. 2d

16.

Jaký jest poměr os v ellipse, lze-li jí vepsati dvě, případně více kružnic, které se dotýkají vždy 2 sousední vzájemně a ellipsy dvojnásob? V jakém poměru jsou poloměry těch kružnic? *Týž.*

17.

Řešiti rovnice: $a^{2x} - a^{2y} = 16,$

$x + y = \log_a 15.$ Dr. *Josef Štěpánek.*

18.

Sečísti řadu: $\frac{m}{k^m} + \frac{m+1}{k^{m+1}} + \ldots + \frac{m+n}{k^{m+n}} \ldots$, pro $k > 1$.

Týž.

19.

Sečísti řadu: $\frac{3}{4} + \frac{3.4}{4.6} + \frac{3.4.5}{4.6.8} + \frac{3.4.5.6}{4.6.8.10} + \ldots$ *Týž.*

20.

Sečísti řadu: $\frac{1^2}{a} + \frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{a^3} + \ldots + \frac{n^2}{a^n} + \ldots$, $a > 1$.

Týž.

Obr. 2e

21.

Řešiti soustavu rovnic:
$$e^{xy} = e^{14}$$
$$xe^y = 4.12.$$
Týž.

22.

V jaké výši musíme vésti v trojúhelníku řez rovnoběžný se základnou, aby rozdíl čtverců ploch lichoběžníka a trojúhelníka tak vzniklých byl roven polovici čtverce obsahu celého trojúhelníka původního? *Týž.*

Obr. 2f

4. Vznik Matematické olympiády v Československu (České republice)

Podobné soutěže jako v Rozhledech byly i v jiných časopisech, např. v Matematice ve škole. Řešitelů bylo ale málo, proto bylo třeba zorganizovat masovější soutěž, aby se zvýšila vzdělanost národa.

Ve školním roce 1951–1952 byla v Československu prvně zorganizována soutěž *Matematická olympiáda (MO)*. Iniciátory byli Eduard Čech a Jur(aj) Hronec. Vzorem MO byly podobné soutěže v Sovětském svazu a Polsku. Podobná soutěž v menším rozsahu se konala již dříve na Slovensku a Severní Moravě.

Zahájení soutěže bylo projednáno s Ministerstvem školství, věd a umění (MŠVU) a Československým svazem mládeže (ČSM). Byl vytvořen Ústřední výbor matematické olympiády (ÚVMO) ve složení František Vyčichlo (předseda), Jindřich Šmída, Jur Hronec (místopředsedové), Rudolf Zelinka (jednatel). Vyhlašovateli MŠVU ale organizování soutěže trvalo dlouho, rychlejší byla Matematika ve škole – od prosince 1951 do března 1952 časopis publikoval vždy 4 úlohy. Věstník MŠMU s úlohami MO vyšel až koncem dubna 1952, takže vlastně začátek MO byl až v roce 1952 [3].

Pro zajímavost: Fyzikální olympiáda vznikla ve školním roce 1959/60. Olympiáda v programování vznikla jako zvláštní samostatná kategorie P Matematické olympiády ve školním roce 1985/86.

5. Organizace Matematické olympiády na jejím začátku

Vznikly 2 kategorie MO: kategorie A pro 3. a 4. ročník výběrových škol, kategorie B pro 1. a 2. ročník výběrových škol. Soutěž měla 3 kola: přípravné, oblastní (krajské), celostátní.

Oblastmi byly regiony, kde sídlily vysoké školy (Bratislava, Brno, Košice, Olomouc, Ostrava, Pardubice, Plzeň, Praha) a navíc regiony Hradec Králové a Kroměříž.

6. První ročník Matematické olympiády v roce 1952

V přípravném (domácím) kole bylo zadáno 16 úloh v obou kategoriích, v krajském kole byly zadány 4 úlohy v obou kategoriích a v celostátním kole byly zadány 4 úlohy jen v kategorii A.

Krajské kolo se konalo v neděli 18. května 1952. Celostátní kolo se konalo v neděli 15. června 1952 v Matematickém ústavu UK, Ke Karlovu 3.

Uveďme, jaké úlohy byly zadány v závěrečných kolech obou kategorií:

Krajské kolo 1. ročníku MO kategorie B

Úloha 1. Jsou dány dvě různé přímky p, q a bod A. Každé otáčení, které převádí přímku p v přímku q, převádí bod A v jistý bod A'. Co vyplní všecky tyto body A'?

Úloha 2. Najděte všechna čtyřciferná čísla tvaru $aabb$ (kde $a \neq b$ a b jsou arabské cifry), která jsou čtverci celého čísla!

Úloha 3. Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a^2 + b^2)ab \leq a^4 + b^4.$$

Rozhodněte, kdy platí rovnost!

Úloha 4. Čtyřstěn $MNPQ$ nechť má nejdelší hranu délky d. Dokažte, že pro každé dva body A, B povrchu čtyřstěnu platí nerovnost $\overline{AB} \leq d$.

Krajské kolo 1. ročníku MO kategorie A

Úloha 1. Jestliže číslo n je celé, potom i výraz

$$V = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$$

je celé číslo. Dokažte!

Úloha 2. Dokažte, že číslo $11^{100} - 1$ končí skupinou číslic 6000.

Úloha 3. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, který lze vepsat do kružnice, jestliže jsou dány velikosti a, b, c, d jeho stran.

Úloha 4. Rovina je pokryta sítí shodných rovnostranných trojúhelníků. Dokažte, že neexistuje čtverec, jehož všecky vrcholy by ležely ve vrcholech sítě (tj. ve vrcholech trojúhelníků sítě).

Celostátní kolo 1. ročníku MO kategorie A

Úloha 1. Jsou-li a, b kladná racionální čísla, dokažte, že ze vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c,$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ jsou rovněž racionální čísla.

Úloha 2. Tabulka čísel

$$\begin{array}{c} a_1\ b_1\ c_1 \\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ e_2 \\ a_3\ b_3\ c_3\ d_3\ e_3\ f_3\ g_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla. Každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem; schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

Úloha 3. Budiž $ABCD$ vypuklý rovnoběžník, v němž $\overline{AB} = \overline{CD}$ a buďtež R, S středy stran AD, BC. Sestrojte polopřímky AU, DV souhlasně rovnoběžné s polopřímkou RS. Dokažte, že platí vztah $\angle BAU = \angle CDV$.

Úloha 4. Rozměry obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p, q; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC, a to v případě, že čísla p, q jsou a) nesoudělná, b) soudělná.

6. Výsledky posledních kol Matematické olympiády v roce 1952

V krajském kole kategorie B uspěli např. tito studenti: Petr Vopěnka (2. ročník), Ledeč nad Sázavou (region Brno), Stanislav Trávníček (2. ročník), Kroměříž, Ivan Saxl (1. ročník), Chrudim (region Pardubice).

Nejlepší 4 studenti dostali odměnu 2.500 Kč, dalších 5 studentů obdrželo 1.500 Kč a další 3 studenti 500 Kč.

V celostátním kole kategorie A zvítězil Juraj Bosák (4. ročník), Bratislava, druhý byl Jozef Gruska (3. ročník), Prievidza, třetí byl Jiří Janta (4. ročník), Ostrava.

7. Druhý ročník Matematické olympiády

Jelikož tento článek sleduje MO v roce 1952, neměla by tedy chybět první kola 2. ročníku této soutěže, protože ta byla zadána ještě v roce 1952. Zde je jejich znění:

Úlohy 1. kola 2. ročníku MO kategorie A

Úloha 1. Ak m, n sú celé kladné čísla, ukážte, že číslo $\sqrt{2}$ leží medzi číslami $\frac{m}{n}$, $\frac{m+2n}{m+n}$.

Úloha 2. Obrazy komplexních čísel 0, Z_1, Z_2 tvoří v rovině komplexních čísel trojúhelník, který stručně označíme OZ_1Z_2. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníka sestrojeného nad stranou Z_1Z_2 a ležícího v polorovině Z_1Z_2O.

Úloha 3. Buďte A', B', C', D' paty kolmic spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C, D čtyřstěnu $ABCD$ vždy na rovinu protější jeho stěny.

a) Jestliže bod A' leží na kolmici BH spuštěné v rovině BCD z bodu B k přímce CD (při čemž H je příslušná pata), potom je $AB \perp CD$. Dokažte.

b) Dokažte, že předchozí poučku lze obrátit.

c) Jestliže bod A' splývá s průsečíkem výšek trojúhelníka BCD, potom i body B', C', D' splynou po řadě s průsečíky výšek trojúhelníků CDA, DAB, ABC; dokažte. Co pak platí o přímkách AA', BB', CC', DD'?

Úloha 4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Budiž $A_1B_1C_1$ trojúhelník stejnolehlý s trojúhelníkem ABC podle středu A (koeficient stejnolehlosti $\lambda > 1$) a dále $A_2B_2C_2$ trojúhelník souměrný s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$ podle přímky BC. Určete a) konstruktivně, b) početně, který bod trojúhelníka ABC přejde po obou operacích na své místo?

Úloha 5. Komplexní číslo z a číslo $\overline{z}$ s ním komplexně sdružené vyhovují rovnici

$$az + b\overline{z} + c = 0,$$

kde a, b, c jsou daná komplexní čísla. Co vyplňují obrazy všech takových čísel z v rovině komplexních čísel?

Úloha 6. Ak je u iracionálne, a, b, c, d racionálne, je

$$\frac{au + b}{cu + d}$$

(kde $cu + d \neq 0$) racionálne vtedy a len vtedy, keď $ab - bc = 0$; dokážte.

Úloha 7. Budiž dán trojúhelník ABC; dále buďtež M, N, P body, které po řadě leží uvnitř stran BC, CA, AB, a to tak, že $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$. Zvolte bod M tak, aby o velikostech úseček MN, MP platil vztah

$$\overline{MN} + \overline{MP} = k,$$

kde $k > 0$ je dané číslo. Proveďte diskusi za předpokladu, že $\overline{AB} \leq \overline{AC}$, a stanovte, kterou podmínku musí splňovat číslo k, aby úloha měla řešení.

Úloha 8. Nutná a postačující podmínka, aby bylo lze čtyřstěnu vepsati kulovou plochu, která by se dotýkala všech jeho hran, je, aby součty všech tří dvojic protějších hran byly si rovny. Dokažte.

Úloha 9. Nádržka má tvar rotačního kužele spočívajícího podstavou na vodorovné rovině; její objem je V_0 litrů a výška u dm. Při plnění nádržky nateče za vteřinu a litrů vody. Vyjádřete vzdálenost vodní hladiny od vrcholu kužele po n vteřinách (n racionální číslo).

Úloha 10. Jsou dána dvě komplexní čísla A, B, při čemž $|A| = 1$. Jestliže pro komplexní čísla Z, Z' platí vztah

$$Z' = AZ + B,$$

potom obraz čísla Z' vznikne z obrazu čísla Z otáčením, je-li $A \neq 1$, a posunutím, je-li $A = 1$, $B \neq 0$; dokažte. Určete střed otáčení, resp. velikost posunutí.

Úloha 11. Budiž dán trojúhelník ABC. Nechť jsou A', B', C' takové body roviny, že platí

$$\overline{AB'} = \overline{AC'}, \quad \overline{BC'} = \overline{BA'}, \quad \overline{CA'} = \overline{CB'}.$$

Označme a', b', c' přímky roviny, které po řadě procházejí body A', B', C', přičemž platí $a' \perp BC$, $b' \perp CA$, $c' \perp AB$. Dokažte, že přímky a', b', c' procházejí jedním bodem!

Úloha 12. Označme P počátek soustavy pravoúhlých souřadnic. Body $[m, n]$, kde m, n jsou celá čísla, nazveme mřížové body. Budiž $p > 2$ dané přirozené číslo. Označme A_k ty mřížové body $[p, k]$, pro něž je $0 \leq k \leq p$, a uvažujme trojúhelníky

$$PA_1A_2, \quad PA_2A_3, \quad PA_3A_4, \quad \ldots, \quad PA_{p-2}A_{p-1}.$$

Dokažte, že p je prvočíslo tehdy a jen tehdy, když počet mřížových bodů uvnitř každého z uvažovaných trojúhelníků je $\frac{1}{2} \cdot (p - 1)$.

Úloha 13. Buďte $[x; y]$ body v rovině pravoúhlých souřadnic. Určete, pro které z nich platí nerovnost

$$||x + a| - |y - a|| < a,$$

kde a je dané číslo. Vyčárkujte v rovině souřadnic ty její části, pro jejichž body je splněna daná nerovnost.

Úloha 14. Dokažte s použitím komplexních čísel, že složením dvou otáčení s různými středy vznikne otáčení nebo posunutí. Určete střed výsledného otáčení, resp. velikost výsledného posunutí. Zjistěte podmínky, kdy vznikne otáčení a kdy posunutí.

Úloha 15. Jestliže $a > 0$ a n je přirozené číslo, potom platí

$$n\,(2^{2n+1} + 1) \geq a + a^2 + \cdots + a^{2n};$$

dokažte! Proveďte diskusi, pro která a nastane rovnost.

Úloha 16. Je-li n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$2^{12n+8} - 3^{6n+2}$$

je dělitelné třinácti. Dokažte!

Úlohy 1. kola 2. ročníku MO kategorie B

Úloha 1. V dílně pracuje a dělníků, kteří mají dokončit určitou zakázku za d dní, m dělníků utvoří úderku a zaváží se, že lepší organisací práce zvýší svůj výkon o 10 procent. Stalo se tak po p dnech práce na zakázce. O kolik dní se zmenší původně plánovaná doba d dní, potřebná k provedení zakázky?

Úloha 2. a) Každé prvočíslo s výjimkou čísel 2 a 3 lze psát ve tvaru $6n \pm 1$, kde n je vhodné přirozené číslo; dokažte. Platí také obrácená poučka?

b) Užitím předchozího výsledku dokažte: Zmenšíme-li čtverec kteréhokoliv prvočísla s výjimkou čísel 2 a 3 o jednu, dostaneme číslo, které je dělitelné číslem 24.

Úloha 3. Je dána kružnice k a její tětiva AB, která není průměrem; budiž p sečna kružnice k kolmá k přímce AB. Určete na přímce p takový bod X, aby dutý úhel $\angle AXB$ byl co největší. Proveďte diskusi.

Úloha 4. Budiž dán čtyřstěn $AA'BC$, jehož hrana AA' stojí kolmo na rovinu $A'BC$. Označme $\angle BAC = \alpha$, $\angle BA'C = \alpha'$. Jestliže je $\alpha \geq 90°$, je $\alpha' > 90°$. Dokažte.

Co lze tedy říci o velikosti pravoúhlého průmětu pravého nebo tupého úhlu do roviny, která protíná obě jeho ramena v bodech mimo jeho vrchol?

Úloha 5. a) Jestliže $\frac{a}{b}$ je zlomek v základním tvaru, potom i zlomek $\frac{a+b}{ab}$ je v základním tvaru.

b) Součet tří zlomků v základním tvaru nemůže být číslem celým, jestliže není každý prvočinitel jednoho z daných jmenovatelů prvočinitelem alespoň jednoho ze zbývajících dvou jmenovatelů.

Úloha 6. Označme

$$x = \frac{a}{b+c}, \quad y = \frac{b}{c+a}, \quad z = \frac{c}{a+b},$$

kde a, b, c sú dané racionálne čísla. Zistite, za akých predpokladov platí

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1.$$

Úloha 7. Určete geometrické místo průsečíků V výšek v trojúhelnících ABC, jestliže je dána poloha strany BC, velikost úhlu $\angle CAB = \alpha$ a jestliže vrcholy A těchto trojúhelníků leží v jedné z obou opačných polorovin vyťatých přímkou BC. Proveďte diskusi pro $\alpha \neq 90°$.

Úloha 8. Budiž V průsečík výšek trojúhelníka ABC. Jestliže platí $\overline{CA} < \overline{AB}$, potom je:

a) $\overline{VC} < \overline{VB}$,

b) vzdálenost bodu V od strany CA menší než od strany AB s výjimkou případu, kdy $\angle CAB = 90°$; jak je tomu v tomto výjimečném případě? (Proveďte diskusi pro trojúhelník ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý.)

Úloha 9. Buďte $ABCD$, $A'B'C'D'$ protilehlé stěny krychle, při čemž AA', BB', CC', DD' jsou hrany krychle. Jestliže bod X, ležící uvnitř krychle, je blíže k vrcholu B než ke kterémukoli z ostatních vrcholů krychle, potom je bod X od bodu D' dále než od kteréhokoli z ostatních vrcholů krychle.

Úloha 10. K očíslování všech svazků určité knihovny bylo třeba na hřbety knih natisknout třikrát tolik cifer, co je svazků. Kolik svazků měla knihovna?

Úloha 11. Stanovte geometrické místo bodů, pro něž rozdíl vzdáleností od dvou daných různoběžek a, b je roven dané úsečce velikosti d.

Úloha 12. Jsou-li a, b, c kladná čísla, pak

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Dokažte! Proveďte diskusi, kdy nastane rovnost.

Úloha 13. Je-li n přirozené číslo, potom platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} < 1.$$

Úloha 14. Buďte a, b, c racionální čísla. Dokažte, že potom platí

$$(a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 \geq ab + bc + ca.$$

Proveďte diskusi, pro které případy nastane rovnost.

Úloha 15. Určete, co vyplňují středy rovnoběžníků, které jsou rovinnými řezy daného čtyřstěnu.

Úloha 16. Budiž dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně velikosti a. Buďte M, N, P body zvolené po řadě uvnitř úseček BC, CA, AB.

Dokažte nejprve, že je možné zvolit body M, N, P (různé od středů stran) tak, že MNP je rovnostranný trojúhelník. Potom sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky MNP takové, aby jejich strany měly danou velikost m. Diskutujte, pro která m má úloha řešení.

8. Mezinárodní Matematická olympiáda (MMO) na jejím začátku

Mezinárodní Matematická olympiáda se poprvé uskutečnila v roce 1959 v Bukurešti, zúčastnilo se jí 7 zemí sovětského bloku.

Čtvrté ročník této soutěže se konal v roce 1962 v Československu v Českých Budějovicích za přítomností stále jen 7 zemí.

9. Závěr

O matematické olympiády by se dalo napsat mnohem více, ale náš článek je zaměřen jen na několik klíčových momentů při vzniku této soutěže.

Literatura

[1] Boček, L., Šimša, J., Töpfer, P.: 70 let matematické olympiády. *Pokroky, matematiky, fyziky, astronomie*, roč. 66 (2021), č. 2, s. 3–8.

[2] Úlohy. *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, roč. 1 (1922), č. 1, s. 37–40.

[3] Vyšín, J., Zelinka, R. a kol.: *První ročník matematické olympiády (Zpráva o řešení úloh ze soutěže ve školním roce 1951/52.).* SPN, Praha, 1952.

[4] Zhouf, J.: Téměř 100 let Rozhledů matematicko-fyzikálních. In: *Matematický svět mezi válkami* (eds. Bečvářová, M., Bečvář, J. a kol.). FD ČVUT, Praha, 2020, s. 299–334.

KRÁTKÉ PŘÍSPĚVKY A PRACOVNÍ DÍLNY

Česka maturita dostává mezinárodní rozměr

Jeanne Bočková, Centrum pro talentovanou mládež

Abstrakt. *V České republice začíná pokusné ověření uznávání Advanced Placement zkoušek v profilové části maturity. Centrum pro talentovanou mládež (CTM) je partnerem americké organizace College Board, která zkoušky celosvětově zaštiťuje. CTM se v České republice dlouhodobě zasazuje o rozšíření možnosti mezinárodního vzdělání pro všechny motivované žáky druhého stupně základních škol a studenty středních škol.*

1. Úvod

MŠMT vyhlásilo pokusné ověřování uznávání mezinárodních Advanced Placement (AP) zkoušek v profilové části maturity. AP zkoušky jsou celosvětově uznávané oborové zkoušky, které v angličtině skládá každoročně pět milionů středoškoláků na celém světě. Českým středoškolákům se tak s podporou MŠMT otevírá unikátní příležitost získat známku z oborové zkoušky s mezinárodní platností.

Pokusné ověřování připravilo MŠMT ve spolupráci s Centrem pro talentovanou mládež (CTM), Národním pedagogickým institutem (NPI) a Asociací ředitelů gymnázií (AŘG). CTM je partnerem amerického College Board pro organizaci AP zkoušek pro české středoškoláky. CTM současně studentům poskytuje celoroční přípravné online kurzy s instruktorem, které je na tyto zkoušky velmi úspěšně připravují (tab. 1).

Tab. 1: Logo CTM

2. AP kurzy a zkoušky – příležitost k inovaci středoškolského vzdělávání a maturity

Ve světě dominují dva stejně přísné a stejně náročné středoškolské vzdělávací systémy: International Baccalauréate (IB) a Advanced Placement (AP). Jejich cílem je připravit studenty co nejlépe k vysokoškolskému studiu. Rozsah, náročnost a způsob studia se odvíjí od požadavků univerzit.

AP závisí pouze na zájmu studenta a podpoře školy. AP je flexibilní, finančně dostupný, a tak výhodnější pro veřejné školství. AP portfolio je soubor 38 AP kurzů zahrnujících a přesahujících látku českých gymnázií a svou náročností připomíná počátky univerzitního studia. AP je příležitost studovanou látku dokonale pochopit poutavou, zábavnou formou. Motivovaní a pracovití středoškoláci, kteří chtějí být mezi nejlepšími na světě, mají příležitost během studia zvládnout i mezinárodní maturitu – AP Capstone Diploma.

Kromě odborných znalostí a skvělé angličtiny, studenti přípravou a skládáním AP zkoušek získají paletu dovedností, jako je kritické myšlení, chápání věcí v souvislostech, práci s časem a schopnost efektivně komunikovat. Student je po všech stránkách připraven na vysokoškolské studium na nejlepších univerzitách v České republice i zahraničí a je schopný se profilovat ve zvoleném oboru už na střední škole. CTM od roku 2010 na AP zkoušky připravilo přes 900 českých středoškoláků.

Výsledky AP zkoušek uznávají některé fakulty Univerzity Karlovy a Česká zemědělská univerzita v Praze, Masarykova univerzita, včetně Lékařské fakulty, Vysoké učení technické v Brně, JČU České Budějovice, FIM Hradec Králové a další vysoké školy. V Evropě uznávají AP zkoušky například univerzity Cambridge, Oxford, Imperial College, Copenhagen University, College of Engineering v Dánsku, Delft University of Technology v Holandsku, všechny americké, kanadské a australské univerzity.

3. NPI – nároky na AP zkoušky

Systém AP kurzů a požadavky na studenty v AP zkouškách posuzoval tým odborníků NPI. Ten potvrdil, že nároky AP výrazně přesahují středoškolské rámcové vzdělávací programy. Podle odborníků NPI bude AP systém také inspirací pro inovaci rámcových vzdělávacích programů.

4. O CTM

CTM vzniklo na míru studentům, kteří potřebují individuální a flexibilní přístup ke vzdělávání. Naše online řešení poskytuje jedinečnou vzdělávací zkušenost všem dětem od druhého stupně základních škol či víceletých gymnázií po maturanty. A to vždy tak, abychom respektovali jejich vlastní učební tempo a chuť se vzdělávat v oboru, který je baví, a přitom se výrazně zlepšit v angličtině. CTM finančně podporuje Nadace RSJ a organizace AFCSLS. Více najdete v [1].

