Univerzita Hradec Králové – Přírodovědecká fakulta a Fakulta informatiky a managementu
Královéhradecká pobočka JČMF

Ani jeden matematický talent nazmar 2017

Sborník příspěvků 8. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2017

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Univerzita Hradec Králové
Fakulta informatiky a managementu

Programový výbor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PřF UHK, Hradec Králové
prof. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:
PhDr. Michal Musílek, Ph.D., PřF UHK, Hradec Králové
Mgr. Iva Vojkůvková, PřF UHK, Hradec Králové

Editor:
doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., FIT ČVUT, Praha

Recenzenti:
PhDr. Lucie Růžičková, Ph.D., G Christiana Dopplera, Praha
doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., FVTM UJEP, Ústí nad Labem

ISBN 978-80-7435-710-7

OBSAH

PROGRAM KONFERENCE

Pátek 26. 5.

10.15–10.20	Zahájení
10.20–11.20	František Kuřina: Metrické prostory a geometrie konkrétního
11.20–11.40	Jakub Stránský: Skupinová výuka s automatickým vyhodnocením
11.40–12.00	Michal Řepík: Kurz lineární algebry pro nadané žáky v projektu Talnet
12.00–12.20	Jana Kopfová: Bridges 2016 – o spojení matematiky a génia
12.20–12.40	Miroslav Vaněk: Spolupráce učitelů matematiky a přírodovědných předmětů
13.40–14.00	Alena Vávrová: Pět let s Abaku
14.00–14.20	Evžen Müller: Výpočty bez kalkulačky a jiná matematická kouzla
14.20–14.40	Michaela Kaslová: Komplexní úlohy jako motivační faktor v práci s talenty
14.40–15.00	Jaroslav Flejberk: Prezentace hlavolamů
17.00	Hvězdárna a planetárium Hradec Králové Jan Veselý, Martin Cholasta: Film Musica aneb Starověký princip jednoty veškerého vědění a umění

Sobota 27. 5.

9.00– 9.35	Miroslav Židek: Dimenzia nekonečnosti prvočísel
9.35–10.10	Ladislav Kocanda: Rozkladem číselné trojice k důkazu Bealovy domněnky
10.10–10.30	Miroslav Novák: Žákovská učebnice matematiky
10.30–11.00	Přestávka
11.00–11.20	Iva Vojkůvková: Kruhová inverze
11.20–11.40	Jaroslav Zhouf: EGMO – MO pro dívky
11.40–12.00	Diskuse
12.00	Zakončení

ÚVODEM

Úvodní slovo k osmému setkání

V letošním roce 2017 proběhl již osmý ročník konference Ani jeden matematický talent nazmar. Připomeňme si, že jde o konferenci, která je tematicky orientována na talentované žáky v matematice a přírodovědných oborech. Jde o důležitou skupinu žáků, kteří v budoucnu budou hybateli pokroku, a to nejen v naší republice.

Konference měla již tradiční průběh. Podruhé v historii této konference se organizace i finanční podpory ujala Univerzita Hradec Králové, konkrétně Přírodovědecká fakulta a Fakulta informatiky a managementu, a Královéhradecká pobočka JČMF.

Na konferenci zazněla řada zajímavých a podnětných přednášek. Témata byla psychologická, matematická, informatická, z oblastí odborných soutěží. Přednášky byly věnovány věku žáků prvního stupně základní školy až studentům vysokých škol. Určitě přinesly novou inspiraci, nové náměty a podněty učitelům k jejich práci s talentovanými žáky, ale i inspiraci, náměty a podněty i jim samotným pro jejich profesionální rozvoj.

Konference jako obvykle probíhala ve výborné přátelské atmosféře v průběhu jednání, ale i při trávení volného času. Nezbývá, než se opět těšit na příští konferenci Ani jeden matematický talent nazmar.

Jaroslav Zhouf

PLENÁRNÍ PŘEDNÁŠKY

Komplexní aktivity jako motivační faktor talentů na 1. stupni ZŠ

Michaela Kaslová, KMDM PedF UK, Praha [1]

ABSTRAKT. *Komplexní aktivita/úloha je specifická dle mého tím, že zasahuje do více matematických témat a má přesahy do dalších oborů. Nelze ji proto zaměnit se složenou slovní úlohou. Tyto komplexní aktivity/úlohy jsou pro řešitele náročné, často vyžadují dohledání další informace, které mohou mít stěžejní či podpůrnou roli. Právě proto jsou výzvou pro nadprůměrné a působí na ně většinou silně motivačně. Komplexní aktivity mohou být součástí projektů či poloprojektů. Příspěvek ukazuje jednu sérii komplexních aktivit sestavených do didaktické struktury.*

Motto: „Architektura není bez abstraktního myšlení. Abstraktní myšlení není bez matematiky.“

D. Vávra

Úvod

Motivace funguje jako hlavní hnací/podněcovací faktor v našem životě. Neobejde se bez ní ani talentovaný jedinec. Co takové jedince motivuje? Talent není jen otázka intelektového potenciálu jedince, ale také jeho osobnostního nastavení (H, K/Z, V, ...). V tom se někdy liší pohled psychologa a učitele. Potenciál se může uplatnit jen za určitých nejen vnějších, ale i vnitřních podmínek a v nich se dále rozvíjet. Dovedeme si dobře vybavit situace, kdy žák přišel s označením nadprůměrný v dané oblasti, ale pro ono uplatnění potenciálu mu chyběla trpělivost, vůle překonat překážku a neutéct od ní a podobně. Jak dalece může pomoci motivace?

Psychologie uvádí různé pohledy na motivaci (vnitřní, odměnová, kontextová, ..., ovlivněná věkem, situací, z pohledu trvalosti jako aktuální/momentální a stabilní atp.). Pedagogická psychologie mimo jiné

[1] e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz

uvádí jako významný motivační prvek právě prvek novosti, tedy určitým způsobem sem spadá i zařazení změny, změny obsahu práce, změny úhlu pohledu na problém, změny organizace práce, změny role – např. spojené s mírou zodpovědnosti. Prvek novosti je spjat s potřebou podnětnosti prostředí (Matějček–Langmeier). Užší či širší pojetí motivace lze shrnout podobně, jak to činí např. v Lafonově slovníku psychologie: ať pojmeme motivaci jakkoli, jde vždy o vnitřní rozpor/pnutí, které aktivizuje člověka do té míry, že usiluje o nabytí rovnováhy (cíle v podobě zdraví, výkonu zisku, postavení, ...).

Jedním z typů *motivace* je *odměnová*, ve které je motivátorem nějaký druh odměny. U odměnové motivace jde o vykonání, dokončení aktivity proto, že následuje obdržení slíbené/nabídnuté odměny. Slovo odměna je chápáno úžeji jako něco vnějšího (slova chvály, uznání, známka, věcná cena apod.) Ve většině literatury je odměnová motivace spjata s něčím ne zcela pozitivním tehdy, je-li chápána jako něco naučeného, případně jako něco vnuceného, nežádoucího. Odměnou ovšem může být i to, že jedinec rozřešil problém/má hotovo, má volno, je šťastný (i když ho třeba nikdo nepochválí). Jak pro jednoho motivovaného běžce je odměnou to, že se o něm píše (zviditelnil se), pro jiného, že se zlepšil, pro dalšího je to jen ona medaile, jiný rád běhá pro vyplavení endorfinů. Kde je hranice slova odměna? Kde je hranice mezi vnitřním rozporem (mám/nemám medaili) a psychosociální potřebou být oceňován? Jak je to u talentovaných žáků na matematiku?

Rozhodně nelze tvrdit, že bychom znali všechny typy motivátorů u každého žáka a rovněž není nikde ověřeno, jak s takovou informací pracovat, aby nedošlo k nežádoucím efektům, i když ve sportu jsou tyto strategie zřejmě nejrozpracovanější. Schopnost podat výkon není jen o potenciálu, připravenosti, aktuální formě, ale i o zdravé míře sebevědomí a chuti zdolávat překážky, čelit výzvám. Nasměrování do onoho stavu není pro učitele někdy snadné, a tak hledá oporu v tom, co je pro nadprůměrné žáky v této oblasti společné.

Pro talenty jsou typické potřeby dozvídat se *něco nového, neobvyklého, řešit přiměřeně/dostatečně těžký problém* (prvek podnětnosti), *řešit smysluplný problém*. Nadprůměrný žák se rozvíjí s věkem a v závislosti na tom lze předpokládat i určité dílčí proměny v motivacích. Jen někteří prvostupňoví žáci mají rádi úlohy s „fíglem“, nebo řešení založená na badatelských postupech či na dokazování. U některých druhostupňových se pomalu vyskytuje obliba fíglů, a jejich objevování, protože to představuje moment překvapení, který mají v oblibě, ale nepatří to k všeobecně motivujícím prvkům. Na dílčích změnách motivátorů se projevuje postupně rostoucí zkušenost, vyšší úroveň obecného myšlení a jisté sociální zrání.

Vedle *motivačních spouštěčů – motivátorů*, které vznikají při krystalizaci popsaného vnitřního rozporu, je vhodné mluvit i o *motivačních blokátorech*, či *demotivátorech – odpuzovačích*, které můžeme chápat jako extrémní případ blokace působící někdy nejen aktuálně, ale i do budoucna. Mezi demotivátory patří úlohy založené na pouhém kalkulu, či úlohy vyžadující zdlouhavé experimentování, které nelze zjednodušit. Demotivátory jsou do jisté míry u žáků odlišné i v závislosti na jejich „matematické zkušenosti“ a na věku. Pokud přichází více demotivátorů již v období prvního stupně, pak je obtížné tyto žáky znovu „přitáhnout k matematice“. Zde spatřuji velkou chybu v národních strategiích podporujících žáky od 13 let. Motivátory i demotivátory jsou někdy určité skupině společné, jindy jde o individuální případy. Jak a kdy toho má učitel využívat?

Individualizace v teorii a praxi

Studenti oboru učitelství se dočtou v různě datované literatuře podobné informace; charakteristika motivace je však pro ně relativně konstantní. Dle šetření probíhajícího po tři roky mezi studenty kombinovaného studia na PedF UK je evidentní, že jednu stranu tvoří nastudovaná teorie, ale poněkud odděleně je pak vlastní „tvořivost“, ve které mají projevit promyšlenou práci s motivací v matematice. V prvních okamžicích a někteří i poté setrvávají na typu motivace, který zažili sami nebo který jim osobně vyhovuje. Osobní zkušenost studenta-učitele ve způsobu motivování žáků je dominantní. Při volbě motivátorů se opírají o typ, který zažili ve škole nebo který vyhovuje jim osobně. Přehodnocení a rozšíření škály motivátorů podle typu žáků ve „vlastní“ třídě a vyhodnocení žákovských reakcí na různé podněty přichází někdy v průběhu praxe. Motivaci studenti učitelství však až na výjimky (3 %) uvažují plošně, aniž by zvažovali záměry výchovně vzdělávací vzhledem ke složení třídy; tedy motivaci neindividualizují.

V čem spočívá ona individualizace? Máme se podřizovat zcela požadavkům či potřebám žáků? Žákyně H (10 let) mi sdělila, že slovní úlohy nemá ráda, protože ji tématika nezajímá s výjimkou nakupování a obchodu jako takového (dovoz zboží, třídění, zisk z prodeje a podobně). Přitom slovní úlohy jsou zjednodušenou realitou, ve které se na prvním stupni na základě komparace rodí obecnější poznání a posléze matematika. Tuto nadprůměrnou žákyni dokáže „nudný“ kontext odpuzovat i přesto, že je samotná podstata matematického problému pro ni zajímavá, což se ukáže v momentě, kdy přeneseme daný problém do jiného kontextu nebo úlohu dekontextualizujeme.

Jsou nadprůměrní žáci, kteří pod vlivem laického okolí nabyli toho dojmu [4], že při řešení slovních úloh nejde o matematiku. Argumentace je dvojího typu: a) nejsou tam jen matematické symboly; b) úloha je málo obecná – jde o reálný problém, který se zdánlivě váže jen na konkrétní myšlení. Specifickou skupinu tvoří žáci, kteří mají problém se čtením – nadprůměrní dyslektici, pro které popisovaný kontext představuje obtíž, tedy dávají přednost formě nad obsahem a preferují kratší text, kratší slova zpravidla bez ohledu na kontext, který popisují, nebo pomoc učitele, který jim zadání přečte (především na prvním stupni).

Role kontextové motivace je specifická, jde o působení na řešitele zpravidla v prvním momentu, vytváří nějaký dojem. Ke kontextu se pojí i doprovodný typ komunikace, jako např. schéma, graf, diagram, obrázek (ať již v informační, vysvětlující či ilustrační roli). To, co jednoho řešitele pobaví, zaujme, vyprovokuje, to jiného právě v mladším školním věku může odpuzovat. Např. Petr (8 let) komentoval úlohu s obrázkem: „Nejsem malej.“ Obrázek chápe jako podceňování vkladních schopností, protože ve většině případů takovou roli plní v učebnicích matematiky prvního stupně. Je tedy významné, aby se nadprůměrný žák setkal s obrázky i v dalších rolích, pro řešení podstatných a nenahraditelných, a to mnohem dříve než ostatní. Jinou roli hraje fotografie, která je v učebnicích sice zřídka, protože je pro slabší žáky v různých ohledech obtížnější i proto [5], že proces selekce podstatných informací musí žák provést sám včetně procesu zjednodušení se zachováním podstatných vztahů. Fotografie může představovat novostí a složitostí výzvu.

Kontextová motivace se řadí k vnějším motivátorům. O kontextové motivaci se v obecné rovině příliš nepíše, dříve se v metodikách oborů uvádělo, že děti/raný mladší školní věk *preferují témata jako: mláďata, dítě, život rodiny, hračky, ...* Dnes (to není v literatuře, ale dle našich šetření) jsou to například *velká zvířata, nežijící tvorové, vzdálené kraje, nové technologie, nadpřirozené schopnosti, s tím spojena velká čísla*, někdy i kontexty vázané na dospělé v roli, kterou by řešitelé chtěli jednou zastávat.

Do kontextové motivace patří i *technická stránka prezentace problémů*: odmítání zářivých barev; oblíbená barva (červená/modrá) nemusí být motivačním faktorem – preference pastelových barev. Dříve či později během prvního stupně nadprůměrní odhalují, která z barev je ruší a která ne. Jsou mezi nimi (dle mých šetření jde o cca 12 % nadprůměrných) i tací, kteří dávají přednost černobílé verzi před barevnou, pokud nejde o barevné fotografie, u kterých naopak oceňují realističnost.

Rodiče nadprůměrných žáků a jejich přání

Rodiče uvádějí při zařazování svých dětí do Klubu přátel matematiky důvod, proč tam své dítě přihlašují. Důvody, jak se ukazuje, se v průběhu let mění, do jisté míry odrážejí nejen „módnost“, ale i reflexi na způsob práce učitelů ve škole. Jejich argumenty odrážejí rodinné prostředí, které působí na dítě a může do určité míry ovlivňovat jeho představy o matematice, působit jako vnější motivátor nebo demotivátor. Řazení argumentů je chronologické:

- řešit aritmetické úlohy s většími čísly (1991 do 2006–8), řešit těžké úlohy/soutěžní úlohy
- dozvědět se z matematiky víc než v ZŠ (2006–8 do 2015), naučit se nové metody řešení včetně modelování a užít nové technologie (film, Excel, Geogebra, Geomag)
- déle se soustředit (od roku 2015), zobecňovat, objevit nové souvislosti, přesahy

Typy aktivit: projekty/izolované problémy/série problémů/komplexní problémy, úlohy/poloprojekty

Pokud učitel či vedoucí kroužku/klubu pracuje s nadprůměrnými dětmi/žáky, volí různé strategie. Někteří vycházejí ze soutěživosti jednotlivců (ne každý je soutěživý) a staví výběr aktivit na jednom typu, ve kterém chtějí neustálé zdokonalování (zpravidla v napojení na aktivity hravého charakteru). Co když žák není soutěživého typu, jsou pro něho ony aktivity motivující natolik, že ho udrží u matematiky? Co nám nabízejí pro takové žáky dostupné materiály?

Izolované problémy (zvané: zajímavé úlohy, zábavné úlohy, oříšky a podobně) přinášejí změnu, ale neuspokojují zcela nadprůměrné žáky, zejména starší 8 let. Pokud proniknou do nějakého problému, mají potřebu v tom pokračovat, ať již jde o prohlubování pojmu – dozvědět se více o číslech, tělese a podobně, nebo o metodě řešení, nebo o kontextu, do kterého byl problém zasazen. To v materiálech pro žáky chybí. Této potřebě ovšem nevyhovuje projekt, protože ten je zpravidla „matematicky roztříštěn“.

Série problémů by měly směřovat více do hloubky. Pouhé gradování (větší čísla v pyramidě, jiná jednotka u převodů) takové dítě nemotivuje, pokud z vnějšku nezasáhne jiná osoba otázkami či doplňkovými úkoly (A co když…?). Formální shoda je pro nadprůměrné odpuzující, pokud se sám nezapojí do tvorby takových úloh. Nadprůměrný žák neocení opakovaně gradované úlohy, které mají stále stejnou formální shodu. Naopak oceňují série zdánlivě nesourodých aktivit, které propojuje stejná či podobná metoda řešení, stejný typ myšlení, jako např. u her Sudoku a Logix, Quarto, Piškvorky a Miny nebo Lodě. Tuto souvislost musí žák odkrýt. Vyhledávat takové odlišné úlohy, problémy, hry, které jsou propojeny matematickými souvislostmi, je pro učitele nesmírně náročné zejména, pokud nemá hlubší vzdělání v matematice.

Projekty skupinové mají propojit různé partie učiva nejen v matematice. Náměty na prvním stupni vzhledem k rozsahu znalostí a míře rozvoje schopností jsou tradičně mimo matematiku (např. řeky ČR, Pečeme cukroví a podobně). Některé typy nadprůměrných žáků skupinové projekty dokonce demotivují, a to v závislosti na jejich roli ve skupině nebo složení skupiny víc než na volbě relativně nezajímavého kontextu úlohy. Pokud se nadprůměrní „ponoří“ do problému v daném projektu, myslí jinak, chtějí poznat věci více do hloubky i podrobněji, mají tendenci rychleji a lépe problematiku strukturovat, nejsou v procesu zpracování ani v prezentacích vázáni tak na emoce, tedy jejich kritéria hodnocení jsou objektivnější. Mají vyšší potřebu o podstatě problému s někým diskutovat, jsou ochotni čerpat z více zdrojů a informace porovnávat, ověřovat. Pokud nejsou organizačními či vůdčími osobnostmi, pak je práce ve skupině „brzdí“.

Projekt jednotlivce pro nadprůměrného vyžaduje od učitele větší přípravu, promýšlení, musí předem předpokládat, že žák bude vyžadovat konzultaci, že možná bude nutné některé věci dokonce nastudovat, protože takový žák potřebuje pro prezenci partnera a nikoli pouhého obdivovatele. Je možné pro projekt jednotlivce doporučit konzultanta z řad odborníků. Jsou nadprůměrní žáci, kteří pěkně připraví projekt, ale nestojí o to ho prezentovat např. proto, že se neradi předvádějí, nebo proto, že je uspokojovala práce na projektu a sama prezentace je pro ně již nezajímavá, nebo dokonce proto, že vědí, že míře jejich hloubky nejsou sto ostatní porozumět. Často, k překvapení učitele, odmítají projekt prezentovat ústně, spokojí se raději s prezentací prostřednictvím plakátu, nástěnky, textu s obrázky.

Podprojekty, čili projekty individuální, mohou být šité na míru, avšak neumožňují diskusi v průběhu tvorby.

Na prvním stupni můžeme u nadprůměrných používat projekty nebo poloprojekty, avšak ne vždy je prostor pro tolik žákovské iniciativy nebo z bezpečnostních důvodů nelze některé projekty zadat. Na tomto místě se mi osvědčily **komplexní úlohy**, ve kterých se uplatní matematika z různých podoborů matematiky, aniž by se přímo učivo předbíhalo. Samotný situační kontext pak působí prvkem novosti, který poskytuje zajímavé informace z praxe, nestojí zpravidla na jedné nebo dvou metodách řešení, obsahuje prvky kompletní tvořivosti. Takové úlohy mají přesahy do dalších oborů. Komplexní úlohy ovšem nevymýšlí žák, ani k jedné úloze nehledá další data, aby vznikl projekt, avšak je to učitel, který je vybírá, tvoří. Komplexní problémy vyžadují vztahové myšlení, propojení kontextů představuje jak změnu, tak postupné prohlubování v závislosti na zvolené didaktické struktuře. Liší se od problémových nebo poloproblémových úloh tím, že je nemůže tvořit žák sám, může jen za jistých okolností být jejich spolutvůrcem, avšak rozhodující směřování komplexních problémů/úloh má přímo či nepřímo v rukou učitel. Komplexní úlohy do značné míry reflektují i přání rodičů. Ona provázanost nutí žáky zvyšovat pozornost, čemuž napomáhá i zvýšený zájem o řešení úloh. Jedním z důvodů je i to, že „každý si tam najde něco svého“.

Komplexní úlohy zasazené do širšího situačního kontextu/prostředí mohou tvořit **řetězce** připomínající vzdáleně vybrané projekty, avšak ona struktura řetězců se netvoří na základě volby žáka, ale je učitelem dána. V řetězci jsou úlohy propojeny promyšlenými aktivitami. Ono propojení se jeví žákovi dominantně kontextové, avšak přes pestrost aktivit je pro matematika zřejmá alespoň jedna linka propojující jednotlivé články. V jistém smyslu řetězec komplexních úloh tvoří **specifickou didaktickou strukturu**. Příkladem je následující řetězec úloh a aktivit.

Didaktická struktura tématu architektura

Následující didaktickou strukturu bychom za jistých okolností mohli nazvat poloprojektem, to by však předpokládalo vyšší angažovanost žáků. To však v daném případě není možné, jelikož toto téma jde výrazně vně žákovských znalostí a kontaktů. Rovněž na aktivity nelze pohlížet jako na izolované, protože jsou v mnoha ohledech provázané; pokud v dané didaktické struktuře objevíme gradaci, pak pouze vzhledem k oboru didaktika, nikoli vzhledem k matematice, i když dané série aktivit v didaktické struktuře gradují nároky na schopnosti, gradují v oblasti znalostí a souvislostí, zčásti předbíhají učivo geometrie. V didaktické struktuře se mění jak úkoly, jejich podstata a zčásti i forma komunikace, ale dokonce i prostředí outdoorová matematika (OM) a matematika (a nejen to) ve třídě (T). Mění se i organizační formy. Podobně jako projekt i představovaná didaktická struktura má řadu cílů, jedním z nich je díky přesahům i „mimomatematický“, startující „občanské chování“.

Didaktická struktura OM1, T1, OM2, T2, T3, T4, OM3, T5, OM4 k tématu architektura stojí na sérii komplexních úloh. Daná struktura představuje 9 lekcí rozložených do 2 měsíců a volně navazuje na aktivity z předchozího pololetí: pozorování domů, symetrie fasád, shodnost/různorodost oken, odhady výšek budov v návaznosti na dobu výstavby, šíře ulic, vzdálenosti mezi významnými orientačními body a podobně.

Ukázka didaktické struktury tématu architektura

Uveďme konkrétní didaktickou strukturu k tématu architektura.

Vycházka (OM 1)

Pozorovali jsme okna a fasády v okolí školy – jejich symetrii nebo její narušení, shody a rozdíly v tvarování oken a datace vzniku domu podle zadaných prvků, objevování stylů skrze geometrii.

Diskutovali jsme s architektem (18 minut) zaměřujícím v ulici Na Břehách jednu z fasád – co dělá, kdy a proč se to dělá, na jakém principu to funguje (podobnost, vyrovnání zkreslení, ...), jak eviduje data do náčrtku, jak se provádí kontrola, proč to nemůže dělat kdokoli, jak odhaduje náklady, co lze a co nelze zachovat a proč, jaké jsou typické prvky stavby té doby,... V diskusi se objevilo i to, že „se to v životě hodí“, tj. jde o přípravu na povolání.

Mluvený úvod – program návštěvy ateliéru (T1)

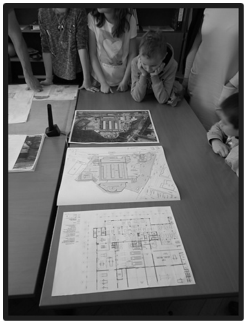
Informovali jsme o vývoji technologií, ukázali jsme zaměřování budovy s užitím historicky starších postupů.

Použili jsme GeoGebru – zvětšování a zmenšování žáky nakreslené fasády domu, použití os x, y a práce s měřítkem.

