Jednota českých matematiků a fyziků
KMDM Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze
Střední zdravotnická škola Hradec Králové

Ani jeden matematický talent nazmar

Sborník příspěvků 2. ročníku konference
učitelů matematiky a přírodních oborů
na základních, středních a vysokých školách

Hradec Králové
2005

Organizátoři:

Matematická pedagogická sekce Jednoty českých matematiků a fyziků
Střední zdravotnická škola Hradec Králové

Programový výbor:

RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha
RNDr. Vladimír Burjan, Exam testing, Bratislava, Slovensko
Dr. Robert Geretschleager, Gymnasium, Graz, Rakousko
prof. RNDr. František Kuřina, CSc., PF UHK, Hradeck Králové
doc. RNDr. Josef Molnár, CSc., PřF UP, Olomouc

Organizační výbor:

Mgr. Lenka Takáčová, SOU obchodní, Hradec Králové
Mgr. Michal Musílek, Střední zdravotnická škola, Hradec Králové

Editor:

RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D., PedF UK, Praha

Recenzent:

doc. RNDr. Tomáš Zdráhal, CSc., PF UJEP, Ústí nad Labem

Obsah

Úvodem

Po změně politického režimu v roce 1989 se zájem žáků základních škol o studium ve speciálních třídách středních škol se zaměřením na matematiku zmenšil. Stejně tak se zmenšil zájem studentů středních škol o studium na vysokých školách se specializací matematika. Zmenšil se i zájem žáků všech stupňů škol o matematické soutěže, což se nejvíce projevilo v matematické olympiádě.

V současné době se situace opět poněkud zlepšuje ve prospěch matematiky, některé klasické mechanizmy vyhledávání a výchovy matematicky talentovaných jedinců se však utlumily. Je proto třeba hledat cesty, jak navázat na dřívější úspěšné metody práce s talentovanými žáky v matematice.

Jednou z možností, jak tento cíl vyplnit, je pořádání konferencí, kde se budou učitelé současní i budoucí (tj. studenti fakult připravujících učitele) vzájemně informovat, jaké metody a prostředky používají při práci s talentovanými žáky. Za tím účelem vznikla i konference Ani jeden matematický talent nazmar.

Tato konference je určena pro učitele všeh typů a stupňů škol, kteří vyhledávají a vychovávají talentované žáky v matematice. Jelikož mají stejné problémy i přírodní vědy, kde se matematika užívá, je konference určena i pro učitele vychovávající talentované žáky ve fyzice, chemii, biologii atd.

Letošní ročník konference je v pořadí již druhý. Ukázalo se totiž, že první konference v roce 2003 i její důsledky v následujícím roce 2004 byly pro práci s talentovanými žáky v matematice a přírodních vědách užitečné a že by bylo vhodné v této aktivitě pokračovat.

Při současné zesilující integraci evropských zemí se ukazuje jako velice vhodné získat pro tuto konferenci účastníky ze zahraničí. Letos se již podařilo získat zahraniční osobnosti do programového výboru.

Doufejme, že letošní druhý ročník konference Ani jeden matematický talent nazmar opět prohloubil zájem všech účastníků o rozvíjení práce s talentovanými žáky v matematice a přírodovědných oborech. A doufejme též, že všichni tito učitelé předají své poznatky kolegům a všichni společně objevíme další talentované žáky. O tom se budeme moci přesvědčit při třetím ročníku konference v roce 2007.

Jaroslav Zhouf

Program konference

Čtvrtek 14. 4. 2005

14.00–14.30	Zahájení
14.30–15.30	Šimša J.: Úlohy pro MO – objevné nápady, nebo náročné manipulace?
16.00–16.30	Přestávka
16.30–17.30	Burjan V.: Zamyslenie nad niektorými didaktickými a psychologickými aspektmi práce s matematickými talentami
17.30–18.00	Švrček J.: Matematické časopisy v práci s talenty
18.00–18.45	Večeře