5. Školy zapojené do pokusného ověřování ve 2022/23

Název školy	uznávané AP zkoušky
Gymnázium Jana Palacha Praha 1, s.r.o., Praha	AP Calculus AB – nahrazuje celou maturitní zkoušku; AP Physics 1, AP Biology, AP Art History – nahrazují část maturitní zkoušky
Gymnázium, Nad Alejí, Praha 6	AP Biology – nahrazuje celou maturitní zkoušku
Cyrilometodějské gymnázium a SOŠ pedagogická, Brno	AP Biology, AP Calculus BC – nahrazují celou maturitní zkoušku
PORG Libeň – gymnázium a základní škola, o.p.s., Praha	AP Biology, AP Physics 1, AP Physics 2, AP Chemistry, AP Calculus AB, AP Calculus BC, AP Statistics, AP Psychology, AP Macroeconomics, AP Microeconomics, AP Art History, AP World History, AP European History – nahrazují část maturitní zkoušky, a to celou část maturitní práce s obhajobou
PORG Ostrava– gymnázium a základní škola, o.p.s. , Ostrava	AP Psychology, AP Macroeconomics, AP Microeconomics, AP World History, AP European History nahrazují část maturitní zkoušky, a to celou část maturitní práce s obhajobou. AP Biology, AP Physics 1, AP Physics 2, AP Chemistry, AP Calculus AB, AP Calculus BC, AP Statistics – nahrazují část maturitní zkoušky, a to ústní zkoušku
Gymnázium a Jazyková škola s právem státní JZ, Zlín	AP Calculus AB, AP Calculus BC, AP Macroeconomics, AP Microeconomics – nahrazují celé maturitní zkoušky; AP Biology, AP Chemistry – nahrazují část maturitní zkoušky
Gymnázium Jana Nerudy, škola hl. m. Prahy, Praha	AP Psychology – nahrazuje část maturitní zkoušky
Mensa gymnázium, o.p.s., Praha	AP Computer Science Principles – nahrazuje celou maturitní zkoušku
Gymnázium Jírovcova, České Budějovice	AP Calculus AB, AP Calculus BC – nahrazují celou maturitní zkoušku, AP Chemistry – nahrazují část maturitní zkoušky

Gymnázium Jana Keplera, Praha	Matematika – písemná zkouška, ústní zkouška: celá zkouška nahrazena AP Calculus BC, podmíněno konáním didaktického testu ve společné části MZ z důvodu udržení tematické komplexnosti. Informatika – praktická zkouška (projekt s obhajobou), ústní zkouška: ústní zkouška nahrazena dvěma zkouškami AP Computer Science A a AP Computer Science Principles. Praktická zkouška se bude konat. Váha hodnocení bude 50 % praktická zkouška a 50 % průměrná známka z obou AP testů. Biologie – ústní zkouška: celá zkouška nahrazena AP Biology

6. Zájemci pro rok 2023/2024

- Masarykovo gymnázium, Střední zdravotnická škola, Vyšší odborná škola zdravotnická Vsetín
- Gymnázium Turnov
- Gymnázium Valašské Klobouky
- Gymnázium Bučovice
- Gymnázium Budějovická Praha
- Gymnázium mezinárodních a veřejných vztahů Praha
- Gymnázium Slovanské náměstí Brno
- Gymnázium Františka Křižíka Plzeň
- Gymnázium Dr. Pekaře Mladá Boleslav
- Gymnázium Na Zatlance Praha
- Sunny Canadian International School Jesenice
- Wichterlovo gymnázium Ostrava
- Biskupské gymnázium Žďár nad Sázavou
- Gymnázium Litoměřice
- Gymnázium Jaroslava Seiferta Praha
- EDUCANET gymnázium Praha

Literatura

[1] `www.ctm-academy.cz`

Rozvíjíme nadání s Máťou a Vesmou

Eduard Fuchs, MÚ MUNI, Brno, Eva Zelendová, AMBIS, Brno

Abstrakt. *Článek přináší informace o dvou inspirativních zdrojích konkrétní práce v matematice s nadanými žáky na druhém stupni základních škol a na školách středních. Dvoudílná publikace* Experimentuj s Máťou *a dva sborníky výstupů projektu* Ve světě matematických aplikací (VESMA) *jsou určeny jak pro žáky, kteří chtějí rozvíjet své matematické nadaní, tak pro učitele, kteří kreativitu nadaných žáků podporují.*

1. Úvod

První setkání autorů článku (matematika z Masarykovy univerzity s pracovnicí Výzkumného ústavu pedagogického, která řadu let učila matematiku v matematických třídách jednoho pražského gymnázia) proběhlo v roce 2010. Spolupráce při tvorbě standardů matematiky pro 5. a 9. ročník základní školy se záhy změnila v dlouholetou spolupráci při tvorbě materiálů pro učitele i žáky. Z širokého spektra těchto materiálů se v článku zaměříme na materiály, které jsou určeny nadaným žákům a učitelům, kteří jejich nadání pomáhají rozvíjet.

2. Experimentuj s Máťou

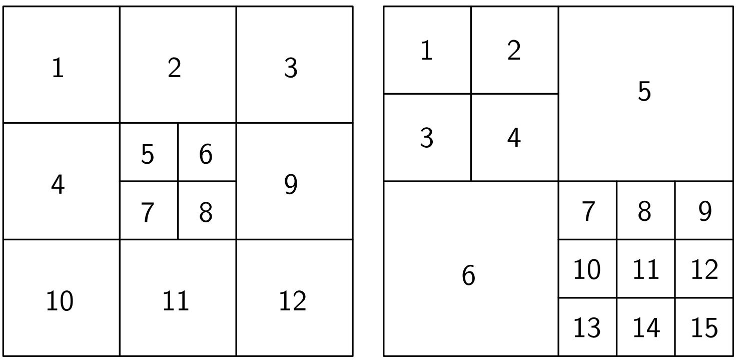
Od roku 2012 autoři článku každoročně uskutečnili ve všech krajích České republiky celodenní semináře pro učitele matematiky středních škol a 2. stupně základních škol. Semináře měnily během času názvy (*Matematika pro všechny*, *Rozvíjíme matematickou gramotnost*, *Matematika pro život*), základní myšlenka a formát seminářů se však neměnily. Účastníkům seminářů bylo každoročně předkládáno minimálně dvacet aktivit, které bylo možné díky připraveným pracovním listům a nenáročným pomůckám okamžitě využít v hodinách matematiky. Všechny aktivity byly předem ověřovány na daném stupni vzdělávání. Účastníci semináře mohli porovnat svá řešení s ukázkami žákovských řešení, diskutovat o obtížnosti úloh, o zajímavých nápadech při řešení i o nejvhodnějším zařazení daných aktivit do výuky.

Každým rokem se účastníci seminářů měli možnost seznámit s novými aktivitami, a tak v archivu autorů článku přibývaly desítky prezentovaných aktivit i dosud nevyužitých nápadů. Padesát nejúspěšnějších aktivit (z pohledu učitelů i žáků) bylo v letech 2021–2022 vybráno do dvoudílné publikace *Experimentuj s Máťou* (viz [1] a [2]). Tištěná část těchto publikací je na webu doplněna komentovanými řešeními a dalšími informacemi včetně videí.

Při řešení zveřejněných úloh žáci mohou samostatně experimentovat a objevovat matematické zákonitosti, systematicky třídit informace, zlepšovat svou geometrickou představivost, nebát se proměnných i využívat informační technologie. Cílem publikací je zaujmout žáky, které matematika baví, a umožnit jim využít kreativitu při řešení daných problémů. Pro ilustraci uvádíme úlohu *Čtverečková čísla* z první publikace.

2.1. Čtverečková čísla

Zadání: Přirozené číslo n nazveme *čtverečkové*, jestliže můžeme bez mezer pokrýt čtverec právě n čtverečky, jejichž velikosti mohou, avšak nemusí být stejné. Na obr. 1 je znázorněno, že čísla 12 a 15 jsou čtverečková.

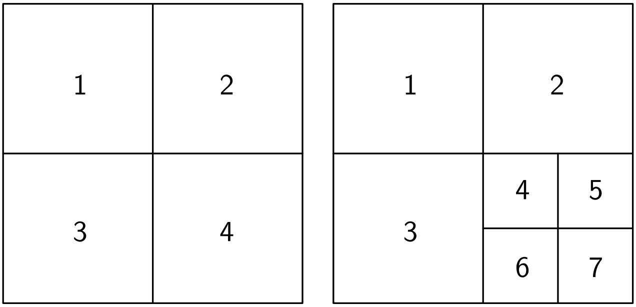


Obr. 1

Úkol: Zjistěte, která přirozená čísla od 1 do 20 jsou čtverečková.

Řešení: Čísla 1 a 4 jsou zřejmě čtverečková, snadno také zjistíme, že čísla 2, 3 a 5 čtverečková nejsou. Pro další čísla můžeme zkoušet pokrýt čtverec předepsaným počtem čtverečků. Při pokusech o rozdělení čtverců je výhodné (jak jsme viděli již na obr. 1) číslovat si vepsané čtverečky, abychom snadno určili, které čtverečkové číslo jsme objevili. Zajímavější však je nalézt pro pokrývání nějaké zákonitosti.

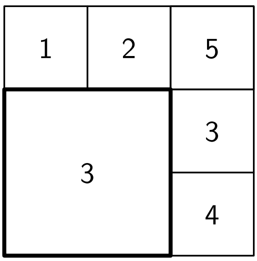
Co se stane, když například v nalezeném pokrytí jeden čtvereček rozdělíme na čtyři menší (obr. 2)?



Obr. 2

Z obrázku je zřejmé, že když je nějaké číslo n čtverečkové, jsou jistě čtverečková i všechna čísla $n + 3$.

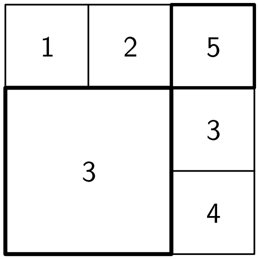
Ještě zajímavější je následující postup. Pozorně si prohlédněme obr. 3 pro čtverečkové číslo 6. Jeden větší čtverec je „olemován“ na dvou stranách shodnými čtverečky.



Obr. 3

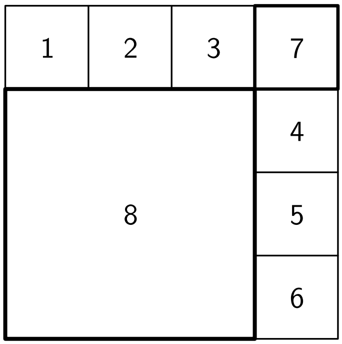
Ukážeme si, že takto můžeme znázornit každé sudé číslo (kromě čísla 2) jako čtverečkové.

Abychom mohli větší čtverec „olemovat“ čtverečky, potřebujeme vědět, kolik čtverečků budeme moci nakreslit k jeho jedné straně. Tento počet dostaneme tak, že od zadaného čísla (u kterého chceme dokázat, že je čtverečkové) odečteme 2 (rohové čtverce na obr. 4 a 5). Číslo, které získáme, je rovno počtu čtverečků, které musíme rozdělit podél dvou stran většího čtverce. Stačí tedy získaný počet čtverečků vydělit dvěma.



Obr. 4

Jak tedy dokážeme, že např. číslo 8 je čtverečkové? Potřebujeme znát počet čtverečků na straně velkého čtverce: $8 - 2 = 6$ a $6 : 2 = 3$. Velký čtverec pro číslo 8 bude mít stranu o velikosti tří stran menších čtverců (obr. 5), kterými velký čtverec „olemujeme“.



Obr. 5

Obecně pro každé sudé číslo $2n$, $n \in \mathbb{N}$, platí: $2n - 2 = 2(n - 1)$ a $2(n-1) : 2 = n-1$. Velký čtverec pro číslo $2n$ bude mít stranu o velikosti $n - 1$ menších čtverců, kterými velký čtverec „olemujeme“.

Mohli bychom hledat i dalších zákonitosti, uvedená dvě pravidla nám však již umožňují zadaný úkol vyřešit. Pomocí „olemování“ jsme dokázali, že každé sudé číslo kromě čísla 2 je čtverečkové. Podle prvního uvedeného pravidla víme, že když je číslo n čtverečkové, je čtverečkové také číslo $n+3$. Když je n sudé, je číslo $n+3$ liché, takže jsou čtverečková také všechna lichá čísla kromě čísel 3 a 5.

Vyřešili jsme tedy zadaný úkol ještě obecněji, než byl formulován. Čtverečková jsou všechna přirozená čísla kromě čísel 2, 3 a 5.

3. Ve světě matematických aplikací

Autoři článku se od roku 2012 řešitelsky podíleli na řadě projektů Evropské unie a MŠMT. Patří mezi ně například projekty *Matematika pro všechny*, *Manipulativní činnosti jako prostředek pro rozvoj předmatematických představ dětí předškolního věku*, *Manipulativní činnosti rozvíjející matematickou gramotnost* nebo *Matematika v médiích*. V letech 2016 až 2020 se uskutečnily projekty *Ve světě matematických aplikací*, které po covidové přestávce pokračují i v roce 2022.

Projekt *Ve světě matematických aplikací* je zaměřen na žáky a žákyně základních a středních škol ve věku 13–18 let, kteří mají zájem o matematiku. V rámci projektu jsou každým rokem realizovány dva samostatné kurzy. Zájemci si mohou zvolit, kterého kurzu se chtějí zúčastnit, je možná volba i obou kurzů současně. Kurzy se skládají ze dvou částí: samostatného studia žáků v internetovém prostředí (šest lekcí v průběhu září až listopad) včetně řešení řady gradovaných úloh a závěrečného setkání pro nejlepší řešitele (začátek prosince). Na přípravě kurzů se podílejí přední odborníci v dané oblasti, problematika je však podána tak, aby byla pro žáky přístupná a zajímavá. V rámci projektu bylo dosud realizováno dvanáct kurzů (dva z nich si blíže představíme):

1) Mgr. Libor Koudela, Ph.D.: *Fraktály.*
2) Ing. Miloš Nosek: *Sluneční hodiny.*
3) RNDr. Tereza Bártlová, Ph.D., Mgr. David Brebera: *Od zábavných hříček k aplikacím.*
4) Prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.: *Pravděpodobnost kolem nás.*
5) Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.: *Matematika v dějinách lidstva.*
6) RNDr. Petra Konečná, Ph.D.: *Kryptologie.*
7) Prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D., Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.: $\check{R} + A + D + Y$ *aneb Počítáme do nekonečna.*
8) Doc. PhDr. Alena Šarounová, Ph.D.: *Krása geometrie.*
9) Mgr. David Kruml, Ph.D.: *Matematika a spravedlnost.*
10) RNDr. Eva Zelendová, Ph.D.: *Matematika ukrytá v sochách a obrazech.*
11) Mgr. David Brebera: *Počítáme napříč číselnými soustavami.*
12) Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc., RNDr. Eva Zelendová, Ph.D.: *Matematika kolem nás.*

3.1. Matematika ukrytá v sochách a obrazech

Umělecká díla potkáváme na každém kroku, ať už jde o sochy, obrazy, architektonické skvosty či moderní instalace nebo graffiti. Někdy je mineme bez povšimnutí, někdy nás něčím upoutají. Málokdy si však uvědomíme, že řada uměleckých děl má spojitost s matematikou. Někdy je umělecké dílo přímo reprezentováno matematickými objekty, někdy spojitost s matematikou tvůrce vloží do názvu svého díla. Některá umělecká díla zase mohou evokovat zajímavé matematické úlohy.

V šesti lekcích, které byly věnovány planimetrii, stereometrii, kombinatorice, posloupnostem, relacím a funkcím, se žáci mohli seznámit s řadou výtvarných umělců od dávných dob až po současnost a řešit matematické úlohy, které byly s uměleckými díly spojeny. Podívejme se na zadání a žákovské řešení jedné z nich.

Zadání: Moravský umělec L. Jarcovják vytvořil v roce 2002 sochu s názvem *Dalekohled* (obr. 6).

Obr. 6

Úkol: Odhadni na základě výpočtu váhy „tubusu“ dalekohledu, zda by autor sám uzvedl sochu na ocelový podstavec, jestliže socha může být ze žuly, z betonu nebo z pískovce. Rozměry tubusu jsou uvedeny v následující tabulce.

	[cm]
Délka „tubusu“	80
Délka strany čtvercové podstavy „tubusu“	80
Průměr vyvrtaného otvoru	6

Žákovské řešení: Zjištěné hodnoty hustoty

	Hustota [kg · m^{-3}]
Beton	2 300
Pískovec	1 900
Žula	2 900

Výpočet objemu:

$$V = (a \cdot a \cdot v) - (\pi \cdot r^2 \cdot v)$$
$$V = (20 \cdot 20 \cdot 80) - (3{,}14 \cdot 9 \cdot 80)$$
$$V = 32000 - 2\,260{,}8$$
$$V = 29\,739{,}2\ cm^3$$

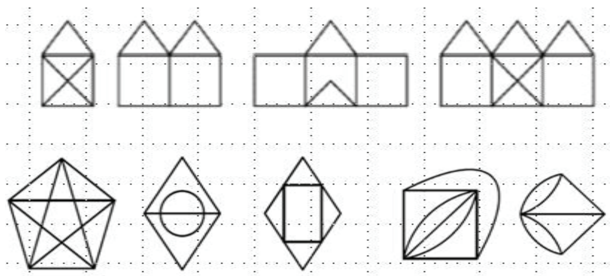
	Přibližná váha sochy [kg]
Beton	68
Pískovec	57
Žula	86

Závěrečné shrnutí: *Z údajů dostupných na internetu jsem našel, že průměrný muž dokáže na mrtvý tah zvednout asi 130 kg. Mně osobně ale přijde tento údaj hodně přeceněný, myslím si, že bych dokázal například já zvednout maximálně 60 kg. Proto nemůžu říct jednoznačně, jestli by byl autor schopný sochu zvednout. Já bych nedokázal zvednout daný tubus ze žuly, ale podle údajů na internetu by to průměrný muž dokázat měl.*

3.2. Matematika v dějinách lidstva

Šest lekcí bylo postupně věnováno magickým čtvercům, vývoji zápisu čísel, Eulerovu problému o 36 důstojnících, problematice nekonečna, čínské *Matematice v devíti kapitolách* a vývoji teorie grafů. Na závěr každé kapitoly byly řešitelům uloženy gradované úkoly. Nejlehčí byly motivační, které měli šanci vyřešit všichni, nejobtížnější byly určeny nadaným žákům. Na ukázku uveďme dva z pěti úkolů z poslední lekce o grafech.

Úkol 1: Které z grafů na obr. 7 lze nakreslit jedním tahem?



Obr. 7

Řešení: Jedním tahem lze nakreslit všechny grafy kromě grafů na 2., 8. a 9. místě.

Úkol 2: Pokus se vysvětlit pravidlo, kdy lze graf nakreslit jedním tahem. (Nápověda: představ si, že graf byl nakreslen jedním tahem. Kolik hran vychází z jednotlivých vrcholů?)

Řešení: Jedním tahem lze nakreslit všechny souvislé grafy, v nichž z každého vrcholu vychází sudý počet hran, a všechny grafy, v nichž existují právě dva vrcholy, z nichž vychází lichý počet hran. V prvním případě můžeme začít kreslit v libovolném vrcholu a skončíme tam, kde jsme začali, ve druhém případě musíme začít kreslení v jednom ze dvou vrcholů s lichým počtem hran a ve druhém takovém vrcholu skončíme.

4. Závěr

Při rozvoji nadání je třeba předkládat žákům řadu nestandardních úloh, které umožní rozvíjet kreativitu při hledání řešení. Prostředí, do kterého jsou úlohy situované, nemusí být pro žáky běžně známé. V článku byly zmíněny některé inspirace k takovým úlohám.

Literatura

[1] Fuchs, E., Zelendová, E.: *Experimentuj s Máťou 1*. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2021.

[2] Fuchs, E., Zelendová, E.: *Experimentuj s Máťou 2*. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2022.

[3] Fuchs, E.: Matematika v dějinách lidstva. In: *Svět matematických aplikací* (eds. Fuchs, E., Zelendová, E.). JČMF, Praha, 2018.

[4] Zelendová, E.: Matematika ukrytá v sochách a obrazech. In: *Svět matematických aplikací II* (eds. Fuchs, E., Zelendová, E.). JČMF, Praha, 2020.

Různé pohledy na nadání a nadané

Kateřina Jůzová, PedF UK, Praha

Abstrakt. *V příspěvku byly představeny různé pohledy na nadání a nadané, kterými jsem se v posledních letech zabývala. Jedná se o pohled učitelů, rodičů, ale také samotných žáků. Jsou zde dále uvedeny tipy na obohacení výuky nadaných žáků, které vycházejí z mé vlastní učitelské praxe. Dále jen okrajově jsou představena témata sebepojetí nadaných žáků.*

1. Úvod

Podle Koncepce podpory rozvoje nadání a péče o nadané na období let 2014–2020 a také podle Vyhlášky 73/2005 je nadaný žák „jedinec, jehož rozložení schopností dosahuje mimořádné úrovně při vysoké tvořivosti v celém okruhu činností nebo v jednotlivých rozumových oblastech, pohybových, uměleckých a sociálních dovednostech“ [6, s. 4].

Samotné označení žáka jako „nadaného“ s sebou přináší také značná rizika. Tyto představy „zázračných dětí“ zmiňuje také Hříbková [2]. Většina učitelů se přiklání k výkonovým charakteristikám nadaných žáků, což může znemožňovat identifikaci nadaných žáků s dvojí výjimečností či žáků z jiných ohrožených skupin.

Sebepojetí nadaných žáků, díky němuž na sebe žáci kladou přehnané nároky, považuji za rizikový faktor. Jelikož jejich okolí od nich často očekává nadprůměrné výkony, mohou se obávat chyb a zároveň je vidět jako své selhání. Laznibatová také zmiňuje tzv. mýty o nadaných dětech (očekáváme bezproblémové a pracovité dítě) [4].

V návaznosti na sebepojetí nadaných studentů je užitečné zmínit také tzv. nastavení mysli podle Dweck: fixní a růstové [1]. V růstovém nastavení mysli je člověk připraven se zlepšovat a postavit se překážkám. Ve fixním nastavení se drží pouze těch oblastí, ve kterých si připadá úspěšný a vyhýbá se překážkám, což může být u nadaných žáků častým projevem.

Má motivace zabývat se tímto tématem plyne z dlouhodobého zájmu o vzdělávání mimořádně nadaných žáků, kterým se zabývám také v rámci mé disertační práce. Před tím, než začnu zpracovávat svůj hlavní výzkum, jsem začala mapovat situaci a především to, jaký na to mají pohled strany zúčastněné ve vzdělávacím procesu. Je nutno zmínit, že pohledem samotných žáků a tím, jaké je jejich sebepojetí vzhledem k tomu, že jsou označováni jako *nadaní*, jsem se zabývala zatím pouze okrajově.

Výsledky jednotlivých částí budou uvedeny jen stručně, jelikož se jedná o shrnutí několika prací a také mých dalších otázek, které v návaznosti na toto srovnání vznikly.

Nejprve představím dotazník, který putoval mezi učiteli v roce 2021 a který měl za cíl zjistit, jak učitelé vnímají pojem „nadaný žák". Učitelé také dostali možnost se vyjádřit ke stávající situaci. Dále bude představen dotazník, který byl rozeslán učitelům a rodičům žáků s dvojí výjimečností (tj. žákům nadaným, kteří mají zároveň přidruženou i další diagnózu).

Dalším bodem příspěvku je představení mé vlastní praxe s třídou mimořádně nadaných žáků a v závěru přiblížím mé záměry do budoucna a také úvahy, které pro mě ze srovnání všech výsledků vyplývají.

2. Dotazník pro učitele

Tento dotazník byl rozšířen mezi učitele v roce 2021 pomocí facebookových skupin, které jsou určeny k setkávání učitelů, a zúčastnilo se ho 60 učitelů. Dotazník, jeho metodologie a výsledky byly blíže přiblíženy v [3] a byl inspirován publikacemi [5, 2]. Jeho cílem bylo zjistit, zda se učitelé kloní k výkonové koncepci nadání, a očekávají tedy žáky s výbornými studijními výsledky, kteří budou podávat nadprůměrné výkony. Jako výzkumný nástroj byla použita analýza metafor. Učitelé měli dokončit větu „Nadaný žák je jako…". Dotazník dále obsahoval několik otázek, kde učitelé mohli vyjádřit své zkušenosti.

Výsledky se do velké míry shodovaly s těmi od [5]. Většina dotazovaných se přiklonila k výkonové koncepci nadání a jejich metafory se přikláněly k představě žáka pracovitého a žáka s vynikajícími studijními výsledky. Nicméně se jako limitující projevil samotný výzkumný nástroj. Učitelé často vyjádřili své myšlenky jinak než metaforou a tyto odpovědi tedy nebylo možné zařadit do konečných výsledků. Učitelé v tomto dotazníku měli také shrnout, zda je podle nich podpora nadaných žáků ve školách dostatečná a dále uvést své myšlenky, co by mohlo situaci zlepšit (obr. 1).

Dalším překvapivým výsledkem bylo, že 74 % dotazovaných učitelů neabsolvovalo žádný vzdělávací kurz zaměřený na vzdělávání nadaných a jen část učitelů se setkala s tímto tématem na vysoké škole (obr. 2).

UČITEL
Co by podle vás mohlo situaci zlepšit?

*„Lepší **příprava učitelů**."*

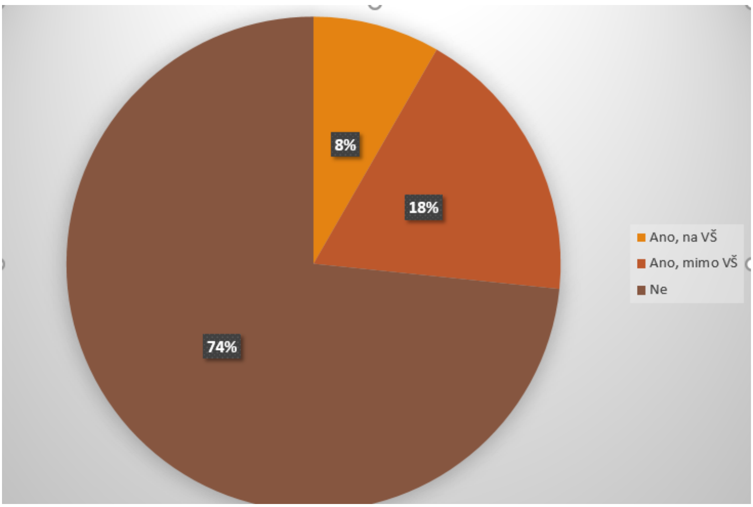
*„Větší nabídka různorodých, **volně přístupných úkolů**."*

*„Obeznámenost a odvaha přistupovat k nadaným (nebo lépe ke všem) s respektem, naslouchat jim, podpořit je ve snaze navazovat vztahy, umožnit, aby byly samy sebou... **Netlačit do škatulek, moc jim to škodí.**"*

*„Myslím, že zásadní problém je ve skutečnosti, že málokteré dítě je "jen nadané". Často se k tomu přidružují nějaké problémy (ADHD, dysporuchy aj.) a **většina škol je zaměřena spíše odstraňování poruch** a na podporu nadání potom už není čas a prostor (např. můj mimořádně nadaný syn s ADHD a dysgrafií je takový příklad, ve třetí třídě s ním stále řeší tvary psacích písmen a čárky nad samohláskami, ale nadání nemůže uplatnit.)"*

„Asistent!"

Obr. 1: Co by mohlo zlepšit situaci (názory učitelů)



Obr. 2: Absolvoval/a jste někdy kurz zaměřený na vzdělávání nadaných?