Informovali jsme, co je to AutoCad v návaznosti na žáky používanou GeoGebru – co umí a neumí.

Besedovali jsme s žáky o jejich zkušenostech se stavbou nebo rekonstrukcí.

Prezentovali jsme program a organizační pokyny pro OM2.

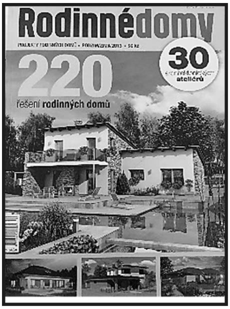
Architektonický ateliér (OM2)

Navštívili jsme atelier bytového družstva, Praha 6, Terronova, průvodcem byl pan ing. arch. Kolář. Osnova setkání byla (25 minut body A-E a 15 minut bod F): A) PC a jeho program, B) co umí – ukázka, C) tvorba/úpravy na přání žáků, D) možnosti 3D tiskárny, E) vysvětlování procesu (nápad, zadání dat, tvorba, schvalování, investice, stavba, kolaudace), F) dotazy, beseda.

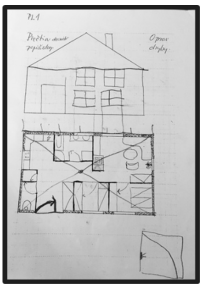
V rámci toho jsme se seznámili s tím, co dělá architekt, jak probíhá proces od přání zákazníka k návrhu projektu, jak projekt vzniká a co musí respektovat, jak se pracuje v AutoCadu, co musí projednat a s kým, než je návrh schválen stavebním odborem (v podtextu: co všechno musí architekt umět a znát, s čím musí počítat). Střídal se monolog s diskusí, proběhly ukázky plánů i použití AutoCadu. Závěrečná beseda se protáhla z plánovaných 5 na 15 minut. Odchod byl nutný vzhledem k domluvené době návratu, jinak by žáci bez výjimky zůstali déle.

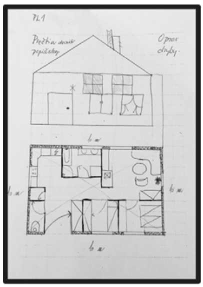
Práce s projekty (T2)

Bylo prezentováno využití projektů v časopise *Rodinné domy* (40 minut). Žákům byly předloženy různé projekty publikované v časopise a oni měli za úkol z nich vyčíst co nejvíce údajů o návrhu, respektive o nabízeném domě. Např. šlo o prohlížení návrhů, plánů a realizací a jejich subjektivní hodnocení, o odhalení AutoCadového modelu na rozdíl od fotografie realizované stavby v daném prostředí (identifikace dle již známých prvků, argumentace), o popis staveb (počet podlaží, oken, dveří, charakter střechy), o synchronizaci stavby a plánku podlaží, o čtení informací z projektů (rozměry, cena, čas, dispozice, členění, prostor, vybavení, provoz domu, možnosti změn, sluneční osvětlení).



Šlo také o práci s pracovním listem, na kterém byla fasáda navrhovaného domu (jakýmsi zákazníkem) a požadovaný půdorys přízemí i s chybami. Žáci měli najít chyby v zakreslených požadavcích a navrhnout jejich opravy. To se dařilo a práce se všem líbila, jen jedna dívka z 2. ročníku ZŠ se cítila touto aktivitou po 7 minutách unavena. Nicméně ji zajímalo to, co o pracovním listu říkali její spolužáci z 3. ročníku. Uplatnili schopnost rotovat s představou, transformovat dané informace z 2D do 3D a nazpět, porovnávat informace s realitou, odhadovat možné rozměry objektů, vyhodnocovat vztahy, dále i pracovat s poměrem, provádět výpočty. Bylo překvapující, že si pamatovali řadu detailů z besedy s architektem, takže kontrolovali i to, zda se dveře u záchodů otvírají dovnitř. Celá práce signalizovala i to, že akceptovali řadu znaků jako dohodu, chápali jejich význam a také tyto grafické znaky kontrolovali, diskutovali o nich. Objevili např. nesoulad mezi umístěním krbu a komínem, umístěním oken, výškou oken ve fasádě a realitou.





Stavby z Lega (T3)

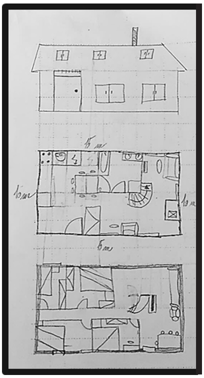
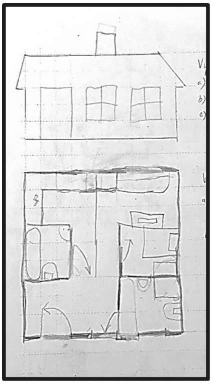
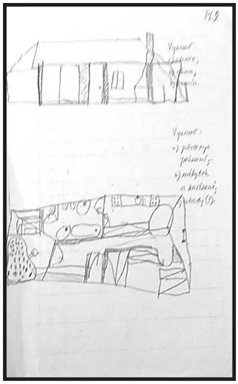
Úkolem bylo sestavit z Lega návrh přízemí domu – jedno podlaží, respektive model a k němu vytvořit plánek/náčrtek půdorysu stavby. Aktivita trvala nečekaně téměř 40 minut. Při tvorbě žáci najednou mysleli na řadu podmínek, které předtím neznali, v průběhu tvorby modelu mysleli i na to, jak dům pak bude zvenčí vypadat, kde bude východní/západní sluníčko a podobně. Ve dvou případech dokonce po zakreslování modelu (transformace z 3D do 2D) docházelo zpětně k úpravám 3D modelu. Ukázalo se, že dokážou myslet v obou světech naráz, či střídavě, že dokážou změny „synchronizovat".

Žáci v průběhu kontrolovali rozměry domu, vzájemně se radili o měříku. Pro některé byla práce natolik náročná, že se museli mezi prací projít po místnosti, jeden evidentně místnost obcházel s představou svého návrhu, který si do místnosti třídy promítal. Rukama si naznačoval stěny přízemí, jen ho občas mátlo, že jeho návrh má větší rozměry než třída. Tento rozpor musel v průběhu obchůzky korigovat. Třída jako místnost byla jakýmsi přemostěním mezi Lego-modelem a zamýšlenou realitou. Dosud jsem se nesetkala s takovým úsilím o to, aby to, co žáci tvořili, bylo reálné a funkční, u některých i estetické (nebyl rozdíl mezi chlapci a dívkami).

Proces nebyl bezproblémový: obkreslení hranic podlahy a přenášení členění patra po částech, zmenšení půdorysu podlaží a jeho členění pocitově a následné úpravy, kreslení po sloupcích/řádcích daných Legem. Žáci hledali nástroje, jak obtíže překonat a předkládali různé návrhy, reakce byly pestré: „V AC to šlo líp." „To Lego je moc tlustý. Radši bych začal kreslením a podle toho stavěl." „To nejde z hlavy hned na papír?" „Kdyby se to vyfotilo na mobil, pak by se to kreslilo líp." „Chybí mi jedna ruka… abych kreslil a držel Lego." „Nemůžu ti to diktovat?" „Nechci to mít stejný jako jiný, můžu si to zkontrolovat?" „Bezva, že to můžu dělat sám (chápejme po svém), ale jak to zkontrolujete?" Po tomto setkání stoupal počet rodičů i učitelů, kteří se zajímali o to, co se v našem klubu děje.

Tvorba vlastního plánu, diskuse a porovnávání (T4)

Žáci dostali bílý papír formátu A4 a měli za úkol vytvořit vlastní návrh domu na podobném principu, jako viděli v časopise (T2). Práce trvala 40 minut. Pro inspiraci žáci žádali předchozí studované plánky, což jsem odmítla a čekala, jak to přijmou. Museli si tedy za daných podmínek více „lámat hlavu“. Během prvních minut přemýšlení většina z nich objevila, že když začnou fasádou, můžou zvětšovat dům dozadu (hloubka), když začnou půdorysem, tak musí stavět patra (výška) a dělat schody, respektive mohou si volit postupně další a další patra. Nezadala jsem zvláštní podmínky ani na výšku, ani na velikost parcely, což se projevilo např. přidáváním půdorysu garáže, bazénu na hloubku, aniž by se tím změnila čelní fasáda, nebo oním přidáváním pater bez velké změny půdorysu, problém byl pouze v „synchronizaci“ schodiště. Navíc žáci řešili bezpečnost, provoz, ekonomiku, estetiku, například umístění oken a dveří, kde se dostávali do konfliktu mezi provozem a pohledností fasády: „Čtyři okna by byly hezčí, ale nevejde se tam skříň, to je blbý!“ „Když ten krb dám sem, pak bude komín jinde, než jsem chtěla.“

Žáci diskutovali, vysvětlovali, prezentovali, argumentovali, měli potřebu si projekty navzájem ukazovat zhruba od dokončovací fáze. Řeč prodlužovala dobu, po kterou byli ochotni se úkolem zabývat. Dva žáci trvali na tom, že si návrh doma přepracují (dobrovolný domácí úkol). Všechny zajímalo, co si o tom myslím. Tři mě požádali, zda by to mohl zkontrolovat onen architekt. (Pozn. Je domluva se studentkou architektury, že jim jejich návrhy převede v roce 2018 do AutoCadu a pak si to porovnají.)

Nákres půdorysu hotové stavby (OM3)

Po týdnu jsme se vrátili k předchozím aktivitám jen krátce, a to pozorováním Goethova institutu a dohadováním, jaký má asi půdorys. Na místě jsme se ho pokusili popsat a načrtnout. Práce trvala cca 12 minut, po návratu do školy následovala kontrola porovnáním s půdorysem budovy v mapě na interaktivní tabuli. Bylo to označeno jako hádanka s kontrolou. Přišlo jim to zábavné. Napříště jim byly přislíbeny podobné hádanky, ale naopak: poznat podle půdorysu stavbu.

Pracovní list a podněty pro práci s internetem (TD5)

Aktivity směřovaly od půdorysu k identifikaci známých staveb z centra Prahy. Klíčovou informací pro většinu žáků byly rozměry, což trvalo 10 minut. Na to navázal svými hádankami jeden z žáků (1. r. ZŠ), který si přinesl z domova vytištěné půdorysy pražských kostelů a zkoušel mne, zda je podle toho identifikuji. Žáci, bez ohledu na věk, byli úkolem zaujati, čekali, jak zareaguji. Uvažovala jsem nahlas, aby bylo jasné, že přitom využívám i vylučovací metodu. Po první redukci nabídky možností bylo i některým žákům jasné, o který kostel jde, tak se mi snažili vhodně napovídat. Zadavatel byl spokojen, že všech deset staveb bylo odhaleno, a přislíbil, že pro příště najde něco těžšího. Tato neplánovaná část trvala 7 minut.

Nato se ozvali někteří rodiče, že se jim mění procházky Prahou nebo cesta do školy, děti nahlížejí na město jinak než dřív.

Vycházka (OM4)

Na konci roku jsme navštívili kostel svaté Ludmily na náměstí Míru v rámci další didaktické struktury zaměřené na kombinatorické problémy v praxi (zde kombinatorika ve hře na varhany ve spolupráci s varhanicí dr. I. Rosario). Než jsme vstoupili do kostela, dobře jsme si stavbu prohlédli zvenčí. Začaly dotazy: kolik je tu schodů, zda i u dalších církevních staveb bývá lichý počet schodů, jak jsou asi vysoké věže, jak drží klenba pohromadě, když tam nejsou patra (stropy), z čeho se to stavělo, jak by se do půdorysu zakreslily věže a podobně. Na některé dotazy jsme si odpověděli ihned, jiné problémy bylo možné řešit až v interiéru.

Překvapivé otázky padly opět v souvislosti s předchozími aktivitami, konkrétně s finanční matematikou, a to o ceně stavby a hodnotě stavby jako umělecké a historické památky. Celá popsaná diskuse trvala 30 minut (kombinatorické aktivity do toho nejsou započítány).

Závěr

Příspěvek má nejen obohatit teorii v oblasti didaktiky, ale má rovněž inspirovat začínající učitele matematiky či vedoucí zájmových kroužků. Popsaná didaktická struktura stavící na komplexních aktivitách si neosobuje právo na bezchybnost a ani nepředpokládá, že by mohla být relativně úspěšně kopírována za jakýchkoli podmínek.

Připouštím, že mne zde jako učitele zvýhodňovala řada osobních zkušeností a kontaktů, zkouška z dějin výtvarného umění i můj zájem o architekturu a historii Prahy. Jsem si vědoma toho, že jde o faktory, které spolupůsobí i na žáky.

Věřím, že popsaný překlad dodá odvahu těm, kteří ještě váhají. Komplexní aktivity prokázaly svoji nosnost jako podpůrné motivátory. Nadprůměrní žáci prvního stupně se pouštěli do věcí, do kterých se jim jinak příliš nechce, jako např. črtání od ruky. Používali nové nástroje komunikace, prohluboval se u nich pohled na práci s grafickým znakem a s modelem, pronikali do nových informačních struktur, museli vztahově myslet ve větších blocích než obvykle, pracovali s většími prostory (megaprostorem nebo makroprostorem), museli měnit komunikační kódy v souvislosti s transformacemi 3D do 2D, i velikostními, neustále byla stimulována prostorová představivost, matematika byla provázána na různé profese (nejen architekta, ale i hygienika, hasiče, dopravního inženýra, fotografa a podobně).

Žáci zráli i sociálně. Jedním z ocenění pro mne byl dotaz položený po roce: „Poznal jsem to dobře, že je to barák z roku tak 1905? To ty okna. Kolik tak tenkrát asi stála stavba a návrh?“ Didaktická struktura zanechala stopu. Vidí město jinak i díky matematice.

Literatura

[1] Coufalová, J.: *Projektové vyučování pro první stupeň ZŠ.* Fortuna, Praha, 2006.

[2] Grugnetti, L. a kol.: *Rallye Mathématique Transalpin – Evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici.* Universita di Siena, DdM et Institut de la Recherche et de Documentation Pédagogique, Neuchatel, 2000.

[3] Janík, T.: *Didaktika obecná a oborová: pokus o vymezení a systemizaci pojmů.* `https://www.akreditacnikomise.cz/attachements/article/279/didakika_obecna_oborova_Janik.pdf`

[4] Kaslová, M.: *Comment les eleves et ses parents comprendent les mathématiques.* Vystoupení na mezinárodní konferenci, ICME, Sevilla, 1996.

[5] Kaslová, M.: The role of photography in the teaching of maths. In: Novotná, J. (ed.) *Proceedings SEMT'11.* PedF UK, Praha, 2011.

[6] Kaslová, M.: Konektivní diaktické struktury. In: Murcín V. (ed.) *Matematika vo svetě předškoláka*. Pro-solution and Education Academy, Bratislava, 2017, s. 29–46.

[7] Kaslová, M., Komanová, E.: *Inovativní postupy ve vyučování*. PedF UK, Praha, 1996.

[8] Kaslová, M., Weinzettel, P.: Slovní úlohy v 1. a 2. r. ZŠ. In: Vondrová, N. (ed.) *Sborník konference Dva dny s didaktikou matematiky 2015*, PedF UK, Praha, 2015, s. 140–147.

[9] Lafon, R.: *Vocabulaire de Psychopédagogique et de psychiatrie*. PUF, Paris, 2010.

[10] Langmeier J., Matějček Z.: *Počátky našeho duševního života*. Panorama, Praha, 1986.

[11] Mareš, J.: *Pedagogická psychologie*. Portál, Praha, 2013.

[12] Vágnerová, M.: V*ývojová psychologie*. Karolinum, Praha, 2012.

Rozkladem číselné trojice k důkazu Bealovy domněnky

Ladislav Kocanda, Veselí nad Lužnicí [1]

ABSTRAKT. *Aby mohl Pierre de Fermat dokázat, že rovnice* $x^4+y^4=z^4$ *nemá v oboru čísel přirozených řešení, musel vymyslet svou „metodu nekonečného sestupu“. Abychom mohli s číselnou trojicí netradičně pracovat, musíme trojici pochopit v jejím rozkladu.*

Umíme rozložit číselnou trojici na součin, což nám umožní rozhodnout, zda je číselná trojice soudělná nebo nesoudělná. Číselná trojice x, y, z je závislá pouze na oboru čísel, ve kterém s touto trojicí hodláme pracovat. Příslušný obor musí být vůči požadovaným početním výkonům uzavřený. Takovými vhodnými obory jsou $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$. Obor $\mathbb{N}$ je pro odčítání otevřený, proto rozklad trojic vyžaduje některá omezení.

Rozklad číselné trojice na součet

Rozložme trojici čísel x, y, z v oboru čísel celých. Zde ke každé dvojici čísel existuje jediné celé číslo, které je jejich rozdílem. Proto pro libovolnou trojici $x, y, z \in \mathbb{Z}$ platí:

- pro z, y existuje $d \in \mathbb{Z}$ takové, že $z - y = d$, neboli $z = y + d$
- pro z, x existuje $v \in \mathbb{Z}$ takové, že $z - x = v$, neboli $z = x + v$
- pro $x+y$, z existuje $p \in \mathbb{Z}$ takové, že $x+y-z = p$, neboli $x+y = z+p$

Odsud z rovností $x + y = z + p = y + d + p$ plyne $x = p + d$, z rovností $x + y = z + p = x + v + p$ plyne $y = p + v$ a z rovností $z + p = x + y = p + d + p + v$ plyne $z = p + d + v$.

Právě jsme ukázali jeden způsob rozkladu číselné trojice na součet.

Příklad 1. Jak lze výše uvedeným způsobem rozložit trojici $x = 5$, $y = -7$, $z = 13$? Zde je $d = z-y = 13-(-7) = 20$, $v = z-x = 13-5 = 8$, $p = 5 - 7 - 13 = -15$. Rozložená trojice je $5 = -15 + 20$, $-7 = -15 + 8$, $13 = -15 + 20 + 8$.

Příklad 2. Víme, že $d = 3$, $v = -8$. Pro kterou trojici x, y, z platí $p = 2d + v$? Protože $p = -2$, pak $x = p + d = -2 + 3 = 1$, $y = p + v = -2 - 8 = -10$, $z = p + d + v = -2 + 3 - 8 = -7$.

[1] e-mail: ladislavkocanda69@gmail.com

Dva druhy nesoudělných trojic

Z předchozích vztahů $d = z - y$, $v = z - x$, $p = x + y - z$, $z = p + d + v$, $x = p + d$, $y = p + v$ plynou rovnosti $p = x - d = y - v$.

Protože v oboru čísel celých platí pravidla dělitelnosti, existují největší společní dělitelé d_1, v_1 dvojic čísel x, d a y, v. Tedy:

- $d_1 = D(x, d)$, z čehož $x = d_1 w_1$, $d = d_1 w_2$
- $v_1 = D(y, v)$, z čehož $y = v_1 g_1$, $v = v_1 g_2$

Čísla w_1, w_2, g_1, g_2 jsou celá. Po dosazení do rovnosti $x - d = y - v$ je

$$p = d_1(w_1 - w_2) = v_1(g_1 - g_2).$$

Po porovnání podílů

$$\frac{d_1}{v_1} = \frac{g_1 - g_2}{w_1 - w_2}$$

a za předpokladu, že $D(d_1, v_1) = 1$, je $g_1 - g_2 = kd_1$, $w_1 - w_2 = kv_1$, kde k je celé číslo.

1. Budou-li rozdíly $g_1 - g_2$, $w_1 - w_2$ čísly nesoudělnými, pak $k = 1$ a $g_1 - g_2 = d_1$, $w_1 - w_2 = v_1$. Po dosazení je

$$p = d_1(w_1 - w_2) = v_1(g_1 - g_2) = d_1 v_1.$$

Rozklad číselné trojice x, y, z má tvar $x = d_1 v_1 + d$, $y = d_1 v_1 + v$, $z = d_1 v_1 + d + v$.

Příkladem je trojice $x = 3$, $y = 10$, $z = 11$, kde $d = 1$, $v = 8$, $d_1 = 1$, $v_1 = 2$, $p = 3 + 10 - 11 = d_1 v_1 = 2$, $w_1 = 3$, $w_2 = 1$, $g_1 = 5$, $g_2 = 4$, $k = 1$, $p = 1 \cdot (3 - 1) = 2 \cdot (5 - 4) = 1 \cdot 2$, $D(w_1 - w_2, g_1 - g_2) = 1$. Rozklad číselné trojice má tedy tvar $3 = 2 + 1$, $10 = 2 + 8$, $11 = 2 + 1 + 8$.

2. Budou-li rozdíly $g_1 - g_2$, $w_1 - w_2$ čísly soudělnými, pak $k \neq 1$ a $g_1 - g_2 = kd_1$, $w_1 - w_2 = kv_1$. Po dosazení je

$$P = d_1(w_1 - w_2) = v_1(g_1 - g_2) = kd_1 v_1.$$

Rozklad číselné trojice X, Y, Z má tvar $X = kd_1 v_1 + d$, $Y = kd_1 v_1 + v$, $Z = kd_1 v_1 + d + v$.

Příkladem je trojice $X = 5$, $Y = 7$, $Z = 8$, kde $d = 1$, $v = 3$, $d_1 = 1$, $v_1 = 1$, $P = 5 + 7 - 8 = kd_1 v_1 = 4$, $w_1 = 5$, $w_2 = 1$, $g_1 = 7$, $g_2 = 3$, $k = 4$, $P = 1 \cdot (5 - 1) = 1 \cdot (7 - 3) = 4 \cdot 1 \cdot 1$, $D(w_1 - w_2, g_1 - g_2) = 4$. Rozklad číselné trojice má tedy tvar $5 = 4 + 1$, $7 = 4 + 3$, $8 = 4 + 1 + 3$.

Z předchozího vyplývá, že nesoudělných číselných trojic jsou dva druhy. Trojice s $p = v_1 d_1$ a trojice s $P = kv_1 d_1$.

Jako příklad porovnejme trojice 3, 4, 5 a 13, 14, 15.

Trojice 3, 4, 5, kde $d = 1$, $v = 2$, $d_1 = 1$, $v_1 = 2$, $p = 2$, má $p = x - d = y - v = 3 - 1 = 4 - 2$, $p = 1 \cdot (3 - 1) = 2 \cdot (2 - 1)$, tedy $p = d_1 v_1 = 2$. Trojice 3, 4, 5 je navenek nesoudělná a vztahem $D(3 - 1, 2 - 1) = 1$ také vnitřně nesoudělná.

Trojice 13, 14, 15, kde $d = 1$, $v = 2$, $d_1 = 1$, $v_1 = 2$, $P = 12$, má $P = x - d = y - v = 13 - 1 = 14 - 2$, $P = 1 \cdot (13 - 1) = 2 \cdot (7 - 1)$, tedy $P = kd_1 v_1 = 12$, $k = 6$. Trojice 13, 14, 15 je navenek nesoudělná, ale vztahem $D(13 - 1, 7 - 1) = 6$ vnitřně soudělná.

Tyto dva druhy nesoudělných trojic se nedají na první pohled rozeznat. Trojice 13, 14, 15 je uvnitř soudělná. Hodnota její vnitřní soudělnosti se navenek projevuje v čísle k, které je součástí čísla $P = kd_1 v_1$, kde číslo P je součinem tří největších společných dělitelů d_1, v_1 a k.

Další rozdíl mezi trojicemi vnitřně i vně nesoudělnými a trojicemi vně nesoudělnými, ale vnitřně soudělnými, je patrný v tom, že trojice vnitřně soudělné vznikly z trojic vnitřně nesoudělných posunutím.

Trojice vnitřně i vně nesoudělné nazveme *trojice primitivní* a trojice navenek nesoudělné, ale vnitřně soudělné nazveme *trojice posunuté.*

Posunutí je zde patrné, např. trojice 13, 14, 15 je posunutou trojicí k trojici 3, 4, 5 o 10, trojice 3, 7, 8 je posunutou trojicí k trojici 2, 6, 7 o 1 a trojice 7, 9, 10 je posunutou trojicí k trojici 4, 6, 7 o 3.

Jak posunutí funguje

Posunutá trojice X, Y, Z má rozklad $X = x + u$, $Y = y + u$, $Z = z + u$, kde x, y, z je primitivní trojice a u je velikost posunutí. Protože je

$$P = X + Y - Z = (x + u) + (y + u) - (z + u) = (x + y - z) + u = kd_1 v_1,$$

$$p = x + y - z = d_1 v_1,$$

tak je

$$u = d_1 v_1 (k - 1) = p(k - 1).$$

Např. trojici 13, 14, 15 lze rozložit na $13 = 3 + 10$, $14 = 4 + 10$, $15 = 5 + 10$, kde $P = 12$, $p = 2$, $k = 6$, proto velikost posunutí je $u = 2 \cdot (6 - 1) = 10$.