Pátek 15. 4. 2005

7.15–8.15	Snídaně
8.15–12.00	Otevřené hodiny na školách
12.00–13.00	Oběd
14.00–15.00	Příspěvky a dílny účastníků
15.00–15.15	Přestávka
15.15–16.15	Příspěvky a dílny účastníků
16.15–16.30	Přestávka
16.30–17.30	Příspěvky a dílny účastníků
17.45–18.30	Večeře
20.00	Společenský večer

Sobota 16. 4. 2005

7.30–8.30	Snídaně
8.30–9.30	Kuřina F.: Úlohy, talent a matematika
9.30–9.45	Přestávka
9.45–10.45	Volf I.: Matematika – fyzika – sport
10.45–11.00	Zakončení
11.00–11.45	Oběd

Plenární přednášky

Zamyslenie nad niektorými didaktickými a psychologickými aspektmi práce s matematickými talentami

Vladimír Burjan[1]

Abstrakt: Úvod článku tvorí stručný prehľad systému starostlivosti o matematicky nadaných žiakov na Slovensku a porovnanie súčasnej situácie s obdobím 70-tych a 80-tych rokov minulého storočia. V ďalšom sa článok zaoberá niektorými základnými otázkami: Kto je matematický talent? Ako ho identifikovať? Ako rozvíjať jeho nadanie? Majú byť mimoriadne talentovaní žiaci vyčleňovaní do osobitného prúdu vzdelávania? Ak áno, v čom sa má ich vzdelávanie líšiť od vzdelávania ostatných žiakov? Autor kritizuje tradičné prístupy k úprave kurikula v matematických triedach (akcelerácia, rozšírenie učiva) a navrhuje tretiu cestu: ísť vo vzdelávaní „hlbšie". V závere článku sú diskutované riziká a problematické aspekty prehnanej starostlivosti o matematické talenty a niektoré psychologické charakteristiky takýchto žiakov.

Abstract: The article is introduced by a short survey of different possibilites which exist for work with talented students in Slovakia. The present situation is compared to the 70th and 80th of the last century. Next, some questions are addressed: Who is talented in mathematics? How to identify him/her? How to develop his/her talent? Should talented students be educated separately? If so, what should be different in their education from the education of other studetns? The author criticizes traditional approaches to the changes of curriculum in mathematical classes (speed, width of subject matter) and suggests a third way: to educate more deeply. In conclusions, some dangers and problem aspects of exaggerated care for mathematical talents and some psychological apsects of such students are discussed.

Úvod

V čase konania konferencie uplynulo presne 30 rokov od chvíle, kedy do môjho života vstúpila problematika matematických talentov. Koncom marca 1974 som úspešne

[1] *EXAM testing, Bratislava, burjan@exam.sk*

absolvoval prijímačky do matematickej triedy na Gymnáziu A. Markuša v Bratislave (známom pod skratkou GAMČA). Na tejto škole som potom štyri roky študoval, riešil Matematickú olympiádu a viaceré korešpondenčné semináre. Nasledovalo štúdium na MFF UK v Bratislave, popri ktorom som sa intenzívne venoval vedeniu matematických krúžkov pre žiakov ZŠ a organizovaniu táborov mladých matematikov (pod vedením Dr. Petra Cvika a doc. Milana Hejného). Pomáhal som tiež s organizáciou korešpondenčných seminárov pre stredoškolákov. V roku 1980 sme s priateľmi založili PIKOMAT – prvý korešpondenčný seminár pre žiakov ZŠ, ktorý funguje podnes a ktorý sa neskôr úspešne rozšíril aj do Čiech. Po ukončení štúdia som sa vrátil späť na GAMČU ako učiteľ matematiky v talentových triedach. Problematike práce s talentami som sa neskôr venoval aj teoreticky. Po revolúcii som o nej prednášal vo Veľkej Británii, Austrálii, Kanade, Nemecku, Rakúsku, Maďarsku a mnohokrát v Čechách. A aby sa kruh uzatvoril, teraz na GAMČI v matematických triedach študujú moje dve dcéry. Hoci dnes už sám neučím, s matematickými talentami som stále v kontakte vďaka dvom veľkým súťažiam, ktoré organizuje naša firma (EXAM testing): korešpondenčnému semináru MAKS (cca 20 000 riešiteľov) a súťaži Matematický klokan (cca 90 000 súťažiacich). Okrem toho niektorým stredným školám dodáva naša firma testy na talentové skúšky do tried s rozšíreným vyučovaním matematiky. Za uplynulých 30 rokov som mal možnosť spoznať problematiku matematických talentov zo všetkých strán: ako žiak, ako učiteľ v matematických triedach, ako organizátor rôznych záujmových aktivít pre nadaných žiakov, ako dlhoročný funkcionár MO a napokon aj ako rodič žiačok študujúcich v matematických triedach. Vo svojom príspevku som sa pokúsil zhrnúť svoje skúsenosti.