Na základě výsledku tohoto dotazníku vznikl můj další zájem, který se týkal především žáků s dvojí výjimečností. Pokládala jsem si otázku, zda jsou učitelé schopni vidět nadání i u žáka, který se neprojevuje nadprůměrně ve všech oblastech.

3. Žáci s dvojí výjimečností

V roce 2022 jsem oslovila rodiče a učitele nadaných žáků s dvojí výjimečností opět pomocí dotazníku, který jsem rozšířila pomocí facebookových skupin. Výsledky tohoto dotazníku byly podrobněji prezentovány na konferenci ICERI 2022.

3.1. Učitelé

Návratnost obou dotazníků byla opravdu velmi nízká (zúčastnilo se pouze 7 učitelů). Cílem tohoto dotazníku bylo získat informace od učitelů, jaké způsoby práce se jim s touto skupinou dětí osvědčily (v závislosti na diagnóze, kterou měly děti k nadání přidruženou). Následující tab. 1 zobrazuje některé výroky učitelů.

Dyslexie, dysgrafie, problémy s grafomotorikou	„Jeho grafomotorika, vyřešili jsme doporučením poradny, píše dle potřeby na počítači."
Dyslexie, dysgrafie	„Začlenit ho do skupinové práce. Zaměstnat ho rozšiřujícími úlohami, ale není čas dát zpětnou vazbu k jejich řešení. Zlepšení by pomohla domluva, co bude žák dělat, když má hotovo."
ADHD	„Po nastavení pravidel, bodovacího systému, odměn a "trestů", nasazení žvýkačky pro odvedení tenze, vše funguje. Pomáhá asistent pedagoga."
Aspergerův syndrom	„Jako začínající učitel jsem velmi ocenila různé publikace týkající se dětí s AS, dokonalou spolupráci rodičů a zkušenosti kolegyň ze školy. Zpočátku bylo náročné pro něj najít náhradní program, plynule četl a psal tiskace."

Tab. 1: Co se vám osvědčilo při práci s žákem s dvojí výjimečností?

3.2 Rodiče

Jelikož jsem chtěla na problém nahlédnout ze všech úhlů pohledu, oslovila jsem také rodiče žáků s dvojí výjimečností. Jelikož sleduji dění na facebookových skupinách, kde se vyjadřuje větší množství rodičů právě těchto dětí, mohla jsem si povšimnout, že mezi nimi panuje značná nespokojenost s tím, jak školy s jejich dítětem pracují. Tento dotazník nemohl tento předpoklad potvrdit, jelikož jeho návratnost byla opět velmi nízká (zúčastnilo se 17 rodičů) a mohl tedy posloužit pouze jako podklad pro mé další otázky a směřování výzkumu. Jako nejdůležitější bod výsledků zde uvádím názory rodičů na to, co jejich dětem s dvojí výjimečností ve škole chybí a jak by se situace mohla zlepšit. Jelikož se některé odpovědi opakovaly, rozhodla jsem se zachytit také jejich četnost. Některé údaje jsou v tab. 2.

Co podle Vašeho názoru Vaše dítě ve škole postrádá? Jak by se mohla situace zlepšit?	
Více se zaměřit na rozvoj nadání	1
Více individuálního přístupu, respekt speciálních potřeb	2
Zkušení učitelé	2
Soustavná práce s kolektivem, klima třídy	3
Motivace ze strany učitele	2
Zajímavé úkoly, tvořivé úkoly, divergentní úlohy	3
Zohlednění specifik při hodnocení	2

Tab. 2: Co podle vašeho názoru vaše dítě ve škole postrádá? Jak by se mohla situace zlepšit?

4. Já jako učitel

Jelikož sama vyučuji skupinu nadaných žáků, rozhodla jsem se prezentovat také své tipy do výuky, které se mi při práci s těmito žáky osvědčily. Výuka je organizovaná tak, že žáci jsou částečně segregováni na předměty matematika a český jazyk a na zbylé předměty navštěvují běžnou třídu. V následující části uvádím způsoby, které sama používám k obohacování výuky v této skupině.

V první řadě je to využití témat, která jsou pro žáky zajímavá – vesmír, biologie, historie apod. Tato témata se dají zařadit jak do hodin matematiky, tak do hodin českého jazyka. Dále je vhodné nechat žáky vymýšlet úlohy pro ostatní, ale je třeba s nimi dále pracovat. To, že ostatní spolužáci dostanou možnost je vyřešit, je pro ně motivací pro další tvorbu. Tvorbu vlastních úloh lze zařadit právě do práce s výše zmíněnými tématy.

Nabízím žákům možnost volby v dalších činnostech. Navazující práce by pro žáky neměla být „trestem“ za to, že dokáží pracovat rychleji. Proto připravuji několik možností, čemu se mohou věnovat. Je vhodné se také zamýšlet nad tím, aby měli žáci možnost volit úkoly, které budou výzvou a nikoliv jen další úkoly stejné obtížnosti. Také by měli mít možnost využít svou kreativitu, která se u této skupiny žáků projevuje výrazně.

Také se mi osvědčilo stanovovat jasná kritéria hodnocení a věnovat zvláštní pozornost tomu, aby žáci dokázali hodnotit svou vlastní práci (tvorba vlastního portfolia).

5. Sebepojetí nadaných dětí

Okrajově jsem se zabývala sebepojetím nadaných žáků. Tato část probíhala formou volného skupinového rozhovoru, kdy jsem se dětí ptala, kdo je podle nich nadané dítě/nadaný žák. Jejich odpovědi nejčastěji vyjadřovaly to, že by to měl být někdo, komu jde něco lépe než ostatním, je šikovnější, rychlejší... To mě dovedlo k dalším otázkám, do jaké míry označení žáka jako nadaného ovlivňuje to, jak vnímá sám sebe a také ostatní děti, které tuto diagnostiku nemají. Pro další ilustraci bych ráda také uvedla výrok jednoho žáka: „Když tohle neumím vypočítat, asi bych neměl být nadaný. . . “ I tato situace dále ilustruje, že toto označení může pro děti znamenat také tlak ze strany ostatních i sebe samého, jelikož mají potřebu podávat jen výborné výkony.

6. Závěr

Cílem příspěvku bylo shrnout poznatky z několika zdrojů, které se mi podařilo v posledních letech získat. Tyto mé kroky měly vést k tomu, abych zjistila, s jakými potížemi se potýkají učitelé nadaných žáků, rodiče a také samotní žáci.

Konečné srovnání těchto výsledků pro mě přináší další otázky pro můj další výzkum, kterými se budu zabývat. Pohled učitelů ve mně vyvolává otázku, zda jsou učitelé schopni identifikovat nadaného žáka i pokud se neprojevuje na první pohled úspěšně ve všech studijních oblastech. Dalším tématem, kterým se chci blíže zabývat, je sebepojetí nadaných dětí a jak by se s tímto tématem dalo dále pracovat v praxi.

Dle mého názoru by se situace mohla zlepšit tím, že bude téma vzdělávání nadaných žáků více začleněno do profesní přípravy učitelů, kteří by měli být schopni nadaného žáka ve své třídě identifikovat a také mu poskytnout odpovídající podporu.

Literatura

[1] Dweck, C. S.: *Nastavení mysli: nová psychologie úspěchu aneb naučte se využít svůj potenciál.* Jan Melvil Publishing, 2017.

[2] Hříbková, L.: Výchova a vzdělávání nadaných dětí – okrajový problém. *Pedagogika*, roč. 3 (1994), s. 246–252.

[3] Jůzová, K., Jirotková, D.: A gifted pupil in Czech school: primary school teachers' perspective on education of gifted pupils. In: Novotná, J., Moraová, H. (eds.), *Proceedings of SEMT'21.* Charles University, Faculty of Education, 2021, s. 241–251.

[4] Laznibatová, J.: *Nadané dieťa – jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie.* IRIS, 2007.

[5] Machů, E.: Nadaný žák je jako Jágr mezi hokejisty aneb učitelova koncepce nadání v analýze metafor. *Studia pedagogica*, roč. 24 (2019), č. 3, s. 77–92.

[6] Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy: *Koncepce podpory a péče o nadané na období let 2014–2020.* 2014. [Conception of Support and Care for Gifted for 2014–2020].

Herní strategie u nadprůměrných dětí ve věku 5–6,6 roku v komparaci se strategiemi u učitelů mateřských a základních škol

Michaela Kaslová, PedF UK, Praha

Abstrakt. *Ne každá didaktická situace dokáže odhalit nadprůměrné dítě v matematice tak, abychom díky tomu u něho mohli rozvíjet talent. Hry s pravidly (ať již solitéry, nebo párové či skupinové) patří k aktivitám, kde se dítě většinou více otevře. Při pozorném sledování jeho reakcí během opakování téže hry lze u něho sledovat uplatnění řady schopností, které jsou pro rozvoj matematického myšlení významné. Klademe si otázku, zda jsou na takovou situaci připraveni učitelé.*

1. Úvod

Snaha o třídění her ukázala, že hry nelze korektně třídit, protože stále nacházíme takové hry, které z různých důvodů můžeme označit jako hry spadající do průniku charakterizovaných množin. Které hry nám mohou odhalit nadprůměrné dítě? Zde bude záležet i na typu nadprůměrného dítěte (viz [1]) i na způsobu, jakým je hra uvedena zejména tehdy, jde-li o dítě ve věku 5 až 7 let. Jsou děti/žáci, kteří/které nejsou založením soutěživí, a tak je soutěživé hry nelákají, ale ve hrách typu solitér nebo ve hře skupin se cítí dobře.

Praxe ukázala, že i některé pohybové hry mohou odhalit schopnosti dítěte–hráče tvořit rychleji než ostatní strategie směřující k očekávanému výsledku (např. dostat/nedostat babu). Sledované předškolní děti, které rychle a úspěšně vyvinuly takové strategie v různých pohybových hrách, se ve většině (8 z 10 diagnostikovaných poradnou jako nadprůměrné) ukázaly ve vyšším věku jako nadprůměrné v oblasti dynamické prostorové orientace, představivosti nezávisle na velikosti zpracovávaného prostoru a předvídání, dokonce k tvorbě taktiky závisle na složení kolektivu (např. HN, MŠ, TP mají již absolvovánu VŠ přírodovědně zaměřenou). Úspěšnost ve hře při takovém chování nezávisela tedy nutně na jejich fyzické kondici. Uvedené schopnosti se u nich dále ve škole rozvíjely, žáci je snadno uplatňovali v přírodovědných předmětech po celou docházku do ZŠ. Z pozorování jedinců v jedné hře však nelze odvozovat potenciál pro rozvoj v matematice, je důležité pozorování dětí předškolního nebo raného školního věku i v jiných typech her, jako jsou např. stolní hry, nebo rébusy řešitelné manipulací. Vyjděme tedy z toho, že hry s pravidly mohou do jisté míry učiteli pomoci odhalovat nadprůměrnost dětí.

2. Hry s pravidly v mateřské škole

Využívají školy takových možností k tvorbě hypotéz o nadprůměrnosti dětí tak, aby je pak dále prověřovaly? Praxe ukázala, že ne všechny sledované mateřské školy mají začleněny stolní hry včetně karetních do ŠVP; jsou mateřské školy, kde dokonce ani takové hry nemají, nebo mají (dominují: Člověče, nezlob se; Domino; Pexeso; Černý Petr), ale nepoužívají je. Argumenty učitelek mateřských škol: „je to drahé, děti si s tím nehrají“, „musela bych u toho být“ a podobně.

Na druhé straně jsou mateřské školy (především ty, co fungují jako fakultní, nebo byly zapojeny do projektu SC1), které mají více než 20 různých stolních her s pravidly. Dotazníková šetření, semidirektivní rozhovory odhalily, že ne vždy je pro učitele snadné si uvědomit, co vše takové hry rozvíjejí, že každá z her současně vytváří bohaté zkušenosti významné i pro školní matematiku.

Stolní hry s pravidly rozvíjejí dítě jak po stránce emočně sociální, tak intelektové, pomineme-li rozvoj v oblasti jemné motoriky. Většina her vyžaduje kooperaci různých schopností (koncentrace, orientace v rovině, paměť, porovnávání, třídění, racionální hodnocení situací, předvídání, větvené uvažování, . . .), nutí pojmout pravidla jako logickou strukturu. Školení učitelů zaměřené na hry u dětí zmíněné věkové skupiny prokázalo, že je pro ně obtížné provádět hlubší analýzu her, respektive přemýšlet hlouběji o vlivu stolních her na dítě. Není ani snadné pro tyto učitele při hře pozorovat dítě tak, aby se u něho zaměřili na specifickou skupinu uplatňovaných schopností. Pokud jde o systematičtější pozorování, pak se zpravidla zaměřují na pohybové dovednosti, bezpečnost a socializaci dítěte. Schopnosti spojené s pre-matematikou učitelé v praxi vnímají spíše nahodile, nesystematicky.

3. Hry s pravidly na základní škole

Stolní hry jsou výrazně více než ve výuce používány ve školních družinách, jsou k volnému výběru, ale cíleně se s nimi nepracuje, pokud není na ZŠ kroužek. Diplomová práce jedné ze studentek PedF ukázala, jak cílená práce s určitým typem stolních her ve školní družině pozitivně ovlivňuje proces učení v matematice. Hry v hodinách matematiky jsou u věkové skupiny do 7 let redukovány na relativně primitivní a často nespravedlivé hry, jako např. matematický král; hry mívají povahu tréninku v hbitosti výpočtu. Přesněji řečeno, hrou jsou často označovány výpočty s oporou o nestandardní materiál, jako jsou např. kartičky.

4. Příprava budoucích učitelů

Klademe-li si otázku, jak toto změnit, musíme začít již v práci se studenty. Zaměřila jsem se na tři skupiny studentů: a) studenti předškolní pedagogiky, učitelství pro mateřské školy (*Didaktika PMG s exkurzí*); b) studenti učitelství pro 1. st. ZŠ (předměty: *Hry v matematice*; prohlubující modul *Dítě a matematika*); c) studenti Erasmu, kteří se chtějí věnovat práci s dětmi ve věku 5–10 let (*Games in Primary school mathematics*).

5. Obsah studia u sledovaných studentů

Teoreticky by studenti univerzitního programu měli být schopni rozvíjet nadprůměrné děti (talenty) již od předškolního věku; program studia obsahuje témata: Hry s pravidly (stolní, společenské i pohybové, práce s možnostmi, komparace, uvažování, usuzování, předvídání, prvky pravděpodobnosti, rozvoj kombinačních schopností a orientace v rovině, prostorová představivost apod. Všichni sledovaní čeští studenti mají za sebou kurzy z vývojové a kognitivní psychologie.

6. Stručná charakteristika dítěte ve věku 5–6,6 roku

Děti si rády hrají, hru prožívají, žijí dominantně daným momentem v daném místě. Pokud předškolní děti zobecňují, pak i z jediné zkušenosti; opírají se i o nepodstatné, avšak nápadné či líbivé jevy, situaci nahlížejí často skrze emoce a pouze ze svého úhlu pohledu. Pokud nebyly na výhru/prohru připravovány již dříve, kdy je kolem 3–4 roku přijímají relativně snadno, pak kolem vstupu do školy se mění a sledují vliv prohry/výhry na postavení v societě. Postoj se může měnit, pokud sledují s dospělým proměnlivost zakončení hry při jejím opakování v krátkém časovém úseku, či registrují prvky pravděpodobnosti ve hře.

Nadprůměrné dítě stejné věkové skupiny je schopné třídit v představě bez hlasitého komentáře, ukládat do paměti zkušenosti, ty si vybavovat, porovnávat, sledovat situace pod různými úhly pohledu, hledat podstatné jevy, zobecňovat a své zobecnění případně korigovat.

7. Výzkumné otázky

1) V čem se liší „vítězné“ strategie studentů a nadprůměrných dětí?

2) Jaké procento studentů objeví vítěznou strategii po stejném počtu opakování hry jako nadprůměrné děti, případně dříve?

Sledování vybraných jevů a evidence (2017–2021) v situacích odehrávajících se dle scénáře: a) pro děti nová hra s pravidly – vysvětlení pravidel technikou úvod a otevřená hra s komentářem; b) opakování hry 4–6krát, hrají spolu jen děti 5–6,6 roku; c) rozbor zkušeností; d) hra jednotlivců s dospělým.

Sledované jevy: čas, váhání, nejistota, dotazy, samomluva, gestikulace, postup, výhra/prohra, reakce na výsledek, komentář protihráče, gesta, korekce, tvorba strategie, užití taktiky.

Vzorek: heterogenní skupiny po 4–6 dětech, věk 5–6 let.

Metodologie: kvalitativní výzkum.

Podmínky: u stolu, dopoledne, bez přítomnosti učitelky.

Prostředí: a) známé, b) neznámé.

Vybrané hry: Domino (pokud je děti neznaly); Goblíci – jedlíci; NIM 10 1//2 (varianta pro mateřské školy, Kaslová) – hru zahajujeme s 10 objekty na stole, z hromádky střídavě odebíráme objekty v počtu buď jednoho, nebo dvou, vítězí ten, který odebere poslední objekt(y) z hromádky.

8. Charakteristika her

Všechny hry umožňují použít uvažování, předvídání, práci s číslem, paměť, zobecňování. Všechny hry umožňují vznik strategie (ne nutně optimální) a taktiky. První dvě vyžadují orientaci v rovině/prostoru, třetí hra je založena na představě redukce výchozího počtu objektů, strategie stojí na schopnosti odvíjet hru od posledního kroku směrem proti toku času.

Strategií chápu takovou volbu kroků plynoucích pouze z logické struktury pravidel, které v jakémkoli opakování hry redukují pravděpodobnost prohry. Taktikou chápu taková rozhodnutí, které jsou závislá na chování protihráčů, respektive na jejich opakovaných reakcích na stejné podněty bez porušení pravidel. Stojí na dobrých pozorovacích schopnostech chování protihráčů/spoluhráčů v závislosti na měnícím se/opakujícím se situačním kontextu.

Žádná z her není absolutně spravedlivá, proto se při opakování hry hráči střídají v zahajování. Obzvlášť u předškolních dětí je obtížné vymezit pojem spravedlivá hra, protože by to bylo možné, jen pokud by děti byly navíc na srovnatelné úrovni *vývoje intelektu* a měly přibližně stejnou *herní zkušenost*, i když u předškolních dětí navíc záleží i na momentálním emočním stavu a biorytmu (kolísá koncentrace během dne). Spravedlivou hru u dětí nelze vymezit bez ohledu na hráče jen z analýzy pravidel.

Otázku spravedlivosti hry jsou některé děti schopné odhalit již v 5 letech po první hře nejen u těchto tří her, jako např.: „Je lepší začít." (Goblíci); „Chci začínat!" „Druhá nebudu!" (NIM 10, Blokus); „Je to jedno, stejně nevím, co dostanu." „Budu dávat naposled." (Tantrix; Bodovaný Tantrix MKa); „S ní hrát nebudu, je chytrá." „Nechci hrát, vždycky (Š) vyhraje a to není spravedlivé." (NIM 10); „Budu hrát jen s M, protože pak vyhraju a chci začít." „Když nezačnu, obsadí mi střed a to nechci." (Domino, Goblíci).

9. Projevy nadprůměrných dětí a studentů ve hře Domino

Nadprůměrné děti nereagují rychle, zvažují možnosti ve dvou rovinách: kam přiložit a co k přiložení vybrat z toho, co mají k dispozici; chápou význam výhodnějších rozhodnutí jak aktuálně, tak s výhledem do budoucna (aspoň příští kolo); dokážou odhadovat kameny soupeře. Nemají problém s natočením obrázku/konfigurace; relativně rychle odhalují sílu soupeře.

Studenti zhruba z poloviny neuvažují v krocích dopředu; pokud hru neznají, po dvou hrách většina odhaluje výhodu zbavit se kamene „dvojče" co nejrychleji. Studenti chápou, že pokud mají přiložit k jednomu z konců „hada" (jde-li o dva různé obrázky/konfigurace), pak je vhodné přiložit k tomu konci, ke kterému mají mezi svými kameny obrázek víc-krát. Druhý obrázek na svých kamenech při rozhodování neposuzují (až na 2 z 85).

10. Projevy nadprůměrných dětí a studentů ve hře Goblíci–jedlíci

R	B	R
B	C	B
R	B	R

Všichni hráči (děti i studenti) registrují během prvních dvou her význam centrálního pole, někteří jen intuitivně (což lze vyložit i jako archetypální jednání pro ovládnutí prostoru). V první hře převládají emoce a jsou zde hlavní tendence zakrýt protihráčovu figuru svojí víc než přemýšlet nad kompozicí trojice svých figur.

Nadprůměrné děti v průběhu opakování hru zpomalují, po dvou až třech hrách rozlišují role hracích polí (C – centrální, R – rohové, B – boční), což označují každý svým jazykem a hodnotí jejich výhody ve strategii, kterou nepovažují dokonce za konečnou, optimální. První své strategie v průběhu opakování hry modifikují. Štěpán: „Záleží, kam a co dá (protihráč)." Chápou proměnlivost situací, dva se snaží i počítat možnosti. Porovnávají možnosti své i protihráče v představě. Opírají se o paměť. Tvoří napřed situace, ve kterých protihráč nemá volbu vhodného tahu. Více se jim daří ve známém prostředí, pokud je ovšem nesleduje jejich učitelka „ostřížím" zrakem (sociálně emoční tlak). V této hře se objevila i taktika v případě, že hrál nadprůměrný hráč s průměrným či slabším hráčem. Jára: „Filip dává nejdřív samý velký (figury) a já ho nalákal, pak už mě nemohl zakrýt." Patrik: „To je lehký, voni dělaj (sestavují) tu trojici pořád do řádku." Stačilo tedy uvažovat o sestavení trojice šikmo nebo ve sloupci, což je pro běžné předškolní děti méně obvyklé.

Studenti hodnotili v reflexi vlastní neschopnost objevit strategii, hlavní důvod uváděli nízkou koncentraci, účast emocí. Někteří kromě obsazení pole C žádnou strategii neměli. Někteří ji hledali až po šestém opakování, přičemž jen 25 z 82 svoji první strategii modifikovalo. To neznamená, že modifikace směřovala k optimalizaci. Dvě studentky objevily podobnost s hrou Mlýn. Taktika se objevila u 4 studentů, i když styl hry u dalších hráčů tvorbu taktiky umožňoval. Hlavní motivací pro opakování hry byla v jejich argumentech zábava. Pozorování tahu protihráče či sledování jiných dvojic považovali za obtížné či nezvyklé. Jen někteří (zpravidla úspěšnější v kurzech matematiky) pozorování uplatnili, jen pokud sami právě nehráli a byli v roli pozorovatele. Nicméně se jim hra líbila a následující lekce vyžadovali její opakování podobně jako děti.

Sledujeme-li hru z pohledu užitých figur (V – velká, S – střední, M – malá), vědomá práce s jejich velikostí a doprovázená argumentací je z pohledu proporce mezi těmi, kteří roli registrují a kteří ne, stejná u dětí jako u studentů. Výpovědi k figuře V jsou: „má výhody, že může krýt S a nic ji nemůže zakrýt“, „má nevýhodu, že změnou své pozice na ploše může odkrýt schovanou protivníkovu figuru“, „nemůže zakrýt protivníkovu figuru M“. Při hodnocení figur bez ohledu na věk je zmiňována buď jen výhodnost, nebo nevýhodnost dané figury. Podobné je to ve vyhodnocování figur, které má/mají zbývající protihráč/i k dispozici.

11. Projevy nadprůměrných dětí a studentů ve hře NIM 10 1//2

Všechny sledované předškolní děti po 4 hrách chápou aspoň intuitivně význam čísla 3 ve hře, avšak ne vždy si uvědomují, kdy je to pro ně (ne)výhodné: zda ponechat protihráči tři objekty, nebo mít k dispozici odběr ze tří objektů. Oproti tomu nadprůměrné děti (8 z 82 sledovaných dětí) tento problém nemají, navíc odkrývají od konce význam čísla 5 (možná i vyššího čísla) a umějí ho popsat. Rovnou klíčových 7 odkrývají 2 z nich. Nejpozději po šesti hrách vítězí se slabšími téměř vždy, s talenty či dospělým vždy, jen pokud začínají. Také výhodu začít ventilují nahlas (všech 8). V závěrečné diskusi po ukončení her se objevuje u nadprůměrných dětí hypotéza, že „možná bude důležité i sedm“ (Štěpán, Lenka, Otík v cizím prostředí, Patrik, Martina, Jára, Tom, Jana v prostředí MŠ) s pokusem to vyzkoušet. Jsou silně motivováni vyhrát v momentě, kdy objeví, že to mohou ovlivnit přemýšlením.

Studenti v mírně nadpoloviční většině reagovali jako běžné předškolní děti, projevovali radost ze hry, ale neměli se příliš k objevování strategie. Tam, kde k tomu byli vyzváni, byli úspěšnější, pokud mohli průběh hry modelovat samostatně bez hry se soupeřem. Celkově se projevovala obava z opakované prohry, pokud hru nechápali jako odlehčení, zábavu, něco nezávazného. Po 4 hrách hodnotili hru: a) klíčové jsou 3 (5 z 10, 21 z 65); b) klíčové je 5 (4 z 10, 8 z 65); c) klíčové je 7 (1 z 10, 3 z 65); výhodné je být první (6 z 10, 27 z 65).