Jak např. k trojici 7, 10, 11 nalezneme trojici primitivní? Zde je $d = 1$, $v = 4$, $d_1 = 1$, $v_1 = 2$, $P = 7 + 10 - 11 = 6$, $p = d_1 v_1 = 2$,

$k = 3$, $u = 2 \cdot (3-1)$. Primitivní trojice je $x = d_1v_1 + d = 2+1 = 3$, $y = d_1v_1 + v = 2+4 = 6$, $z = d_1v_1 + d + v = 2+1+4 = 7$. Tedy trojice 7, 10, 11 je posunutá o 4 od primitivní trojice 3, 6, 7.

Rovnice $x^n + y^n = z^n$ v oboru čísel přirozených

Rovnici $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, má řešit trojice po dvou nesoudělných přirozených čísel x, y, z, o kterých zatím nevíme, zda tvoří trojici primitivní nebo posunutou. V obou případech je však zřejmé, že čísla x, y, z, p, d, v musí být přirozená. Zde dokážeme, že čísla p, d, v čísly přirozenými jsou.

Nechť $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ a $x^n + y^n = z^n$. Pak je $z^n > y^n$, odkud $z > y$, takže existuje $d \in \mathbb{N}$, takové, že $z = y + d$. Také je $z^n > x^n$, odkud $z > x$, takže existuje $v \in \mathbb{N}$, takové, že $z = x + v$.

Je třeba ještě rozhodnout, zda $x + y > z$, nebo $x + y < z$, nebo $x + y = z$. Kdyby bylo $z \geq x + y$, bylo by $z^n \geq (x+y)^n > x^n + y^n = z^n$, což je spor. Proto je $x+y > z$, takže existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $x+y = z+p$.

Právě jsme dokázali, že p, d, v jsou čísla přirozená a číslo p je dokonce číslem sudým, protože v této rovnici může být jen jedno z čísel x, y, z sudé.

Věta 1. *Platí-li pro přirozená čísla x, y, z rovnost $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pak pro libovolné přirozené číslo i, $0 < i < n$, platí*

$$x^{n-i} + y^{n-i} - z^{n-i} > 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci.

Pro $i = 1$ postupně platí:

$$x^n + y^n = z^n$$
$$x^{n-1} \cdot x + y^{n-1} \cdot y - z^{n-1} \cdot z = 0$$
$$x^{n-1}(p+d) + y^{n-1}(p+v) - z^{n-1}(p+d+v) = 0$$
$$p(x^{n-1} + y^{n-1} - z^{n-1}) = d(z^{n-1} - x^{n-1}) + v(z^{n-1} - y^{n-1})$$

Jelikož je $p, d, v > 0$, je tedy $x^{n-1} + y^{n-1} - z^{n-1} > 0$.

Předpokládejme, že nerovnost platí pro jisté číslo i a dokážeme, že platí pro $i + 1$:

$$x^{n-i} + y^{n-i} - z^{n-i} > 0$$

$$x^{n-i-1}(p+d) + y^{n-i-1}(p+v) - z^{n-i-1}(p+d+v) > 0$$
$$p(x^{n-i-1}+y^{n-i-1}-z^{n-i-1}) > d(z^{n-i-1}-x^{n-i-1})+v(z^{n-i-1}-y^{n-i-1})$$

Odsud plyne nerovnost $x^{n-(i+1)} + y^{n-(i+1)} - z^{n-(i+1)} > 0$, takže jsme dokázali, že nerovnost platí také pro $i+1$. $\square$

Podle této věty např. platí: pokud by se nám například podařilo nalézt trojici přirozených čísel x, y, z takových, že $x^{10} + y^{10} = z^{10}$, pak pro stejná čísla x, y, z by $x^5 + y^5 - z^5$ bylo číslo přirozené; podobně by bylo $x^2 + y^2 - z^2 > 0$ a také $x + y - z > 0$.

Řeší posunutá trojice rovnici $X^n + Y^n = Z^n$?

Nechť x, y, z je trojice primitivní, u velikost posunutí a X, Y, Z trojice posunutá. Pak

$$X^n + Y^n - Z^n = (x+u)^n + (y+u)^n - (z+u)^n = 0.$$

Pomocí sumačních znaků upravíme tento vztah na tvar

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{n-i} x^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{n-i} y^i - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^{n-i} z^i.$$

Po vyjmutí $i = 0$ ze sumy a převedením u^n na druhou stranu je

$$-u^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u^{n-i}(x^i + y^i - z^i).$$

V oboru čísel přirozených musí být čísla x, y, z, p, d, v, u přirozená. Proto je číslo $u^n = [(k-1)d_1v_1]^n$ nezáporné. Podle výše uvedené věty je $x^i + y^i - z^i > 0$ pro všechny exponenty i. Proto musí být $u^n = 0$, tedy ze vztahu $u^n = [(k-1)d_1v_1]^n$ je $k = 1$.

Z tohoto vyplývá závěr: posunutá trojice, kde $P = kd_1v_1$, rovnici $X^n + Y^n = Z^n$ neřeší, rovnici $x^n + y^n = z^n$ může řešit pouze číselná trojice primitivní, kde $p = d_1v_1$.

Věta 2. *Rovnice $x^n + y^n = z^n$, nemá řešení pro n liché prvočíslo.*

Důkaz. Nechť $D(x,y,z) = 1$, kde x, y, z je trojice primitivní. Pro lichá n platí

$$z^n = x^n + y^n = (x+y) \cdot U,$$

kde

$$U = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x^{n-i} y^{i-1}.$$

Označíme-li $z_1 = D(z, x+y)$, je $z = z_1 u_1$, $x + y = z_1 u_2$. Dále je $x + y = z + p$, $z + p = z_1 u_2$ a $z_1 u_1 + p = z_1 u_2$. Protože $p = d_1 v_1$, je pak $p = z_1(u_2 - u_1)$, takže $d_1 v_1 = z_1(u_2 - u_1)$. Nechť z_1 dělí v_1, pak $v_1 = z_1 u_3$ a $y = z_1 u_3 g_2$.

Závěr: Platí $y = z_1 u_3 g_2$, $z = z_1 u_1$, odkud $z_1 = D(x, y, z)$, což je spor s předpokladem, že trojice x, y, z je nesoudělná. □

Bealova domněnka

Bealova domněnka zní: Rovnice $X^a + Y^b = Z^c$ nemá řešení v přirozených číslech X, Y, Z, a, b, c, kde a, b, c jsou větší nebo rovna 3 a čísla X, Y, Z jsou navzájem nesoudělná.

Co domněnka požaduje?

- nesoudělná čísla X, Y, Z – lze splnit při $D(d_1, v_1) = 1$
- přirozená čísla X, Y, Z – lze splnit, ale čísla rozkladu P, d, v budou celá
- dokázat, že např. pro exponenty 4, 5, 7 nemá rovnice $X^a + Y^b = Z^c$ řešení, protože 4 je zde nejmenší

Rovnice $X^a + Y^b = Z^c$ se bude chovat jinak než rovnice se stejným exponentem n. Pravděpodobně pod největším exponentem bude nejmenší základ a pod nejmenším exponentem základ největší. V rovnici s exponentem n musí být splněn vztah $X < Y < Z$. Zde tomu tak být nemusí.

Tato úvaha nás vede k závěru, že trojice čísel X, Y, Z nebude trojicí primitivní, ale trojicí posunutou.

Důkaz. Rovnici $X^a + Y^b = Z^c$, ve které přirozená, po dvou nesoudělná čísla X, Y, Z s exponenty a, b, c, pro které platí $a < b < c$, upravíme tak, že každé z čísel X, Y, Z umocníme na nejmenší exponent, kterým je číslo a. Zbytek, celé číslo Q, nechť nám vyrovná porušení rovnosti. Pak platí

$$0 = X^a + Y^b - Z^c = X^a + Y^a - Z^a + (Y^b - Y^a) - (Z^c - Z^a).$$

Položme $Q = (Y^b - Y^a) - (Z^c - Z^a)$. Pak je

$$0 = X^a + Y^a - Z^a + Q.$$

Po rozkladu čísel X, Y, Z na součet je

$$0 = (P+d)^a + (P+v)^a - (P+d+v)^a + Q.$$

Pomocí sumačního znaku poslední rovnici upravíme na tvar

$$0 = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} P^{a-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] + Q.$$

Protože je

$$\binom{a}{1} P^{a-1}[d^1 + v^1 - (d+v)^1] = 0,$$

tak vyjmutím $i = 0, 1, 2$ ze sumy postupně dostaneme rovnosti

$$0 = P^a - \binom{a}{1} P^{a-1} \cdot 0 - \binom{a}{2} P^{a-2} \cdot 2dv + \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{a-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] + Q,$$

$$P^a = \binom{a}{2} P^{a-2} \cdot 2dv - \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{a-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] - Q.$$

Z poslední rovnosti vyplývá, že máme nalézt taková celá čísla P, d, v, pro která bude a-tá odmocnina (z výrazu na pravé straně rovnosti) číslo celé. Položme si otázku, jak ji zjednodušit. Obyčejně rovnost vydělíme největším smysluplným číslem, v našem případě vhodným číslem P^{a-q}, kde $q = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$1 = a(a-1)P^{-2}dv - \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] - \frac{Q}{P^a}$$

$$P = a(a-1)P^{-1}dv - \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{1-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] - \frac{Q}{P^{a-1}}$$

$$P^2 = a(a-1)dv - \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{2-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] - \frac{Q}{P^{a-2}}$$

$$P^3 = a(a-1)P^1dv - \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{3-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] - \frac{Q}{P^{a-3}}$$

Bude-li $q = 0$, pak se v rovnosti, kde musí být čísla P, d, v celá, vyskytují čísla racionální P^{-2}, P^{-i}. Bude-li $q = 1$, pak se v rovnosti vyskytují čísla racionální P^{-1}, P^{1-i}. Bude-li $q = 2$, se pak v rovnosti vyskytuje jediné racionální číslo P^{2-3}.

Bude-li $q = 3, 4, 5, \ldots$, pak se ve výrazu $a(a-1)P^u dv$ objevují exponenty $u = 1, 2, 3, \ldots$ Po vydělení rovnosti číslem P^u se opět dostaneme k rovnosti s P^2, tj.

$$P^2 = a(a-1)dv - \sum_{i=3}^{a} \binom{a}{i} P^{2-i}[d^i + v^i - (d+v)^i] - \frac{Q}{P^{a-2}}.$$

Protože pro $i > 2$ je P^{2-i} číslem racionálním, nikoliv celým, bude $a = 2$ nejmenším z exponentů a, b, c a při $P^{2-2} = 1$ bude $Q/P^{2-2} = Q$. Výsledná rovnost tedy je

$$P^2 = 2dv - Q,$$

kde $Q = Y^2(Y^{b-2} - 1) - Z^2(Z^{c-2} - 1)$.

Nejmenším exponentem v rovnici je číslo $a = 2$. Číslo c musí být největší. $\square$

Důkaz Velké Fermatovy věty jako pokračování Bealovy domněnky

Pro Fermatou větu položíme $a = b = c = n$, $P = p + u$, kde x, y, z, n, p, d, v, $k \in \mathbb{N}$, x, y, z je primitivní trojice. Pak platí

$$x^2 + y^2 - z^2 = (p+d)^2 + (p+v)^2 - (p+d+v)^2 = p^2 - 2dv.$$

Z předchozího vztahu $P^2 = 2dv - Q$ postupně je

$$(p+u)^2 = 2dv - Q,$$
$$p^2 = 2dv - Q - 2pu - u^2.$$

Protože $Q = 0$, je $p^2 - 2dv = -2pu - u^2$, takže

$$x^2 + y^2 - z^2 = -2pu - u^2.$$

Budou-li čísla p, u kladná, pak $x^2 + y^2 - z^2 < 0$, což odporuje vztahu $x^{n-i} + y^{n-i} - z^{n-i} > 0$. Vyhovující je pouze rovnost pro $u = 0$, tedy

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Proto pro žádná přirozená čísla x, y, z a n, kde $n > 2$, neplatí rovnice $x^n + y^n = z^n$.

Závěr

Co v článku ukazujeme?

1. Každá číselná trojice x, y, z se dá rozložit pomocí čísel $p = x + y - z$, $d = z - y$, $v = z - x$ právě tehdy, když $x = p + d$, $y = p + v$, $z = p + d + v$.
2. Existují dva druhy nesoudělných trojic – trojice primitivní s $p = d_1 v_1$ a trojice posunuté s $P = kd_1 v_1$.
3. Je-li $x^n + y^n - z^n = 0$, pak pro každé $i < n$ platí
$$x^{n-i} + y^{n-i} - z^{n-i} > 0.$$
4. Je dokázáno, že Velká Fermatova věta pro liché prvočíslo n platí.
5. V rovnici
$$X^a + Y^b - Z^c = 0$$
musí být nejmenší exponent roven číslu 2.
6. Pokud Bealova domněnka platí, platí i Velká Fermatova věta, protože při $n > 2$ není v rovnici $x^n + y^n - z^n = 0$ číslo $x^2 + y^2 - z^2$ kladné.

Literatura

[1] Kocanda, L.: Jak mohl Fermat uvažovat. *Kvaternion*, č. 1, FSI VUT, Brno. 2013.
[2] Polák. J.: *Přehled středoškolské matematiky*. SPN, Praha, 1966.
[3] Veselý, F.: *O dělitelnosti čísel celých*. MF, Praha, 1966.

O dělení kruhu – Mezi matematikou a uměním

Jana Kopfová, Mathematical Institute of the Silesian University, Opava [1]

ABSTRAKT. *Ukážeme velice zajímavý matematický problém s překvapivým řešením. V procesu hledání řešení použijeme základní principy objevitelské metody. Autorka se podělí o vlastní zkušenosti z práce s nadanými žáky.*

Úvod

Bude to příběh o jednom zajímavém, relativně obtížném matematickém problému. Proces jeho řešení se dá velmi pěkně spojit s tvořivou uměleckou činností. Umělecká složka je poměrně jednoduchá, dá se malovat na hedvábí, ale mohou být použity i jiné barvy, akvarely nebo jen barevné tužky. Budeme řešit obtížný matematický problém, jenž byl nalezen v plném znění ve sbírce úloh pro přípravu na mezinárodní matematickou olympiádu [1]. Začneme velmi jednoduchým případem, vhodným pro děti ze základních škol, a při hledání řešení necháme děti samy zkoumat a objevovat A kreslit obrázky – aktivitu můžeme rozvinout i tímto uměleckým směrem a na konci uspořádat výstavu vytvořených děl. Pokusíme se tak zkombinovat tři věci – hluboké uspokojení z nalezení řešení zajímavého matematického problému, uměleckou radost z hraní si s barvami a vzory a radost z vlastního objevování. Budou sděleny vlastní zkušenosti autorky, takže jiní učitelé mohou vyzkoušet podobné myšlenky ve svých třídách.

Hlavní téma

Začneme s problémem původně nalezeným v učebnici Hejného metody [2].

Problém 1. Představte si, že máte kruh. Na kružnici, která ho ohraničuje, zvolte libovolné 3 body. Spojte každý bod se všemi zbývajícími body úsečkou. Na kolik částí bude kruh rozdělen?

Řešení je velmi jednoduché. Již malé děti umí úkol úplně vyřešit, obvykle pomocí náčrtku – kruh bude rozdělen na 4 části. A to je nezávislé na tom, kde na kružnici umístíte své 3 body. Můžete se však pokusit

[1] e-mail: jana.kopfova@math.slu.cz

umístit body na různá místa, a tak si vytvořit různé vzory. Potom si vezměte barvičky – například zkuste vybrat jednu jedinou barvu a namíchat její různé odstíny, každou část pak vybarvěte jiným odstínem zvolené barvy.

Následuje o málo těžší problém.

Problém 2. Zvolte na kružnici 4 body. Řešte ten samý úkol jako v problému 1.

Je to stále snadné, ne? Kolik částí dostanete? Osm. Opět v závislosti na poloze bodů vznikne mnoho různých vzorů. Jednotlivé části můžete opět vybarvit odstíny různých barev (nebo stejné barvy, v závislosti na vaší kreativitě).

Opět o malinko těžší problém.

Problém 3. Zvolte nyní 5 bodů na kružnici. Opět spojte všechny možné dvojice bodů úsečkou. Kolik částí získáte?

Můžete vyzkoušet různé kombinace umístění bodů na kružnici; výsledek bude vždy 16. Vyberte barvu, pokuste se namíchat 16 různých odstínů této barvy a vymalovat jednotlivé části, každou jiným odstínem.

Matematicky nudná úloha? Ještě jsme neskončili. Podívejme se na složitější problém.

Problém 4. Umístěte 6 bodů na kružnici, spojte všechny možné dvojice bodů úsečkou. Nejvýše kolik částí získáte?

Ještě jste nevypozorovali žádné souvislosti? Nepotřebujeme pokračovat ve spojování bodů. Měli jsme 4, 8, 16 částí. Je zcela jasné, že teď musíme dostat přesně 32 částí? Jsme tedy hotovi?

Souhlasíte všichni s tím, že se 6 body získáte 32 částí? Já ne. Pokud jste si jisti výsledkem 32, můžete se se mnou vsadit. Proč? Přece je zcela jasné, že počet částí, které dostaneme při dělení kruhu z n bodů, bude 2^{n-1} oblastí. Je tomu opravdu tak?

Tento problém jsem zkoušela řešit s žáky v sedmé, osmé i deváté třídě a také se skupinou žáků středních škol. Jejich přístup k řešení nebyl spojen s věkem, ale s matematickými schopnostmi. Všichni byli přesvědčeni, že existuje předpis, podle kterého se řídí posloupnost čísel, na kolik částí dělíme kruh, když postupně přidáváme body. A že předpis je jednoduchý. Někteří z nich začali kreslit obrázek o 6 bodech, někteří z nich chtěli najít argumenty, proč dostaneme skutečně 32 částí. Po několika minutách bylo slyšet ve třídě „Já mám jen 31 částí.“ „Mám jen 30…“ „Tohle nemůže být…“ „Určitě se mýlíme.“ „Musíme udělat větší obrázek a počítat části opatrněji.“

Nyní různé odstíny vymalovaných částí pomáhají, dokonce mohou být použity i různé barvy, protože vyžaduje velké úsilí, aby se vytvořilo více než 30 odstínů stejné barvy. Alternativně můžeme použít jen několik odstínů stejné barvy, ale pokusit se z nich vytvořit zajímavý vzor.

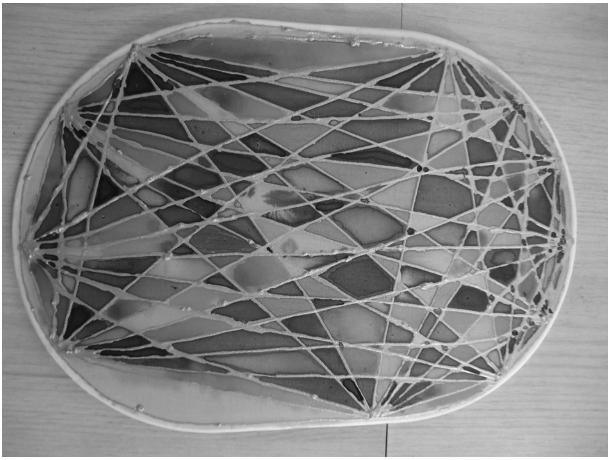
Jeden žák se po chvíli zeptal, jestli smí udělat velký obrázek na tabuli. I po mnoha pokusech největší počet částí, na které může být kruh rozdělen, vyjdeme-li z 6 bodů, zůstává 31.

Zde příběh o problému z učebnice matematiky pro 7. třídy končí. Je to velmi pěkný příklad, který ukazuje, že někdy musíme být velmi opatrní při „zřejmých“ zobecňováních. My všichni to často velmi rádi děláme, a to nejen v matematice.

Zvědavost žáků však neuvěřitelně stoupla. Kreslili stále více a více obrázků. Chtěli vědět, jak by tato podivná posloupnost 4, 8, 16, 31 pokračovala. Nebylo nutné jim dávat další problémy. Vytvářeli si je sami. Sedm bodů? „Mám 56 částí.“ „Já 57.“ „V žádném případě neumím získat 64 částí.“ „Ale proč?“

Talentovaný kluk, který byl první z těch, kdo si byli jisti, že s 6 body na kružnici dostaneme 32 částí, a příliš líný si obrázky kreslit, si najednou stěžuje, že není dobrý v kreslení. Po chvilce tvrdí, že 32 je podle jeho teorie opravdu špatně. Není potřeba žádné kreslení, jenom přemýšlení, tvoří si svoji teorii „křižovatek“. Ale pak přijde překvapení. Vidím ho velmi opatrně kreslit na tabuli 7 bodů na kružnici a pořádně velký obrázek. Chce experimentálně porovnat svůj teoretický výsledek s praxí. A kreslí! A jde mu to.

Tato činnost pokračovala ve všech skupinách žáků ještě velmi dlouho. Jedna skupina byla plně fascinována skutečností, že posloupnost čísel nepokračuje vzorcem, který žáci původně očekávali. Ale jak posloupnost pokračuje? Žáci vytvářeli různé předpovědi, pak je zkoušeli ověřit. Nakreslili mnoho obrázků. Problém je zaměstnal na dlouhou dobu, žáci byli velmi motivovaní, nechtěli se vzdát, chtěli najít řešení. Další hodinu jsme se k problému vrátili. Zformulovali jsme ho obecně (obr. 1).



Obr. 1 Jedenáct bodů a kolik částí?

Problém 5. Na kružnici je n bodů. Spojte každý bod se všemi zbývajícími body úsečkou. Nejvýše na kolik částí bude kruh rozdělen?

Prosím, přestaňte v tuto chvíli číst dál a pokuste se přemýšlet o řešení tohoto problému sami. Tady jsou otázky, které vám mohou pomoci s řešením.

Problém 6. Na kružnici leží n bodů. Spojte každý bod se všemi zbývajícími body úsečkou. Kolik úseček nakreslíte?

Problém 7. Na kružnici leží n bodů. Spojte každý bod se všemi zbývajícími body úsečkou. Nejvýše kolik křižovatek (bodů, ve kterých se protínají 2 úsečky) vznikne?

Problém 7 se vrací k nápadu jednoho žáka, jak počítat, kolik částí vznikne, pomocí křižovatek. Problém 6 je ekvivalentní jiné úloze, se kterou jste se pravděpodobně již setkali dříve.

Problém 8. Pokud na turnaji hraje n týmů a každý tým hraje s každým, kolik zápasů se odehraje dohromady?

Žáci mohou vypozorovat, že tyto problémy jsou ekvivalentní, a rychle přicházejí s řešením.

Dobré je také zmínit se o údajné historce ze života slavného matematika Carla Friedricha Gausse. Na základní škole uložil Gaussův učitel žákům, aby se pokusili spočítat součet všech čísel od 1 do 100. Mladý Gauss odpověděl během chvilky, čímž učitele udivil. Tuto úlohu můžeme žákům také zadat. Pro mladší žáky je tato, i když tradiční úloha, hodně zajímavá. Starší žáci nebudou mít velký problém ukázat, že řešení je dáno vztahem $\frac{100(100+1)}{2}$.

Během řešení problému s turnajem mohou děti uvažovat například takto: První tým bude hrát s $n-1$ týmy, odehraje tedy $n-1$ zápasů, zápas druhého týmu s prvním jsme již započítali, druhý tým bude hrát ještě s $n-2$ týmy, tedy dostáváme dalších $n-2$ zápasů, atd. Dohromady jde o $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1$ zápasů. Což je stejný princip jako při sčítání čísel od 1 do 100, proto je výsledek $\frac{(n-1)n}{2}$.

Jiné řešení přichází s myšlenkou, že každý tým hraje $n-1$ zápasů, a protože je n týmů, odehraje se $(n-1)n$ her. Porovnáním obou řešení žákům obvykle dojde, že v tomto řešení počítali každou hru dvakrát.

Chybný výsledek, se kterým se zde můžeme setkat, je $\frac{n(n+1)}{2}$. Řešení je vhodné prodiskutovat a objevit chybu; žáci jsou schopni najít ji sami.

Ekvivalentní problém je tento:

Problém 9. Představte si, že si chcete koupit dva různé druhy zmrzliny a můžete přitom vybírat z 8 (15) druhů. Kolik různých kombinací můžete koupit?

Děti, i bez znalosti kombinatoriky, se rychle dostanou k řešení: První druh si můžete vybrat 8 (15) způsoby, druhý 7 (14) způsoby, takže je 8 krát 7 (15 krát 14) možností výběru, ale jelikož nezáleží na tom, jaký druh je zvolen jako první a jaký jako druhý, všechny kombinace jsou počítány dvakrát – takže správná odpověď je 28 (105). Někdy žáci přirozeně nepřijdou na myšlenku dělit dvěma a pomůže jim vidět problém v následující ekvivalentní formulaci.

Pro n druhů dostaneme nám již dobře známý vztah $\frac{n(n+1)}{2}$. A stejné číslo udává i počet úseček, které dostaneme, když spojíme n bodů každý s každým – to je řešení problému 6. Můžeme žákům ukázat, že výsledek lze zapsat alternativně jako tzv. kombinační číslo $\binom{n}{2}$. Lze také mluvit o Pascalově trojúhelníku, ale k tomu bude lepší příležitost malinko později.

Nyní se vrátíme k myšlence, že počet křižovatek hraje roli při hledání vzorce pro původní problém dělení kruhu s n body.

Umíme vypočítat, nejvýše kolik průsečíků bude mezi úsečkami, které spojují n bodů? To není snadný problém. Je možné začít počítat body na dříve vytvořených obrázcích. Brzy třída vytvoří posloupnost 1, 5, 15, 35, 70, 126, ... Ale existuje nějaká pravidelnost? A jak ji objevit?

Kolika body je jednoznačně určena křižovatka? Odpověď 4 se objeví rychle, možná ale budeme muset malinko pomoci obrázkem. Takže každé 4 body určují jednu křižovatku. Kolik čtveřic bodů můžeme vybrat z n bodů? Nyní může být zkušenost s problémem se zmrzlinou užitečná. Ekvivalentně můžeme úlohu zformulovat takto: Kolika různými způsoby je možné vybrat 4 druhy zmrzliny z daných n druhů?

První si můžeme zvolit n různými způsoby, druhou $n-1$ způsoby, třetí $n-2$ způsoby a čtvrtou $n-3$ způsoby, dohromady $n(n-1)(n-2)(n-3)$ různými způsoby. Jak již víme z předcházejícího, toto číslo musí být vyděleno nějakým číslem.

Jaké to bude číslo? Číslo, které určuje, kolika způsoby můžeme uspořádat 4 druhy předmětů (zde druhů zmrzliny), protože zde není důležité, který z nich si vybereme jako první. To je $4 \cdot 3 \cdot 2$ nebo jednodušeji 4! způsoby. Některé děti mohou vidět tento zápis poprvé, obvykle se jim ale velice líbí. Takže odpověď je

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \binom{n}{4}.$$

Teď přichází poslední krok. Můžete si sestavit tabulku s počtem úseček a počtem průsečíků pro daný počet n bodů na kružnici.

počet bodů	počet úseček	počet průsečíků
4	6	1
5	10	5
6	15	15
7	21	35

Všimněme si, že pokud sčítáme tato čísla, získáme posloupnost 7, 15, 30, 56, ..., čísel o 1 menších, než jsou čísla, která jsme našli na začátku experimentálně. Jak tato čísla spolu souvisí? Jsme teď již velmi blízko kompletního řešení.

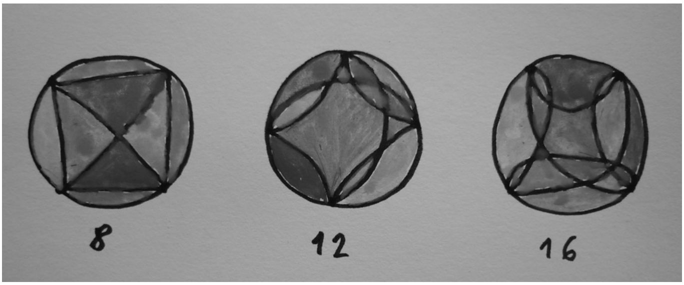
Řešení může být provedeno matematickou indukcí. Můžeme ukázat, že pokud máme n bodů, l přímek a p křižovatek, vztah $r = l + p + 1$ určuje počet částí, na které je rozdělen kruh. Předpokládejme, že tento vztah platí pro l úseček. Přidáním další úsečky, která protne s úseček, můžeme jasně vidět, že nových s průsečíků rozdělí novou úsečku na $s+1$

dílů a každý takový díl rozdělí jednu starou oblast na dvě části. Tedy l se zvětšilo o 1, p se zvětšilo o s a r se zvětšilo o $s+1$. Vztah zůstává platný, protože obě strany rovnosti se zvětšily o $s+1$. Vzhledem k předešlým úvahám dostáváme

$$r = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1.$$

Na konci můžeme experimentovat s obrázky s různým počtem bodů, barev, odstínů a vzorů.

Dalším krokem je spojení bodů zakřivenými čarami, ale takovými, které samy sebe neprotínají (obr. 2). Při kreslení obrázků budeme zkoumat, kolik částí je možné vytvořit. Tento problém je zajímavý již se 4 body.



Obr. 2 Čtyři body a kolik částí?

Skončíme malou výstavkou a ještě si můžeme povídat o Pascalově trojúhelníku a sledovat o něm film [3], který jsme vytvořili před nějakým časem.

Zajímavou celosvětovou akcí, která spojuje matematiku a umění, je konference Bridges. Na jejích stránkách `http://bridgesmathart.org` můžeme najít mnoho překrásných matematických obrázků i inspirací.

Literatura

[1] Engel, A.: *Problem-Solving Strategies (Problem Books in Mathematics).* Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

[2] Hejný, M., Šalom, P.: *Matematika C, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat, o. p. s., Praha, 2016.

[3] Kopfová, J., Mag, M.: *Mathematics and its secrets.* DVD, 2013. `http://youtu.be/nWW3tCx45cI`

Metrické prostory a geometrie konkrétního

František Kuřina, UHK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Po definování pojmu metrický prostor je uvedeno několik jeho interpretací, které umožňují sledovat metamorfózy tvarů známých geometrických útvarů.*

Od měření vzdálenosti k reálným číslům a metrickým prostorům

Měření vzdáleností je praktická činnost spjatá s problémy života ve společnosti, která dala jméno historicky významné části matematiky: *měřictví* neboli *geometrii*. Je pozoruhodné, že tato činnost úzce spjatá s předeukleidovskou érou matematiky nenašla přímé vyjádření v Eukleidových Základech. „Předmětem studia té geometrie, o níž pojednávají Eukleidovy Základy, nejsou tvary a velikosti reálných objektů, jak tomu bylo u napínačů provazů, ale ideální objekty antického geometrického světa, skrývající se pod reálnými objekty. Za objevitele tohoto ideálního antického geometrického světa byl považován Pythagoras ze Samu“ (6. stol. př. Kr.) ([15], s. 29).

„Důsledky objevu nesouměřitelnosti způsobily pád původního pythagorejského pohledu na svět čísel a veličin. Ukázalo se, že přirozená čísla a jejich poměry k vyjádření geometrických vztahů nestačí. Řečtí matematici proto přešli od aritmetického pojetí matematiky k pojetí geometrickému. Základními matematickými veličinami se staly veličiny geometrické – délky, obsahy a objemy“ ([2], s. 75), ovšem ve formě úseček, pravoúhelníků a kvádrů.

Tak např. Pythagorova věta je formulována takto: „V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících“ ([5], s. 24). Věta o objemu rovnoběžnostěnu zní „Rovnoběžnostěny o stejných základnách a téže výšce jsou si rovny“ ([5], s. 257).

Toto pojetí do jisté míry žije i dnes. Např. *J. B. Pavlíček* píše: „Vzdáleností dvou bodů budeme rozumět každou úsečku shodnou s úsečkou spojující oba body“ ([12], s. 76).

V deskriptivní geometrii se obvykle určuje velikost úsečky z daného průmětu jejím narýsováním, např. sklopením promítacího trojúhelníku nebo lichoběžníku (např. [13]).

[1] e-mail:kurinovi@gmail.com

Nevím, zda toto pojetí vzdálenosti není příčinou relativně malé pozornosti, kterou věnují měření úseček učebnice matematiky pro naše základní a střední školy.

Čísla do axiomatických základů geometrie nepronikla ani v *Hilbertově soustavě axiomů* z r. 1899, ale až v r. 1932 zásluhou amerického matematika *George D. Birkhoffa*, v jehož axiomatice je jedním z primitivních pojmů vzdálenost jako nezáporné reálné číslo.

Přitom se ovšem školní geometrie nemůže bez čísel dost dobře obejít. Dostávají se tam „zadními vrátky“, pro potřeby „praktických“ aplikací (výpočet vzdáleností v terénu, obsahy útvarů a objemy těles) a prvků analytické geometrie (číselná osa). V současné době existuje řada axiomatických systémů geometrie, které pracují se vzdáleností jako primitivním pojmem. Za nejpropracovanější považuji *Leeovu Axiomatickou geometrii* [11] z r. 2013. Bohužel nemáme, pokud vím, žádnou novější českou práci o základech geometrie. Rád ovšem konstatuji, že planimetrie pro gymnázia *Evy Pomykalové*, která však není koncipována axiomaticky, s reálnými čísly jako délkami úseček přirozeným způsobem pracuje.

Konstrukce délky úsečky jako „čísla získaného měřením“ je matematicky popsána např. v publikacích *Eduarda Čecha* [4] a *Jana Vyšína* [16]. Délka úsečky XY je reálné číslo $d(XY) = |XY| = n{,}n_1n_2n_3\ldots$, pro něž platí:

$$\forall X, Y \ \ [d(X, X) = 0 \wedge (X \neq Y \Rightarrow d(X, Y) > 0)] \tag{1}$$

$$\forall X, Y \ \ [d(X, Y) = d(Y, X)] \tag{2}$$

$$\forall X, Y, Z \ \ [d(X, Y) + d(Y, Z) \geq d(X, Z)] \tag{3}$$

Vlastnosti (1), (2), (3) charakterizují tzv. metrický prostor, funkce d se nazývá metrika.

Pojem metrický prostor na množině M bodů X, Y, Z, … je tedy uspořádaná dvojice, kde d je funkce, která každým dvěma bodům $X, Y \in M$ přiřazuje vzdálenost $d(X, Y)$ tak, že jsou splněny axiomy metrického prostoru (1), (2), (3). Vlastnost (2) je *symetričnost* vzdálenosti, (3) je tzv. *trojúhelníková nerovnost.* V geometrickém tvaru ji uvádí i *Eukleides* ([5], s. 11).

Axiomatickou definici vzdálenosti podal v r. 1906 francouzský matematik *Maurice Fréchet*, který bývá považován za zakladatele obecné topologie a funkcionální analýzy. Termín *metrický prostor* pochází od německého matematika *Felixe Hausdorfa* z práce *Grundzüge der Mengenlehre* z roku 1914.

Příklady metrických prostorů

V této části si všimneme několika modelů (interpretací) metrického prostoru. Některé byly inspirovány pohledy na reálný svět, jiné byly odvozeny ze známých matematických souvislostí. Metrické prostory budeme označovat $P = [M, d]$, kde M je množina, na níž je metrický prostor definován, d je příslušná metrika. Ověření, že v každém modelu platí axiomy metrického prostoru, si čtenář může provést sám nebo najít např. v publikacích [9] a [10].

Metrický prostor $P_1 = [M, v]$ je metrický prostor na množině M stanic X, Y, ... metra, které je provozováno za těchto podmínek: při každém vstupu do metra zaplatíme 24 Kč a můžeme jezdit bez omezení. Vzdálenost v je definována takto: je-li $X \neq Y$, je $v(X, Y) = 24$, jinak $v(X, Y) = 0$.

Metrický prostor $P_2 = [M, g]$ je definován na síti souvislého metra, nejsou-li žádné úseky jednosměrné a můžeme-li přestupovat bez omezení. Definujme metriku $g(X, Y)$ jako nejmenší počet úseků metra mezi stanicemi X, Y. Plán stanic metra si můžeme představit jako graf, v němž uzly jsou stanice metra a hrany jsou úseky mezi stanicemi.

Metrický prostor $P_3 = [\mathbb{R}, d]$ je definován na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel a pro vzdálenost d platí $d(x, y) = |x - y|$. Metrickými prostory jsou ovšem i struktury $[\mathbb{Q}, d]$ a $[\mathbb{N}, d]$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních a $\mathbb{N}$ množina všech přirozených čísel.

Metrický prostor $P_4 = [B, p]$ definován na množině B všech míst města, kde lze zaparkovat, $p(X, Y)$ je délka nejkratší cesty z místa X do místa Y. Ve městě nejsou jednosměrné ulice a město je jako celek průjezdné.

Metrický prostor $P_5 = [M, h]$, kde M je rovina s přímkou p procházející bodem P má metriku definovánu takto: jsou-li body X, Y v téže polorovině s hranicí p, je $h(X, Y) = |XY|$, jsou-li body X, Y oddělovány přímkou p, je $h(X, Y) = |XP| + |PY|$.

Na množině T žáků a jejich „souřadnicích“ abecedních (a), prospěchových (p) a věkových (v) můžeme vypočítat absolutní hodnotu rozdílu příslušných souřadnic. V označení podle tab. 1 (str. 40) tak máme metrické prostory $P_6 = [T, a]$, $P_7 = [T, p]$. Naopak $[T, v]$ metrickým prostorem není, neboť věková vzdálenost Adama a Ceháka (2004–2004) je nulová, avšak žáci jsou různí.

Metrickým prostorem je $P_8 = [M, t]$, kde M je rovina, v níž je pohyb dovolen pouze v daných dvou k sobě kolmých směrech (pohyb taxíku v „moderním“ městě) a vzdálenost t bodů $X = [x_1, y_1]$, $Y = [x_2, y_2]$ je definována vzorcem $t(X, Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$).

Metrickým prostorem je $P_9 = [M, m]$, kde v městě M se z místa X do místa Y můžeme dostat maximálně blízko, ale jen v jednom ze dvou daných k sobě kolmých směrů. V označení podle P_8 tedy platí $m(X, Y) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

Také $P_{10} = [M, c]$ je metrický prostor na městě M, kde je dovolen pohyb pouze po přímkách, které procházejí daným bodem C (město s jediným centrem C) a vzdálenost c míst X, Y je definována takto: prochází-li přímka XY bodem C, je $c(X, Y) = |XY|$, ve zbývajícím případě je $c(X, Y) = |XC| + |CY|$.

Také $P_{11} = [M, u]$ je metrický prostor na městě M, v němž je možný pohyb buď po jediné hlavní ulici U, nebo po vedlejších ulicích k U kolmých. Metrika u je definována takto: je-li $XY \perp U$, je $u(X, Y) = |XY|$, není-li $XY \perp U$, pak $u(X, Y) = |XX_1| + |X_1Y_1| + |Y_1X|$, kde X_1, Y_1 jsou pravoúhlé průměty bodů X, Y do přímky U.

T	a	p	v
Adam	1	1,2	2004
Berka	2	2,0	2005
Cehák	3	1,8	2004
Dan	4	3,0	2003
Emil	5	1,6	2002

Tab. 1

Geometrie konkrétního

Tuto část příspěvku prožije každý, kdo samostatně vyřeší následující úlohy. K řešení úloh postačí znát učivo střední školy.

U1. Sestrojte v „prostoru taxi“ $P_8 = [M, t]$ a v „prostoru maxi“ $P_9 = [M, m]$ kružnici se středem v počátku a poloměrem 4.

U2. V „prostoru taxi“ sestrojte úsečku EF a její osu pro $E[0, 0]$, $F[4, 2]$. Úsečka EF je množina všech bodů X roviny, pro které platí $|EF| = |EX| + |XF|$.

U3. V „prostoru taxi“ sestrojte elipsu s ohnisky E, F a hlavní osou délky 10, hyperbolu s ohnisky E, F a hlavní osou délky 4, kde $E[0, 0]$, $F[4, 2]$, parabolu s řídicí přímkou v ose y a ohniskem $F[4, 2]$.

U4. Sestrojte úsečku a její osu v dalších metrických prostorech

Po více než sto letech od doby svého vzniku vyšel česky pozoruhodný soubor esejů *Bertrada Russella*, v němž jsem si s uspokojením přečetl: „Místo, aby se v geometrii začínalo únavným aparátem falešných důkazů pro zjevné a samozřejmé pravdy, by se studentovi mělo dovolit, aby předpokládal pravdivost všeho zřejmého, a pak by se mu měly vysvětlovat důkazy vět, které jsou jak překvapující, tak snadno ověřitelné obrázkem… Rozumové usuzování může vést k alarmujícím, nicméně fakty doloženým závěrům, a postupně se tak překonává instinktivní nedůvěra v cokoliv abstraktního či racionálního“ ([14], s. 51).

Povzbuzen těmito slovy klasika jsem se pokusil zde ilustrovat jeden z důležitých matematických pojmů, pojem metrického prostoru, „překvapujícími a snadno ověřitelnými obrázky“. Snad může takovýto přístup přispět k probuzení zájmu o matematiku u našich středoškoláků. Na pojmu metrický prostor lze mnohem přesvědčivěji ukázat různé možnosti interpretace základních pojmů než na tradičně probíraném učivu.

Studium metrických prostorů je částí snad každého vysokoškolského kurzu matematické analýzy. Na středoškolské úrovni je tato problematika zpracována např. v publikacích [6], [7], [8], [9] a [10].

Literatura

[1] Alexandrov, P. S.: *Úvod do obecné theorie množin a funkcí.* Nakl. ČS AV, Praha, 1954.

[2] Bečvář, J.: *Teorie proporcí.* ZU, Plzeň, 2008.

[3] Čech, E.: *Bodové množiny.* Academia, Praha, 1974.

[4] Čech, E.: *Čísla a početní výkony.* SNTL, Praha, 1954.

[5] *Eukleidovy Základy.* JČM, Praha, 1907.

[6] Gatial, J., Hejný, M.: *Stavba planimetrie.* SPN, Bratislava, 1973.

[7] Kostyrko, P., Šalát, T.: *Metrické prostory.* SPN, Praha, 1977.

[8] Kufner, A.: *Co asi nevíte o vzdálenosti.* MF, Praha, 1974.

[9] Kuřina, F.: *Metrika a topologie.* Pedagogická fakulta, Hradec Králové, 1979.

[10] Kuřina, F., Půlpán, Z.: *Podivuhodný svět elementární matematiky.* Academia, Praha, 2006.

[11] Lee, J. M.: *Axiomatic Geometry.* AMS, Rhode Island, 2013.

[12] Pavlíček, J. B.: *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského.* Přírodovědecké vyd., Praha, 1953.

[13] Pomykalová, E.: *Deskriptivní geometrie.* Prometheus, Praha, 2010.

[14] Russell, B.: *Mystika a logika a jiné eseje.* Academia, Praha, 2015.

[15] Vopěnka, P.: *Úvod do četby Eukleidových Základů, Kniha I.–IV.* OPS, Nymburk, 2007.

[16] Vyšín, J.: *Elementární geometrie.* Přírodovědné nakl., Praha, 1952.

Co s matematickými talenty na víceletém gymnáziu

Evžen Müller, Kateřina Moravcová, Tereza Němcová
G, SOŠ, SOU a VOŠ Hořice [1]

ABSTRAKT. *Při získávání žáků pro matematiku a její krásu může učitel na víceletém gymnáziu využít i schopností talentovaných a zapálených studentů. Ti mohou mladším dětem zprostředkovat nejrůznější zajímavé problémy a situace řešené pomocí matematických postupů. Následující text přibližuje čtyři z „kouzel", která si pro tento účel připravily dvě studentky kvinty osmiletého gymnázia.*

Úvod

Patrně v každé třídě víceletého gymnázia se najde alespoň jeden matematicky talentovaný žák či žákyně. Je ale docela dobře možné, že jejich nadání nezpozorovali ani jejich rodiče, ani jejich učitelé. Tito žáčci vše zvládají bez problémů, počítání a rýsování je docela baví, ale předmět nicméně vnímají jen jako určitý soubor návodů, jak vyřešit zadaný aritmetický nebo geometrický úkol. O tom, jaká dobrodružství jim může matematika nabídnout a jak oni sami se mohou podílet na luštění nejrůznějších záhad, nemají nejmenšího tušení.

Členové matematického kroužku na Gymnáziu, SOŠ, SOU a VOŠ Hořice si pro své mladší spolužáky připravili různá „kouzla" – problémy a situace, s jejichž pomocí se u nich pokouší probudit zájem o matematiku. Svoji kouzelnickou dílnu také každoročně otevírají v rámci Dne otevřených dveří, a překvapují tak nejen uchazeče o studium, ale i jejich rodiče. V následujícím textu přiblížíme čtyři z jejich „kouzel". Průvodkyněmi jsou žákyně kvinty osmiletého gymnázia Kačka a Terka.

Všechny cesty vedou k číslu 1 089

Tento trik je známý, nicméně i mezi učiteli matematiky se najdou tací, kteří se s ním doposud nesetkali.

Nejprve na vhodném místě ve třídě schováme lísteček (za obrazem, nástěnkou či pod květináčem), na němž bude zapsáno číslo 1 089. Nyní Kačka požádá žáka: „Zvol si libovolné trojciferné číslo složené z různých číslic takové, aby číslice na místě stovek byla alespoň o dvě větší než číslice na místě jednotek, kde nesmí být nula. Pak vytvoř číslo, jehož

[1] e-mail:müller@gozhorice.cz

číslice jsou zapsány v opačném pořadí a toto číslo odečti od původního (např. $812 - 218 = 594$).“

Kačka zkontroluje vypočtený rozdíl a pokračuje: „Opiš si výsledek a přičti k němu číslo, jehož číslice jsou opět zapsány v opačném pořadí (v uvedeném případě dostaneme součet $594 + 495 = 1\,089$). Kolik ti příklad vyšel? 1 089? No to je ale neuvěřitelné! Myslím, že toto číslo jsem už dnes někde viděla. Jo už vím, támhle za obrazem (nástěnkou, ...) je nějaký lísteček. Jdi se mrknout, zda je na něm něco napsáno.“

Překvapení a rozpaky, které následují, Kačka nicméně hned zmírní: „Víš, ono to není vlastně vůbec žádné kouzlo. Zajímavé ale určitě je, že pro libovolně zvolené trojciferné číslo, které vyhovuje daným požadavkům, vždy dojdeš k číslu 1 089. Až budeš zvládat základy algebry, povíme si, proč tomu tak je.“

Důkaz pro starší a „pokročilé“

Zvolené trojciferné číslo vyjádříme ve tvaru

$$100a + 10b + c,$$

kde $a \geq c+2$. Po odečtení čísla s opačným pořadím číslic $(100c+10b+a)$ dostaneme:

$$100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 100(a - c) - a + c$$

Protože potřebujeme u výsledku změnit pořadí číslic, musíme vymyslet, jak v něm zviditelnit stovky, desítky a jednotky. Použijeme drobný trik, kdy do výpočtu vložíme nulu ve tvaru $-100 + 100$:

$$\begin{aligned} 100(a - c) - a + c &= 100(a - c) - 100 + 100 - a + c = \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c) \end{aligned}$$

Teď je jasné, že číslo s opačným pořadím číslic, které máme přičítat, bude mít tvar:

$$100(10 - a + c) + 90 + (a - c - 1)$$

Při sčítání nám obě proměnné z výpočtu vypadnou a vyjde

$$900 + 180 + 9 = 1\,089.$$

Můžeš mi rozměnit pětistovku? Dám ti za odměnu jednu navíc!

Terka asi fakticky neví, co s penězi. Že rozdává spolužákům bonbony, čokolády a různé dárky, tak na to jsme si už zvykli. Teď ale přišla s nabídkou, která nás doslova zarazila. Tomu, kdo jí rozmění pětistovku na drobné mince, dá další pětistovku jako odměnu. Má to ale háček: mincí má být přesně dvacet a musí to být pouze pětikoruny, dvacetikoruny a padesátikoruny – od každé alespoň jedna. S nadšením jsme se všichni pustili do hledání vhodné kombinace mincí, ale nikdo ten problém zatím nevyřešil. Přeci to nemůže být tak těžké! Poradí nám někdo, jak na to?

Řešení

Předpokládejme ale, že nějaké řešení existuje, a hledaný počet pětikorun označme x, počet dvacetikorun y a počet padesátikorun z. Musí platit:

$$x + y + z = 20 \tag{1}$$

Zároveň ale těchto dvacet mincí musí mít celkovou hodnotu 500 Kč:

$$5x + 20y + 50z = 500 \tag{2}$$

Obě strany rovnice (2) vydělme pěti:

$$x + 4y + 10z = 100 \tag{3}$$

Odečteme-li od rovnice (3) rovnici (1), dostaneme:

$$3y + 9z = 80$$

Upravme výraz na levé straně:

$$3(y + 3z) = 80 \tag{4}$$

Na levé straně rovnice (4) máme trojnásobek výrazu $y + 3z$, který ovšem vyjadřuje nějaké přirozené číslo. Jenomže trojnásobek přirozeného čísla nemůže být roven číslu 80. Náš problém tedy nemá řešení.