12. Hry v jednotlivých kurzech

V předmětu Didaktika s exkurzí se objevily hlavní proudy při hře studentů s dětmi: 1) nahrávat jim, dělat nevýhodné kroky, aby dítě neprohrálo, pokud si výhodnost uvědomili; 2) radit dětem i ve svůj neprospěch; 3) celková tendence: hrát s dětmi hůř, než hrají se spolužáky s argumentem, aby se na ně děti nezlobily, aby byly děti při hře spokojené. V praxi je udivilo, že to nadprůměrné děti chápou jako podvod, pro jednoho doslovně ztratila hra se studentkou smysl a tvrdil, že ho to takhle nebaví, když „ona hraje blbě“. Pro tuto skupinu studentů bylo obtížné hodnotit hru jako sled rozhodování, kroků, které mají výhody a nevýhody a ty si uvědomovat a uvažovat nad nimi. Pokud dospěli k zobecnění, neměli většinou problém převádět závěry do dětské řeči, zpravidla kombinovaným komunikačním kódem.

Učitelé prvního stupně ZŠ se cítili jistým způsobem zaskočeni vztahem her a matematiky. Své pokusy o tvorbu strategií nejvíce zakrývali. Hru přenášeli do svého mimostudijního času mimo výuku v kurzu. Dílčí zobecnění a popisy strategií, případně taktiky závisely více na osobnosti studenta (nebát se přijít s návrhem) než na jeho dosavadních úspěších v kurzech matematiky.

V předmětu Games in Mathematics se dělili studenti do dvou skupin, jedni „hráli za sebe“ pro zábavu, pro výhru, druzí se vciťovali do dětí. Chyběl profesní přístup. Byla zde nižší schopnost provádět analýzu hry a priori. V závěrečných reflexích se zde objevovala nejsilnější tendence nalézt vhodnou strategii, avšak chyběly nástroje k argumentaci (nejen matematicko-logické) a k popisu, i když stačilo použití dětského jazyka. Ze všech tří sledovaných skupin jim nejvíce chyběla kognitivní psychologie.

13. Závěry

Budoucí učitelé mateřských škol a 1. st. ZŠ, jak naši, tak zahraniční, mají relativně malé zkušenosti s hrami, jejich hráčská zkušenost se v některých případech blíží dětské zkušenosti, nebo studenti netuší, že nějaké strategie a taktiky lze používat. Hru berou jako zábavu, jako vnější motivační nástroj. Nejsou zvyklí hry charakterizovat, analyzovat jak u jednotlivých hráčů, tak v obecné rovině, tudíž je pro ně v současné době použití her ve výuce na relativně povrchní úrovni. Pokud si někdo z nich uvědomoval, co daná hra rozvíjí, pak měl tendenci hru zařadit do výuky bez opakování, což nemůže přinést očekávaný efekt. Všichni byli překvapeni, jak lze využít her nejen pro hrubou identifikaci nadprůměrného žáka, ale i pro dílčí diagnostiku (např. užití uvažování, orientace v rovině). Pokud hledali vztahy hry k matematice, orientovali se na přirozené číslo, či „geometrické tvary“. Objevení souvislosti s logikou záviselo na kurzech, které absolvovali před kurzem zaměřeným na hry.

Pokud chceme, aby zařazování stolních her s pravidly ovlivňovalo rozvoj schopností dítěte/žáka, případně prohlubovalo vybrané pojmy (Goblíci–jedlíci: číslo v roli počtu je nezávislé na barvě a natočení a velikosti jeho modelu), pak je nutné se zabývat hrami z tohoto pohledu alespoň ve volitelných kurzech. Praxe ukázala, že během semestru se postoj studentů ke hrám mění, pokud se naučí hry analyzovat a pokud se zbaví strachu s dětmi prohrát. Průběžně oslabovala tendence děti podceňovat díky přímému kontaktu s dětmi (což v LS 2019/20 nebylo možné). Práce s dětmi za přítomnosti vyučujícího vede i k tomu, že původní překvapení studentů z inteligentních reakcí dětí (v mateřské škole či na počátku školní docházky) přechází v nový postoj, očekávání či dokonce vyhledávání takových reakcí.

Literatura

[1] Kaslová, M.: Talent na jazykové škole. In: Zhouf, J. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar 2011.* JČMF, Praha, 2011, s. 50–68.

[2] Kaslová, M.: *Hry nejen v matematice.* Text pro U3V, PedF UK, Praha, 2005, 25 s.

[3] Kaslová, M.: *Games in mathematics.* Text pro studenty Erasmu, PedF UK, Praha, 2019, 10 s.

[4] *Hra Goblíci–jedlíci.* `https://mindok.cz/hra/goblici-jedlici/`

Tvorba pythagorejských trojic

Ladislav Kocanda, Veselí nad Lužnicí
Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

Abstrakt. *Článek představuje metodu, kterou lze vytvářet pythagorejské trojice, tj. trojice, které řeší rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ v oboru přirozených čísel.*

1. Úvod

Hlavním cílem článku je prezentovat jedno pravidlo, jakým se dají hledat pythagorejské trojice přirozených čísel. Jde o méně známou metodu hledání takových trojic.

Článek využívá některých závěrů uvedených v článcích [1, s. 53–62], [2, 3].

2. Počáteční podmínky pro číselné trojice

V následujícím textu budeme uvažovat uspořádané trojice $[x, y, z]$ přirozených čísel, pro něž platí $x < y < z$ a jejichž největší společný dělitel je roven 1, tj. $\gcd(x, y, z) = 1$.

3. Rozklad číselné trojice na součet

Definice 1. Rozložit uspořádanou trojici $[x, y, z]$, $x < y < z$, na součet znamená:

a) určit vzdálenost d třetího členu trojice od členu druhého, tj. $d = z - y$,

b) určit vzdálenost v třetího členu trojice od členu prvního, tj. $v = z - x$,

c) určit vzdálenost p součtu prvního a druhého členu od členu třetího, tj. $p = x + y - z$.

Rozložená trojice na součet má tedy tvar $x = p + d$, $y = p + v$, $z = p + d + v$.

Příklad 1. Např. pro trojici $[4, 8, 11]$ je $d = 11 - 8 = 3$, $v = 11 - 4 = 7$, $p = 4 + 8 - 11 = 1$. Takže zadaná trojice je rozložená na součet takto: $x = 1 + 3,\ y = 1 + 7,\ z = 1 + 3 + 7$.

4. Primitivní číselné trojice

Definice 2. Trojici $[x, y, z]$, kde $\gcd(x, y, z) = 1$, nazýváme *primitivní číselná trojice*, právě když

$$k = \frac{x + y - z}{\gcd(x, x + y - z) \cdot \gcd(y, x + y - z)} = 1.$$

Příklad 2. Pro trojici $[4, 8, 11]$ z příkladu 1 platí

$$k = \frac{4 + 8 - 11}{\gcd(4, 4 + 8 - 11) \cdot \gcd(8, 4 + 8 - 11)} = \frac{1}{\gcd(4, 1) \cdot \gcd(8, 1)} = 1,$$

takže tato trojice je primitivní.

Pro trojici $[4, 12, 14]$ platí

$$k = \frac{4 + 12 - 14}{\gcd(4, 4 + 12 - 14) \cdot \gcd(12, 4 + 12 - 14)} = \frac{2}{\gcd(4, 2) \cdot \gcd(12, 2)} = \frac{1}{2},$$

takže tato trojice není primitivní.

5. Číselné trojice v rovnici $x^2 + y^2 = z^2$

Věta 1. *Nechť $[x, y, z]$ je trojice přirozených čísel, která splňuje podmínky $x < y < z$, $\gcd(x, y, z) = 1$, $x = p + d$, $y = p + v$, $z = p + d + v$ a je řešením rovnice $x^2 + y^2 = z^2$. Pak platí*

a) $z < x + y$,
b) *číslo z je liché,*
c) $d < v$,
d) *čísla d, v jsou nesoudělná,*
e) *číslo p je sudé,*
f) *číslo p můžeme psát ve tvaru $p = 2rs$, kde r je libovolné liché číslo a s je libovolné přirozené číslo a je $\gcd(r, s) = 1$.*

Důkaz. a) Kdyby bylo v dané rovnici $z \geq x + y$, potom by bylo

$$z^2 \geq (x + y)^2 > x^2 + y^2 = z^2,$$

což vede ke sporu. Proto je $z < x + y$.

b) Kdyby bylo číslo z sudé, tak by díky nesoudělnosti čísel x, y, z musela být obě čísla x, y lichá. Pak by v rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ byla pravá strana dělitelná čtyřmi, kdežto levá strana by při dělení čtyřmi dávala zbytek 2. A to je spor, proto musí být číslo z liché.

c) Jelikož uvažujeme $x < y$, tak je $d = z - y < z - x = v$.

d) Předpokládejme, že $\gcd(d, v) = u \cdot t > 1$, kde u je prvočíslo a $t \in \mathbb{N}$. Pak u dělí d a u dělí v. A pro rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ platí

$$(p + d + v)^2 - (p + v)^2 - (p + d)^2 = 0,$$
$$p^2 + d^2 + v^2 + 2pd + 2pv + 2dv - p^2 - 2pv - v^2 - p^2 - 2pd - d^2 = 0,$$
$$2dv - p^2 = 0.$$

Odsud je patrné, že při $d = ut_1$ a $v = ut_2$ je $p = ut_3$, kde t_1, t_2, $t_3 \in \mathbb{N}$. Pak je $\gcd(d, x) = \gcd(d, p + d) = \gcd(d, p) = ut_4 > 1$ ($t_4 \in \mathbb{N}$), což znamená, že u dělí x. Podobně u dělí y, což odporuje nesoudělnosti čísel x, y, z. Došli jsme ke sporu s předpokladem, takže platí, že dvojice d, v je nesoudělná.

e) Dvě z čísel x, y, z v rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ jsou lichá a jedno je sudé. Proto je číslo $p = x + y - z$ sudé.

f) V odstavci d) jsme odvodili, že $p^2 = 2dv$. Jelikož číslo p je sudé, musí být jedno z čísel d, v sudé, ale druhé musí být liché, protože tato čísla jsou nesoudělná. A když jsou čísla d, v nesoudělná, musí jedno být ve tvaru r^2, kde r je liché číslo, a druhé číslo musí být ve tvaru $2s^2$, kde s je libovolné přirozené číslo a $\gcd(r,s) = 1$. Pak platí

$$p = \sqrt{2dv} = \sqrt{2 \cdot r^2 \cdot 2s^2} = 2rs.$$

Poznámka 1. Číselná trojice $[x, y, z]$, která splňuje rovnici $x^2+y^2 = z^2$, se nazývá *pythagorejská trojice.*

Číselná trojice $[x, y, z]$, která splňuje rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ a navíc je $k = 1$ podle definice 2, se nazývá *primitivní pythagorejská trojice.*

6. Generování pythagorejských trojic

V předchozím odstavci jsme vyslovili větu 1, která je ve tvaru implikace a říká, že když vezmeme libovolnou pythagorejskou trojici, tak ji dovedeme rozložit na součet, tj. existují příslušná přirozená čísla p, d, v, z nichž jsou čísla v pythagorejské trojici složena. Z důkazu věty 1 je ale vidět, že je možné vyslovit větu opačnou.

Věta 2 (Generátor 1). *Nechť r je liché přirozené číslo a s je libovolné přirozené číslo a je* $\gcd(r,s) = 1$*, pak čísla*

$$x = 2rs + r^2, \quad y = 2rs + 2s^2, \quad z = 2rs + r^2 + 2s^2$$

tvoří pythagorejskou trojici.
(Je-li $r^2 < 2s^2$, je $x < y < z < x + y$, je-li $2s^2 < r^2$, pak si čísla x, y vymění pozici.)

Důkaz. Důkaz je vlastně zpětná cesta v důkazu věty 1.

Věta 3. *Pythagorejská trojice*

$$x = 2rs + r^2, \quad y = 2rs + 2s^2, \quad z = 2rs + r^2 + 2s^2$$

z předchozí věty 2 je primitivní pythagorejskou trojici.

Důkaz. Tvrzení věty je dokázáno rovností

$$k = \frac{x + y - z}{\gcd(x, x + y - z) \cdot \gcd(y, x + y - z)} =$$

$$= \frac{2rs + r^2 + 2rs + 2s^2 - 2rs - r^2 - 2s^2}{\gcd(2rs + r^2,\ 2rs) \cdot \gcd(2rs + 2s^2,\ 2rs)} = \frac{2rs}{r \cdot 2s} = 1.$$

Poznámka 2. Všechny pythagorejské trojice

$$x = 2rs + r^2, \quad y = 2rs + 2s^2, \quad z = 2rs + r^2 + 2s^2$$

jsou primitivní. Pak už je jednoduché doplnit všechny pythagorejské trojice, tedy ty, které nejsou primitivní. Např. z primitivní trojice $[3, 4, 5]$ se pak už jen pomocí násobků vytvářejí trojice $[4, 6, 8]$ a také $[9, 12, 15]$ atd.

Několik primitivních pythagorejských trojic, které jsou generovány zde uvedeným předpisem, je uvedeno v tab. 1. Z tabulky je např. vidět, že číslo z je liché.

r	s	$x = 2rs + r^2$	$y = 2rs + 2s^2$	$z = 2rs + r^2 + 2s^2$
1	1	3	4	5
1	2	5	12	13
1	3	7	24	25
1	4	9	40	41
...	...	...	...	...
3	1	15	8	17
3	2	21	20	29
3	4	33	56	65
...	...	...	...	...
5	1	35	12	37
5	2	45	33	58
5	3	55	48	73
5	4	65	72	97
...	...	...	...	...

Tab. 1

7. Další generátory pythagorejských trojic

Generátor 2. Dalším a asi nejznámějším předpisem, pomocí něhož lze nagenerovat pythagorejné trojice, je tento (viz např. [4, 5, 6]):

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2, \\ y &= 2mn, \\ z &= m^2 + n^2, \quad m, n \in \mathbb{N},\ m > n \end{aligned}$$

V tomto případě se nagenerují pythagorejské trojice, a to nejen primitivní. Několik takto nagenerovaných trojic je uvedeno v tab. 2. Nenagenerují se však všechny trojice, např. ne $[9, 12, 15]$.

m	n	$x = m^2 - n^2$	$y = 2mn$	$z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
4	1	15	8	17
5	1	24	10	26
...	...	...	...	...
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
5	2	21	20	29
...	...	...	...	...
4	3	7	24	25
5	3	16	30	34
6	3	27	36	45
...	...	...	...	...

Tab. 2

Generátor 3. Zajímavý je předpis, kterým se generují pythagorejské trojice, jejichž dva největší členy se liší o jedna. Právě to zaručuje, že tyto dva členy jsou nesoudělné, takže tímto předpisem jsou generovány trojice primitivní. A jelikož jsou tyto trojice primitivní, musí být největší číslo liché a druhé největší číslo sudé.

Takový předpis má formu (viz např. [4, 5]):

$$x = 2n + 1,$$
$$y = 2n^2 + 2n,$$
$$z = 2n^2 + 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Několik takto nagenerovaných trojic je uvedeno v tab. 3. Vidíme, že jde o trojice, které jsou v tab. 1 na začátku, tj. o trojice, pro které tam je $r = 1$, $s = n$.

n	$x = 2n + 1$	$y = 2n^2 + 2n$	$z = 2n^2 + 2n + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
...	...	...	...

Tab. 3

Generátor 4. Uveďme ještě jeden generátor, a sice generátor pythagorejských trojic, jejichž dva největší členy se liší o dvě. I zde díky tak malému rozdílu jsou ona dvě největší čísla nesoudělná, a tím je nesoudělná i celá trojice, takže se zase jedná o trojice primitivní. Dvě největší dvojice se liší o dvě, takže obě čísla jsou lichá. Kdyby byla obě sudá, muselo by i třetí číslo v trojici být sudé, to ale není v primitivní trojici možné.

Mluvíme-li o dvou největších členech, tak z této úvahy vypadává trojice [4, 3, 5], která se ale tímto předpisem dá také nagenerovat.

Takový předpis má formu (viz např. [4, s. 47], [5]):

$$x = 4n,$$
$$y = 4n^2 - 1,$$
$$z = 4n^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Několik takto nagenerovaných trojic je uvedeno v tab. 4. Tyto trojice se dají vytvořit tak, že v tab. 1 položíme $r = 2n - 1, s = 1$.

n	$x = 4n$	$y = 4n^2 - 1$	$z = 4n^2 + 1$
1	4	3	5
2	8	15	17
3	12	35	37
4	16	63	65
5	20	99	101
...	...	...	...

Tab. 4

Poznámka 3 (Generátor 5). Platí také toto zajímavé tvrzení, které je jednoduché dokázat: Jsou-li $[x_1, x_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$ nějaké dvě pythagorejské trojice, je $[x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, z_1z_2]$ také pythagorejská trojice.

8. Závěr

Představili jsme několik možností, jak vytvářet pythagorejské trojice. Článek může být inspirací k tvorbě ještě dalších generátorů těchto trojic.

Jako úkol pro čtenáře dáváme najít předpis pro tvorbu pythagorejských trojic, kde největší dvě čísla v trojici se liší o tři.

Literatura

[1] Kocanda, L.: Důkaz pravdivosti Bealovy domněnky. In: Zhouf, J. (ed.): *Ani jeden matematický talent nazmar 2019.* Gaudeamus, UHK, Hradec Králové, 2021.

[2] Kocanda, L.: Rozkladem číselné trojice k důkazu Bealovy domněnky. In: *Sborník příspěvků 8. ročníku konference učitelů matematiky.* Přírodovědecká fakulta, Hradec Králové, 2017.

[3] Kocanda, L.: Důkaz pravdivosti Bealovy domněnky. In: *Sborník příspěvků 9.ročníku konference učitelů matematiky.* PřF, Hradec Králové, 2019.

[4] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie, druhé rozšířené vydání.* PedF UK, Praha, 2012.

[5] `cs.wikipedia.org/wiki`

[6] `www.matematika.cz`

Soustavy polynomiálních rovnic

Soňa Königsmarková, KMT FPE ZČU, Plzeň

Abstrakt. *Stále častěji se ve výuce matematiky využívají digitální technologie. Učitelé i studenti mají k dispozici různé matematické programy, jako je např. GeoGebra, WolframAlpha nebo Maple, pomocí nichž mohou řešit složitější soustavy polynomiálních rovnic, které se vyskytují např. v úlohách naší, příp. zahraniční matematické olympiády nebo v různých matematických soutěžích. Algoritmy řešení soustav využívají různé eliminační metody, jako např. Gröbnerovy báze a Buchbergerův algoritmus. Jeho formulace a užití ovšem vyžadují poměrně náročné pojmy z abstraktní algebry a algebraické geometrie. Proto uvedeme metodu Gröbnerových bází jen zjednodušeně.*

1. Úvod

V následujícím článku se seznámíme s řešením soustav polynomiálních rovnic pomocí Gröbnerových bází. Teorii Gröbnerových bází objevil a publikoval ve své dizertační práci roku 1965 Bruno Buchberger a nazval ji podle svého školitele profesora Wolfganga Gröbnera. Tuto teorii dále rozvíjel a definitivní název používaný v dnešní době je Gröbnerovy báze. Objev Gröbnerových bází si našel celou řadu aplikací v oblastech matematiky, vědy a techniky. Mnohé aplikace algoritmů vytvořených na základě Gröbnerových bází jsou obsaženy v současných matematických software, jako je např. GeoGebra, Maple nebo Mathematica.

2. Úloha z matematické olympiády

Úloha (MO 2021/22, 71. ročník, domácí kolo, kategorie A):

V oboru komplexních čísel vyřešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy + 1 &= z^2, \\ yz + 2 &= x^2, \\ zx + 3 &= y^2. \end{aligned}$$

Řešení. Označme polynomy

$$\begin{aligned} f_1 &= xy - z^2 + 1, \\ f_2 &= -x^2 + yz + 2, \\ f_3 &= xz - y^2 + 3. \end{aligned}$$

Vidíme, že řešení odpovídající homogenní soustavy rovnic by nebylo snadné nalézt. Postupně si tuto množinu polynomů rozšíříme, získáme tedy další polynomy. Dospějeme až k tvz. Gröbnerově bázi ideálu generovaného polynomy f_1, f_2, f_3. Tato báze ale bude pravděpodobně obsahovat některé polynomy, které nejsou důležité pro řešení původní soustavy rovnic. Tyto polynomy bude možné z množiny odebrat a u zbývajících nastavit vedoucí koeficient polynomu na 1 (monická a redukovaná Gröbnerova báze). Ta je již určena jednoznačně. Tato báze poskytuje informace o řešitelnosti původní soustavy či počtu řešení v případě, že je konečný. Především ale její tvar obvykle umožňuje hledaná řešení snadno nalézt.

Označme množinu $F = \{f_1 1, f_1 2, f_1 3\}$ a množinu dvojic indexů těchto polynomů $B = \{[1,2],[1,3],[2,3]\}$.

3. Uspořádání monomů

Uděláme si pořádek mezi jednotlivými tzv. monomy, tj. výrazy $x^n y^m z^p$. Užijeme tzv. čisté lexikografické uspořádání.

Definice 1. (Čisté) lexikografické uspořádání monomů (pure lexicographic ordering) $<_L$ je definováno tak, že

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} <_L x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n},$$

právě když $i_1 < j_1$, nebo existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $i_m < j_m$ a zároveň $i_k = j_k$ pro $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$.

Je zřejmé, proč hovoříme o lexikografickém (slovníkovém) uspořádání. Při zjišťování, které ze slov bude ve slovníku uvedeno dříve, porovnáme (v abecedním pořadí) nejprve jejich první písmena; jsou-li případně stejná, porovnáme druhá písmena. Kdyby i ta byla stejná, porovnáme třetí atd.

Např. pro monomy $x^2y^3zu^3$ a $x^2y^3z^2u^2$ platí $x^2y^3zu^3 <_L x^2y^3z^2u^2$. Uspořádané čtveřice exponentů $[2,3,1,3]$ a $[2,3,2,2]$ mají shodné první dvě složky, a tak rozhodují až složky třetí, kdy $1 < 2$.

Každý z členů vyskytujících se v nějakém polynomu f je zřejmě možné chápat jako součin jistého reálného čísla a nějakého monomu.

Vedoucí monom (ang. leading monomial) polynomu f označovaný $LM(f)$ je největší monom v polynomu f vzhledem k uspořádání $<_L$.

Vedoucí koeficient (angl. leading coefficient) polynomu f označovaný $LC(f)$ je koeficient u jeho vedoucího monomu.

Vedoucí člen (angl. leading term) označovaný $LT(f)$ je $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$.

V našem případě je v polynomu $f_1 = xy - z^2 + 1$ vedoucí monom xy a vedoucí koeficient je 1. V polynomu $f_2 = -x^2 + yz + 2$ je vedoucí monom x^2 a vedoucí koeficient -1, v polynomu $f_3 = xz - y^2 + 3$ je vedoucí monom xz a vedoucí koeficient 1.

4. Snažíme se redukovat monomy

Definujeme si nejprve potřebné pojmy.

Definice 2. S-polynomem polynomů p, q nazýváme polynom

$$\mathrm{Spoly}(p,q) = LCM(LT(p), LT(q)) \cdot \left(\frac{p}{LT(p)} - \frac{q}{LT(q)} \right).$$

Zde LCM značí nejmenší společný násobek, tj. první činitel v součinu na pravé straně je nejmenším společným násobkem vedoucích členů polynomů p, q.

Příklad 1. Pro polynomy f_1, f_2 vezmeme $LCM(LT(f_1), LT(f_2)) = -x^2y$, pro polynomy f_1, f_3 vezmeme $LCM(LT(f_1), LT(f_3)) = xyz$ a pro polynomy f_2, f_3 vezmeme $LCM(LT(f_2), LT(f_3)) = -x^2z$.

Příklad 2. Vypočteme S-polynomy pro jednotlivé dvojice našich polynomů:

$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_2) = -x^2y \left[\frac{xy - z^2 + 1}{xy} - \frac{-x^2 + yz + 2}{-x^2} \right] =$$
$$= -x(xy - z^2 + 1) - y(-x^2 + yz + 2) = xz^2 - x - y^2z - 2y$$
$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_3) = xyz \left[\frac{xy - z^2 + 1}{xy} - \frac{xz - y^2 + 3}{xz} \right] =$$
$$= z(xy - z^2 + 1) - y(xz - y^2 + 3) = y^3 - 3y - z^3 + z$$
$$\mathrm{Spoly}(f_2, f_3) = -x^2y \left[\frac{-x^2 + yz + 2}{-x^2} - \frac{xz - y^2 + 3}{xz} \right] =$$
$$= z(-x^2 + yz + 2) + x(xz - y^2 + 3) = -xy^2 + 3z + yz^2 + 2z$$

5. Redukce polynomů

Definice 3. Řekneme, že polynom p se *redukuje modulo* q, jestliže v polynomu p existuje člen m, který je dělitelný vedoucím členem $LT(q)$

polynomu q. Za těchto předpokladů se polynom p redukuje na polynom $p - \frac{m}{LT(q)} \cdot q$. Píšeme pak

$$p \to_q p - \frac{m}{LT(q)} \cdot q = \overline{p}.$$

Obecněji, nechť $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ je jistá množina polynomů. Řekneme, že polynom p se redukuje modulo Q, jestliže existuje polynom $q_i \in Q$ takový, že $p \to_{q_i} \overline{p}$.