Varianta problému

Je možné pětistovku rozměnit na dvacet mincí, má-li se jednat o pětikoruny, desetikoruny a padesátikoruny? V tomto případě již pětistovku rozměnit lze. Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 20 \\ 5x + 10y + 50z &= 500 \end{aligned}$$

dojdeme k jediné možné kombinaci mincí: 4 pětikoruny, 8 desetikorun a 8 padesátikorun.

Jak uhodnout přirozené číslo od 1 do 100

V knize [2] je zmíněno další zajímavé matematické kouzlo. Kačka požádá někoho v obecenstvu, aby si vybral přirozené číslo v rozmezí 1 až 100 a sdělil jí zbytky po dělení tohoto čísla třemi, pěti a sedmi. Ona pak na základě těchto pouhých tří informací uhodne, jaké číslo měl na mysli.

Postupuje přitom následovně. Se zbytky při dělení třemi (z_3), pěti (z_5) a sedmi (z_7) provede jednoduchý výpočet. Určí součet

$$s = 70z_3 + 21z_5 + 15z_7,$$

a pokud je $s \leq 105$, dostává přímo hledané číslo. Pokud je $s > 105$, k získání hledaného čísla stačí jednou, popř. dvakrát odečíst 105.

Jak ale matematicky zdůvodnit, proč právě tento postup vede k nalezení myšleného čísla?

Řešení

Zbytek po dělení třemi může nabývat tří různých hodnot (0, 1 a 2), při dělení pěti můžeme obdržet pět různých zbytků (0, 1, 2, 3 a 4) a při dělení sedmi je možných sedm zbytků (0, 1, 2, 3, 4, 5 a 6). Lze tedy získat celkem $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ různých kombinací zbytků. Jak ale ze známých zbytků určit myšlené číslo?

Vyjádřeme myšlené číslo a třemi různými způsoby:

$$a = 3k + z_3, \quad a = 5l + z_5, \quad a = 7m + z_7,$$

kde k, l a m jsou nezáporná celá čísla. Obě strany první rovnosti vynásobíme číslem 70 (číslo $35 = 5 \cdot 7$, jak lze snadno nahlédnout, by nám v tuto chvíli moc nepomohlo), strany druhé rovnosti číslem 21, strany třetí rovnosti číslem 15 a poté sečteme levé a pravé strany takto upravených rovností. Dostaneme

$$106a = 210k + 70z_3 + 105l + 21z_5 + 105m + 15z_7.$$

Protože $106a \equiv a \pmod{105}$, dává samotné a při dělení číslem 105 stejný zbytek jako $106a$ a zbytek při dělení pravé strany číslem 105 je stejný jako zbytek při dělení výrazu $70z_3 + 21z_5 + 15z_7$, vidíme tedy, že výše uvedený postup je zcela korektní.

Pro pochybovače a neznalé kongruencí můžeme ukázat, že

$$106a \bmod 105 = a \bmod 105,$$

nebo ještě lépe obecněji, že

$$(k+1)a \bmod k = a \bmod k, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Označme $a \bmod k = z$, takže $a = nk + z$, kde $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}$, $k > n$. Dále provedeme rozpis

$$(k+1)a = (k+1)(nk+z) = nk^2 + kz + nk + z.$$

Vidíme, že všechny členy tohoto výrazu, až na poslední (z), jsou dělitelné číslem k, takže

$$(k+1)a \bmod k = a \bmod k = z,$$

a tedy

$$106a \bmod 105 = a \bmod 105.$$

Jak určit den v týdnu pro libovolné datum

Terka je nicméně opravdová matematická kouzelnice – pro libovolné datum z 19., 20. či 21. století uhodne, který den v týdnu tomuto datu odpovídá. Nepotřebuje k tomu žádné pomůcky, jen chvilku času na počítání.

Nejedná se samozřejmě ani v tomto případě o žádné kouzlo, je třeba provést nepříliš složitý výpočet založený na dělitelnosti sedmi. Přesto může být docela oříšek provést celý výpočet zpaměti, proto je Terka radši, když může mít datum napsané před sebou na papíře či tabuli.

A jak při výpočtu postupuje? Jednoduše sečte kód měsíce (M), číslo dne (D) a kód roku (R). Celočíselný zbytek po dělení 7 jí pak prozradí hledaný den týdne podle tohoto přiřazení:

$$1 = \text{pondělí}, \ \ 2 = \text{úterý}, \ \ \ldots, \ \ 6 = \text{sobota}, \ \ 0 = \text{neděle}$$

To nejtěžší je vlastně způsob, jak určit příslušné kódy.

Určení kódu roku

Kód roku v rozmezí let 2000–2099 Terka vypočte následovně: vezme poslední dvojčíslí a vydělí ho čtyřmi (zbytek přitom neuvažuje), výsledek poté přičte k tomuto poslednímu dvojčíslí. Uvažujme například rok 2027. Pro zjednodušení může od tohoto čísla odečíst nejbližší nižší násobek sedmi. Rok 2027 má tedy kód 5.

Při určování kódu roku si můžeme všimnout, že pro přestupný rok 2028 dostaneme součet $7+28=35$ (oproti roku předcházejícímu je tento součet o 2 větší), kód tohoto roku je tedy nula.

V rozmezí let 1900–1999 se kód roku určí obdobně, jen je třeba získaný součet o jedna navýšit: například pro rok 1962 máme součet $15+62+1=78$, kód tohoto roku je tedy roven 1.

U všech letopočtů v letech 1800–1899 přičítáme číslo 3, takže například pro rok 1811 (rok narození Karla Jaromíra Erbena) je $2+11+3=16$ a kód je roven číslu 2.

Určení kódu měsíce je v tab. 1:

měsíc	**kód**	**pomůcka**
leden	6 *	**6**. ledna – Tři králové
únor	2 *	**2** – druhý měsíc v roce
březen	2	**2** měsíce máme za sebou
duben	5	d-u-b-e-n – **5** písmen
květen	0	**nulu** a květen mám nejraději
červen	3	**3**. června se narodila ségra
červenec	5	Cyril a Metoděj – **5**. červenec
srpen	1	srp má **1** ostří
září	4	z-á-ř-í – **4** písmena
říjen	6	říje j-e-l-e-n-í – **6** písmen
listopad	2	Dušičky – **2**. listopadu
prosinec	4	už je z-i-m-a – **4** písmena

Tab. 1

Zkrátka si vytvoříme svůj vlastní návod, jak k danému měsíci přiřadit příslušné číslo. Pokud je u kódu hvězdička (*), počítáme pro přestupný rok s hodnotou o 1 menší.

Který den v týdnu připadá na den narození slavného miletínského rodáka Karla Jaromíra Erbena, tedy na 7. listopadu 1811? Určíme příslušné kódy a jejich součet: $D = 7$, $M = 2$, $R = 2$. Dostáváme $7 + 2 + 2 = 11$, zbytek po dělení sedmi je roven číslu 4, a můžeme tedy s určitostí prohlásit, že slavný básník spatřil světlo světa ve čtvrtek.

Závěrem

Uvedená čtyři jednoduchá „kouzla“ jsou jen pouhým zlomkem z nepřeberné nabídky situací a problémů, které matematika nabízí. Přesto mohou stát na počátku sbližování žáků se světem skutečné matematiky a nasměrovat je k hledání odpovědí na otázky, jak a proč to všechno v této tajuplné vědě vlastně funguje. A koneckonců nejde jen o matematicky talentované žáky. Jedna z deváťaček při návštěvě Dne otevřených dveří na naší škole reagovala na Kaččina a Terčina kouzla s rozzářenýma očima slovy: „Proč nás na základce neučí matiku takhle, to by mě fakt hodně bavilo!“

Literatura

[1] Benjamin, A., Shermer, M.: *Tajemství bleskové matematiky.* Kniha, Zlín, 2015.

[2] Drózd, J., Kryl, R.: *Začínáme s programováním.* Grada, Praha, 1992.

[3] Perelman, J. I.: *Zajímavá matematika.* Mladá fronta, Praha, 1961.

Matika pro spolužáky, učebnice Marka Lišky – od studenta studentům

Miroslav Novák, Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *V tomto příspěvku se zaměřím především na vznik a popis publikace, která v poslední době vyvolává (někdy i bouřlivou) diskusi především matematicky vzdělané veřejnosti. Dále si pak čtenáři dovolím nabídnout několik postřehů, nad kterými je podle mého názoru dobré a potřebné se zamyslet. Též přidám několik otázek, které z mého pohledu jednoznačnou odpověď nemají.*

Úvod

Už více než rok se mluví o (v něčích očích kontroverzní) publikaci studenta Marka Lišky *Matika pro spolužáky* s přídomkem *od studenta studentům* [4], často proklamované i v médiích.

Marek nastoupil na Gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové na podzim roku 2010 do prvního ročníku čtyřletého studia všeobecného zaměření. Asi jako jeden z mála jsem mohl monitorovat vývoj publikace od samého počátku, neboť jsem ho na gymnáziu matematiku učil.

Počátek

Vše začalo někdy v průběhu Markova druhého ročníku, kdy začal matematiku doučovat některé svoje spolužáky a ti měli pocit, že ji pochopí snáze než ode mne. To by pro mne nemusela být zrovna moc dobrá vizitka, na druhou stranu se mohu uklidňovat tím, že jsem se svoje studenty vždy snažil matematiku naučit, nejen připravit na test, případně zkoušku. Každý, kdo někdy jen přičichl k doučování, ví, jak relativně snadné je onoho člověka připravit na zkoušku tak, aby prošel, někdy třeba i se ctí, a jak velmi obtížné je ho přimět třeba jen k tomu, aby přemýšlel nad důvody svých kroků, proč použít právě tuhle cestu a ne jinou apod. Myslet prostě bolí. Strašně. Nechce se. A tady je, podle mého názoru, asi jádro celého problému. Ale zpátky ke vzniku publikace.

Dalším krokem byla Markova účast ve středoškolské odborné činnosti v kategorii tvorby učebních pomůcek. Nejprve na jaře 2012 se spolužákem Tomášem Galbičkou vytvořili web *Nasprtej.cz* [1]. O rok později

[1] e-mail: novak@gjkt.cz

již Marek představil knihu *Matematika nejen pro gymnázia* [2], v rámci SOČ jen část Rovnice a nerovnice, se kterou postoupil do celostátního kola, kde se ve své kategorii umístil na 5. místě. Beta verze této knihy (ve formátu B5), doplněná ještě o část Základní poznatky, vyšla na podzim roku 2013 [5]. Tady už se začínají o knihu zajímat i média.

Po výhře v regionálním kole soutěže Rozjezdy roku 2014 následovala v dalším roce více než 350 stránková kniha, teď už s názvem *Matika pro spolužáky*, která obsahovala kromě již dvou zmíněných částí i kapitolu Opakování (rozuměj ze ZŠ). Ta už vyšla ve formátu A4, s novou grafikou, barevným tiskem a strukturou obdobnou současné verzi, jen ještě nerozdělená na učebnice a pracovní sešity. Již od prvopočátku byla tištěná forma všech publikací provázána s webem, kde bylo a je možné najít podrobné řešení úloh k procvičení včetně komentářů. Od 350 stránkové verze je řešení úloh k procvičení dostupné i prostřednictvím QR kódů.

Současná verze

Současná verze je složena z učebnic a pracovních sešitů rozdělených podle témat středoškolské matematiky. S výhledem do konce roku 2017 mělo být vydáno všech 11 sad, k datu konference je jich zatím dostupných pět. Nyní podle těchto učebnic učí 34 škol, od září roku 2017 jich má být již 50. Dalších 250 škol má učebnice k dispozici a bude záležet na nich, jestli výše uvedené řady rozšíří.

Úvod každé kapitoly v učebnicích obsahuje tři krátké teze: o čem daná část je, k čemu se dá použít a s čím souvisí. Následuje krátká teorie a pak pro studenty to nejdůležitější, příklady řešené ve dvou úrovních (matematický zápis a dále velmi podrobný popis kroků vyjádřený studentským jazykem). Na konci každé kapitoly je shrnutí a úlohy k procvičení s výsledky a s odkazy na stránky v pracovních sešitech a hlavně odkazy na webové stránky pomocí QR kódů s detailním řešením a opět i s podrobným komentářem jednotlivých úloh.

Pracovní sešity obsahují na začátku kapitoly stručné připomenutí teorie a pak sadu úloh k procvičení. U každé úlohy je poznámka s odkazem na stránku v učebnici, kde se dané učivo vykládá. Výsledky k jednotlivým úlohám jsou na konci každé kapitoly.

Posun od beta verze až do současného stavu – tematicky rozdělených učebnic a pracovních sešitů provázaných s elektronickou podobou – je obrovský. Pokud bych měl publikaci stručně charakterizovat, zvolil bych slova: přehledná, srozumitelná, s minimálním množstvím teorie, s neotřelou grafikou a hlavně, a to je v současnosti pro dnešní generaci asi to nejbližší, je provázaná s webem.

Pár postřehů a otázek k zamyšlení

Matematiku na gymnáziu učím už déle než 20 let v různých oborech vzdělávání (humanitní, přírodovědný, 01 Matematika a v posledních letech všeobecný). Právě toto časové srovnání mě utvrzuje v tom, že publikace jako tato je dnes potřebná více než kdy předtím. Podrobně a „polopatě“ vysvětluje čtenáři jednotlivé zákonitosti matematiky studentským jazykem s důrazem na postup řešení a porozumění jednotlivým krokům. Srozumitelnost je zde upřednostněna před sice přesným, ale pro studenty často málo pochopitelným matematickým jazykem.

Jistě, tato publikace není určena těm, kteří se matematikou chtějí zabývat podrobněji nebo ji dokonce chtějí studovat. Jenže kolik takových studentů v současné populaci je? Obávám se, že i odhad 5 % je příliš optimistický. Je tedy opravdu nutné, abychom všechny studenty zahltili přesnou a náročnou matematickou terminologií, nebo již nazrál čas k tomu, že ustoupíme ze svých pozic a přiznáme si, že někteří žáci prostě jim zadanou úlohu nevyřeší vůbec, nebo jen díky postupu, se kterým se setkali již dříve, naučí se ho jako básničku, odříkají ji, ale pochopení principů a důvodů proč chybí?

Další problém vidím ve stále více rozevírajících se nůžkách mezi výbornými a méně zdatnými žáky v daném předmětu. Nejedná se samozřejmě jen o matematiku, ale obecně o předmět libovolný. Musí opravdu všichni na střední škole studovat všechno do detailu, nebo by bylo lepší mít možnost alespoň některé předměty studovat v různých úrovních?

A ještě poslední postřeh, ten se týká množství času, který studenti musí strávit ve škole. V průměru je to 33 hodin týdně (míněno na gymnáziu), což z hlediska rozvrhu znamená, že žáci absolvují výuku minimálně dvakrát odpoledne. Čím dál více mám pocit, že odpolední hodiny jsou co do výtěžnosti, budu-li shovívavý, málo produktivní, nebo reálně, téměř zbytečné. Samozřejmě lze namítnout, že odpoledne lze učit tělocvik nebo estetickou výchovu. Ano, jistě, ale rozhodně ne ve všech třídách školy. Skutečně by nestačilo jen 30 hodin týdně v dopoledním vyučování? Rozhodně si nemyslím, že by tímto opatřením došlo k 9% úbytku dovedností našich středoškoláků, spíše naopak. Vyučovací proces by byl efektivnější.

Literatura

[1] Galbička, T., Liška, M.: *NaŠprtej.cz*. SOČ, obor 12, tvorba učebních pomůcek, didaktické technologie, 2012.

[2] Liška, M.: *Matematika nejen pro gymnázia*. SOČ, obor 12, tvorba učebních pomůcek, didaktické technologie, 2013.

[3] Liška, M.: *Matematika nejen pro gymnázia*. Powerprint s.r.o., Praha, 2013.

[4] Liška, M.: *Matika pro spolužáky 1*. Irbis, Liberec, 2015.

[5] Liška, M., Valenta, T., Král, L.: *Matika pro splužáky – Základní poznatky*. Europrint, a.s., Praha, 2017.

Kurz lineární algebry pro nadané žáky v projektu Talnet

Michal Řepík, První soukromá hotelová škola, Praha [1]

Abstrakt. *Od roku 2015 je pro žáky středních škol se zájmem o matematiku otevřen podzimní internetový kurz lineární algebry. Kurz je součástí online aktivit pro žáky se zájmem o vědu a techniku, které organizuje Národní institut pro další vzdělávání v rámci projektu Talnet. Příspěvek seznamuje čtenáře se základními parametry kurzu, výsledky, kterých kurz po dva roky svého působení dosahuje, a náměty pro jeho další rozšíření v budoucnosti.*

Projekt Talnet není nutné komunitě zabývající se péčí o talentované a nadané žáky zvlášť podrobně představovat. Pro jeho účastníky jsou v průběhu kalendářního roku pořádány různorodé aktivity, jako jsou soustředění, exkurze nebo expedice. Hlavní aktivity však probíhají v online prostředí.

Stěžejním pilířem projektu jsou internetové kurzy pořádané pro žáky různých věkových skupin a různých zájmů. V nabídce online vzdělávacích kurzů nalezneme kurzy věnované biologii, chemii, fyzice, astronomii, programování, ale i filosofii nebo matematice. Výhodou online kurzů je dostupnost.

Účastníci se mohou ve virtuálním prostředí scházet z různých koutů republiky. Kurzy Talnetu jsou navíc zdarma, a proto má každý možnost se do kurzů přes webové stránky projektu (`www.talnet.cz`) přihlásit. Účast může být možností, jak v nesoutěžním prostředí rozvíjet zájem žáků nejen o přírodní vědy a techniku.

Jedním z matematických kurzů projektu Talnet je kurz lineární algebry určený primárně pro žáky středních škol ve věkovém rozmezí od 16 do 19 let. Obsah kurzu byl vytvořen jako součást diplomové práce autora [1], která se věnuje otázkám výuky lineární algebry žáků středních škol například v rozšiřujících matematických seminářích. Tento kurz lineární algebry byl experimentálně spuštěn v říjnu ve školním roce 2015/2016.

Hlavním cílem kurzu je ukázat žákům lineární algebru jako matematickou disciplínu v celé její šíři. Nejedná se tedy o monotematický kurz. Jeho obsah je vyvážen jak teoretickými oblastmi zaměřenými na rozvoj užívání důkazových technik, tak prakticky orientovanými tématy, která se zaměřují na důkladnější osvojení početního aparátu lineární algebry.

[1] e-mail: repik.michal@gmail.com

Mnoho témat středoškolské matematiky souvisí s lineární algebrou. Dalším cílem kurzu je proto na tato témata poukázat, rozvinout je a vytvářet u žáků takové poznatky, které budou přenositelné ze střední na vysokou školu.

Aktuální podoba kurzu, který je vytvořen na platformě Moodle, sestává ze šesti lekcí. Účastníci se do kurzu zaregistrují na začátku školního roku. Od zahájení kurzu, které probíhá v říjnu, jsou každý týden žákům předkládány nové studijní materiály a úkoly, které je třeba plnit pro jeho řádné absolvování. Aby byl kurz přístupný co největšímu počtu aktivních zájemců, byl navržen tak, aby si jeho výslednou obtížnost mohl každý účastník přizpůsobit svým aktuálním schopnostem. Důležitou součástí kurzu jsou proto soubory desítek úloh různé obtížnosti, ze kterých si žáci podle svého vlastního uvážení vybírají ty, které pak řeší a za jejichž řešení dostávají body nutné pro absolvování kurzu. Žáci, kteří například ovládají práci s komplexními čísly, si mohou v kurzu na vhodných příkladech látku připomenout a rozvinout, naopak ti žáci, kteří se s komplexními čísly na střední škole doposud nesetkali, mají možnost řešit jiné úlohy, ve kterých se znalost komplexních čísel nepředpokládá. Totéž by se dalo říci o diferenciálním počtu a integrálním počtu. Technické detaily kurzu jsou podrobně rozvedeny a argumentovány v uvedené diplomové práci [1].

Na několika následujících řádcích si představíme matematický obsah kurzu. Budou uvedeny jednak názvy jednotlivých lekcí, jednak stručná náplň kurzu ve formě klíčových slov.

Vzhledem k širokému věkovému rozmezí účastníků je kurz navržen tak, aby nepředpokládal významné vstupní znalosti žáků v disciplínách středoškolské matematiky (například znalost analytické geometrie, řešení soustav lineárních rovnic apod.). Pro úspěšné studium v kurzu žákům postačí znalost základních pojmů výrokové logiky, teorie množin a základních důkazových technik (důkaz přímý, nepřímý, sporem). To vše na úrovni střední školy.

1. **Matematické struktury.** Zobrazení, kartézský součin, binární algebraické operace a jejich příklady, komutativita, asociativita, existence neutrálního prvku, existence inverzních prvků, algebraická struktura, grupa a její příklady, algebraické těleso a jeho příklady.

2. **Vektorové prostory a podprostory.** Vektorový prostor a jeho vlastnosti, vektorový podprostor, modely vektorových prostorů.

3. **Báze a dimenze vektorových prostorů.** Lineární kombinace vektorů, lineární obal, množina generátorů, lineární závislost a nezávislost, vektorový prostor konečné dimenze, báze vektorového prostoru, dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru vzhledem k bázi, základní poznatky o izomorfismu vektorových prostorů.

4. **Matice.** Definice matice a základní typy matic, operace s maticemi a jejich vlastnosti.

5. **Soustavy lineárních rovnic.** Pojem soustavy lineárních rovnic a jejího řešení, ekvivalentní úpravy, eliminační metody řešení soustav lineárních rovnic, Gaussova–Jordanova eliminace.

6. **Unitární prostory.** Skalární součin, vektorový prostor se skalárním součinem, geometrie definovaná skalárním součinem.

Součástí kurzu je také diskuzní fórum, kde spolu mohou účastníci komunikovat například o řešení úloh nebo o probíraném tématu. Žáci průběžně odevzdávají vypracované úlohy, které jsou jim opravovány a nejasnosti diskutovány lektorem kurzu.

V průběhu kurzu se žáci o svoji zpětnou vazbu dělí rovněž prostřednictvím postojových dotazníků. Tyto dotazníky obsahují pouze otevřené otázky a žáci jsou v nich vyzýváni k hodnocení kurzu, jsou tázáni, zda se se studovanou problematikou již někdy setkali, a jsou také požádáni, aby zodpověděli několik otázek o sobě. Na základě toho máme lepší představu o účastnících a můžeme kurz případně modifikovat a dále rozvíjet.

Počet účastníků projektu Talnet není vysoký. V prvním běhu kurzu lineární algebry se do kurzu přihlásilo a aktivně pracovalo 5 žáků, v roce 2016 jejich počet vzrostl na 9. Kurzu se zúčastnili žáci s různým regionálním zastoupením. Mezi účastníky byli žáci z Prahy, Olomouce, Ostravy, Šumperku, Nového Bydžova, Uherského Hradiště nebo Pardubic. Převažují žáci gymnázií, avšak mezi absolventy kurzu nalezneme i žáky středních odborných škol. Věkové zastoupení se pohybuje od 15 do 19 let, nejvyšší četnost je 17 let.

Žáci mají od kurzu podobná očekávání, a to rozšíření svých matematických znalostí a schopností a investici do přípravy na budoucí studium matematiky na vysoké škole. V podstatě všichni respondenti by v budoucnu chtěli směřovat na technicky orientované vysoké školy nebo přímo na vysokoškolské studium matematiky nebo fyziky. Také se ukazuje, že většina účastníků má zkušenosti s celým spektrem matematických nebo fyzikálních soutěží. To naznačuje, že kurz navštěvují žáci, kteří jsou více či méně zapojeni svými vyučujícími do systému aktivit pro nadané žáky. Jsou však mezi nimi tací, kteří zkušenosti ze soutěžních klání nemají a o kurzu se dozvěděli náhodou na internetu. V takovém případě kurz ve shodě s názvem proběhlé konference nenechává ani jeden matematický talent nazmar.

V prvním ročníku kurz absolvovali 2 žáci, ve druhém ročníku 6 žáků. Případný nezdar v kurzu však žáci sami přičítají svým schopnostem (kurz byl na ně příliš obtížný) nebo časovým důvodům. Z hlediska termínů odevzdávání je kurz řešen poměrně volně, ale mnoho účastníků studuje v rámci Talnetu i jiné kurzy nebo se věnují jiným mimoškolním aktivitám (například zmiňovaným soutěžím).