Pokud žádný člen polynomu p není dělitelný vedoucím členem polynomu q, pak říkáme, že polynom p je v *normálním tvaru vzhledem ke q*. Obdobně říkáme, že polynom p je v *normálním tvaru vzhledem k množině $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$*, jestliže žádný člen v polynomu p není dělitelný žádným z vedoucích členů polynomů q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 4. Je-li p normální tvar polynomu f vzhledem ke Q, tj. je-li p polynom, získaný z f provedením konečného počtu redukcí, přičemž p již neobsahuje žádný člen, který by byl dělitelný vedoucími členy polynomů z množiny Q, pak píšeme $p = \mathrm{normalf}(f, Q)$. Je-li speciálně $Q = \{q\}$ jednoprvková množina, píšeme pouze $p = \mathrm{normalf}(f, q)$.

Příklad 3. Nešel by polynom, který jsme získali jako S-polynom polynomů f_1, f_2 nějak zredukovat? Tento polynom má vedoucí člen xz^2. Podíváme se na vedoucí členy polynomů f_1, f_2, f_3. Hodil by se nám polynom f_3.

Polynom $\mathrm{Spoly}(f_1, f_2)$ označme p. Provedeme redukci našeho polynomu p modulo F:

$$\begin{aligned} p \to_F p - \frac{xz^2}{xz} \cdot f_3 &= p - z \cdot f_3 = \\ &= xz^2 - x - y^2z - 2y - xz^2 + y^2z - 3z = -x - 2y - 3z \end{aligned}$$

Tento polynom označíme f_4. Do množiny B přidáme dvojice $[1, 4]$, $[2, 4]$ a $[3, 4]$.

Polynom $\mathrm{Spoly}(f_1, f_3) = y^3 - 3y - z^3 + z$ zredukovat nelze. Označíme jej f_5 a do množiny B přidáme dvojice $[1, 5]$, $[2, 5]$, $[3, 5]$ a $[4, 5]$.

Dále označíme polynom $\mathrm{Spoly}(f_2, f_3)$ jako p_2 a provedeme redukci polynomu p_2 modulo f_1:

$$\begin{aligned} p_2 \to_F p_2 - \frac{-xy^2}{xy} \cdot f_1 &= p_2 + y \cdot f_1 = \\ &= -xy^2 + 3x + yz^2 + 2z + xy^2 - yz^2 + y = 3x + y + 2z \end{aligned}$$

Provedeme další redukci tohoto polynomu modulo f_4:

$$3x + y + 2z - \frac{3x}{-x} \cdot f_4 = 3x + y + 2z - 3x - 6y - 9z = -5y - 7z$$

Označme tento polynom f_6. Do množiny B přidáme dvojice $[1, 6]$, $[2, 6]$, $[3, 6]$, $[4, 6]$ a $[5, 6]$.

Definice 5. Množina $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ ($\forall t \in \mathbb{N}\colon t > 1$) se nazývá *Gröbnerova báze*, právě když pro všechny dvojice indexů i, j ($i \neq j$) dělení S-polynomů $\mathrm{Spoly}(g_i, g_j)$ všemi polynomy báze G (v jistém uspořádání) má vždy nulový zbytek ($r = 0$).

Věta 1 (Buchbergerův algoritmus určení Gröbnerovy báze)**.** *Gröbnerovu bázi* $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ ($\forall t \in \mathbb{N} : t > 1$) *lze sestrojit konečným počtem kroků podle algoritmu:*

1. *Vypočteme S-polynomy pro každou dvojici polynomů z množiny* $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ ($\forall s \in \mathbb{N} : s > 1$) *a určíme pro každý z nich zbytky po dělení polynomy* $f_1, f_2, \ldots, f_s$.
2. *Jestliže jsou všechny zbytky r po těchto děleních rovny nule* ($r = 0$), *pak jsme získali Gröbnerovu bázi G ($G = F$). Pokud je některý z těchto zbytků r nenulový, přidáme jej do původní množiny F a pro tuto rozšířenou množinu F' opakujeme stejný postup algoritmických kroků* 1, 2. *Opakování tohoto postupu provádíme tak dlouho, až všechny zbytky r budou nulové. Pak $G = F'$.*

Věta 2 (Nutná a postačující podmínka pro Gröbnerovu bázi)**.** *Báze* $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ *je Gröbnerovou bází, právě když pro všechna i, j ($i \neq j$) platí*

$$\mathrm{Spoly}(g_i, g_j) \to_G 0,$$

což značí redukci S-polynomů pomocí prvků množiny G na nulu.

Přitom postačující podmínkou pro redukci S-polynomu na nulu vyjadřuje následující věta, jež představuje kritérium Gröbnerovy báze alternativní k Buchbergerovu kritériu.

Věta 3 (Alternativní kritérium Gröbnerovy báze)**.** *Nechť množina polynomů G je konečná a existují takové polynomy $g_i, g_j \in G$, pro něž platí*

$$LCM(LM(g_i), LM(g_j)) = LM(g_i) \cdot LM(g_j),$$

pak je

$$\mathrm{Spoly}(g_i, g_j) \to_G 0.$$

Buchbergerův algoritmus pro výpočet Gröbnerovy báze:

```
# Je dána neprázdná množina polynomů P.
    # Urči Gröbnerovu bázi G, P ⊆ G.
    k ← length(P); G ← P
    # Do množiny G přejaty prvky množiny P, G = {g_1, g_2, ... g_k}.
    B ← {[i, j], 1 ≤ i < j ≤ k}
   while B ≠ ∅ do {
     [i, j] ← selectpair(B, G)
     B ← B − {[i, j]}
     h ← normalf(Spoly(g_i, g_j), G)
     if h ≠ 0 then {
       G ← G ∪ {h}; k ← k + 1
       B ← B ∪ {[i, k]}; 1 ≤ i  < k }}}
    return (G)
end
```

Následující kritérium nám ušetří práci:

Kritérium 1. *Je-li* $[i,j] \in B$ *taková dvojice indexů, že pro vedoucí monomy polynomů* $f_i, f_j \in G$ *platí*

$$LCM(LM(f_i), LM(f_j)) = LM(f_i) \cdot LM(f_j),$$

pak je

$$\text{normalf}(\text{Spoly}(f_i, f_j), \{f_i, f_j\}) = 0.$$

Příklad 4. Podle kritéria 1 můžeme vyškrtnout dvojice $[2,5]$, $[3,5]$, $[4,5]$ a také $[2,6]$, $[3,6]$, $[4,6]$. Pro tyto dvojice nemusíme počítat S-polynomy. Vypočteme jen $\text{Spoly}(f_1, f_4)$, $\text{Spoly}(f_2, f_4)$, $\text{Spoly}(f_3, f_4)$, $\text{Spoly}(f_1, f_5)$, $\text{Spoly}(f_1, f_6)$ a $\text{Spoly}(f_5, f_6)$.

Nejprve tedy vypočteme

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_1, f_4) &= -xy\left(\frac{xy - z^2 + 1}{xy} - \frac{-x - 2y - 3z}{-x}\right) = \\ &= -xy + z^2 - 1 + xy + 2y^2 + 3yz = 2y^2 + 3yz + z^2 - 1.\end{aligned}$$

Provedeme redukci polynomu $\text{Spoly}(f_1, f_4)$ modulo f_6

$$2y^2 + 3yz + z^2 - 1 + \tfrac{2}{5}y(-5y - 7z) = 3yz + z^2 - 1 - \tfrac{14}{5}yz = \tfrac{1}{5}yz + z^2 - 1.$$

Další redukce modulo f_6 je

$$\frac{1}{5}yz + z^2 - 1 + \frac{1}{25}z(-5y - 7z) = \frac{18}{25}z^2 - 1.$$

Tento polynom označíme f_7 a přidáme do množiny F.

Dále vypočteme

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_2, f_4) &= -x^2\left(\frac{-x^2 + yz + 2}{-x^2} - \frac{-x - 2y - 3z}{-x}\right) = \\ &= -x^2 + yz + 2 + x^2 + 2xy + 3xz = 2xy + 3xz + yz + 2.\end{aligned}$$

Provedeme redukci polynomu $\text{Spoly}(f_2, f_4)$ modulo f_1

$$2xy + 3xz + yz + 2 - 2(xy - z^2 + 1) = 3xz + yz + 2z^2.$$

Dále postupně provedeme několik redukcí vždy předem zredukovaného polynomu.

Redukce modulo f_3:

$$3xz + yz + 2z^2 - 3(xz - y^2 + 3) = 3y^2 + yz + 2z^2 - 9$$

Redukce modulo f_6:

$$3y^2 + yz + 2z^2 - 9 + \frac{3}{5}y(-5y - 7z) = -\frac{16}{5}yz + 2z^2 - 9$$

Redukce modulo f_6:

$$-\frac{16}{5}yz + 2z^2 - 9 - \frac{16}{25}z(-5y - 7z) = \frac{162}{25}z^2 - 9$$

Redukce modulo f_7:

$$\frac{162}{25}z^2 - 9 - 9\left(\frac{18}{25}z^2 - 1\right) = 0$$

Vypočteme S-polynom $\text{Spoly}(f_3, f_4)$

$$\begin{aligned}\text{Spoly}(f_3, f_4) &= -xz\left(\frac{xz - y^2 + 3}{xz} - \frac{-x - 2y - 3z}{-x}\right) = \\ &= -xz + y^2 - 3 + xz + 2yz + 3z^2 = y^2 + 2yz + 3z^2 - 3.\end{aligned}$$

Nyní provedeme redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_3, f_4)$ modulo f_6

$$y^2 + 2yz + 3z^2 - 3 + \frac{1}{5}y(-5y - 7z) = \frac{3}{5}yz + 3z^2 - 3$$

a uděláme několik redukcí předem zredukovaného polynomu.

Redukce modulo f_6:

$$\frac{3}{5}yz + 3z^2 - 3 + \frac{3}{25}z(-5y - 7z) = \frac{54}{25}z^2 - 3$$

Redukce modulo f_7:

$$\frac{54}{25}z^2 - 3 - 3\left(\frac{18}{25}z^2 - 1\right) = 0$$

Dále vypočteme

$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_5) = xy^3\left(\frac{xy - z^2 + 1}{xy} - \frac{y^3 - 3y - z^3 + z}{y^3}\right) =$$
$$= xy^3 - y^2z^2 + y^2 - xy^3 + 3xy + xz^3 - xz = 3xy + xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2$$

a redukci polynomu $\mathrm{Spoly}(f_1, f_5)$ modulo f_1

$$3xy + xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 - 3(xy - z^2 + 1) = xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3.$$

Jeho postupné další redukce mají následující tvary.

Redukce modulo f_3:

$$xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3 - z^2(xz - y^2 + 3) = -xz + y^2 - 3$$

Redukce modulo f_3:

$$-xz + y^2 - 3 + (xz - y^2 + 3) = 0$$

Dále vypočteme

$$\mathrm{Spoly}(f_1, f_6) = -5xy\left(\frac{xy - z^2 + 1}{xy} - \frac{-5y - 7z}{-5y}\right) =$$
$$= -5xy + 5z^2 - 5 + 5xy + 7xz = 7xz + 5z^2 - 5.$$

Provedeme redukci tohoto polynomu modulo f_4

$$7xz + 5z^2 - 5 + 7z(-x - 2y - 3z) = -14yz - 16z^2 - 5.$$

Dále pak provedeme redukci získaného polynomu modulo f_6

$$-14yz - 16z^2 - 5 - \frac{14}{5}z(-5y - 7z) = -16z^2 - 5 + \frac{98}{5}z^2 = \frac{18}{5}z^2 - 5$$

a tento polynom zredukujeme modulo f_7

$$\frac{18}{5}z^2 - 5 - 5\left(\frac{18}{25}z^2 - 1\right) = 0.$$

Dále vypočteme

$$\mathrm{Spoly}(f_5, f_6) = -5y^3\left(\frac{y^3 - 3y - z^3 + z}{y^3} - \frac{-5y - 7z}{-5y}\right) =$$
$$= -5y^3 + 15y + 5z^3 - 5z + 5y^3 + 7y^2z = 7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z.$$

Tento polynom zredukujeme modulo f_6

$$7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z + \frac{7}{5}yz(-5y - 7z) = -\frac{49}{5}yz^2 + 15y + 5z^3 - 5z.$$

Výsledný polynom lze ještě zredukovat modulo f_6

$$15y + 5z^3 - 5z - \frac{49}{5}yz^2 + 3(-5y - 7z) = -\frac{49}{5}yz^2 + 5z^3 - 26z.$$

Další redukci tohoto polynomu provedeme použitím stejného polynomu f_6

$$-\frac{49}{5}yz^2 + 5z^3 - 26z - \frac{49}{25}z^2(-5y - 7z) = 5z^3 - 26z + \frac{343}{25}z^3 = \frac{468}{25}z^3 - 26z.$$

Poslední redukce předchozího polynomu modulo f_7 je

$$\frac{468}{25}z^3 - 26z - \frac{26}{5}z\left(\frac{18}{5}z^2 - 5\right) = 0.$$

Musíme vypočítat ještě S-polynom polynomů f_3 a f_7

$$\mathrm{Spoly}(f_3, f_7) = \frac{18}{25}xz^2\left(\frac{xz - y^2 + 3}{xz} - \frac{\frac{18}{25}z^2 - 1}{\frac{18}{25}z^2}\right) =$$
$$= \frac{18}{25}xz^2 - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z - \frac{18}{25}xz^2 + x = x - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z.$$

Nejprve tento polynom zredukujeme modulo f_4

$$x - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z + (-x - 2y - 3z) =$$
$$= -\frac{18}{25}y^2z - 2y + \frac{54}{25}z - 3z = -\frac{18}{25}y^2z - 2y - \frac{21}{25}z.$$

Další redukce budou použity na vždy nově získaný polynom.

Redukce modulo f_6:

$$-\frac{18}{25}y^2z - 2y - \frac{21}{25}z - \frac{18}{125}yz(-5y - 7z) = -2y - \frac{21}{25}z + \frac{126}{125}yz^2$$

Další redukce modulo f_6:

$$-2y - \frac{21}{25}z + \frac{126}{125}yz^2 - \frac{2}{5}(-5y - 7z) = \frac{126}{125}yz^2 + \frac{49}{25}z$$

Další redukce modulo f_7:

$$\frac{126}{125}yz^2 + \frac{49}{25}z - \frac{7}{5}y\left(\frac{18}{25}z^2 - 1\right) = \frac{7}{5}y + \frac{49}{25}z$$

Další redukce modulo f_6:

$$\frac{7}{5}y + \frac{49}{25}z + \frac{7}{25}y(-5y - 7z) = 0$$

Označme získanou množinu polynomů G:

$$G = \{xy - z^2 + 1, -x^2 + yz + 2, xz - y^2 + 3,$$
$$- x - 2y - 3z, y^3 - 3y - z^3 + z, -5y - 7z, \tfrac{18}{25}z^2 - 1\}$$

Získaná Gröbnerova báze G je často větší, než je nutné.

5. Poslední výpočty

Definice 6. Řekneme, že Gröbnerova báze G je redukovaná, jestliže pro všechny polynomy $g \in G$ je $g = \mathrm{normalf}(g, G - \{g\})$. Dále řekneme, že Gröbnerova báze G je monická, jestliže pro všechna jeho $g \in G$ je $LC(g) = 1$.

Je možné získat Gröbnerovu bázi redukovanou a monickou, a to provedením následujícího:

[1] odstranění „přebytečných“ prvků

foreach $g \in G$ do {
 if there exist $p \in G - \{g\}$ such that $LT(p)|LT(g)$
 then $G \leftarrow G - \{g\}$
}

[2] redukovaná, monická Gröbnerova báze

foreach $g \in G$ do {
 $g \leftarrow \text{normalf}(g, G - \{g\})$
 $g \leftarrow \frac{1}{LC(g)} \cdot g$
}

Příklad 5. Projdeme nyní část „redukčního algoritmu“ a zjistíme, které polynomy vyškrtnout. Jelikož $LT(f_4) \mid LT(f_1)$, neboli $-x \mid xy$, vyškrtneme tedy polynom f_1. Jelikož $LT(f_4) \mid LT(f_2)$, vyškrtneme i polynom f_2, a jelikož $LT(f_4) \mid LT(f_3)$, vyškrtneme také polynom f_3. (Zde znak $\mid$ představuje dělitelnost.) Získali jsme redukovanou bázi

$$G = \{-x - 2y - 3z, y^3 - 3y - z^3 + z, -5y - 7z, \tfrac{18}{25}z^2 - 1\}.$$

Z rovnice $\frac{18}{25}z^2 - 1 = 0$ získáme $z = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Z rovnice $-5y - 7z = 0$ dopočteme $y = \mp\frac{7}{3\sqrt{2}}$. Z rovnice $-x - 2y - 3z = 0$ získáme $x = \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Dostáváme 2 řešení soustavy:

$$\left[-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{7}{3\sqrt{2}}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right] \text{ a } \left[\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{7}{3\sqrt{2}}, -\frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

Platí následující věta, která říká, že získaná soustava rovnic je ekvivalentní s původní soustavou.

Věta 4. *Nechť je dána soustava polynomiálních rovnic*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

a buď $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ *Gröbnerova báze při jistém přípustném uspořádání monomů. Pak soustava*

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

je ekvivalentní se soustavou rovnic (1).

6. Druhý způsob získání Gröbnerovy báze

Příklad 6. Využijeme větu 1 (Buchbergerův algoritmus určení Gröbnerovy báze). Vypočteme opět $\mathrm{Spoly}(f_1, f_2)$, $\mathrm{Spoly}(f_1, f_3)$, $\mathrm{Spoly}(f_2, f_3)$ a použijeme pseudodělení polynomů.

Vezmeme získaný polynom $\mathrm{Spoly}(f_1, f_2)$ a dělíme ho polynomy množiny F:

$$\begin{array}{c} (xz^2 - x - y^2z - 2y) \\ \\ \underline{-(xz^2 - y^2z + 3z)} \\ -x - 2y - 3z \end{array} \qquad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ z \end{cases}$$

Dále nelze dělit, polynom $xz^2 - x - y^2z - 2y$ můžeme vyjádřit jako

$$z(xz - y^2 + 3) + (-x - 2y - 3z).$$

Získali jsme zbytek $-x - 2y - 3z$, který přidáme do množiny F.

Vezmeme další polynom $\mathrm{Spoly}(f_1, f_3)$ a dělíme polynomy množiny F:

$$\begin{array}{c} (y^3 - 3y - z^3 + z) \\ \\ \underline{\qquad 0 \qquad} \\ y^3 - 3y - z^3 + z \end{array} \qquad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xy - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ 0 \end{cases}$$

Zbytek $y^3 - 3y - z^3 + z$ přidáme do množiny F.

Vezmeme Spoly(f_2, f_3) a provedeme další pseudodělení:

$$(-xy^2 + 3x + yz^2 + 2z) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \end{cases} = \begin{cases} -y \\ \\ \\ -3 \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(-xy^2 + yz^2 - y) \\ \hline 3x + y + 2z \\ -(3x + 6y + 9z) \\ \hline -5y - 7z \end{array}$$

Polynom $-xy^2 + 3x + yz^2 + 2z$ lze vyjádřit jako

$$-y(xy - z^2 + 1) - 3(-x - 2y - 3z) - 5y - 7z.$$

Do množiny F přidáme další zbytek $-5y - 7z$.

Do původní množiny F jsme přidali polynomy $f_4 = -x - 2y - 3z$, $f_5 = y^3 - 3y - z^3 + z$ a $f_6 = -5y - 7z$.

Všechny S-polynomy máme vypočtené v příkladu 4.

$$(2y^2 + 3yz + z^2 - 1) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{2}{5}y - \frac{1}{25}z \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(2y^2 + \frac{14}{5}yz) \\ \hline \frac{1}{5}yz + z^2 - 1 \\ -\left(\frac{1}{5}yz + \frac{7}{25}z^2\right) \\ \hline \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{array}$$

Tento zbytek $f_7 = \frac{18}{25}z^2 - 1$ přidáme do množiny F.

$$
(2xy+3xz+yz+2) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1 \\ -x^2+yz+2 \\ xz-y^2+3 \\ -x-2y-3z \\ y^3-3y-z^3+z \\ -5y-7z \\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} 2 \\ \\ 3 \\ \\ \\ -\frac{3}{5}y+\frac{16}{25}z \\ 9 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(2xy-2z^2+2 \\ \hline
3xz+yz+2z^2 \\
-(3xz-3y^2+9) \\ \hline
3y^2+yz+2z^2-9 \\
-(3y^2+\frac{21}{5}yz) \\ \hline
-\frac{16}{5}yz+2z^2-9 \\
-\left(-\frac{16}{5}yz-\frac{112}{25}z^2\right) \\ \hline
\frac{162}{25}z^2-9 \\
-\left(\frac{162}{25}z^2-9\right) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(y^2+2yz+3z^2-3) \quad : \begin{cases} xy-z^2+1 \\ -x^2+yz+2 \\ xz-y^2+3 \\ -x-2y-3z \\ y^3-3y-z^3+z \\ -5y-7z \\ \frac{18}{25}z^2-1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{1}{5}y-\frac{3}{25}z \\ 3 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(y^2+\frac{7}{5}yz) \\ \hline
\frac{3}{5}yz+3z^2-3 \\
-\left(\frac{3}{5}yz+\frac{21}{25}z^2\right) \\ \hline
\frac{54}{25}z^2-3 \\
-\left(\frac{54}{25}z^2-3\right) \\ \hline
0
\end{array}
$$

$$
(3xy + xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 \\ \\ z^2 - 1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(3xy - 3z^2 + 3) \\
\hline
xz^3 - xz - y^2z^2 + y^2 + 3z^2 - 3 \\
-(xz^3 - y^2z^2 + 3z^2) \\
\hline
-xz + y^2 - 3 \\
-(-xz + y^2 - 3) \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$
(7xz + 5z^2 - 5) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ 7 \\ \\ \\ -\frac{7}{5}y + \frac{49}{25}z \\ 26 \end{cases}
$$

$$
\begin{array}{c}
-(7xz - 7y^2 + 21) \\
\hline
7y^2 + 5z^2 - 26 \\
-(7y^2 + \frac{49}{5}yz) \\
\hline
-\frac{49}{5}yz + 5z^2 - 26 \\
-(-\frac{49}{5}yz - \frac{343}{25}z^2) \\
\hline
\frac{468}{25}z^2 - 26 \\
-(\frac{468}{25}z^2 - 26) \\
\hline
0
\end{array}
$$

$$(7y^2z + 15y + 5z^3 - 5z) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ \\ \\ -\frac{7}{5}yz + \frac{49}{25}z^2 - 3 \\ 26z \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(7y^2z + \frac{49}{5}yz^2) \\ \hline -\frac{49}{5}yz^2 + 15y + 5z^3 - 5z \\ -(\frac{49}{5}yz^2 - \frac{343}{25}z^3) \\ \hline 15y + \frac{468}{25}z^3 - 5z \\ -(15y + 21z) \\ \hline \frac{468}{25}z^3 - 26z \\ -(\frac{468}{25}z^3 - 26z) \\ \hline 0 \end{array}$$

Spoly(f_3, f_7) máme také vypočtený v předchozí části.

$$(x - \frac{18}{25}y^2z + \frac{54}{25}z) \quad : \begin{cases} xy - z^2 + 1 \\ -x^2 + yz + 2 \\ xz - y^2 + 3 \\ -x - 2y - 3z \\ y^3 - 3y - z^3 + z \\ -5y - 7z \\ \frac{18}{25}z^2 - 1 \end{cases} = \begin{cases} \\ \\ \\ -1 \\ \\ \frac{18}{125}yz + \frac{2}{5} - \frac{126}{625}z^2 \\ -\frac{49}{25}z \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -(x + 2y + 3z) \\ \hline -\frac{18}{25}y^2z - 2y - \frac{21}{25}z \\ -(-\frac{18}{25}y^2z - \frac{126}{125}yz^2) \\ \hline -2y + \frac{126}{125}yz^2 - \frac{21}{25}z \\ -(-2y - \frac{14}{5}z) \\ \hline \frac{126}{125}yz^2 + \frac{49}{25}z \\ -(\frac{126}{125}yz^2 + \frac{882}{625}z^3) \\ \hline -\frac{882}{625}z^3 + \frac{49}{25}z) \\ -(-\frac{882}{625}z^3 + \frac{49}{25}z) \\ \hline 0 \end{array}$$

Získali jsme tedy Gröbnerovu bázi

$$G = \{xy - z^2 + 1,\ -x^2 + yz + 2,\ xz - y^2 + 3,\\ y^3 - 3y - z^3 + z,\ -5y - 7z,\ \tfrac{18}{25}z^2 - 1\}\,.$$

Redukovanou bázi a řešení soustavy rovnic bychom získali obdobně jako v předchozím způsobu.

Závěr

Postup, jak získat Gröbnerovu bázi, je zdlouhavý. Redukovanou a monickou bázi získáme vždy jen jednu, ačkoliv mohou být výpočty rozdílné. Získaná soustava rovnic bývá snáze řešitelná než původní soustava. Šlo by tedy říci, že algoritmus zvyšuje úspěšnost řešení soustav rovnic, když nás nenapadají hned nějaké efektivní matematické úpravy či triky.

Využití Gröbnerových bází je rozsáhlé [1–5], např. při řešení úloh na hledání bodů dané vlastnosti, při převodu parametrického vyjádření afinní variety na implicitní tvar. Při automatickém dokazování geometrických tvrzení využíváme vyjádření geometrických tvrzení ve tvaru polynomiálních rovnic, můžeme tedy využít Gröbnerovy báze a Buchbergerův algoritmus. Gröbnerovy báze se využívají v kryptografu, např. při kryptoanalýze blokových šifer. Algebraická kryptoanalýza převádí problém prolomení kryptosystému na problém nalezení řešení soustavy polynomiálních rovnic.

Literatura

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: *Ideals, Varieties and Algorithms – An Introduction to Computational, Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Second Edition. Springer-Verlag, New York, 1997.

[2] Heck, A.: *A Bird's-Eye View of Gröbner Bases.* CAN Expertise Center, Amsterdam, 1996.

[3] Hora, J.: *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole – II. díl.* Pedagogické centrum, Plzeň, 1998.

[4] Polák, J.: Řešení soustav polynomických rovnic. *Matematika–fyzika–informatika*, roč. 31 (2022), č. 2, s. 81–100.

[5] Stanovský, D., Barto, L.: *Počítačová algebra.* MatfyzPress, Praha, 2017.

Několik krás elementární geometrie

František Kuřina, UHK, Hradec Králové

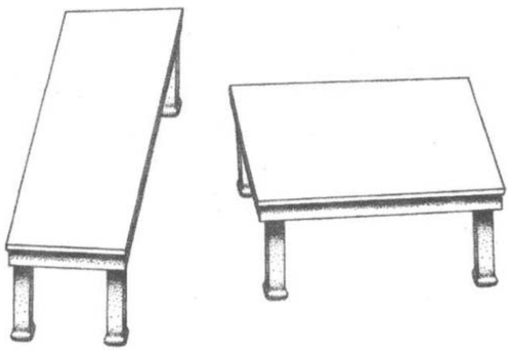
ABSTRAKT. *Článek prezentuje řešení třinácti úloh z elementární geometrie základní školy.*

1. Úvod

Účastníkům konference bylo předloženo několik zajímavých úloh z [1] a [2], které byly následně společně řešeny. Třináct těchto úloh i s řešením nyní odprezentujeme. Přitom vycházíme ze zdroje [3, s. 85–93].

2. Prezentace úloh

Úloha 1. Jsou rovnoběžníky (obrazy desek stolů) na obr. 1 shodné?

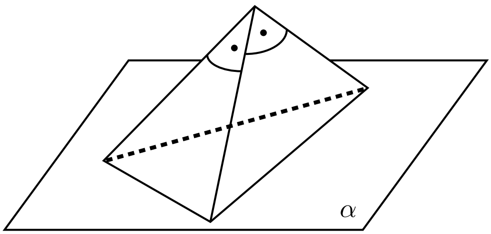


Obr. 1: Desky stolu ([1])

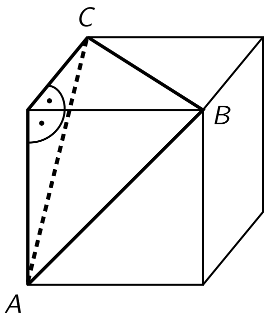
Řešení s komentáři. Odpověď na otázku byla většinou „ne". Bylo tedy třeba několik usměrňovacích otázek: Jak byste v 6. třídě řešili tuto úlohu? (Vystřihnutím a přiložením.) A nechceme-li stříhat? (Budeme měřit.) Stačí změřit délky stran rovnoběžníků? (Ne, čtverec a kosočtverec mohou mít strany shodné.) Jediný mnohoúhelník určený délkami svých stran je trojúhelník. (Musíme změřit dvě strany a úhlopříčku.) Rovnoběžníky na obr. 1 jsou kupodivu shodné.

Úloha 2. Je možné, aby středy všech kružnic opsaných všem stěnám čtyřstěnu ležely v jedné rovině?

Řešení s komentáři. Opět negativní odpověď byla usměrněna obr. 2. Mají-li středy opsaných kružnic ležet v rovině jedné stěny (např. v rovině dolní podstavy čtyřstěnu), musí ležet středy zbývajících kružnic na hranách čtyřstěnu a podle Thaletovy věty musí mít zbývající stěny u společného vrcholu pravé úhly (obr. 2). Takovýto čtyřstěn si můžeme představit odříznutím jednoho vrcholu krychle rovinou ABC (obr. 3).



Obr. 2: Čtyřstěn na rovině α

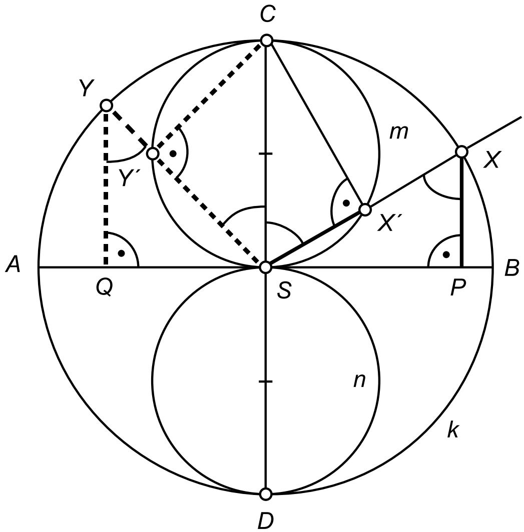


Obr. 3: Čtyřstěn jako část krychle

Úloha 3. Je možné, aby obrazem kružnice byly dvě kružnice?

Řešení s komentáři. Úloha byla v této formulaci obtížná. Měla by znít takto: Je dána kružnice k se středem S a průměry AB a CD (obr. 4). Určete obraz kružnice k v zobrazení, které libovolnému bodu $X \in k$ přiřazuje bod X' polopřímky SX, jehož vzdálenost od bodu S je rovna vzdálenosti bodu X od přímky AB.

Snadno nahlédneme, že trojúhelníky SXP a CSX' jsou shodné a podle Thaletovy věty leží bod X' na kružnici s průměrem CS. Probíhá-li bod X kružnicí k, probíhají body X' kružnice m, n. Obrazem kružnice jsou tedy dvě kružnice.

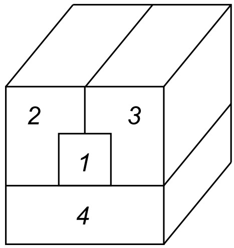


Obr. 4: Konstrukce obrazu bodu

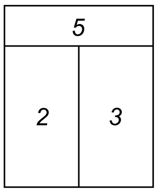
Úloha 4. Kolik existuje a) hranolů, b) čtyřstěnů tak, aby každý měl část stěny společnou se všemi zbývajícími stěnami (třeba jen úsečku nebo bod)?

Řešení s komentáři. Krychli můžeme rozdělit na hranoly 1, 2, 3, 4, z nichž každý má část stěny společnou se třemi zbývajícími (obr. 5). Další konstrukci můžeme sledovat při pohledu shora (obr. 6). Přidáním kvádru 5 k zadní stěně krychle máme 5 těles, která splňují podmínky. Nakonec můžeme „obalit“ tuto sestavu hranolem, který má podstavu tvaru písmene L a 6 těles takto vzniklých má tu vlastnost, že každé z nich sousedí s 5 zbývajícími (obr. 7).

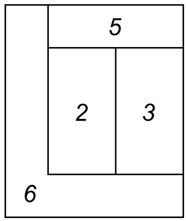
Konstrukce čtyřstěnů, z nichž každý sousedí se zbývajícími, se nám patrně nebude dařit. Zkusme tedy rovinnou analogii naší úlohy: Sestrojit několik trojúhelníků tak, aby každý sousedil s každým. Po chvíli experimentování najdeme čtyři takové trojúhelníky (obr. 8). Tyto trojúhelníky můžeme považovat za podstavy 4 čtyřstěnů, z nichž každý sousedí s každým ze zbývajících. Tuto konstrukci můžeme provést i v opačném poloprostoru. Vhodným uspořádáním podstav čtyřstěnů ve společné rovině podle obr. 9 dostaneme 8 čtyřstěnů, z nichž každý sousedí se 7 zbývajícími.



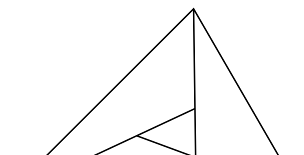
Obr. 5: Dělení krychle na 4 části



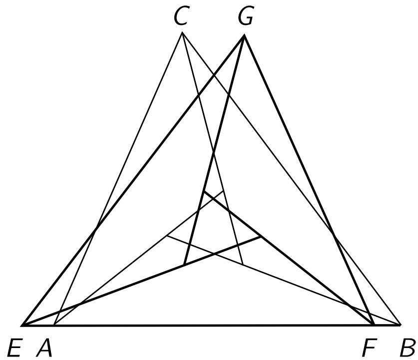
Obr. 6: Přidání kvádru 5



Obr. 7: Přidání hranolu 6



Obr. 8: Dělení trojúhelníku

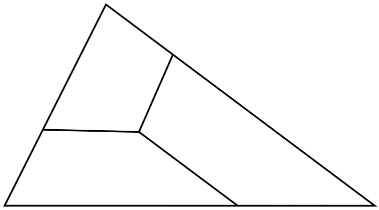


Obr. 9: Podstavy osmi čtyřstěnů

Úloha 5. Rozdělte trojúhelník na lichoběžníky.

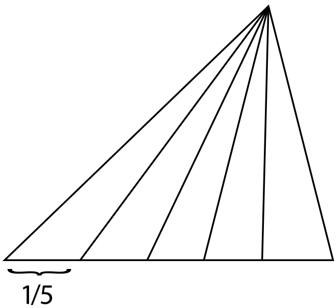
Řešení s komentáři. Tuto úlohu vyřešil ihned jeden z účastníků dílny nakreslením obr. 10. Bodem uvnitř trojúhelníku vedl úsečky rovnoběžné se stranami trojúhelníku.

Úloha 6. Rozdělte trojúhelník na pět částí téhož obsahu.

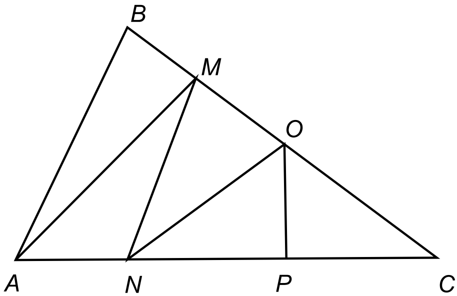


Obr. 10: Dělení trojúhelníku na lichoběžníky

Řešení s komentáři. Řada účastníků viděla ihned dělení podle obr. 11. Nalézt „cikcak“ dělení (obr. 12) dělalo vážné problémy. Přitom si stačí uvědomit, že trojúhelník ABM má obsah $\frac{1}{5}$ obsahu S trojúhelníku ABC: stačí sestrojit výšku ke straně AB, která je $\frac{1}{5}$ výšky trojúhelníku ABC. Trojúhelník AMC má obsah $\frac{4}{5}S$. K určení bodu N tedy stačí zkonstruovat výšku ke straně AM, která je $\frac{1}{4}$ výšky ke straně AM trojúhelníku AMC. Pak pokračujeme analogicky.



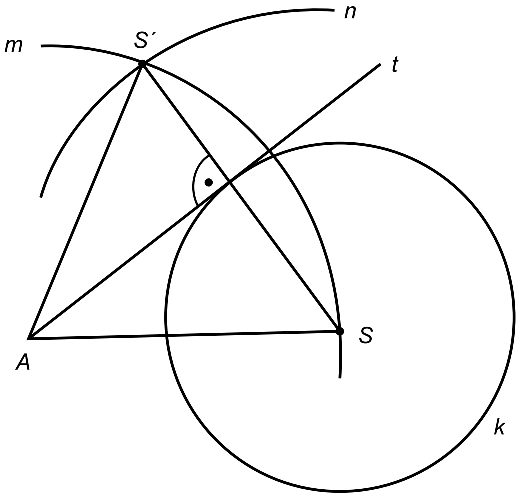
Obr. 11: Dělení trojúhelníku rozdělením jedné strany



Obr. 12: Cik–cak dělení

Úloha 7. Je možné eukleidovsky sestrojit tečny z bodu ke kružnici bez znalosti Thaletovy kružnice?

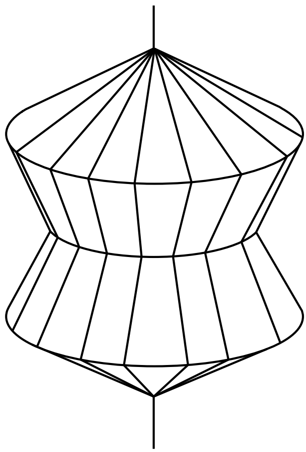
Řešení s komentáři. Znalost známého postupu byla brzdou objevení nového postupu. Zde připomeňme konstrukci Jana Vyšína [2]. Máme sestrojit tečnu t kružnice $k(S, r)$, která prochází bodem A (obr. 13). V souměrnosti podle dosud neznámé tečky t je obrazem středu S bod S', pro který platí $|SS'| = 2r$, $|AS'| = |AS|$. Bod S' můžeme sestrojit jako průsečík kružnic $n(S, 2r)$ a $m(A, |AS|)$. Tečna t je osou úsečky SS'.



Obr. 13: Tečna z bodu ke kružnici ([2])

Úloha 8. Nakreslete těleso, které vznikne rotací obdélníku kolem jeho úhlopříčky.

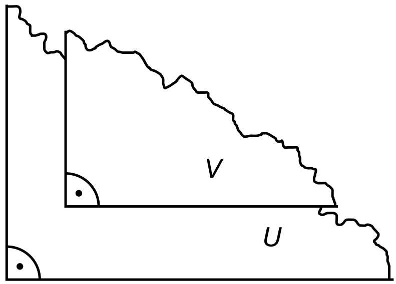
Řešení s komentáři. Úlohu můžeme začít řešit experimentem. Uchopme obdélník z tužšího papíru dvěma prsty v krajních bodech jeho úhlopříčky. Fouknutím obdélník roztočme a těleso můžeme vidět (obr. 14).



Obr. 14: Rotace obdélníku

Úloha 9. Sestrojte geometrické útvary U a V tak, aby platilo zároveň: U je shodný s V, V je částí U, ale U není částí V. Je to možné?

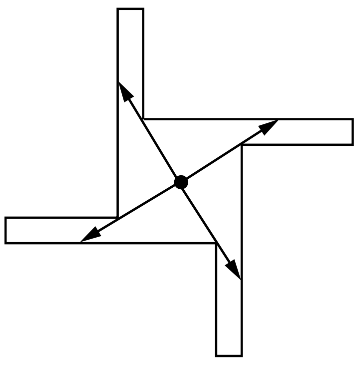
Řešení s komentáři. Tato úloha dělala účastníkům velké potíže. Většina dávala najevo, že takové útvary neexistují. Po nakreslení obr. 15 někdo vykřikl: „To je chyták." Chyták to ale není. Úloha vede k rozšíření představy geometrických útvarů jako útvarů omezených na útvary neomezené.



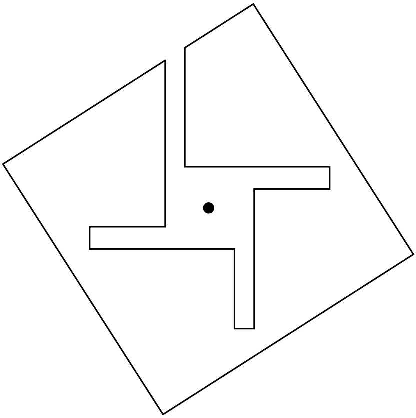
Obr. 15: Shodné úhly

Úloha 10. Nakreslete mnohoúhelník, který má tuto vlastnost: Z některého bodu jeho a) vnitřku, b) vnějšku není vidět žádná jeho strana celá. Existují takové útvary?

Řešení s komentáři. V úkolu a) po řadě neúspěšných pokusů byl nakreslen obr. 16, který účastníci s úlevou přijali. Obtížnější úlohu b) jedna kolegyně vyřešila (obr. 17).



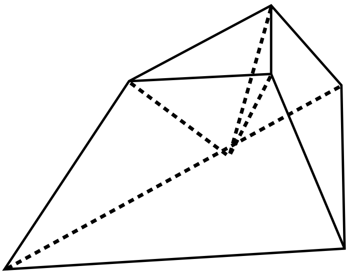
Obr. 16: Z vyznačeného bodu není vidět žádná vnitřní strana celá



Obr. 17: Z vyznačeného bodu není vidět žádná vnější strana celá

Úloha 11. Překládáním papírového rovnostranného trojúhelníku můžeme získat síť tělesa. Kolik takových těles existuje?

Řešení s komentáři. Snad každý účastník dílny navrhl pravidelný čtyřstěn. Jedna kolegyně přišla s návrhem na obr. 18. V konstrukci můžeme pokračovat „kmitáním“ malých čtyřstěnů. Úloha má nekonečně mnoho řešení.



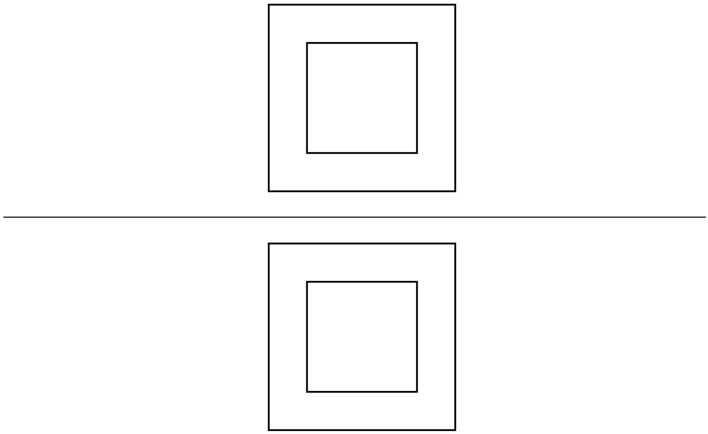
Obr. 18: Těleso z trojúhelníkové sítě

Úloha 12. Na obr. 19 je nárys a půdorys tělesa. Kterého?

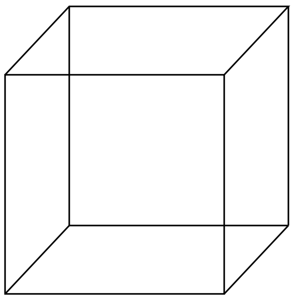
Řešení s komentáři. Řešení ponecháváme na čtenáři, není obtížné.

Úloha 13. Jaké těleso je nakresleno na obr. 20?

Řešení s komentáři. Řešení ponecháváme na čtenáři, není obtížné.



Obr. 19: Stejný nárys a půdorys



Obr. 20: To není krychle

3. Závěr

Podle názoru autora článku splnila dílna svůj účel. Ve spolupráci všech účastníků byla vyřešena většina úloh.

Literatura

[1] Halliman, J.: *Proč děláme chyby*. Beta, Praha, 2010.

[2] Vyšín, J.: *Elementární geometrie I*. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[3] `https://jum.ujep.cz/wp-content/uploads/2022/06/JUM_2021_sbornik.pdf`

Podzimní škola péče o talenty s mezinárodní účastí MAKOS v datech

Josef Molnár, PřF UP, Olomouc – Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

Abstrakt. *Článek prezentuje u příležitosti jubilea vznik a podstatu již tradiční konference MAKOS. Hlavní pozornost je ale věnována statistickým údajům o této konferenci, a to osobám organizujícím a účastnícím se konference, místům konání, sborníkům z konference atd. Zdůrazněn je význam konference pro vznik soutěže Matematický klokan v České republice.*

S blížícím se podzimem se tažní ptáci houfují k odletu do teplých krajin a pracovníci z oblasti péče o talentované žáky v matematice se posledních třicet let chystají na MAKOS.

Jak to všechno začalo? Na setkání kolegů pracujících s matematickými talenty, které se konalo počátkem 90. let v Modre na Slovensku, jsme se seznámili s řadou organizátorů matematických korespondenčních seminářů. A tak se *Josef Molnár* a *Jaroslav Švrček* rozhodli uspořádat *Pracovní seminář vedoucích MKS a dalších pracovníků z oblasti péče o talenty*, který se uskutečnil 11.– 13. 11. 1992 ve Zlatých Horách–Horním Údolí. V následujícím roce, konkrétně 1.– 5. 11. 1993, se na tomtéž místě konal první ročník podzimní školy péče o talenty se zahraniční účastí s názvem MAKOS. Tedy vloni jsme se sešli po třicáté na 29. ročníku MAKOSu.

Součet počtu účastníků všech dosavadních ročníků překročil tisícovku, nejvíce účastníků (53) bylo hned na třetím ročníku ve Zlatých Horách, naopak nejméně (16) na 28. ročníku v Čejkovicích v kovidovém roce 2020. Stoprocentní účast na všech ročnících má jen *Jaroslav Zhouf*, jednu neúčast má hlavní pořadatel Josef Molnár, 25 účastí mají Jaroslav Švrček a Pavel Calábek, 24 setkání absolvovala Jana Vaňková a 21 Józef Kalinowski z Polska. Další zahraniční účastnící pocházeli ze Slovenska, Bulharska, Rakouska, Polska, Ukrajiny a Ruska. Bohužel desítka účastníků si už další účast nepřipíše.

Podzimní školy, které garantuje olomoucká pobočka JČMF, se konaly na 19 místech České republiky, která jsou rozmístěna ve 12 krajích (na svou příležitost čeká kraj Západočeský a Praha); pětkrát jsme se sešli v Janských Lázních, čtyřikrát ve Zlatých Horách – Horním Údolí a na Zadově, dvakrát v Čejkovicích. Mezi pořadatele jednotlivých setkání patří zejména kolegové Jaroslav Švrček, Josef Molnár, Jan Raška, Pavel Tlustý, Jaroslav Zhouf, Petr Mazouch a Věra Olšáková.

Na 3. ročníku v roce 1994 byla vyhlášena soutěž Matematický klokan (dále MK) pro Českou republiku, která se koná od roku 1995 doposud a do které se v roce 2019 zapojilo více než 405 tisíc řešitelů. MAKOS se tak stal kolébkou a později i chůvou a platformou pro rozvoj soutěže Matematický klokan, a to nejen v ČR.

Průběh každého ročníku je zaznamenán ve sbornících [2], ze kterých bylo zjištěno, že bylo vysloveno celkem 367 přednášek více než stovkou přednášejících, nejčastěji vystupujícími byli Josef Molnár (26×), Jaroslav Zhouf (24×), Jaroslav Švrček (23x), Tomáš Zdráhal (19x), Pavel Calábek (18x), Józef Kalinowski (17x), Emil Calda a Petr Rys (13x), Radek Horenský (12x), Jakub Fischer (11x), Pavel Tlustý, Vladimír Vaněk a Eva Zelendová (10x). ´

Další významní účastníci: Jan Šula, ústřední školský inspektor MŠMT, Alena Šolcová, současná předsedkyně JČMF, Antonín Vrba, předseda komise pro talenty JČMF, Robert Geretschläger, hlavní pořadatel MK v Rakousku, Pavel Jarek, hlavní pořadatel MK v Polsku, Kiril Bankov, prezident Světové federace národních matematických soutěží WFNMC, Svetoslav Jordanov Bilchev, Lev Davidovič Kourliandchik, Alexej Kirilovič Tolpygo a Iliana Tzvetkova, autoři publikací, úloh a činovníci národních i mezinárodních matematických olympiád, Jaromír Šimša, předseda výboru MO ČR, Karel Horák, tajemník výboru MO ČR, Jakub Fischer, statutární zástupce rektorky VŠE v Praze.

Letošní 30. ročník MAKOSu se bude konat 28. 9. – 1. 10. 2022 v Karlově pod Pradědem [1].

Do dalších let si tedy přejme: *Ani jeden MAKOS nazmar*

Literatura

[1] Raušerová, D., Molnár, J.: *MAKOS 30 let.* Vydavatelství UP, Olomouc, 2022 (v tisku).

[2] *Sborníky MAKOS 1993–2021.* Na jejich pořádání a vydávání se podíleli: Calábek, P., Cihlář, J., Fischer, J., Hofmanová, P., Kačenka, P., Kučera, M., Mazouch, P., Molnár, J., Olšáková, V., Raušerová, D., Raška, J., Růžičková, L., Rys, P., Švrček, J., Tlustý, P., Vaněk, V., Zhouf, J.

Hillova šifra a lineární diofantovské rovnice

Michal Musílek, UHK, Hradec Králové

ABSTRAKT. *Článek je věnován Hillově šifře, v níž jsou k šifrování a dešifrování využívány matice, maticové operace a také operace modulo aplikovaná na jednotlivé prvky. Při šifrování se využívá bijekce množiny zbytků po dělení určitým přirozeným číslem na množinu znaků použité šifrové abecedy. Pro dešifrování je navržen algoritmus založený na luštění systému lineárních diofantovských rovnic. Potenciálně pracné výpočty výrazně urychlí vhodný software. Motivující je propojení matematiky ze 3. stol. n. l. s maticovým počtem.*

1. Úvod

V roce 1929 popsal americký matematik a kryptolog Lester Sanders Hill (1891–1961) šifrový systém založený na algebraických operacích s maticemi. Co může mít jeden z nejvýznamnějších amerických kryptologů první poloviny 20. století společného s řeckým matematikem Diofantem z Alexandrie, který žil ve 3. století? K odpovědi na tuto otázku se dostaneme v závěru článku, až se budeme zabývat dešifrováním textu získaného prostřednictvím Hillovy šifry.

V tuto chvíli si pouze připomeneme, že diofantovské (též diofantické) rovnice jsou neurčité polynomiální rovnice, které dovolují proměnným nabývat pouze celočíselné hodnoty. Protože jakýkoliv diofantovský problém přestavuje soustavu diofantovských rovnic, kterých je méně než neznámých, je i ta nejjednodušší lineární diofantovská rovnice rovnicí o dvou neznámých a má obecný tvar

$$ax + by = c.$$

Zajímavou úlohou je také Diofantův epitaf, z něhož lze vypočíst věk, kterého se proslulý matematik, působící ve slavné egyptské Alexandrijské knihovně, dožil (viz [1]):

Zde leží Diofantos, jaký to div,
algebra poví, jak dlouho byl živ:
Bůh dal mu dětský věk šestinu žití,
dvanáctinu pak, než vous mohl míti.
Po další sedmině svou ženu si vzal

a za pět let otcem syna se stal.
Ach, ubohé to dítě mudrce a pána!
Žil dvakrát míň než otec a už mu zvoní hrana!
Ještě čtyři léta do čísel se nořil,
než i jeho čas se konečně završil.