Z výsledků dotazníkových šetření plyne, že kurz lineární algebry se těší oblibě svých studentů, a tak se stává reálnou otázkou, zda jej dále rozšiřovat. Prozatím je kurz rozvržen do šesti lekcí, které se studují na podzim školního roku. Nabízí se možnost kurz rozšířit o další výukové lekce tak, aby jeho studium pokrylo celý školní rok, resp. období od října do května. Návrh dalších šesti lekcí, které by dotvářely jarní blok kurzu, by mohl vypadat například takto:

1. **Matice 2.** V rámci prvního seznámení s maticemi v podzimním bloku není možné podat látku zabývající se maticemi vyčerpávajícím způsobem. Lekce by navazovala na problematiku zavedením pojmu hodnost matice a výpočtem inverzní matice k dané regulární matici.

2. **Lineární zobrazení.** S příklady lineárních zobrazení se žáci nevědomky seznamují již na střední škole. Konkrétně v části geometrická zobrazení v rovině. Součástí lekce je tato známá zobrazení připomenout a rozšířit zavedením pojmu lineární zobrazení.

3. **Matice lineárního zobrazení.** Začneme-li studovat lineární zobrazení užitím souřadnic vzhledem k pevně zvoleným bázím, s výhodou pro jejich popis využijeme maticového formalismu. Podobně transformace souřadnic z jedné báze do jiné je možné efektivně popsat pomocí matice přechodu.

4. **Ortogonální projekce.** Speciálním případem lineárního zobrazení je tzv. ortogonální projekce. Jde o zobrazení, které můžeme definovat na vektorových prostorech se skalárním součinem a má význam například při hledání ortogonální báze užitím Grammovy–Schmidtovy metody. Studenti se v lekci seznámí také s metodou nejmenších čtverců,

tedy metodou lineární regrese statistických dat, kterou lze chápat jako zvláštní příklad ortogonální projekce vektoru na podprostor.

5. **Determinant matice (1. část).** Determinant je v kurzu zaveden rozborem řešitelnosti obecně nehomogenní soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. Nejprve konkrétně pro soustavy dvou rovnic o dvou neznámých a tří rovnic o třech neznámých, poté zobecněn pro libovolné přirozené číslo n. Závěrem je pak obecná definice determinantu.

6. **Determinant matice (2. část).** Navazující lekce přichází s přehledem vlastností determinantu a postupy, jak determinant matice počítat v praxi. Jsou diskutovány další aplikace determinantu, například jejich využití při hledání inverzní matice.

Celoroční kurz lineární algebry tak pokrývá látku probíranou v úvodních kurzech matematiky na vysokých školách technického či přírodovědného zaměření. Pokud si žáci dostatečně osvojí v kurzu studovaná témata, neměli by mít problém se studiem lineární algebry na vysoké škole. Naopak by své nabyté znalosti mohli prohlubovat.

Literatura

[1] Řepík, M.: *Výuka lineární algebry na středních školách.* Diplomová práce, 2016. `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/162213/`

Kooperativní výuka s pomocí digitálních pomůcek Techambition

Jakub Stránský, Techambition Ltd [1]

Abstrakt. *Kooperativní učení je považováno za nejzřetelnější inovaci vyučování konce minulého století. Žáci, kteří si osvojí základní znalosti a pak pracují společně, jsou podle nejrůznějších výzkumů schopni dosahovat lepších výsledků učení i řešení problémů.*

Co znamená kooperativní výuka?

Narozdíl od tradiční výuky, v níž studenti pracuji samostatně na vlastním zadání, nabízí kooperativní výuka mnohem přirozenější učení. V malé skupině pracují žáci na zadaném tématu a společně se snaží pomocí kreativní diskuse dospět k řešení. Kooperativní výuka tak odbourává strach z neúspěchu a nahrazuje ho kolektivní spoluprací či debatou, která pozvedne výsledky studentů [1].

Obr. 1 Studenti při kooperativní výuce (ilustrační foto)

[1] e-mail: jakub.stransky@techambition.com

Proč je kooperativní výuka důležitá?

Kooperace podporuje vyšší produktivitu i vyšší výkon než kompetitivní nebo individuální uspořádání učebních situací [2]. Kooperativní učení se v posledních desetiletích stále více rozšiřuje a dnes se vyskytuje takřka po celém světě. Je považováno za nejzřetelnější inovaci vyučování konce minulého století. Žáci, kteří si osvojí základní znalosti a pak pracují společně, jsou schopni dosahovat mnohem lepších výsledků učení i řešení problémů. Navíc, kooperativní učení je pro člověka velmi přirozené a žáky více baví [3].

V čem je kooperativní učení efektivnější?

Nedávná studie [4] ukazuje, že řešení problémů ve skupině je pro učení efektivnější, neboť skupina je schopna lépe sdílet a rozložit kognitivní práci mezi své členy. Když je skupina motivována a všichni tahají za jeden provaz, mohou sdružit svoje vědomosti a obsáhnout lépe a více učiva, než by zvládl každý samostatně.

Čím je matematika ve spojení s koperativní výukou unikátní?

Při tradičním učebním rozvržení – učitel vysvětluje látku a studenti se snaží informace především zaznamenat – se studenti nad problémy často nezamyslí dostatečně a tím pádem hrozí, že jim ne zcela porozumí. Techambition v rámci skupinové výuky klade důraz na zapojení všech studentů, podporuje diskusi a obhajování vlastních závěrů. Systém automaticky vyhodnotí závěry studentů a v reálném čase jim poskytne zpětnou vazbu o jejich správnosti. Díky exaktnosti matematiky tak ihned poznají, zda v diskuzi zastávali správný či špatný názor a mohou se poučit do dalších debat.

Techambition

Systém Techambition nabízí technologii, která výuce opravdu pomůže. Na základě algoritmu, který vyhodnotí předchozí úspěšnost žáků a jejich postupy, dokáže automaticky navrhovat funkční skupiny. Žáci v takových skupinách budou mít velký potenciál ke společné diskusi a efektivnímu nalezení řešených problémů ve výuce. O postupu jednotlivých skupin bude dostávat učitel ihned zpětnou vazbu včetně doporučení do výuky. To mu pomůže udržet studenty motivované, a zajistit tak úspěšné učení u každého studenta.

Techambition přináší do skupinové výuky efektivitu a automatizaci všeho, co zvládne za učitele udělat stroj.

Literatura

[1] Griffin, P. M. N., et al.: *Assessment and Teaching of 21st Century Skills.* Springer, Dordrecht, London, 2012.

[2] Hattie, J. M. N.: *Visible learning for teachers maximizing impact on leasing.* Routledge, London, 2012.

[3] Brandt, R.: *Cooperative learning and the collaborative school.* Association for Supervision and Curriculum Development, Alessandria, 1991.

[4] Janssen, J., et al.: Making the Black Box of Collaborative Learning Transparent: Combining Process-Oriented and Cognitive Load Approaches. *Educational Psychology Review* 22(2) (2010), 139–154.

Materiály podporující spolupráci učitelů matematiky a přírodovědných předmětů

Vladimír Vaněk, KAG PřF UP, Olomouc [1]

Abstrakt. *Mnoho žáků a studentů postrádá zájem o matematiku a přírodní vědy. To může být částečně způsobeno nedostatkem motivujících materiálů a částečně také použitím nevhodných pedagogických metod při využívání vhodných materiálů. V rámci projektu „Materials for Teaching Together: Science and Mathematics Teachers collaborating for better Results" jsme si uložili za cíl oslovit studenty a mladé učitele přírodovědných předmětů pomocí nových netradičních materiálů. Sedm partnerských institucí (Rakousko, Kypr, Slovensko, Česká republika, Itálie, Litva, Velká Británie) představilo své koncepty výukových materiálů (včetně odkazů) tak, aby byly jednak použitelné v každé z partnerských zemí, ale také aby materiály mohl použít vyučující, který nemá v aprobaci matematiku, ale jen jiný přírodovědný předmět. Materiály jsou také vhodné pro použití v integrovaných předmětech obecně nazývaných Science. Hlavním cílem vytvářených materiálů je ukázat, že matematika je nepostradatelnou součástí života a že se s ní setkáváme při všech lidských činnostech.*

Úvod

Žijeme v době rychlých změn, kdy dochází především v oblasti technologií k posunům. Žáci středních a základních škol využívají moderní technologie a jejich přístup k informačním zdrojům je snadný a rychle dostupný. Mění se tak priority studentů, jejich způsob myšlení a učení se. Adekvátními změnami by samozřejmě měla reagovat i výuka matematiky. Více než dříve platí, že žáci potřebují vědět, na co jim budou nově nabyté znalosti a dovednosti, které jsou obsahem výuky. Vždyť je tak jednoduché si vše během chvíle vyhledat. Žákům tedy chybí především motivace. Je nutné žákům ukázat, že znalosti a dovednosti získané v hodinách matematiky jim budou v životě užitečné a lze pomocí nich získávat nové informace v (pro ně) zajímavých oblastech.

Motivovat je můžeme například využitím mezipředmětových vazeb s ostatními přírodovědnými předměty (nutnou podmínkou je spolupráce

[1] e-mail: vladimir.vanek@upol.cz

učitelů různých přírodovědných kombinací) a ukázkou praktického využití poznatků v reálných životních situacích, nejlépe s využitím ICT. Jak uvádí D. Nocar v [1]: „Zapojení ICT do vzdělávacího procesu je silným motivačním prvkem, neboť současná populace je zvyklá využívat ICT k jakýmkoliv účelům každodenního života. Tento potenciál je v poslední době ještě více umocněn rozvojem mobilních technologií (smartphone, tablet), a proto není divu, že i tyto technologie je potřeba umět efektivně zapojit do vzdělávacího procesu, aby pro žáky uvedené technologie představovaly i nástroj rozvoje jejich vzdělanosti.“

V rámci projektu MaT2SMC, „Materials for Teaching Together: Science and Mathematics Teachers Collaborating for Better Results“, vznikl soubor pracovních materiálů určených právě učitelům matematiky na základních a středních školách, jehož hlavním cílem je, jak sám název napovídá, provázat výuku matematiky s dalšími přírodovědnými obory v reálných životních situacích, a přiblížit tak teoretické znalosti studentům prakticky.

Materiály jsou vystaveny tak, aby podpořily motivaci studentů učit se matematice a ostatním přírodovědným předmětům kontextuálně a rozvíjely rozhodovací dovednosti studentů. Vycházejí z problémového vyučování zaměřeného na studenta.

Všechny materiály byly testovány skupinami učitelů, v nichž se vyskytovali jak začínající učitelé s minimálními zkušenostmi, tak zkušení učitelé s více než dvacetiletou praxí, a také studenti učitelství, kteří si materiály vyzkoušeli v rámci své souvislé pedagogické praxe, která probíhá obvykle v říjnu pro první ročníky navazujícího magisterského studia a v březnu pro ročníky druhé.

Využití materiálů studenty učitelství

V rámci seminářů zaměřených na učitelskou praxi pak didaktici jednotlivých oborů procházeli se studenty vybrané materiály a studenti jednotlivých aprobací navrhovali možné kooperace v rámci svých oborů. Úkolem studentů bylo také navrhnout doplňující aktivity, kterými by mohli rozšířit či doplnit předložené materiály a více je přizpůsobit podmínkám v ČR.

Jako ukázku materiálů vytvořených v rámci projektu uvádím *Salinitu vody.* Vzhledem k rozsahu materiálu je ukázána jeho zkrácená verze. V tomto konkrétním případě je vhodná spolupráce učitelů fyziky, zeměpisu, ekologie a samozřejmě matematiky (studenti v rámci své práce dále navrhovali výtvarnou výchovu, která ovšem vzhledem k matematickému obsahu již nemusí být součástí vyučovacích hodin žáků daného věku).

Učební materiál *Salinita vody* začíná, stejně jako všechny ostatní, důležitými informacemi pro učitele, jako jsou délka trvání všech aktivit pro dané téma, pomůcky nebo ICT podpora potřebná pro práci, případně doporučení pro práci. Dále následuje stručný popis a posloupnost všech aktivit spolu s výstupy, kterých by měli žáci dosáhnout (většinou rozdělených na části „všichni by měli zvládnout“, „většina by měla zvládnout“, „někteří zvládnou“). Některé materiály jsou také doplněny o možné aktivity pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami, případně s poznámkami učitelů, kteří s materiály mají dlouhodobější zkušenosti.

Praktická ukázka

Název: Salinita vody

Témata: slanost vody	**Čas:** 90 minut (2 vyuč. hod.)	**Věk:** 14–15 let

Diferenciace:

- Nadaní žáci by měli z grafu odvodit rovnici závislosti síly proudu na koncentraci a definovat fyzikální význam koeficientu úměrnosti.
- Žáci, kteří skončí v předstihu, mohou vypracovat rozšiřující úkoly, které nabízíme.

Instrukce, ICT podpora atd.:

- Žáci obdrží seznam potřeb pro tuto aktivitu.
- Žáci jsou neustále zaměstnáváni.
- Vzhledem k tomu, že žáci neznají výsledky dopředu, může ve skupinách vyvstat diskuze. Analýza výsledků a diskuze ve dvojicích či ve skupinách (3–5 žáků) je efektivní. Je však nutné, aby studenti práci nejprve dokončili.
- Experimentální část této hodiny může proběhnout za pomoci jiných dostupných přístrojů, např. výukový systém *Nova5000* (obr. 2) nebo *Xplorer GLX*, využívající senzor elektrické vodivosti. Poté nebudeme měřit sílu elektrolytu, ale jeho vodivost (mS).

Pomůcky:

- vysušená (krystalická) sůl
- destilovaná voda
- váhy
- zdroj napětí (baterie), 4,5 V
- miliampérmetr
- dráty
- víčko se 2 kovovými elektrodami
- 100 ml odměrný válec
- sklenice
- nádoba na odpadní vodu
- špejle
- špachtle
- papírové utěrky

Požadované znalosti:

- pojmy: atom, iont, molekula, elektrolyt, koncentrace roztoku, elektrický proud
- zlomky, poměry, výpočet procent

Bezpečnost:

bezpečné zacházení s nástroji a materiály během experimentální části

Výstupy:

<u>Všichni</u>

- Budou znát hlavní vlastnosti elektrolytů.
- Budou schopni vysvětlit procesy, ke kterým dochází ve vodných roztocích.
- Budou schopni zapojit přístroje dle instrukcí.
- Budou schopni vyrobit vodné roztoky různých koncentrací.

<u>Většina</u>

- Bude schopna načrtnout graf závislosti proudu ve vodných roztocích na koncentraci rozpuštěné soli.
- Bude schopna určit změnu proudu, tj. úhel sklonu tangenty.

<u>Někteří</u>

- Budou schopni napsat rovnici závislosti proudu na koncentraci.
- Budou schopni zhodnotit elektrickou vodivost elektrolytů.

Popis hodiny

<u>Úvodní aktivita</u>

Žáci si po vstupu do třídy odloží tašky.

Nejprve si připomenou některé pojmy z matematiky: zlomky, (poměry), výpočet procent a lineární rovnice.

Vede se diskuze o dopadu salinity na vodu v řekách, půdu, rostliny, domácnosti a průmyslová zařízení.

Žáci vysvětlí hlavní vlastnosti elektrolytů a procesů, ke kterým v nich dochází.

Nejnadanější mohou vést diskuzi o vlivu salinity vody a půdy na člověka a jeho okolí.

Hlavní aktivita

Žáci začnou pracovat s pracovním listem Zkoumání slanosti vody.

Cíl: Prozkoumat závislost elektrického proudu solného roztoku na koncentraci soli

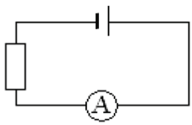
Abychom mohli načrtnout graf závislosti elektrického proudu v solném roztoku na koncentraci soli $I = f(c_{\%})$, je nezbytné vyrobit několik různých koncentrací vodného roztoku (2%, 4%, 6%, 8%, 10%) a v každém z nich změřit elektrický proud.

Koncentrace je definována jako

$$c_{\%} = \frac{m_{\mathrm{d}}}{m} \times 100\ \%,$$

kde m_{d} je hmotnost soli v gramech, m je hmotnost celého roztoku v gramech.

Abychom změřili proud v roztoku, je nutné zapojit elektrický obvod (obr. 1).



Obr. 1 Elektrické schéma

Provedeme měření a výpočty. Zaznamenáme výsledky do tabulky.

Pokaždé vyrobíme jinou koncentraci roztoku, aby $m = 100$ g a aby bylo $m = m_{\mathrm{d}} + m_{\mathrm{v}}$ pro hmotnost soli m_{d} a hmotnost vody m_{v}.

Elektrody budou vždy stejně ponořené v roztoku.

Rozšíření

Schopnější žáci mohou v této fázi zvážit případné problémy v koncepci experimentu, ke kterým může dojít, a navrhnout možná vylepšení.

Práce s pracovním listem

Každý žák vyplní pracovní list samostatně. Žáci musí zaznamenat výsledky, vyplnit tabulku, rozhodnout se, který typ grafu je nejvhodnější, následně graf nakreslit, z grafu vypočítat změnu proudu při změně koncentrace o 1 % (úhel sklonu tangenty v grafu určuje změnu velikosti proudu), z grafu definovat, jaká je velikost proudu v 5% a 7% roztoku NaCl.

Schopnější žáci mohou zapsat lineární rovnici a vysvětlit koeficient úměrnosti.

Rozšíření

Žáci, kteří splní svou práci předčasně, se budou věnovat rozšiřujícím úkolům (Určování koncentrace soli v roztoku).

Závěrečná aktivita

Žáci pohovoří o prováděném postupu; mají vysvětlit důvody jakýchkoli nestandardních výsledků.

Žáci určí vztah mezi proudem a koncentrací NaCl a vodivost roztoku a matematický typ závislosti na koncentraci NaCl.

Nadaní žáci mohou diskutovat o otázce, zda je tento proces vždy lineární a proč se vyskytují odchylky od lineární podoby v případech, kdy je koncentrace roztoku větší.

Poznámka

Experimentální část hodiny může probíhat za pomoci jiných dostupných přístrojů, např. výukový systém *Nova5000* (obr. 2) nebo *Xplorer GLX*, využívající senzor elektrické vodivosti. Pak musíme ovšem měřit vodivost (mS), nikoliv proud.

Obr. 2 Přístroje a materiál experimentu za použití Nova5000

Pracovní list

Zkoumání slanosti vody

Látky, rozpouštějící se ve vodě nebo jiném polárním rozpouštědlu se samovolně štěpí na kladně nabité ionty – kationty a záporně nabité ionty – anionty. Elektrolyty jsou látky, které, pokud jsou rozpuštěny nebo roztaveny, vedou elektrický proud. Tyto vlastnosti jsou charakteristické pro kyseliny, hydroxidy a téměř všechny solné roztoky. Je známo, že sůl (NaCl) se rozpouští ve vodě, její molekuly se pak rozkládají na kladné (Na^+) a záporné (Cl^-) ionty, tzn., že dochází k elektrolytické disociaci:

$$\mathrm{NaCl\ (k)} \rightarrow \mathrm{Na^+\ (aq)} + \mathrm{Cl^-\ (aq)}$$

Pokud neexistuje vnější elektrické pole, molekuly a ionty roztoku se pohybují chaoticky. Když na ně začne působit elektrické pole, začnou se ionty pohybovat: kladně nabité ionty se pohybují směrem k záporné elektrodě a záporně nabité ionty ke kladné elektrodě. Právě tyto dva toky tvoří elektrický proud v elektrolytech a síla proudu závisí na koncentraci roztoku.

Vodivost je schopnost materiálu vést elektrický proud. Vodivost roztoku je dána přítomností rozpuštěných anorganických solí, jako jsou anionty chloridu, nitrátu, sulfátu a fosfátu (záporně nabité ionty) nebo kationty NaCl, magnesia, kalcia, železa a hliníku (kladně nabité ionty).

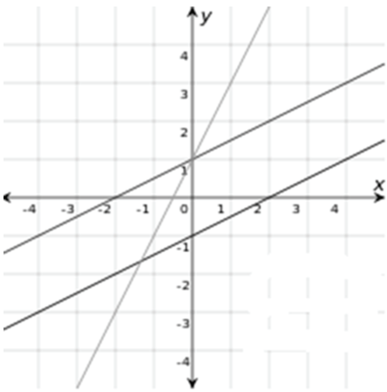
Vodný roztok organických sloučenin, jako jsou např. olej, fenol, alkohol, cukr, vedou elektrický proud slabě, proto je jejich vodivost malá. Protože vodivost závisí na koncentraci roztoku, je měření vodivosti dobrým indikátorem koncentrace pevných částic ve vodném roztoku. Vodivost také závisí na teplotě: vodivost teplejšího roztoku je vyšší.

V přírodě je obsah soli poměrně velký, jak v půdě, tak ve vodě. Např. říční vody jsou různě slané s ohledem na různé typy půd, geologických struktur a slaných podzemních pramenů. Problém nastane, když dojde k narušení rovnováhy salinity přírodního prostředí.

Salinita je velkou hrozbou pro povrchové i podzemní vodní zdroje. V závislosti na objemu soli v půdě se mění i růst rostlin. Vysoká salinita říčních vod může omezit jejich využití v zavlažování, v zemědělství, v zásobách pitné vody.

Salinita může také ovlivnit flóru vody, flóru, faunu a vegetaci pobřeží. Salinita snižuje životnost domácích spotřebičů i průmyslových přístrojů, zvyšuje použití čisticích přípravků a zvyšuje náklady na její sledování.

Ve vodných roztocích obvykle měříme vodivost v jednotkách microSiemens na centimetr (µS/cm) a milliSiemens na centimetr (mS/cm).

Otázky	Odpovědi
1. Co je elektrická vodivost?	
2. Co určuje vodivost roztoku?	
3. Jak měříme elektrickou vodivost roztoku?	
4. Odpařením slané vody získáme 3 % soli. Kolik soli získáme odpařením 36 kg slané vody?	
5. Napište lineární rovnice daných závislostí. 	

Odpovědní arch

Zkoumání slanosti vody

Odpovědní arch

Zapište data do tabulky.

No.	Objem soli m_{d}, g	Objem vody m_{v}, g	Koncentrace v procentech $c_{\%}$	Elektrický proud I, mA
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Použijte data z tabulky a nakreslete graf závislosti elektrického proudu v roztoku soli na koncentraci, tj. $I = f(c_{\%})$.

Z grafu vypočítejte změnu elektrického proudu, jestliže se koncentrace změní o 1 %:

$$\Delta l/\Delta c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ mA/\%}$$

Z grafu vypočítejte proud v 5% roztoku NaCl:

$$I\ (5\%) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ mA}$$

Z grafu definujte proudu v 7% roztoku NaCl:

$$I\ (7\%) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ mA}$$

Úhel sklonu tangenty v grafu značí změnu vodivosti.

<u>Rozšíření</u>

Z grafu odvoďte rovnici závislosti proudu na koncentraci.

....

Definujte fyzikální význam koeficientu úměrnosti.

....

<u>Závěr</u>

Určete závislost proudu na koncentraci NaCl:

....

....

Určete matematický typ závislosti proudu v roztoku a koncentrace NaCl.

....

....

Měření koncentrace solného roztoku

Pro nakládání okurek je nezbytné vyrobit slaný roztok. Tom s maminkou připravili 1,5 kg slaného roztoku (vsypali 3 lžíce soli do vody). Jedna lžíce soli váží 20 g.

- Jak koncentrovaný solný roztok Tom s maminkou připravili?


Tom ve snaze pomoci mamince připravil větší množství solného roztoku. Během práce však zapomněl, kolik lžic soli použil. Ve škole změřil proud ve 100 g vytvořeného roztoku a došel k výsledku $I_x = 150$ mA.

- Na základě grafu závislosti elektrického proudu v solném roztoku na koncentraci zjistěte, zda Tom připravil vhodný roztok.

Závěr

Kooperaci učitelů matematiky a přírodovědných předmětů vnímáme jako velmi důležitou součást výukového procesu na základních a středních školách. Věříme, že tímto způsobem můžeme přispět k vnímání matematiky jako nedílné součásti života kolem nás a ukázat žákům, že její studium či pochopení jejích základů je nezbytnou podmínkou pro jejich další rozvoj a celkové vnímání světa.

Vytvořené materiály by měly ukázat možnou cestu, jak k takové spolupráci přistupovat, případně vzbudit zájem učitelů o hledání praktického využití svého předmětu i v jiných oborech. Materiály jsou k dispozici v sedmi jazykových mutacích (čeština, angličtina, němčina, slovenština, italština, řečtina a lotyšština), proto je možné využívat materiály i v cizojazyčných sekcích ZŠ a SŠ, případně při výuce v rámci metody CLIL. Všechny materiály jsou pak k dispozici na webových stránkách www.mat2smc-project.eu. Zde zájemce najde i aplety, kterých je možné využít ve výuce.

Poděkování

Článek vznikl za podpory projektu 539242-LLP-1-2013-1-AT-COMENIUS-CMP „Materials for Teaching Together: Science and Mathematics Teachers collaborating for better results" a projektu FRUP_2016_011 „Inovace vybraných předmětů Katedry algebry a geometrie s využitím ICT".