Čtenář snadno nahlédne, že v uvedených verších je pouze jedna neznámá x, tedy se nemůže jednat o diofantovskou rovnici, ale o obyčejnou lineární rovnici

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

V intuitivním řešení nám ovšem může pomoci, že hledaný věk x, kterého se Diofantos dožil, by měl být z množiny přirozených čísel a navíc by měl být beze zbytku dělitelný čísly 2, 6, 12 a 7. Protože však 2 a 6 jsou děliteli 12, stačí hledat nejmenší společný násobek čísel 12 a 7. Protože jsou navíc čísla 12 a 7 nesoudělná, jedná se o jejich součin $12 \cdot 7 = 84$. Že je číslo 84 skutečně řešením dané lineární rovnice, ověříme snadno dosazením:

$$\frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} + 5 + \frac{84}{2} + 4 = 84$$

$$14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$$

2. Hillova šifra

Nyní se ale vraťme k Hillově šifře, která představuje zajímavou aplikaci maticového počtu do kryptologie. Pro studenty, kteří se seznamují se základy maticového počtu, to může být velmi motivující ukázka využití práce s maticemi, v rámci níž využijí operace násobení matic a výpočet inverzní matice k dané regulární matici.

Pro převod písmen otevřeného textu budeme potřebovat převodovou tabulku, v jejímž horním řádku budou písmena šifrové abecedy a v dolním řádku jim odpovídající čísla, označující pořadí písmene v rámci dané abecedy. Ačkoliv se běžně při šifrování odstraní veškerá diakritická znaménka, v tomto případě použijeme nejen písmena latinky bez diakritiky (A až Z), kterých je celkem 26, ale přidáme také písmena s háčky Č, Ě, Ř, Š a Ž, čímž získáme abecedu s 31 znaky. Prvočíselný počet znaků abecedy je pro šifrování Hillovou šifrou výhodný. Převodová tabulka tedy bude (tab. 1):

A	B	C	Č	D	E	Ě	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

O	P	Q	R	Ř	S	Š	T	U	V	W	X	Y	Z	Ž
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Tab. 1: Převod písmen šifrové abecedy na čísla z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 29, 30\}$

Číslování začínající nulou je potřeba zvolit proto, že v dalších úvahách se objeví binární operace *zbytek po celočíselném dělení*, kterou budeme značit

$$a \bmod b, \quad a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}.$$

Jako klíč pro šifrování navrhl Lester S. Hill použít čtvercovou matici K řádu m, která musí splňovat dvě podmínky:

1. Determinant matice a počet znaků použité abecedy jsou nesoudělná čísla.

2. Matice je regulární.

V našem případě zvolíme heslo DIOFANTOS, takže matice K bude:

$$K = \begin{pmatrix} D & I & O \\ F & A & N \\ T & O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 7 & 0 & 15 \\ 23 & 16 & 21 \end{pmatrix}$$

Determinant této matice můžeme vypočítat různými způsoby, např.

a) pomocí Sarrusova pravidla,

b) využitím tabulkového procesoru MS Excel – funkce DETERMINANT(A1;C3),

c) prostřednictvím maticové kalkulačky na webu `https://matrixcalc.org/cs/`.

V každém případě zjistíme, že determinant matice K je $|K| = 2812$. Matice K díky tomu splňuje obě požadované podmínky:

1. Determinant matice a počet znaků použité abecedy jsou nesoudělná čísla.

Protože počet znaků použité abecedy je prvočíslo 31, musel by být, v případě soudělnosti, determinant $|K|$ tímto daným prvočíslem dělitelný beze zbytku. Protože však $2812 \bmod 31 = 22$, jde o čísla nesoudělná.

2. Matice je regulární.

Matice je regulární právě tehdy, když její determinant je různý od nuly. Matice K je tedy regulární.

3. Postup šifrování prostřednictvím Hillovy šifry

Nyní si přepíšeme do podoby matice také otevřený text určený k šifrování. Matice P už nebude čtvercová, ale obdélníková. Musí mít ale stejný počet řádků, jako je řád čtvercové matice K dané zvoleným heslem. Zašifrujeme text MATEMATICKÝM TALENTŮM ZDAR.

$$K = \begin{pmatrix} M & E & T & K & T & E & U & D \\ A & M & I & Y & A & N & M & A \\ T & A & C & M & L & T & Z & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 23 & 12 & 23 & 5 & 24 & 4 \\ 0 & 14 & 10 & 28 & 0 & 15 & 14 & 0 \\ 23 & 0 & 2 & 14 & 13 & 23 & 29 & 19 \end{pmatrix}$$

Vlastní šifrování proběhne ve třech krocích. První krok spočívá v násobení matic $K \cdot P$. Ve druhém kroku se na jednotlivé prvky výsledné matice aplikuje operace *zbytek po celočíselném dělení*, kde dělitelem je počet prvků šifrové abecedy, v našem případě číslo $n = 31$. Třetím krokem je převod čísel z množiny $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\}$ na odpovídající písmena podle převodové tab. 1. Tedy:

$$M = K \cdot P = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 7 & 0 & 15 \\ 23 & 16 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 5 & 23 & 12 & 23 & 5 & 24 & 4 \\ 0 & 14 & 10 & 28 & 0 & 15 & 14 & 0 \\ 23 & 0 & 2 & 14 & 13 & 23 & 29 & 19 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 424 & 160 & 224 & 552 & 300 & 538 & 700 & 320 \\ 443 & 35 & 191 & 294 & 356 & 380 & 603 & 313 \\ 805 & 339 & 731 & 1018 & 802 & 838 & 1385 & 491 \end{pmatrix}$$

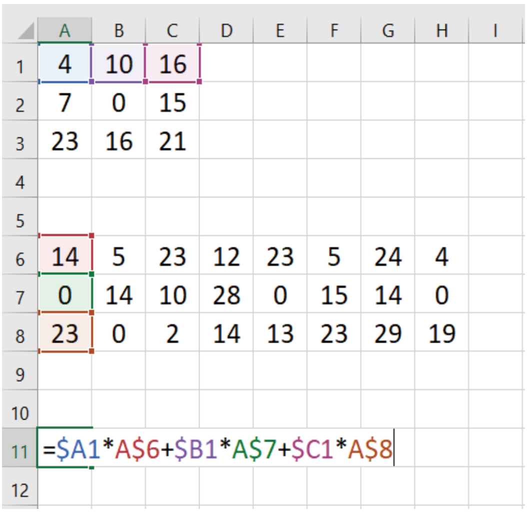
$$C = M \bmod n = M \bmod 31 = \begin{pmatrix} 21 & 5 & 7 & 25 & 21 & 11 & 18 & 10 \\ 9 & 4 & 5 & 15 & 15 & 8 & 14 & 3 \\ 30 & 29 & 18 & 26 & 27 & 1 & 21 & 21 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} S & E & F & V & S & J & Q & I \\ H & D & E & N & N & G & M & \check{C} \\ \check{Z} & Z & Q & W & X & B & S & S \end{pmatrix}$$

Nakonec je zvykem přepsat výsledný šifrový text do skupin po pěti znacích: SHŽED ZFEQV NWSNX JGBQM SIČS

4. Počítačová podpora maticových výpočtů a šifrování

Uvedený maticový výpočet je vhodnou příležitostí k procvičení práce se vzorci v Excelu, tabulkovém procesoru firmy Microsoft. Na obr. 1 jsou prvky čtvercové matice K zapsány do oblasti buněk A1:C3 a prvky obdélníkové matice P do oblasti buněk A6:H8. Potom je třeba do levého horního rohu oblasti A11:H13, tedy do buňky A11 zapsat vzorec pro výpočet prvku matice $M = K \cdot P$. Tento vzorec vhodně kombinuje absolutní odkazy, které jsou označeny symbolem $ před názvem sloupce, nebo řádku, s relativními odkazy. Když pak tento vzorec rozkopírujeme do celé oblasti A11:H13 pomocí příkazů Ctrl+R (kopíruj vpravo) a Ctrl+D (kopíruj dolů), získáme všechny prvky součinu matic K a P.



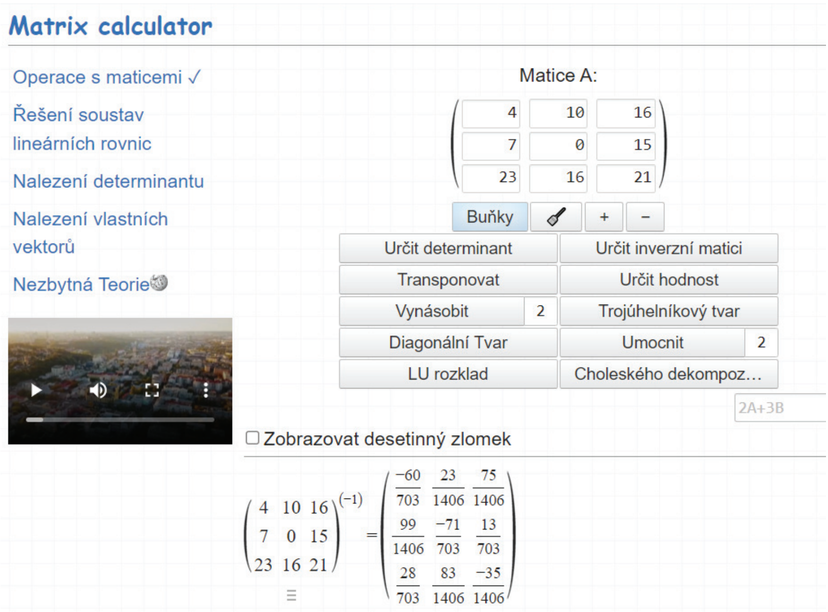
Obr. 1: Vytvoření součinu matic v tabulkovém procesoru MS Excel

Podobným způsobem bychom mohli vypočítat také determinant matice, když bychom např. vytvořili vzorec pro Sarrusovo pravidlo, které ovšem platí pouze pro determinant matice řádu 3.

Druhou, univerzálnější možností je využít vestavenou funkci MS Excel DETERMINANT(A1:C3).

Jinou možností využití počítače pro podporu maticových výpočtů je využití webového nástroje Matrix calculator, který najdeme na webové stránce `https://matrixcalc.org/cs/` a pomocí něhož zvládneme jak násobení matic, tak výpočet determinantu, viz obr. 2.

Další kroky algoritmu šifrování můžeme implementovat do tabulky v MS Excel. Velmi snadno aplikujeme na jednotlivé prvky matice operaci modulo, která je podobně jako výpočet determinantu vestavěnou funkcí, a to MOD(A11;31). Složitější je následný převod čísel z množiny $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 30\}$ na písmena šifrové abecedy. To je vhodný úkol pro studenty informatiky v rámci cvičení z předmětu programování, protože takový převod je možné implementovat jako makro ve skriptovacím jazyce Visual Basic for Applications.



Obr. 2: Rozhraní interaktivního webového nástroje Matrix calculator

5. Postup dešifrování prostřednictvím Hillovy šifry

Nyní přichází na řadu algoritmus pro dešifrování prostřednictvím Hillovy šifry. Příjemce obdrží šifrový text:

SHŽED ZFEQV NWSNX JGBQM SIČS

Dále ví, že k šifrování zprávy byl použit klíč v podobě čtvercové matice K:

$$K = \begin{pmatrix} D & I & O \\ F & A & N \\ T & O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 7 & 0 & 15 \\ 23 & 16 & 21 \end{pmatrix}$$

Protože je dešifrování inverzním postupem k šifrování, nevyužije přímo matici K, ale musí vypočítat matici k ní inverzní, kterou označujeme K^{-1}. Inverzní matici vypočteme nejrychleji s využitím tabulkového procesoru MS Excel, nebo pomocí nástroje Matrix calculator. Výpočet je možné provést také tužkou na papír – použít Gaussovu–Jordanovu eliminační metodu. Pro další postup je vhodné zbavit se zlomků uvnitř matice tím, že před ní vytkneme převrácenou hodnotu determinantu $|K|$. Matici, která vznikne z K^{-1} vytknutím $|K^{-1}|$, označíme L:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 16 \\ 7 & 0 & 15 \\ 23 & 16 & 21 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{60}{703} & \frac{23}{1406} & \frac{75}{1406} \\ \frac{99}{1406} & -\frac{71}{703} & \frac{13}{703} \\ \frac{28}{703} & \frac{83}{1406} & -\frac{35}{1406} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2812} \cdot \begin{pmatrix} -240 & 46 & 150 \\ 198 & -284 & 52 \\ 112 & 166 & -70 \end{pmatrix} = |K^{-1}| \cdot L$$

Takto připravený dešifrovací klíč aplikujeme na matici šifrového textu C, kterou získáme převodem z obdrženého šifrového textu:

$$A = |K^{-1}| \cdot L \cdot C =$$

$$= \frac{1}{2812} \cdot \begin{pmatrix} -240 & 46 & 150 \\ 198 & -284 & 52 \\ 112 & 166 & -70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & F & V & S & J & Q & I \\ H & D & E & N & N & G & M & \check{C} \\ \check{Z} & Z & Q & W & X & B & S & S \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2812} \cdot \begin{pmatrix} -240 & 46 & 150 \\ 198 & -284 & 52 \\ 112 & 166 & -70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 & 5 & 7 & 25 & 21 & 11 & 18 & 10 \\ 9 & 4 & 5 & 15 & 15 & 8 & 14 & 3 \\ 30 & 29 & 18 & 26 & 27 & 1 & 21 & 21 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2812} \cdot \begin{pmatrix} -126 & 3334 & 1250 & -1410 & -300 & -2122 & -526 & 1638 \\ 3162 & 1362 & 902 & 2042 & 1302 & -42 & 680 & 2480 \\ 1746 & -806 & 354 & 3470 & 2952 & 2490 & 2870 & -202 \end{pmatrix}$$

Ještě označíme $W = L \cdot C$, takže můžeme psát $A = |K^{-1}| \cdot W$.

Problém s výslednou obdélníkovou maticí A je ten, že neobsahuje čísla z konečné množiny $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$, ale nejrůznější zlomky, které vznikly při šifrování aplikací operace zbytek po celočíselném dělení, kde dělitelem je počet prvků šifrové abecedy, v našem případě číslo $n = 31$, na matici vzniklou maticovým násobením, kde prvním operandem byl klíč, tedy čtvercová matice K (z angl. Key) a druhým operandem otevřený text, přepsaný do obdélníkové matice P (z angl. Plaintext).

Z uvedeného důvodu nemůžeme při dešifrování získat otevřený text jednoduchým vynásobením matice W převrácenou hodnotou determinantu matice klíče $|K^{-1}|$, ale pro každý prvek w_{ij} matice W musíme hledat řešení diofantovské rovnice

$$w_{ij} = nx_{ij} + |K|y_{ij}, \text{ v našem případě } w_{ij} = 31x_{ij} + 2812y_{ij}.$$

Protože takovou diofatntovskou rovnici musíme sestavit pro každý z prvků vypočtené matice $W = L \cdot C$, můžeme stručně psát

$$W = n \cdot X + |K| \cdot Y, \text{ v našem případě } W = 31 \cdot X + 2812 \cdot Y.$$

Máme tedy systém lineárních diofantovských rovnic, které jsou na sobě vzájemně zcela nezávislé a z nichž každá má dvě neznámé, jejichž hodnotu hledáme v oboru celých čísel. Nejedná se tedy o soustavu rovnic!

Jednoduše lze ukázat, že má-li lineární diofantovská rovnice s celočíselnými koeficienty nějaké celočíselné řešení, pak má celočíselných řešení nekonečně mnoho. Nechť je dvojice hodnot $[x_0, y_0]$ různá od $[0, 0]$ řešením rovnice $c = ax + by$, pak jsou řešením takové rovnice také všechny dvojice $[x_0 + kbx_0y_0, y_0 - kax_0y_0]$; $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} c &= ax_0 + by_0 + kabx_0y_0 - kabx_0y_0, \\ c &= ax_0 + kabx_0y_0 + by_0 - kabx_0y_0, \\ c &= a(x_0 + kbx_0y_0) + b(y_0 - kax_0y_0). \end{aligned}$$

Pro námi sledovaný systém lineárních diofantovských rovnic, řešených v rámci luštění, či dešifrování textu vzniklého aplikací Hillovy šifry s šifrovou abecedou s n prvky však existuje právě jedno řešení každé jednotlivé diofantovské rovnice, pro které hodnota neznámé y odpovídá jednomu ze znaků dané šifrové abecedy, a tedy je splněna podmínka $y \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Lze tedy lineární diofantovské rovnice z daného systému $W = nX + |K|Y$, v našem případě $W = 31 \cdot X + 2812 \cdot Y$, řešit tak, že za neznámou y dosazujeme postupně hodnoty z konečné množiny $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$, v našem případě $\{0, 1, 2, 3, \dots, 28, 29, 30\}$, a hledáme takové řešení, pro které i hodnota neznámé x vychází celočíselná.

6. Počítačová podpora řešení lineárních diofantovských rovnic v rámci Hillovy šifry

Metoda řešení lineární diofantovské rovnice o dvou neznámých, dosazením za jednu z neznámých, představuje množství rutinních výpočtů s celými čísly, které by nebylo příjemné provádět ručně. I v tomto případě nám výpočty výrazně urychlí a zefektivní tabulkový procesor MS Excel. Připravíme si v něm tabulku s několika řádky, jejíž část vidíme na obr. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	c =	-126																	
2																			
3	písmeno	A	B	C	Č	D	E	Ě	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
4	y =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	2812.y =	0	2812	5624	8436	11248	14060	16872	19684	22496	25308	28120	30932	33744	36556	39368	42180	44992	47804
6	2812.y - c =	126	2938	5750	8562	11374	14186	16998	19810	22622	25434	28246	31058	33870	36682	39494	42306	45118	47930
7	mod 31 =	2	24	15	6	28	19	10	1	23	14	5	27	18	9	0	22	13	4
8																			

Obr. 3: Vytvoření nástroje pro dešifrování Hillovy šifry v tabulkovém procesoru MS Excel

V řádku 1 je vstupní pole s hodnotou čísla c, prvku matice W, k němuž hledáme příslušné písmeno otevřeného textu, řádek 2 je prázdný. Počínaje řádkem 3 jsou připravena data odpovídající konkrétním hodnotám počtu znaků šifrové abecedy $n = 31$ a determinantu matice klíče $|K| = 2812$. Konkrétně řádek 3 obsahuje všechny znaky šifrové abecedy, v našem případě se jedná o písmena A, B, C, Č, D, E, Ě, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, Ř, S, Š, T, U, V, W, X, Y, Z a Ž. Řádek 4 zrcadlí tyto znaky šifrové abecedy do jejich číselné hodnoty, která je postupně 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 a 30, tyto hodnoty představují hodnoty neznámé y, které jsou v rámci tabulky dosazeny do konkrétní lineární diofantovské rovnice. Řádek 5 obsahuje tytéž hodnoty vynásobené determinantem klíče $|K| = 2812$. Čísla v řádku 6 získáme z hodnot v řádku 5 odečtením čísla c, k němuž hledáme odpovídající znak šifrové abecedy. A poslední řádek 7 představuje test celočíselnosti druhé neznámé x. Pokud má být hodnota x celé číslo, musí být hodnota v řádku 6, tj. $|K|y - c$ dělitelná číslem n. V našem případě $2812y - c$ musí být dělitelné číslem 31. Opět použijeme vestavěnou funkci MOD(B6;31), kterou rozkopírujeme z buňky B7 doprava, tedy do dalších sloupců C až AF. Řešení rovnice nalezneme v tom sloupci, ve kterém vyjde v řádku 7 zbytek po dělení nula, tedy tam, kde jsou oba kořeny rovnice celočíselné. Abychom řešení nalezli co nejrychleji, pomůžeme si podmíněným formátováním a buňky v řádku 7, které mají hodnotu rovnu nule, barevně zvýrazníme. Na obr. 3 je zvýrazněna buňka P7, která odpovídá v rámci šifrové abecedy písmenu M. Číslo $c = -126$ v matici W tedy odpovídá písmenu M. Tímto způsobem postupně dešifrujeme všechna písmena tajné zprávy.

Pro prvních sedm písmen šifrového textu postupně dostáváme:

- rovnice
$$-126 = 31x_{1,1} + 2812y_{1,1}$$
má řešení $x_{1,1} = -1274$, $y_{1,1} = 14$
- rovnice
$$3162 = 31x_{2,1} + 2812y_{2,1}$$
má řešení $x_{2,1} = 102$, $y_{2,1} = 0$
- rovnice
$$1746 = 31x_{3,1} + 2812y_{3,1}$$
má řešení $x_{3,1} = -2030$, $y_{3,1} = 23$
- rovnice
$$3334 = 31x_{1,2} + 2812y_{1,2}$$
má řešení $x_{1,2} = -346$, $y_{1,2} = 5$
- rovnice
$$1362 = 31x_{2,2} + 2812y_{2,2}$$
má řešení $x_{2,2} = -1226$, $y_{2,2} = 14$

- rovnice

$$-806 = 31x_{3,2} + 2812y_{3,2}$$

má řešení $x_{3,2} = -26$, $y_{3,2} = 0$

- rovnice

$$1250 = 31x_{1,3} + 2812y_{1,3}$$

má řešení $x_{1,3} = -2046$, $y_{1,3} = 23$

Těmto číslům odpovídají písmena M, A, T, E, M, A, T. Jestliže provedeme výpočet pro všech 24 prvků matice W, dostaneme otevřený text zprávy: MATEMATICKYM TALENTUM ZDAR.

7. Metodické a didaktické poznámky

Princip Hillovy šifry bývá v publikacích věnovaných kryptologii zpravidla jen stručně zmíněn, viz např. [2]. Proto zájemci o tento zajímavý šifrový systém nezbývá než promyslet detaily šifrovacích a dešifrovacích algoritmů a jejich možnou implementaci do prostředí tabulkového procesoru MS Excel samostatně. Algoritmus navržený v tomto článku využívá matematiku, kterou studoval Diofantos z Alexandrie ve 3. stol. n. l., k dešifrování maticové šifry, kterou zkonstruovat Lester Sanders Hill ve 20. stol., a navíc urychluje a usnadňuje rutinní výpočty vhodným využitím digitálních technologií.

Téma lze zařadit jako rozšiřující do výuky maticového počtu, ať již v rámci úvodního kurzu matematiky v bakalářském studiu na vysoké škole, nebo v matematickém semináři na gymnáziu, případně v kurzu programování – při práci s dvourozměrnými poli. Jistě zaujme matematicky talentované studenty a část z nich povzbudí k hlubšímu zájmu o rozmanité aplikace matematiky v kryptologii.

Literatura

[1] Willers, M.: *Algebra bez (m)učení: Od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě: fascinující čísla a rovnice.* Grada, Praha, 2012.

[2] Zelenka, J., Čapek, J., Francek, J., Janáková, H.: *Ochrana dat. Kryptologie.* Gaudeamus, Hradec Králové, 2003.

Lze žít bez Abaku?

Alena Vávrová, ZŠ Kodaňská, Praha

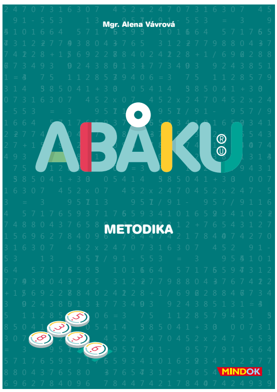
Abstrakt. *Článek krátce referuje o poměrně populární hře Abaku. Popisuje její pravidla a hodnotí její vliv na školáky, kterým je primárně určena.*

Abaku je scrablová hra, kde se na desce místo slov z písmen skládají z číslic příklady (rovnosti). Ty se tvoří bez používání matematických symbolů. Pravidla povolují základní matematické operace, druhou a třetí mocninu a odmocninu (bez použití symbolů). Příklady na desce se čtou zleva doprava a shora dolů. Pořadí zápisu je:

číslo (operace) číslo (rovná se) číslo

Například skupina čísel 15690 se čte $15 \cdot 6 = 90$. Příklady se mohou řetězit, navazovat na sebe. Například uvedená skupina 15690 v sobě ještě obsahuje $1 + 5 = 6$ a $15 - 6 = 9$.

Abaku není jen desková hra. Má propracovanou metodiku (obr. 1) a řadu dalších pomůcek, jako jsou karty a kostky. Existuje spousta hravých aktivit na procvičování, která z Abaku dělá vhodné prostředí do výuky.