Literatura

[1] Nocar, D.: E-learningová podpora matematického vzdělávání. In: *Reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky jako východisko jejich profesního rozvoje*, UP, Olomouci, 2017.

[2] www.mat2smc-project.eu

Pět let s Abaku

Alena Vávrová, ZŠ Kodaňská, Praha [1]

ABSTRAKT. *Abaku začíná být novou vzdělávací metodou výuky aritmetiky pro základní školy. Proto znovu připomínáme principy této metody jako motivaci k jejímu využití i na dalších školách.*

Hlavní principy metodiky hry Abaku

Abaková rovnost. V naší metodice vycházíme z tzv. abakové rovnosti – rovnosti mezi číselným výrazem, který obsahuje právě jednu početní operaci, a jeho hodnotou (výsledkem). Například jde o rovnost $1 + 1 = 2$.

Základní operace. Metodika pracuje se sčítáním, odečítáním, násobením, dělením a s druhými a třetími mocninami a odmocninami přirozených čísel.

Bez znamének. Výjimečnost metodiky spočívá v práci bez použití matematických znamének (tj. znamének matematických operací). Žáci si je při praktickém počítání pouze představují a znaménka se ukazují až při vyhodnocení rovností anebo je používají v souladu s metodikou Abaku.

Aritmetické čtení. Žáci dovedou po krátké době v pouhém shluku čísel automaticky rozpoznat rovnost a další souvislosti. To vede k rozvoji schopnosti sebevzdělávání a následně k významnému zlepšení duševní a praktické schopnosti práce s čísly. Jedná se vlastně o jistou obdobu rozvoje čtení – když si dítě osvojí jednotlivá písmena a princip jejich skládání do slov, získá tím automaticky nástroj, aby se dalším čtením samo rozvíjelo.

Vedlejší principy metodiky hry Abaku

Hlubší pochopení aritmetiky. Žáci jsou při použití metodiky Abaku vedeni a motivováni k samostatnému vytváření takových kombinací, které v sobě současně ukrývají rovností několik. Například 24832 obsahuje rovnosti $24 + 8 = 32$, $24 : 8 = 3$, $4 \cdot 8 = 32$, $2 \cdot 4 = 8$

[1] e-mail: drakopes@volny.cz

a $2^2 = 4$. V důsledku toho dochází k prohloubení a fixaci osvojených zákonitostí aritmetiky.

Matematika je hra. Metodika Abaku je plně postavena na herním přístupu, který zásadně ovlivňuje motivaci dítěte a proměňuje od základu i jeho přístup k matematice jako takové.

Silnější kolektiv. Cílem metodiky není vyhledávat talenty v kolektivu dětí, ale naopak zapojit celý kolektiv. Široké možnosti diferenciace obtížnosti přinášejí prospěch jak těm nejsilnějším, tak těm nejslabším žákům.

Stoprocentně kompatibilní. Metodika Abaku je svou specializací určena čistě pro osvojení schopnosti perfektně z hlavy počítat. Je proto plně kompatibilní s jakoukoli jinou hlavní metodou, kterou si škola určila pro výuku matematiky v 1. až 9. třídě.

Za hranice aritmetiky. Rychlý a hluboký nárůst početních schopností, který u dítěte nastupuje brzy po zahájení práce s metodikou, se pozitivně promítá i do dalších oblastí výuky matematiky, jako je například algebra, geometrie atd.

Literatura

[1] `http://abaku.org/cs/o-metode/`

[2] `https://www.hry.cz/hra/abaku`

Kruhová inverze

Iva Vojkůvková, FIM UHK, Hradec Králové [1]

Abstrakt. *Příspěvek ukazuje, jak může být problematika kruhové inverze prezentována na krátkém semináři pro středoškoláky s hlubším zájmem o matematiku. Po teoretickém úvodu lze využít program GeoGebra ke zkoumání vlastností kruhové inverze a také k řešení konstrukčních úloh základních i aplikačních. V příspěvku jsou uvedena doporučená cvičení pro účastníky semináře a jejich možné výstupy. V závěru nechybí zamyšlení nad dalšími možnostmi rozvíjení tématu.*

Motivace – matematik na lovu lvů

Pro určitost předpokládejme, že chceme ulovit lva, a vydejme se tedy na Saharu. Matematik má několik možností, jednou z nich je ([1, 2]):

„Umístíme na Sahaře klec kulového (resp. kruhového) tvaru a uzavřeme se v ní. Pak stačí provést inverzní transformaci, při níž vnitřek klece projektujeme navenek a naopak. Výsledkem je, že my se ocitneme mimo klec a lev uvnitř.“

Kruhová inverze

K bodům ve „známé“ rovině přidáme nevlastní bod (v nekonečnu), bude tak zavedena tzv. *Möbiova rovina.*

Definice 1. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r. *Kruhová inverze* je zobrazení Möbiovy roviny na Möbiovu rovinu, které:

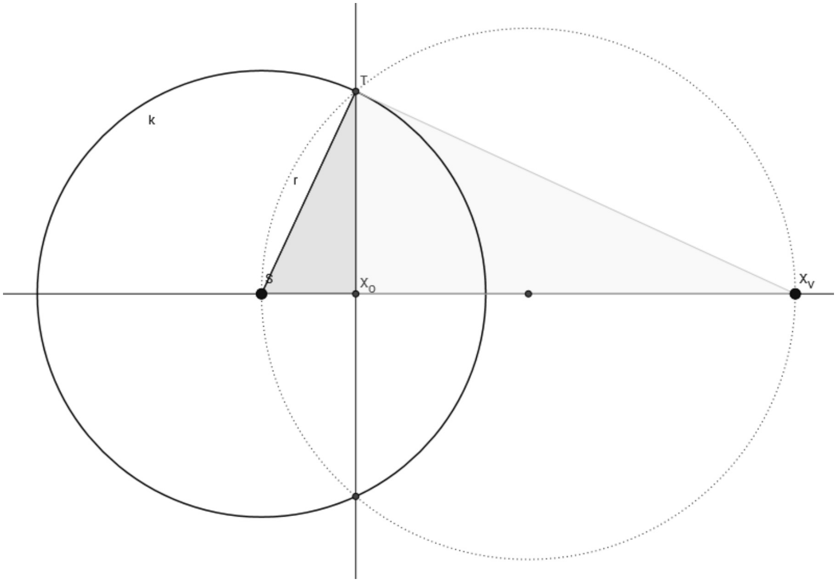
1. každému bodu X různému od S přiřadí bod X' tak, že platí
$$|SX| \cdot |SX'| = r^2;$$
2. bodu S přiřazuje nevlastní bod;
3. nevlastnímu bodu přiřazuje bod S.

Kružnice k se nazývá *řídicí kružnice* kruhové inverze.

Úloha 1. Sestrojte obraz X_O bodu X_V s využitím základních příkazů programu GeoGebra. Na základě podobnosti trojúhelníků dokažte platnost vztahu $|SX_O| \cdot |SX_V| = r^2$.

[1] e-mail: iva.vojkuvkova@uhk.cz

Řešení je na obr. 1.



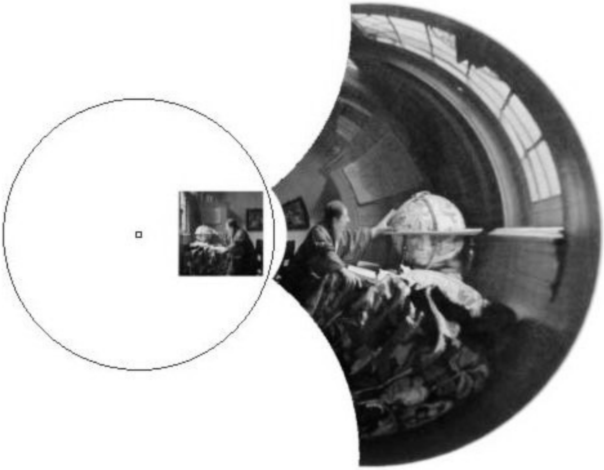
Obr. 1 Konstrukce obrazu X_O bodu X_V v programu GeoGebra

Vlastnosti kruhové inverze

V kruhové inverzi s řídicí kružnicí k se středem S platí:

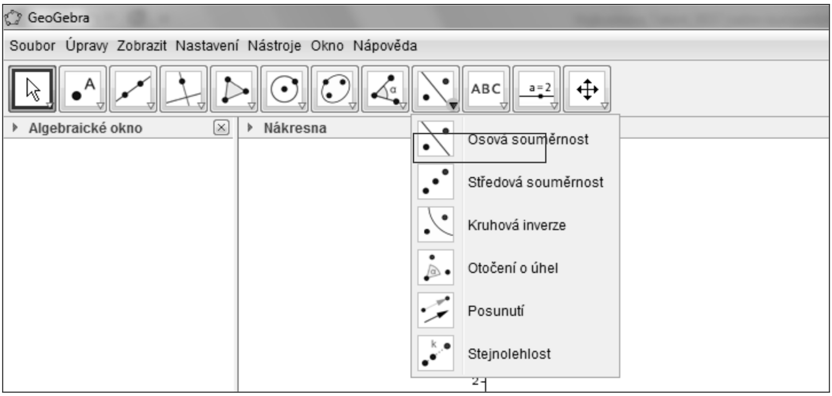
1. obrazem přímky procházející středem S je táž přímka
2. obrazem přímky neprocházející středem S je kružnice procházející středem S
3. obrazem kružnice procházející středem S je přímka neprocházející středem S
4. obrazem kružnice neprocházející středem S je kružnice neprocházející středem S
5. samodružnými body kruhové inverze jsou body kružnice k
6. kruhová inverze je involutorní zobrazení
7. kruhová inverze zachovává velikosti úhlů

Obraz reálného snímku v kruhové inverzi je na obr. 2.



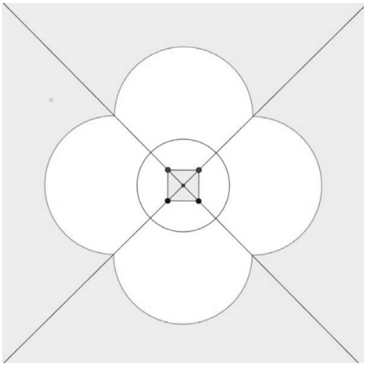
Obr. 2 Kruhová inverze bitmapového obrázku podle [12]

Úloha 2. Využijte možnost rychlého sestrojení obrazu bodu, kružnice a přímky v kruhové inverzi dostupnou v programu GeoGebra (obr. 3) a ověřte výše uvedené vlastnosti.

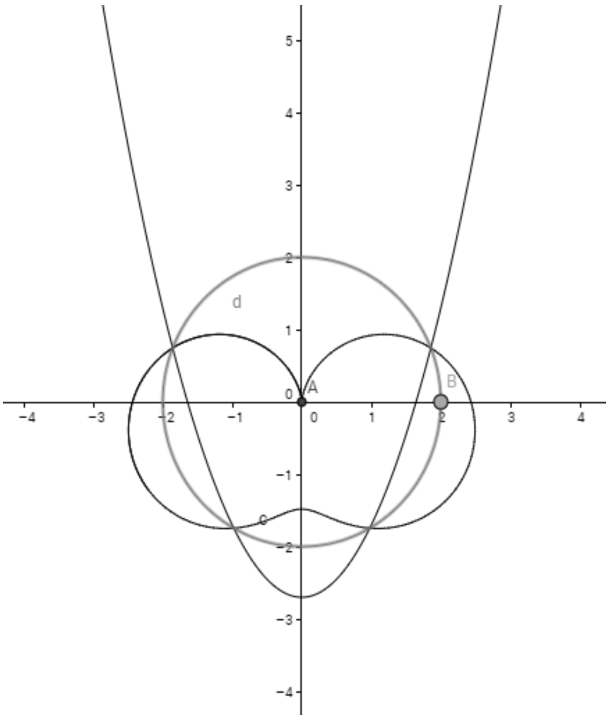


Obr. 3 Menu programu GeoGebra

Úloha 3. Vytvořte na základě námětů z obr. 4 a 5 vlastní konstrukce v modulu Geometrie či Algebra programu GeoGebra. Diskutujte nad získanými výstupy.



Obr. 4 Zobrazení vnitřních bodů a stran čtverce v kruhové inverzi (modul Geometrie)



Obr. 5 Zobrazení paraboly v kruhové inverzi (modul Algebra)

Apolloniovy, resp. Pappovy úlohy

Úlohy jsou pojmenovány podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (262–200 př. n. l.), který v nedochované práci *O dotycích* píše: „Hledáme kružnici, která se dotýká tří daných kružnic.“

Později byla úloha zobecněna – kružnice mohou být nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) nebo přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru). Pappos Alexandrijský (3. stol. n. l.) již uvádí úlohu v následujícím znění:

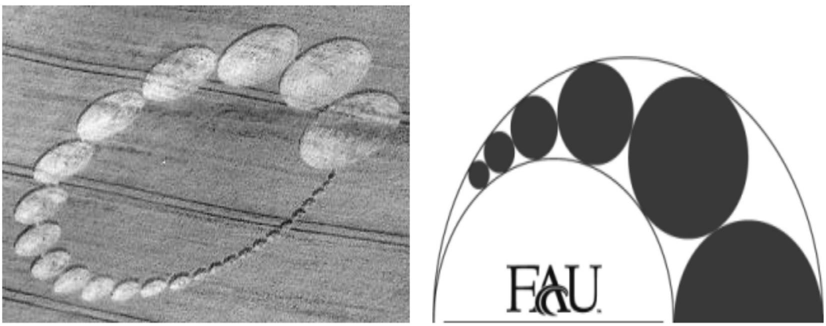
Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narýsovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímek či kruhů.

A dále ji modifikuje.

Z výše uvedeného zadání je možno určit počet variant úlohy. Hledáme trojice objektů vybírané ze tří druhů (bodů, přímek, kružnic), přičemž na pořadí daných objektů nezáleží. Tvoříme tedy kombinace s opakováním, kterých je

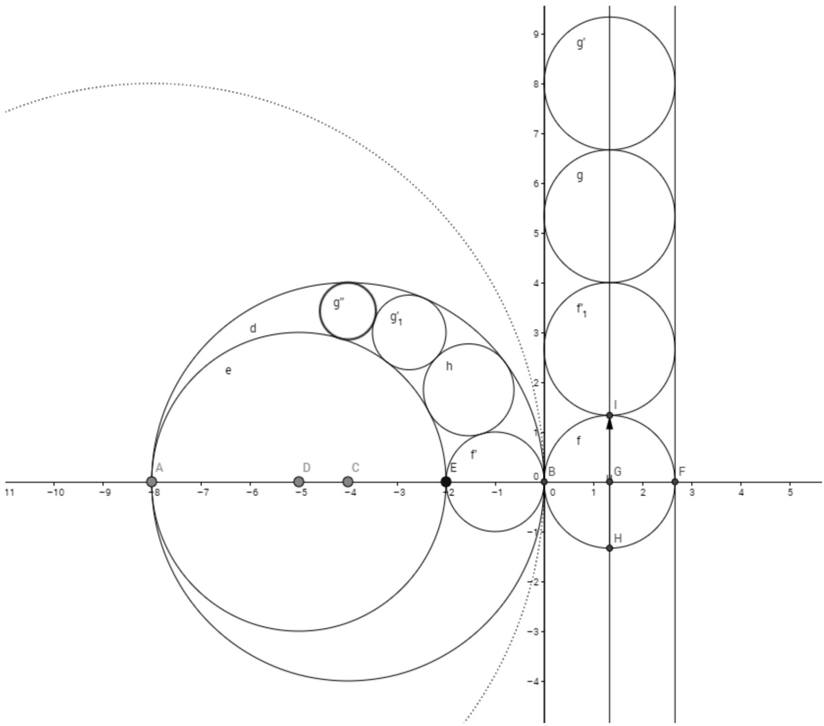
$$C' = \binom{5}{3} = 10.$$

Tyto úlohy lze řešit využitím vhodné kruhové inverze (více v publikacích [3, 6, 7, 8]). Pěkný motiv je na obr. 6.



Obr. 6 Motiv tzv. Pappova řetězce na obrazcích v obilí a na logu podle [14] a [15]

Úloha 4. Sestrojte v prostředí GeoGebra s využitím kruhové inverze tzv. Pappův řetězec (obr. 7, dle [10]). Nejprve se pokuste postup objevit samostatně, pak případně využijte pokynů přednášejícího.



Obr. 7 Konstrukce Pappova řetězce

Závěr

Tento článek vznikl na základě zkušeností ze semináře pořádaného v rámci pravidelné akce Den π na FIM [11], na které umožňujeme studentům středních škol z Hradce Králové a okolí netradiční setkání s matematikou v podobě přednášek a workshopů.

Na tento úvodní „degustační“ seminář je možné navázat například hlubším studiem problematiky Apolloniových úloh či kulové inverze a související stereografické projekce. Motivačně poslouží např. královéhradecký motiv ze stránek [13] (obr. 8).

Literatura

[1] Petard, H.: A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting. *The American Mathematical Monthly*, roč. 45 (1938), č. 7-8, s. 446–447. http://math.ucdenver.edu/ wcherowi/mathmajor/archive/catchlion.pdf

[2] Šedivý, J.: Žerty na vlastní účet. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 18 (1973), č. 5, s. 284–287. `http://dml.cz/dmlcz/137682`

[3] Kuřina, F.: *10 geometrických transformací*. Prometheus, Praha, 2002.

[4] Dobiášová, K.: *Webové stránky pro výuku geometrických zobrazení na střední škole*. Diplomová práce, KDM MFF UK Praha, 2017. `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//diplomky/katerina_dobiasova/`

[5] Kolektiv autorů: *Studijní text XX. korespondenčního semináře BRKOS*. MU, Brno, 2013. `http://brkos.math.muni.cz/files/povidani/povidani202.pdf`

[6] Gergelitsová, Š.: *Cesta z roviny do prostoru od vlastností kružnic ke kulové inverzi*. Studijní materiál ke kurzu Talnet, Praha. `http://www.talnet.cz/documents/18/b3ace90e-ff84-499b-9217-a8ce9f6bbd01`

[7] Patáková, E.: *Apolloniovy úlohy*. Diplomová práce, PedF ZČU, Plzeň, 2005. `http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/uvod/uvod.html`

[8] Boček, L., Zhouf, J.: *Planimetrie*. PedF UK, Praha, 2012.

[9] `https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus_chain`

[10] `http://www.geogebra.org/`

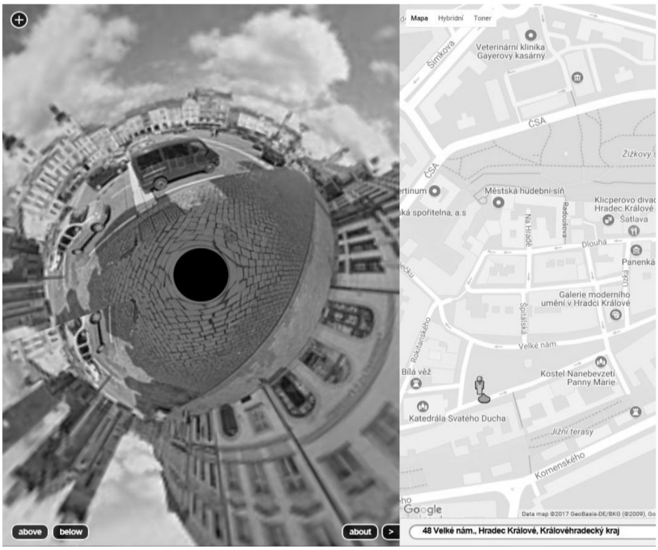
[11] `http://fim2.uhk.cz/pi/`

[12] `https://spacesymmetrystructure.wordpress.com/category/inversion/`

[13] `http://notlion.github.io/streetview-stereographic`

[14] `https://mbahware.blogspot.cz/2009/10/crop-circle-dan-matematika-bagian-3.html`

[15] `https://archive.geogebra.org/examples/frisbee/about.html`



Obr. 8 Velké náměstí v Hradci Králové

EGMO – MO pro dívky

Jaroslav Zhouf, KAM FIT CVUT a KMAT FIS VŠE, Praha [1]

Abstrakt. *Článek informuje o relativně nové mezinárodní soutěži pro talentované žákyně v matematice, tzv. EGMO. Článek popisuje zapojení České republiky do této soutěže a o úspěších českých dívek v ní.*

Trochu historie

Jistě je známo, že již dlouhou dobu existuje mezinárodní matematická soutěž IMO (International Mathematical Olympiad) a také již více než 10 let její mladší sestra MEMO (Middle European Mathematical Olympiad). Obě tyto soutěže jsou organizovány pro středoškoláky obou pohlaví.

Jako třetí mezinárodní matematická soutěž je EGMO, což je zkratka soutěže European Girls' Mathematical Olympiad, neboli evropské matematické olympiády pro středoškolské dívky. Jde o obdobu obou výše jmenovaných soutěží. Všechny tyto soutěže tedy mají, až na malé výjimky, stejný charakter. Hlavní rozdíl je v tom, že místo maximálně šesti soutěžících na IMO a MEMO soutěží na EGMO maximálně čtyři dívky.

Obr. 1 Logo soutěže EGMO

Soutěž EGMO byla poprvé uspořádána v roce 2012 v Anglii v Cambridge za účasti 19 zemí (z toho tří neevropských – Indonésie, Saudské Arábie a USA), poté v roce 2013 v Lucembursku za účasti 22 zemí (mimo Evropu jen USA), v roce 2014 v Turecku za účasti 29 zemí (z toho 7 neevropských), v roce 2015 v Bělorusku za účasti 30 zemí (z toho 7 neevropských), v roce 2016 v Rumunsku za účasti 39 zemí (z toho 7 neevropských) a letos, tj. v roce 2017, ve Švýcarsku za účasti 44 zemí (z toho 10 neevropských). Jak je vidět, počet zemí, a tedy i soutěžících dívek, neustále narůstá.

[1] e-mail: zhouf@seznam.cz

V roce 2016 se soutěže EGMO poprvé zúčastnila také Česká republika. Můžeme za to vděčit ČVUT Praha, která český tým sponzorovala. Bohužel žádnými prostředky na tuto soutěž nepřispěla žádná státní ani společenská instituce.

Statut soutěže

Evropské země mají pobyt na soutěži placený z evropských prostředků a prostředků organizátorské země, kdežto neevropské země si platí účast samy, což je důležitým zdrojem příjmů pro celou soutěž. Soutěž vznikla na podporu motivace dívek ke studiu matematiky, takže i země, které si musejí svoji účast platit, nelitují prostředků, aby měly dívky příležitost poměřit se se svými soupeřkami z jiných zemí.

Dívky řeší ve dvou dnech po třech úlohách, z nichž každá má hodnotu nejvýše 7 bodů, takže je možné získat až 42 bodů. Podle pravidel soutěže EGMO je z evropských dívek zhruba polovina odměněna medailí (na IMO a MEMO to je nejvýše polovina).

Nominace českého družstva na IMO a MEMO probíhá až po uspořádání celostátního kola. Jelikož ale EGMO probíhá tradičně těsně po našem celostátním kole, není technicky možné čekat na jeho výsledky. Proto nominace dívek na EGMO probíhá již na základě výsledků krajského kola kategorie A.

EGMO 2016

Zastavme se nejprve u pátého ročníku soutěže z roku 2016, neboť se jí naše republika poprvé zúčastnila [1]. Soutěž probíhala od 10. do 16. dubna v rumunském městě Busteni, které sousedí se známějším střediskem Sinaia na okraji nádherných Transylvánských Alp.

České družstvo reprezentovaly tyto dívky: *Klára Karasová* z G Mikulášské nám. v Plzni, *Lenka Kopfová* z G Komenského v Opavě, *Zuzana Procházková* z G Na Vítězné pláni v Praze 4 a *Hedvika Ranošová* z G Budějovická v Praze 4. Vedoucím české delegace byl *doc. Jaroslav Zhouf* z FIT ČVUT v Praze a jeho zástupcem *Mgr. Josef Tkadlec*, doktorand vídeňského institutu IST Austria (obr. 2).

Zúčastněných zemí byl již zmíněný počet 39, z toho 7 neevropských. Soutěžících dívek bylo 147, z toho 119 z Evropy. Z těchto dívek bylo odměněno medailí 62, z toho 11 získalo zlatou medaili za aspoň 27 bodů, 23 získalo stříbrnou medaili za aspoň 17 bodů a 28 získalo bronzovou medaili za aspoň 11 bodů. Současně s těmito evropskými dívkami jsou medailí odměněny i neevropské dívky, které dosáhnou stejného bodového zisku. Takže v součtu bylo uděleno 16 zlatých, 30 stříbrných a 38 bronzových medailí.

Obr. 2 Řešitelky a jejich vedoucí na EGMO 2016

Absolutní vítězkou se ziskem 42 bodů se stala ruská soutěžící Maria Dimitrieva. Z našich dívek získala bronzovou medaili Lenka Kopfová za 12 bodů (obr. 3). Další naše dívky získaly tyto počty bodů: Klára Karasová 4 body, Zuzana Procházková 5 bodů a Hedvika Ranošová 4 body. Celkem tedy získalo české družstvo 25 bodů ze 168 možných. Neoficiálně se tak umístilo na 28. místě.

Obr. 3

Uveďme úlohy, které dívky v Rumunsku řešily:

Úloha 1. Nechť n je kladné liché číslo a $x_1, \ldots, x_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Dokažte, že

$$\min_{i=1,\ldots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\ldots,n} 2x_j x_{j+1},$$

kde $x_{n+1} = x_1$.

Úloha 2. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník a nechť se jeho úhlopříčky AC a BD protínají v bodě X. Nechť C_1, D_1 a M jsou po řadě středy úseček CX, DX a CD. Přímky AD_1 a BC_1 se protínají v bodě Y a přímka MY protíná úhlopříčky AC a BD postupně v bodech E a F. Dokažte, že přímka XY je tečnou kružnice procházející body E, F a X.

Úloha 3. Nechť m je kladné celé číslo. Uvažujme tabulku $4m$ x $4m$ složenou z jednotkových čtverečků. Dva různé čtverečky tabulky *jsou ve vzájemném vztahu*, právě když leží ve stejném řádku nebo stejném sloupci. Žádný čtvereček není ve vztahu sám k sobě. Některé čtverečky tabulky jsou vybarveny modře tak, že každý čtvereček tabulky je ve vzájemném vztahu nejméně se dvěma modrými čtverečky. Určete minimální možný počet modrých čtverečků tabulky.

Úloha 4. Dvě kružnice k_1 a k_2 stejného poloměru se protínají v různých bodech X_1 a X_2. Uvažujme kružnici k, která má s kružnicí k_1 vnější dotyk v bodě T_1 a s kružnicí k_2 vnitřní dotyk v bodě T_2. Dokažte, že přímky X_1T_1 a X_2T_2 se protínají v bodě ležícím na kružnici k.

Úloha 5. Nechť k a n jsou přirozená čísla taková, že $k \geq 2$ a $k \leq$ $\leq n \leq 2k-1$. Pokrývejte pravoúhlými pásky o velikosti $1 \times k$ nebo $k \times 1$ šachovnici $n \times n$ tak, aby každý pásek pokryl právě k polí a žádné pole nebylo pokryto dvěma pásky. Toto pokrývání dělejte do té doby, kdy už nemůžete umístit žádný další pásek. Pro každou dvojici čísel k a n určete nejmenší počet pásků, které takové pokrytí může obsahovat.

Úloha 6. Nechť S je množina všech kladných celých čísel n takových, že n^4 je dělitelné aspoň jedním z čísel n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+2n. Dokažte, že množina S obsahuje nekonečně mnoho čísel každého z tvarů $7m$, $7m+1$, $7m+2$, $7m+5$, $7m+6$ a neobsahuje žádný prvek tvaru $7m+3$ a $7m+4$, kde m je nezáporné celé číslo.

EGMO 2017

V roce 2017 od 6. do 12. dubna se ve švýcarském Curychu konal již 6. ročník EGMO [2]. České reprezentační družstvo středoškolaček se této soutěže zúčastnilo podruhé.

Místa v reprezentačním týmu si vybojovaly dívky *Veronika Hladíková* z G Mikulášské nám. v Plzni, *Lenka Kopfová* z Mendelova G v Opavě, *Jana Pallová* z GJŠ v Přerově a *Bára Tížková* z GMK v Bílovci. Vedoucími naší delegace byli *doc. Jaroslav Zhouf* z FIT ČVUT v Praze a *dr. Jaroslav Švrček* z PřF UP v Olomouci (obr. 4).

Obr. 4 Družstvo dívek a vedoucí dr. Švrček na EGMO 2017

Naše družstvo si vedlo nad očekávání dobře. Lenka Kopfová získala stříbrnou medaili za zisk 24 bodů, Veronika Hladíková (obr. 5) bronzovou medaili za zisk 19 bodů a dvě zbylé reprezentantky obdržely tzv. čestné uznání za bezchybné vyřešení aspoň jedné soutěžní úlohy. V celkovém pořadí skončilo naše družstvo na pěkném 15. místě, což představuje výrazné zlepšení ve srovnání s výsledkem našeho týmu při jeho premiéře v předchozím roce.

Obr. 5

Uveďme úlohy, které dívky ve Švýcarsku řešily:

Úloha 1. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle ADC|\,.$$

Nechť Q a R jsou body postupně na úsečkách BC a CD takové, že přímka QR protíná přímky AB a AD postupně v bodech P a S a platí $|PQ| = |RS|$. Dokažte, že střed M úsečky BD, střed N úsečky QR a body A a C leží na společné kružnici.

Úloha 2. Určete nejmenší kladné celé číslo k, pro které existuje obarvení kladných celých čísel $\mathbb{Z}_{>0}$ pomocí k barev, a funkci $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) Pro všechna kladná celá čísla m, n stejné barvy platí

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

(ii) Existují kladná celá čísla m, n taková, že

$$f(m+n) \neq f(m) + f(n).$$

Při obarvování množiny $\mathbb{Z}_{>0}$ pomocí k barev je každé číslo obarveno právě jednou z těchto barev. V obou případech (i) a (ii) kladná celá čísla m, n nejsou nutně různá.

Úloha 3. V rovině je dáno 2017 přímek takových, že žádné tři z nich neprochází jedním bodem. Hlemýžď Turbo se nachází v nějakém bodě právě jedné z daných přímek a začíná se pohybovat po těchto přímkách podle následujícího pravidla: Pohybuje se po dané přímce do doby, dokud nedorazí do průsečíku dvou daných přímek. Od tohoto průsečíku pokračuje v pohybu po jiné přímce, přičemž se vydá doprava, nebo doleva, a to střídavě v po sobě následujících průsečících přímek. Směr může měnit jedině v průsečících daných přímek. Existuje nějaká úsečka na některé z daných přímek, po které se pohybuje v obou směrech během své cesty?

Úloha 4. Nechť $n \geq 1$ je přirozené číslo a nechť $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ jsou kladná celá čísla. Ve skupině $t_n + 1$ lidí jsou hrány šachové partie. Dva lidé mohou sehrát partii nejvýše jednou. Dokažte, že je možné, aby platily zároveň tyto dvě podmínky:

(i) Počet her sehraných každou osobou je roven některému z čísel $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(ii) Pro každé i, $1 \leq i \leq n$, existuje některá z osob, která sehraje právě t_i her.

Úloha 5. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Uspořádaná n-tice ne nutně různých kladných celých čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se nazve *egmotická*, jestliže existuje kladné celé číslo k takové, že

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}.$$

a) Určete všechna přirozená čísla $n \geq 2$, pro která existuje egmotická n-tice.

b) Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo m existuje přirozené číslo $n \geq 2$ takové, že m patří do egmotické n-tice.

V levé straně rovnosti výše je právě n činitelů.

Úloha 6. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, jehož každé dvě strany mají různou délku. Obraz jeho těžiště G a středu O jeho kružnice opsané v osových souměrnostech podle stran BC, CA, AB označíme postupně G_1, G_2, G_3 a O_1, O_2, O_3. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A a ABC mají společný bod.

Trochu budoucnosti

Celé soutěžní klání se v obou letech konalo v přátelském duchu a bylo povzbuzením pro zúčastněné dívky ke studiu matematiky a doufejme, že bude povzbuzením i pro další dívky, které budou usilovat o reprezentaci v příštích letech.

Doufejme, že nám budou nakloněny i státní a zájmové instituce a konečně vezmou soutěž EGMO vážně.

Více informací je možné získat na stránkách [3].

Jedna konkrétní soutěžní úloha z roku 2017

Úloha 3. V rovině je dáno 2017 přímek takových, že žádné tři z nich neprochází jedním bodem. Hlemýžď Turbo se nachází v nějakém bodě právě jedné z daných přímek a začíná se pohybovat po těchto přímkách podle následujícího pravidla: Pohybuje se po dané přímce do doby, dokud nedorazí do průsečíku dvou daných přímek. Od tohoto průsečíku pokračuje v pohybu po jiné přímce, přičemž se vydá doprava, nebo doleva, a to střídavě v po sobě následujících průsečících přímek. Směr může měnit jedině v průsečících daných přímek. Existuje nějaká úsečka na některé z daných přímek, po které se pohybuje v obou směrech během své cesty?

Řešení. Ukážeme, že to není možné.

Přímky rozdělí rovinu na omezená a neomezená území. Na střední škole se dokazuje (případně si to čtenář lehce provede) matematickou indukcí, že každé toto rozdělení roviny lze vybarvit dvěma barvami, např. bílou a černou, tak, že na každé straně ohraničující úsečky nebo polopřímky jsou území obarvena opačnou barvou.

Když tedy hlemýžď vystartuje z jednoho průsečíku, má napravo např. bílou barvu a nalevo černou. V následujícím průsečíku se dá např. doprava, takže vpravo od sebe bude mít bílou barvu a vlevo černou. V následujícím průsečíku se dá doleva, takže napravo od sebe bude mít bílou barvu a nalevo černou. V dalším průsečíku bude mít zase napravo od sebe bílou barvu a nalevo černou atd. atd. Při své cestě bude tedy mít hlemýžď napravo bílou a nalevo černou barvu. Z toho plane, že nikdy nemůže jít po stejné úsečce ve dvou různých směrech.

Poznámka. Soutěžící při vlastní soutěži vymysleli ještě další tři způsoby řešení, která nejsou závislá na znalosti obarvování roviny dvěma barvami. Je tedy vidět, že úlohy v takovýchto soutěžích nezávisejí jen na znalostech, ale hlavně na dovednostech jednotlivých řešitelů. Dokonce při této úloze nebyl dominantní způsob řešení pomocí obarvování roviny dvěma barvami.

Literatura

[1] Zhouf, J.: EGMO 2016 v Rumunsku. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 91 (2016), č. 2, s. 52–55.

[2] Švrček, J, Zhouf, J.: Šestý ročník Evropské dívčí MO (EGMO). *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92 (2017), č. 3, s. 44–47.

[3] `https://www.egmo.org/egmos/egmo5/`

Dimenzia nekonečnosti prvočísel

Miroslav Židek

ABSTRAKT. *Cieľom príspevku je poukázať na fakt, že prvočísla nie sú rozložené v postupnosti prirodzených čísel chaoticky, ale ich rozloženie sa riadi podľa presne určených zákonitostí.*

Rozloženie prvočísel v postupnosti prirodzených čísel

Tajomstvo rozloženia prvočísel znepokojuje matematikov celé stáročia. *Existuje pre ne „periodická tabuľka", alebo sú rozložené náhodne a nedajú sa predpovedať? Riadia ich rozmiestnenie nejaké zákony?*

Hovorí sa, že prvočísla sú stavebnými kameňmi prirodzených čísel. Riešenie hľadania prvočísel súvisí s postupnosťou nepárnych čísel, pretože prvočísla sú nepárne čísla okrem čísla dva.

Prirodzené čísla tvoria tri skupiny: jednotka, prvočísla a zložené čísla. Preto aj pri hľadaní spôsobu či systému, ako aj možného dôkazu pravdivosti hľadania prvočísel a prvočíselných dvojíc, musíme do výpočtov zapojiť všetky tri skupiny spomínaných prirodzených čísel. Bez nich nemôžeme patrične do detailov preskúmať a pochopiť oblasť prirodzených čísel a prísť na spôsob rozloženia prvočísel v spomínanej nekonečnej postupnosti prirodzených čísel.

Vraj sa doteraz nepodarilo nájsť systém, ktorý potvrdzuje ich zákonitosti.

Vytvorenie tabuľky a poznané prvočíslo

Pozrime sa do tab. 1. Vo vrchnej časti tabuľky je v horizontálnej rovine postupne písaná postupnosť všetkých prirodzených čísel od 1 ďalej – odstupňovaná po jednej. Nazval som ich stacionárne čísla. Ich hodnota zaznačená neskôr v tabuľke daného stĺpca je predpokladom na vyhľadanie prvočísla, či prvočíselného dvojčaťa výpočtom.

Začiatok ľavej strany tabuľky tvorí vo vertikálnej polohe napísaná postupnosť všetkých prvočísel od 5 ďalej.

Každé nájdené prvočíslo svojou hodnotou dopĺňa a vytvára podmienky pre čiastkové nachádzanie ďalších prvočísel v horizontálnej rovine tabuľky. Do tabuľky sa do daného riadku dopĺňajú prislúchajúce vypočítané celé čísla – prvotné čísla, ktoré predurčujú ďalšie hodnoty čísel v tabuľke. K nim sa opakovane pripočítava hodnota prvočísla, ktorá sa nachádza na začiatku riadku.

Hlavným stavebným kameňom pre prvočíselné dvojice sú známe hodnoty $6n-1$ a $6n+1$, kde $n \in \mathbb{N}$. Z týchto hodnôt vieme vypočítať nielen všetky existujúce prvočísla, ale aj zložené čísla. Aby sme však vypočítali prvotné hodnoty do vytváranej tabuľky, musíme postup výpočtu hodnôt opakovať ešte raz cez hodnoty možných prvočíselných dvojíc.

Prvotné dve hodnoty do jednotlivých riadkov tabuľky sa vypočítajú podľa tohto pravidla:

$$
\begin{array}{lll}
6 \cdot 1 - 1 = 5 & 5 - 1 = 4 & 5 + 1 = 6 \\
6 \cdot 1 + 1 = 7 & 7 - 1 = 6 & 7 + 1 = 8 \\
6 \cdot 2 - 1 = 11 & 11 - 2 = 9 & 11 + 2 = 13 \\
6 \cdot 2 + 1 = 13 & 13 - 2 = 11 & 13 + 2 = 15 \\
6 \cdot 3 - 1 = 17 & 17 - 3 = 14 & 17 + 3 = 20 \\
6 \cdot 3 + 1 = 19 & 19 - 3 = 16 & 19 + 3 = 22 \\
6 \cdot 4 - 1 = 23 & 23 - 4 = 19 & 23 + 4 = 27 \\
6 \cdot 4 + 1 = 25 & 25 - 4 = 19 & 25 + 4 = 29
\end{array}
$$

V prvom stĺpci tab. 1 sú prvočísla menšia o jednotku od násobku čísla 6 označená tučne, prvočísla väčšia o jednotku od násobku čísla 6 označená slabo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5				**4**		6			**9**		11			**14**		16			**19**		21			**24**
7						6		**8**					13		**15**					20		**22**		
11									**9**				13							**20**				24
13											11				**15**									24
17														**14**						20				
19																16						**22**		
23																			**19**					
29																								**24**

Tab. 1

Ďalšie čísla v tab. 1 doplníme týmto spôsobom: V riadku prvočísla 5 doplĺňame k dvom vypočítaným hodnotám ďalšie čísla, ktoré sú súčtom predchádzajúcej hodnoty plus 5. Podobným spôsobom to urobíme aj v riadku prvočísla 7 atď.

Druhá mocnina prvočísel

Spôsob hľadania prvočísel, či výpočet pomocných hodnôt zapisovaných do vytváranej tabuľky je rôznymi vzťahmi prepojený s druhou mocninou prvočísel. Poznáme postupnosti čísel, z ktorých súčtom, či rozdielom vznikajú výsledky druhých mocnín.

Príkladom sú postupnosť nepárnych čísel idúcich za sebou, postupnosť trojuholníkových čísel, či obdĺžnikových čísel. Tento fakt bol prvou myšlienkou pri zisťovaní podmienok rozloženia prvočísel v postupnosti prirodzených čísel.

Prvočíslo na začiatku každého riadku z tab. 1 umocnené na druhú, ponížené o číslo 1 a vydelené šiestimi udáva v tabuľke tučne napísanú hodnotu, po ktorú si vieme vypočítať nasledujúce prvočísla. To znamená, že v každom riadku tabuľky sa nachádza tučne napísané číslo, ktoré určuje hranicu, pokiaľ dokážeme správne vypočítať hodnoty – podklady pre následný výpočet prvočísel.

Príklad:
$(5^2 - 1) : 6 = 4$, vieme vypočítať prvočísla do čísla 24
$(7^2 - 1) : 6 = 8$, vieme vypočítať prvočísla do čísla 48
$(11^2 - 1) : 6 = 20$, vieme vypočítať prvočísla do čísla 120
$(13^2 - 1) : 6 = 28$, vieme vypočítať prvočísla do čísla 168

Z príkladu výpočtu vidíme, že sa jedná o čísla 4, 8, 20, 28, … atď.

Metóda negácie

Prvočísla sa z tabuľky dajú vypočítať nasledovne:

Ak sa v stĺpci nachádza tučne napísané číslo n, prvočíslo dostaneme vynásobením šiestimi a výsledok ponížime o hodnotu 1, teda $6n - 1$.

Ak sa v stĺpci nachádza ne tučne napísané číslo n, prvočíslo dostaneme vynásobením šiestimi a k výsledku pripočítame hodnotu 1, teda $6n + 1$.

Ak sa v stĺpci nenachádza tučne ani ne tučne napísané číslo, jedná sa o prvočíselnú dvojicu. Hodnoty prvočíselnej dvojice dostaneme tak, že poradové číslo stĺpca vynásobime šiestimi a výsledok povýšime a ponížime o hodnotu 1, teda $6n \pm 1$.

Ak sa v stĺpci nachádza tučne aj ne tučne napísané číslo, znamená to, že obe čísla $6n \pm 1$ sú zložené.

Ešte jedna zaujímavosť

Vytvorme z tab. 1 trochu inú tab. 2, v ktorej sú v hornom záhlaví iba prvočísla. Vnútorné hodnoty sú vlastne súčinmi dvoch prvočísel plus, mínus 1 násobené šiestimi.

	5	7	**11**	13	**17**	19	**23**	**29**	31
5	**4**	6	**9**	11	**14**	16	**19**	24	26
7	6	**8**	13	**15**	20	**22**	27	34	**36**
11	9	13	20	24	31	35	42	53	57
13	11	15	24	28	37	41	50	63	67
17	**14**	20	**31**	37	**48**	54	**65**	**82**	**88**
19	16	**22**	35	**41**	54	**60**	73	**92**	**98**
23	**19**	27	**42**	50	**65**	73	**88**	**111**	119
29	**24**	34	**53**	63	**82**	92	**111**	**140**	150
31	26	**36**	57	**67**	**88**	**98**	119	150	**160**

Tab. 2

Ukážka nám ukáže súvislosti medzi číslami v tabuľke:

$$11 \cdot 17 = 187; \quad (187 - 1) : 6 = 31$$
$$11 \cdot 19 = 209; \quad (209 + 1) : 6 = 35$$
$$29 \cdot 31 = 899; \quad (899 + 1) : 6 = 150$$

Čo z uvedeného vyplýva?

Ak si správne inicializujeme prvotné údaje, dokážeme z nich vybrať zložené čísla ako súčiny dvoch prvočíselných činiteľov.

Ako vieme, prvočísla sú okrem dvojky nepárne čísla. Ak z nepárnych čísel možných prvočíselných dvojíc oddelíme spomínané zložené čísla, mali by nám ostať iba prvočísla.

Ak si tab. 2 násobenia dvoch prvočísel rozbalíme do tab. 1 všetkých prirodzených čísel a do stĺpca s určitým poradovým číslom prirodzeného čísla zapíšeme to isté číslo, ktoré je v rade daného prvočísla zapísané, vytvoríme tabuľku so správnym pohľadom na rozloženie prvočísel v rade prirodzených čísel. Zložené čísla priradenej hodnoty vypočítame násobením dvoch tučne napísaných čísel a dvoch ne tučne napísaných čísel.

Ukážka pre stĺpec čísla 24:

$11 \cdot 13 = 24 \cdot 6 - 1 = 143, \quad 5 \cdot 29 = 24 \cdot 6 + 1 = 145.$

Literatura

[1] Sedláček, J.: *Co víme o přirozených číslech.* Mladá Fronta, Praha, 1961.

FOTOGALERIE


MATERIALS FOR
TEACHING TOGETHER


Alena Vávrová
S námi můžete počítat ...
Pět let života s Abaku
123
24648816729817
MATERIALS FOR
TEACHING TOGETHER
ROZHLEDY


T4 TVORBA VLASTNÍHO PLÁNU
Pro inspiraci žádají předchozí studované plánky
Objevují:
když začnu fasádou, můžu zvětšovat dům dozadu (hloubka);
když začnu půdorysem, tak musím stavět patra (výška) a dělat schody
Řeší nejen bezpečnost, provoz, ekonomiku, ale i estetiku
Diskutují, vysvětlují, prezentují, argumentují
MATERIALS FOR TEACHING TOGETHER

SEZNAM ÚČASTNÍKŮ

1. *Bartoš Jan* e-mail: janbar77@seznam.cz
   PHG, Nad Vodovodem 81, Praha 10
2. *Flejberk Jaroslav* e-mail: jflejberk@seznam.cz
   Hry a hlavolamy.cz, Praha
3. *Kaslová Michaela* e-mail: michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
   PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1
4. *Kolár Pavel* e-mail: pavel.kolar@skolavdf.cz
   VOŠ, SPŠaSOŠSaCR, Bratislavská 2166, Varnsdorf
5. *Kocanda Ladislav* e-mail: ladislavkocanda69@gmail.com
   Na Pískách 69/II, Veselí nad Lužnicí
6. *Kopfová Jana* e-mail: jana.kopfova@math.slu.cz
   MÚ SU, Na Rybníčku 1, Opava
7. *Kovářová Eva* e-mail: kovarova@stredoskolskeucebnice.cz
   Bieblova 133, Hradec Králové
8. *Kuřina František* e-mail: kurinovi@gmail.com
   UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
9. *Malý Martin* e-mail: martin.maly@matematik-amater.cz
   Brno
10. *Musílek Michal* e-mail: michal.musilek@uhk.cz
    PřF UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové
11. *Müller Evžen* e-mail: muller@gozhorice.cz
    G, SOŠ, SOU A VOŠ, Riegrova 1403, Hořice
12. *Návarová Daniela* e-mail: navarova@zskodanska.cz
    ZŠ, Kodaňská 16, Praha 10
13. *Novák Miroslav* e-mail: novak@gjkt.cz
    GJKT, Tylovo nábř. 682, Hradec Králové
14. *Padalík Vladislav* e-mail: vladislav.padalik@post.cz
15. *Řepík Michal* e-mail: repik.michal@gmail.com
    PSHŠ, Svídnická 506, Praha 8
16. *Skořepová Pavla* e-mail: skorepova@gozhorice.cz
    G, SOŠ, SOU A VOŠ, Riegrova 1403, Hořice

17. *Souchová Marie* e-mail: marie.souchova@gmail.com
SSPŠ, Preslova 25, Praha 5

18. *Stránský Jakub* e-mail: jakub.stransky@techambition.com
Techambition Ltd, Pražského 23, Praha 5

19. *Špáta Miloš* e-mail: milos.spata@seznam.cz
Truhlářova 23, Ústí n. L.

20. *Tláskal Jakub* e-mail: jakub.tlaskal@seznam.cz
SPŠ elit, Čs. odboje 670, Dobruška

21. *Tláskalová Ivana* e-mail: tlaskalova@zsjirasek.cz
ZŠ, Jiráskovo náměstí 1166, Hradec Králové

22. *Vaněk Vladimír* e-mail: vladimir.vanek@upol.cz
KAG PřF UP, 17. listopadu 12, Olomouc

23. *Vávrová Alena* e-mail: drakopes@volny.cz
ZŠ, Kodaňská 16, Praha 10

24. *Vojkůvková Iva* e-mail: iva.vojkuvkova@uhk.cz
FIM UHK, Rokitanského 62, Hradec Králové

25. *Zhouf Jaroslav* e-mail: zhouf@seznam.cz
FIT ČVUT, Thákurova 9, Praha 6

26. *Židek Miroslav* e-mail: miroslav.zidek@gmail.com
Nagal, Rybničná 40, Bratislava

Název: Ani jeden matematický talent nazmar 2017. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba systémem LaTeX: Miloslav Závodný
Vydalo Nakladatelství Gaudeamus jako svou 1646. publikaci.
Náklad: 150 kusů
Rok vydání: 2018

Text neprošel jazykovou úpravou.

Na vydání sborníku se finančně podílela Jednota českých matematiků a fyziků, pobočný spolek Hradec Králové.

9 788074 357107