Obr. 1

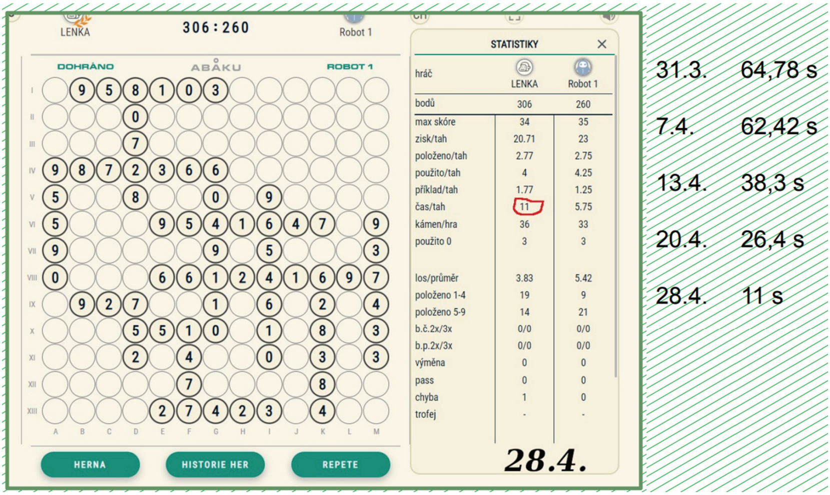
Od prvních chvil, co jsme začali využívat Abaku při výuce, se vedly diskuse, jak velký vliv má Abaku na početní dovednosti dětí. Vznikly na to téma diplomové práce, byly pokusy testovat dovednosti dětí před a po nějaké době užívání Abaku. Nic z toho nemělo tak průkazné výsledky, abychom mohli jásat, že máme super zdokonalující metodu. A hlavně nic z toho nestačilo přesvědčit zástupy pochybovačů.

Po cca deseti letech využívání Abaku při výuce matematiky na druhém stupni je možné říci, že jsou rozdíly mezi třídami s výrazným zapojením Abaku a třídami „abakem nepolíbenými“. Jenže rozdíly to jsou neuchopitelné, statisticky nevýznamné – jedna škola, specifické podmínky, desítky dětí.

Uveďme případ Lenky, žákyně osmé třídy. Dívka má slabé výsledky, velmi pomalé osobní tempo. Látka osmé třídy (výrazy, rovnice) už zdaleka přesahuje její možnosti, tak raději sáhne po Abaku. Hraje pravidelně s robotem (obr. 2).

Online hraní umožňuje sledovat řadu parametrů, v tomto případě byl nejzajímavější vývoj průměrného času potřebného na jeden tah.

Nejdůležitější ale je, že děti Abaku baví. Hrají si s čísly a utvrzují si pozitivní vztah k matematice.



Obr. 2

Literatura

[1] https://hry.seznam.cz/hra/abaku

[2] https://abaku.org/deskova-hra

[3] http://www.deskove-hry.eu/abaku

Informace o publikacích vydavatelství Portál II

Jaroslav Zhouf, FIT ČVUT, Praha

Abstrakt. *V článku je prezentována jedna populární matematická publikace vydavatelství Portál. Z této publikace jsou prezentovány konkrétní problémy, jejich řešení je ale ponecháno na čtenáři.*

1. Úvod

Tento článek je pokračováním článku [4]. Opět se jedná o prezentaci publikace vydavatelství Portál. Toto vydavatelství vydává mimo jiné knihy, které populárně prezentují slavné matematiky a jejich, a nejenom jejich, matematické poznatky. Na minulé konferenci byly prezentovány publikace *Jakou barvu má medvěd* a *Přijdou tři logici do baru.*

Nyní je prezentována publikace *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*, která obsahuje mnoho matematických příběhů, hádanek, hlavolamů s úkoly k řešení, mnoho starých historek, a řadu logických úloh a paradoxů. Kniha je napsána zábavnou formou, která navazuje na předchozí publikace jiných autorů. Úlohy jsou různé obtížnosti pro žáky všech stupňů škol, ale i pro dospělé čtenáře.

V několika následujících kapitolách se nebude jednat přímo o citované publikaci, ale o jejích předchůdkyních, které byly inspirací k napsání sledované knihy.

2. Tisíc a jedna noc

Kniha *Tisíc a jedna noc*, nebo v české verzi *Pohádky tisíce a jedné noci*, kterou připravili spisovatel František Hrubín a ilustrátor Jiří Trnka, má však svůj počátek v dávné minulosti.

Jedná se o středověkou arabskou anonymní sbírku lidových pohádek, bajek, anekdot a dalších příběhů.

Nejstarší část sbírky je indického původu ze začátku 1. tisíciletí. Poté se dostala sbírka do Persie a v 3. až 7. století přibyly další části. Následně v 7. až 13. století sbírku vlastnili Arabové a opět se rozšířila. Do sbírky byly doplněny i náměty mezopotámské, řecké, byzantské, židovské. Pak se sbírka dostala do Egypta a i tam se sbírka zvětšovala zhruba do 16. století.

Originály sbírky z éry indické a éry perské se nedochovaly, tak se většinou uvádí, že sbírka je původu arabského a že vznikala v 7. až 16. století. Dvě ilustrace arabského rukopisu sbírky jsou uvedeny na obr. 1 a 2 (zdroj [1]).

Obr. 1

Obr. 2

Z Egypta nakonec přivezl sbírku v 17. století francouzský orientalista a archeolog Antoine Galland do Paříže a přeložil ji pod názvem *Tisíc a jedna noc.*

Jaký je obsah této sbírky?

Základním schématem celé knihy je vyprávění moudré a krásné Šahrazád krutému králi Šahrijárovi. Šahrijár byl kdysi oklamán svou manželkou, která se milovala s otroky. Král nechal otroky popravit a sám zanevřel na ženy. Od té doby se každý den oženil s jinou pannou, strávil s ní noc a ráno ji nechal popravit. Po třech letech už nebyla ve městě žádná panna, tak Šahrijárův vezír měl přivést odněkud další dívku. Šahrazád, dcera vezíra, chtěla svému otci pomoci. Nabídla se králi, že bude jeho další ženou, ale že mu bude večer vyprávět nějaký příběh. Král souhlasil. Šahrazád tedy večer začala vyprávět příběh, který byl ale delší a bylo třeba u něj přemýšlet, takže se Šahrazád podařilo příběh nedokončit. Král byl ale zvědavý, jak to dopadlo, tak Šahrazád nepopravil. Druhou noc Šahrazád příběh dokončila a začala nový, ale opět ho nedokončila. A tak se to dělo tisíc a jednu noc. Šahrazád mezitím porodila tři syny, tak ji král nakonec nechal na živu.

Šahrazád byla a je mezi čtenáři oblíbenou a uznávanou postavou, takže ji ztvárnilo mnoho umělců. Jedno takové dílo je na obr. 3, jejím autorem je Sophie Gengembre Andersonová.

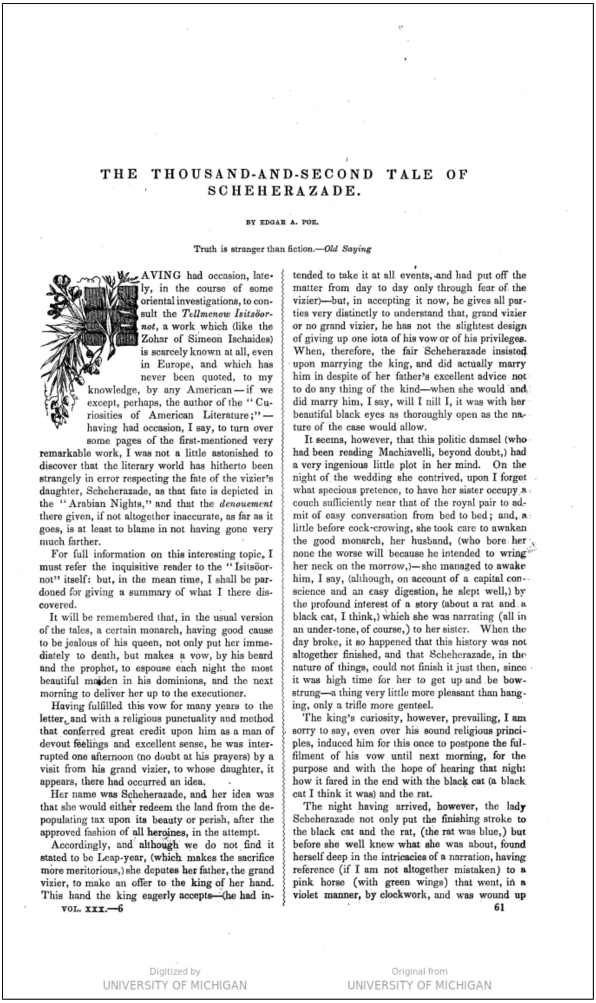
Obr. 3

3. Tisící druhá pohádka Šeherezády

V roce 1845 napsal Edgar Alan Poe ironickou povídku *Tisící druhá pohádka Šeherezády* reagující na sbírku *Tisíc a jedna noc*, kde Poe „uvádí věc na pravou míru“.

Poe tvrdí, že když králova zloba na ženy pominula, že Šeherezáda řekla královi, že její vyprávění o zázracích nebyla tak úplně pravdivá, protože v současné době jsou již popisované zázraky běžnou činností. Král se rozzlobil, zastavil Šeherezádu, že už to prý nemůže poslouchat.

A druhý den byla Šeherezáda popravena. Úvodní strana jednoho výtisku povídky je na obr. 4 [2].



THE THOUSAND-AND-SECOND TALE OF SCHEHERAZADE.

BY EDGAR A. POE.

Truth is stranger than fiction.—*Old Saying*

HAVING had occasion, lately, in the course of some oriental investigations, to consult the *Tellmenow Isitsöornot*, a work which (like the Zohar of Simeon Ischaides) is scarcely known at all, even in Europe, and which has never been quoted, to my knowledge, by any American — if we except, perhaps, the author of the "Curiosities of American Literature;" — having had occasion, I say, to turn over some pages of the first-mentioned very remarkable work, I was not a little astonished to discover that the literary world has hitherto been strangely in error respecting the fate of the vizier's daughter, Scheherazade, as that fate is depicted in the "Arabian Nights," and that the *denouement* there given, if not altogether inaccurate, as far as it goes, is at least to blame in not having gone very much farther.

For full information on this interesting topic, I must refer the inquisitive reader to the "Isitsöornot" itself: but, in the mean time, I shall be pardoned for giving a summary of what I there discovered.

It will be remembered that, in the usual version of the tales, a certain monarch, having good cause to be jealous of his queen, not only put her immediately to death, but makes a vow, by his beard and the prophet, to espouse each night the most beautiful maiden in his dominions, and the next morning to deliver her up to the executioner.

Having fulfilled this vow for many years to the letter, and with a religious punctuality and method that conferred great credit upon him as a man of devout feelings and excellent sense, he was interrupted one afternoon (no doubt at his prayers) by a visit from his grand vizier, to whose daughter, it appears, there had occurred an idea.

Her name was Scheherazade, and her idea was that she would either redeem the land from the depopulating tax upon its beauty or perish, after the approved fashion of all heroines, in the attempt.

Accordingly, and although we do not find it stated to be Leap-year, (which makes the sacrifice more meritorious,) she deputes her father, the grand vizier, to make an offer to the king of her hand. This hand the king eagerly accepts—(he had intended to take it at all events, and had put off the matter from day to day only through fear of the vizier)—but, in accepting it now, he gives all parties very distinctly to understand that, grand vizier or no grand vizier, he has not the slightest design of giving up one iota of his vow or of his privileges. When, therefore, the fair Scheherazade insisted upon marrying the king, and did actually marry him in despite of her father's excellent advice not to do any thing of the kind—when she would and did marry him, I say, will I nill I, it was with her beautiful black eyes as thoroughly open as the nature of the case would allow.

It seems, however, that this politic damsel (who had been reading Machiavelli, beyond doubt,) had a very ingenious little plot in her mind. On the night of the wedding she contrived, upon I forget what specious pretence, to have her sister occupy a couch sufficiently near that of the royal pair to admit of easy conversation from bed to bed; and, a little before cock-crowing, she took care to awaken the good monarch, her husband, (who bore her none the worse will because he intended to wring her neck on the morrow,)—she managed to awake him, I say, (although, on account of a capital conscience and an easy digestion, he slept well,) by the profound interest of a story (about a rat and a black cat, I think,) which she was narrating (all in an under-tone, of course,) to her sister. When the day broke, it so happened that this history was not altogether finished, and that Scheherazade, in the nature of things, could not finish it just then, since it was high time for her to get up and be bowstrung—a thing very little more pleasant than hanging, only a trifle more genteel.

The king's curiosity, however, prevailing, I am sorry to say, even over his sound religious principles, induced him for this once to postpone the fulfilment of his vow until next morning, for the purpose and with the hope of hearing that night how it fared in the end with the black cat (a black cat I think it was) and the rat.

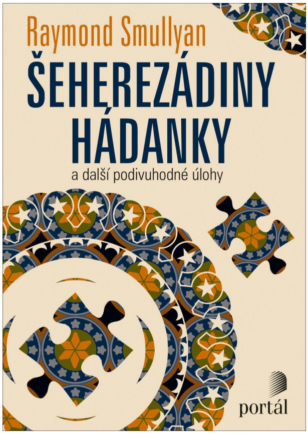
The night having arrived, however, the lady Scheherazade not only put the finishing stroke to the black cat and the rat, (the rat was blue,) but before she well knew what she was about, found herself deep in the intricacies of a narration, having reference (if I am not altogether mistaken) to a pink horse (with green wings) that went, in a violent manner, by clockwork, and was wound up

VOL. XXX.—6 61

Obr. 4

4. Šeherezádiny hádanky

Kniha má celý název *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy* [3] (v originále *The riddle of Scheherezade*). Jejím autorem je Raymond M. Smullyan. Kniha byla napsána v roce 1997. Přední strana její obálky je na obr. 5.



Obr. 5

Raymond Smullyan byl americký matematik, logik a filosof, začínal však jako kouzelník.

Prezentovaná kniha vyšla v českém jazyce v nakladatelství Portál v letech 2004 a 2020. V publikaci je 235 logických problémů, které jsou zajímavé často vtipným řešením.

Smullyan chtěl uveřejnit mnoho logických problémů a hádanek ve své knížce a chtěl nějakým zajímavým způsobem upoutat pozornost na tuto knížku, proto celý text ponořil do pohádky, která je pokračováním jeho dvou předchůdců.

Smullyan v úvodu své knížky tvrdí, že „získal další materiál Jetotakčine, kde je opět vše o Šeherezádě uvedeno na pravou míru“. Prý Šeherezáda nebyla popravena. Tedy Šeherezáda zde pokračuje ve vyprávění dalších, hlavně logických příběhů. Smullyan popisuje Šeherezádu jako „ženu s tak úžasným logickým myšlením, že by jí mohli závidět i ti největší myslitelé naší doby“.

Kniha je rozdělena na dvě části. V první části pokračují příběhy od tisící třetí do tisící třinácté noci, ve druhé části prezentuje Šeherezáda moderní logické úlohy. Kniha má tento obsah:

Kniha první: Největší hádanky Šeherezády

Kapitola I *Zdroj*

Kapitola II *V ní se vypráví, jak Šeherezáda krále bavila během tisící třetí noci*

Kapitola III *V ní se vypráví, jak Šeherezáda krále bavila během tisící čtvrté noci*

Kapitola IV *Tisící čtvrtá noc, v níž Šeherezáda vypráví některé hádanky z dávných dob*

Kapitola V *Tisící šestá noc, ve které dává Šeherezáda různé úlohy z pravděpodobnosti*

Kapitola VI *Tisící sedmá noc, ve které Šeherezáda vypráví o dobrodružstvích některých ze čtyřiceti Alibabových loupežníků*

Kapitola VII *V níž Šeherezáda během tisící osmé noci vypráví některé další hádanky a svá vyprávění uzavírá chytrým matematickým postřehem*

Kapitola VIII *V ní se popisuje Šeherezádino úžasné vyprávění o mazdistech a ahrimanovcích*

Kapitola IX *Tisící desátá noc, v níž Šeherezáda vypráví další příběhy o mazdistech a ahrimanovcích*

Kapitola X *V ní se vypráví, jak Šeherezáda během tisící jedenácté noci bavila krále některými specialitami*

Kapitola XI *Šeherezádiny hádanky během tisící dvanácté noci*

Kapitola XII *Tisící třináctá noc, v níž Šeherezáda vypráví příběh o Al-Chizrovi*

Kapitola XIII *Zásadní otázka*

Epilog

Poznámka: Mazdisté uctívají perského boha Ahuru Mazdu, který je bohem dobra a vždy mluví pravdu, Ahrimanovci uctívají perského boha Ahrimana a vždy lžou.

Kniha druhá: Od Šeherezády k moderní logice

Kapitola XIV *Donucovací logika*

Kapitola XV *Pravoruké a levoruké donucování*

Kapitola XVI *To nejlepší z donucovací logiky*

Kapitola XVII *Nestálí lháři*

Kapitola XVIII *Čínský, nebo japonský?*
Kapitola XIX *Oron a Set*
Kapitola XX *Která osobnost?*
Kapitola XXI *No to snad ne*
Kapitola XXII *Zábavné logické hry*
Kapitola XXIII *Některé gödelovské hádanky*
Kapitola XXIV *Některé zvláštní paradoxy*

Tři úlohy z této knihy jsou na obr. 6–8. Řešení úloh necháváme čtenářům k samostatnému řešení.

1. Co to je?

„Vznešený králi," začala Šeherezáda, „dovol, abych ti nejprve dala jednu hádanku: Co to je, co je větší než Alláh? Mrtví to jedí; a když to jedí živí, zemřou."

„No, počkej!" řekl král. „Ta hádanka nemá odpověď! Nic není větší než Alláh a je rouhání říkat něco jiného!"

„Já se nerouhám," odpovědělala Šeherezáda, „a ty jsi právě řekl správnou odpověď."

„O čem to mluvíš?" zeptal se král.

Jaká je odpověď na Šeherezádinu hádanku?

Obr. 6

3. Jak to dokázali?

„Pěkné!" řekl král, když se dozvěděl řešení. „Řekni mi další hádanku."

„Dobrá," řekla Šeherezáda. „Dva velbloudi stáli a dívali se opačným směrem Jeden se díval přesně na východ a druhý přesně na západ. Jak se mohli vidět, aniž by chodili a otáčeli se? Oni dokonce ani nepohnuli hlavou."

„Hmm," řekl král, „myslím, že tam muselo být nějaké zrcadlo."

„Ne," řekla Šeherezáda, „byli uprostřed pouště a na míle daleko nebyla žádná zrcadlící plocha."

„Tak to nevím," řekl král.

Jak to dokázali?

Obr. 7

76. Mazdisté a ahrimanovci

„Doslechla jsem se, vznešený králi, o jednom podivném městě v Persii nebo poblíž Persie, v němž je každý obyvatel buď mazdista, nebo ahrimanovec."

„Co to znamená, co jsou zač?" zeptal se král.

„Mazdisté uctívají perského boha Ahuru Mazdu, jenž je bohem dobra; naproti tomu ahrimanovci uctívají zlého perského boha Ahrimana. Mazdovci vždycky mluví pravdu – nikdy nelžou. Ahrimanovci nikdy nemluví pravdu – vždycky lžou. Všichni členové jedné rodiny jsou vždy stejné víry. Tedy v kterékoli dvojici bratrů jsou oba buď mazdisté, nebo oba ahrimanovci. Nedávno jsem slyšela příběh o dvou bratrech tohoto města, Bahmanovi a Pervízovi, kterých se jednou kdosi zeptal, jestli jsou ženatí. Odpověděli takto:

Bahman: ‚Oba jsme ženatí.'

Pervíz: ‚Nejsem ženatý.'

Je Bahman ženatý, nebo ne? A co Pervíz?"

Obr. 8

4. Závěr

Na závěr ukážeme obálky dalších dvou knih napsaných Raymondem Smullyanem, a to knihy *Jak se jmenuje tahle knížka?* vydané v nakladatelství Portál a knihy *Dáma s tygříkem a další logické hrátky* (obr. 9 a 10, str. 115). Vřele doporučujeme jejich přečtení. Problémy v nich uvedené čtenáře jistě pobaví a mnohé i poučí.

Literatura

[1] *Tisíc a jedna noc.* `cs.wikipedia.org/wiki/Tisíc_a_jedna_noc`.

[2] Poe, E. A.: *Tisící druhá pohádka Šeherezády.* `en.wikipedia.org/wiki/The_Thousand-and-Second_Tale_of_Scheherezade#Publication_history`.

[3] Smullyan, R.: *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy.* Portál, Praha, 2004, 2020.

[4] Zhouf, J.: Informace o publikacích vydavatelství Portál. In (ed. Zhouf, J.) *Ani jeden matematický talent nazmar 2019.* Gaudeamus, Univerzita Hradec Králové, 2021.


Raymond M. Smullyan
Jak se jmenuje tahle knížka?
portál

Obr. 9


edice aliter
Raymond Smullyan
Dáma s tygříkem
a další logické hrátky
ARGO
DOKORÁN

Obr. 10

FOTOGALERIE


Více šestých výročí
František Kuřina – 90 let – ještě málo chybí
Eduard Fuchs – 80 let – trochu více chybí
Michaela Kaslová – 70 let – týden po
Evžen Müller – 60 let – trochu více po
Veliká gratulace a přání hodně zdraví


Hra Mathesso jako novodobý fenomén
Karel Janeček
Ani jeden matematický talent


Cooper-Janečkova varieta (CJV)
12
21
21
12
73 37
21 12
12 37
21 73


KNAPOVÁ
MICHAELA

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Benka Tomáš* e-mail: info@science21.cz
   Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
2. *Bočková Jeanne* e-mail: jeanne.bockova@ctm-academy.org
   Centrum pro talentovanou mládež, Lohnického 898/1, Praha 5
3. *Brázda Pavel* e-mail: info@science21.cz
   Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
4. *Bureš Jan* e-mail: info@science21.cz
   Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
5. *Drechsler Štefan* e-mail: info@science21.cz
   Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
6. *Fuchs Eduard* e-mail: fuchs@math.muni.cz
   MÚ MUNI, Kotlářská 267/2, Brno
7. *Jágr Kevin* e-mail: info@science21.cz
   Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
8. *Janeček Karel* e-mail: info@science21.cz
   Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9
9. *Jirošová Štěpánka* e-mail: jirosova@gchd.cz
   GChD, Zborovská 45, Praha 5
10. *Jůzová Kateřina* e-mail: juzova.kat@gmail.com
    PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1,
    ZŠ, nám. Curieových 2, Praha 1
11. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
    PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
12. *Kašparová Kateřina* e-mail: katkakasparova@seznam.cz
    ZŠ, Křivoklát
13. *Knapová Michaela* e-mail: knapova@moa-jc.cz
    Masarykova OA, 17. listopadu 220, Jičín
14. *Kocanda Ladislav* e-mail: ladislavkocanda69@gmail.com
    Na Pískách 69/II, Veselí nad Lužnicí
15. *Königsmarková Soňa* e-mail: skonig@civ.zcu.cz
    PF ZU, Sedláčkova 214, Plzeň 3

16. *Kříž Radko* e-mail: radko.kriz@merkurtoys.cz
MERKUR TOYS s.r.o., Švehlova 624/6, Hradec Králové

17. *Kříž Tomáš* e-mail: info@science21.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9

18. *Kuřina František* e-mail: kurinovi@gmail.com
UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

19. *Lego Stanislav* e-mail: stanislav.lego@oegp.cz
Rakouské G, Na Cikorce 2166/2b, Praha 4

20. *Müller Evžen* e-mail: muller@gozhorice.cz
G, SOŠ, SOU A VOŠ, Riegrova 1403, Hořice

21. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
PřF UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

22. *Nešněrová Irena* e-mail: irena.nesnerova@zssvoboda.eu
ZŠ a MŠ, Kostelní 560, Svoboda nad Úpou

23. *Novák Miroslav* e-mail: novak@gjkt.cz
GJKT, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové

24. *Novotná Zuzana* e-mail: zuzana.novotna@zssvatoplukova.cz
ZŠ a MŠ, Svatoplukova 11, Olomouc

25. *Panáčová Jitka* e-mail: panacova@ped.muni.cz
PdF MUNI, Žerotínovo nám. 619/9, Brno

26. *Paulů Filip* e-mail: info@science21.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9

27. *Podoubská Kamila* e-mail: info@science21.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9

28. *Polnický Robert* e-mail: info@science21.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9

29. *Řepík Michal* e-mail: repik.michal@gmail.com
PSHŠ, Svídnická 506, Praha 8

30. *Semeráková Vladimíra* e-mail: semerakova@gchd.cz
GChD, Zborovská 45, Praha 5

31. *Stejskalová Markéta* e-mail: info@science21.cz
Nadace Science21, Sedloňská 27/1, Praha 9

32. *Tesař Vladimír* e-mail: tesar@vcelicka.cz
Abaku, Vyšehradská 320/49, Praha 2

33. *Tláskal Jakub* e-mail: jakub.tlaskal@seznam.cz
SPŠ elit, Čs. odboje 670, Dobruška

34. *Vávrová Alena* e-mail: vavrova@zskarlacapka.cz
ZŠ Karla Čapka, Kodaňská 658, Praha 10

35. *Vojkůvková Iva* e-mail: vojkuvkova@gjkt.cz
GJKT, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové

36. *Zelendová Eva* e-mail: zelendova.e@gmail.com
AMBIS vysoká škola, a.s., Šujanovo nám. 356/1, Brno

37. *Zhouf Jaroslav* e-mail: zhouf@seznam.cz
FIT ČVUT, Thákurova 9, Praha 6

Název: Ani jeden matematický talent nazmar 2022. Sborník příspěvků.

Editor: Jaroslav Zhouf

Sazba systémem TEX: Miloslav Závodný

Vydavatel: Nakladatelství UHK, Gaudeamus jako svou 1846. publikaci

Rok vydání: 2023
Vydání: první

Text neprošel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-7435-913-2 (on-line, PDF)
ISBN 978-80-7435-912-5 (brožovaná vazba)