Súčasné formy práce s talentami v SR – stručný prehľad

V súčasnej dobe sa v Slovenskej republike užívajú hlavne tieto formy práce s talentovanými žiakmi v matematike:

- špeciálne triedy (školy) so zameraním na matematiku, resp. na prírodovedné predmety,
- súťaže, ako Matematická olympiáda, Pytagoriáda, SOČ, rôzne korešpondenčné semináre pre žiakov ZŠ a SŠ, MAKS, Matematický klokan,
- sústredenia ku korešpondenčným seminárom,
- matematické tábory (viacmenej sporadicky),
- matematické záujmové krúžky (viacmenej sporadicky),
- knihy (nevychádzajú takmer žiadne),
- časopisy (nevychádzajú takmer žiadne).

Väčšina uvedených aktivít funguje iba vďaka nadšeniu, obetavosti a veľkému nasadeniu zanietených organizátorov. Dlhodobo chýba systémový prístup štátu a primerané finančné zabezpečenie.

Porovnanie súčasnej situácie s minulosťou

Podotýkam, že ide o môj subjektívny pohľad a že porovnávam súčasnú situáciu najmä s rokmi 1975–1989, kedy som sa pohyboval vo „svete matematických talentov“ najintenzívnejšie.

Negatíva dnešného stavu oproti minulosti:

- žiaci majú podstatne viac možností realizovať rôzne svoje záujmy a tráviť voľný čas – matematika má teda podstatne silnejšiu konkurenciu,
- dobrí učitelia majú iné (lukratívnejšie) možnosti uplatnenia a odchádzajú zo škôl,
- rodičia vidia iné, atraktívnejšie kariéry pre svoje deti než stať sa matematikom („v kurze“ sú také profesie ako ekonóm, právnik, lekár, manažér, programátor, . . .),
- kariéra vedca je dnes podstatne menej atraktívna ako kedysi,
- mnohí talentovaní žiaci odchádzajú do zahraničia, čím sa narušuje „kolobeh“ ľudí a kontinuita záujmových aktivít (kedysi podstatnú časť organizátorov tvorili bývalí najúspešnejší účastníci aktivít),
- vekový posun v organizácii korešpondenčných seminároch – mám pocit, že v niektorých prípadoch ich dnes organizujú „deti pre deti“, vedúcim chýba potrebný nadhľad (odborný aj ľudský), účastníkom chýbajú kvalitné dospelé vzory,
- oblasť starostlivosti o talenty je málo lukratívna pre sponzorov (v zahraničí sú častými a štedrými sponzormi aktivít pre matematické talenty napríklad výrobcovia kalkulačiek, počítačov, učebných pomôcok, vydavateľstvá školskej a vzdelávacej literatúry, ale napríklad aj poisťovne či telekomunikačné firmy, teda tí, ktorí chcú reklamou zasiahnuť široké spektrum populácie, alebo tí, ktorí hľadajú „špičkových“ zamestnancov),
- podstatne horší prístup k literatúre – zbierkam úloh a knihám a časopisom z oblasti populárnej matematiky (na druhej strane je tu zasa Internet ako alternatívny zdroj informácií), . . .

Pozitíva dnešného stavu oproti minulosti:

- zriadenie triedy so zameraním na matematiku je podstatne jednoduchšie ako kedysi (najmä súkromné školy majú pomerne voľnú ruku pri utváraní svojej profilácie),
- prístup k počítačom a k Internetu (bohatý zdroj informácií, úloh a vzdelávacích materiálov),
- podstatne lepšie možnosti komunikácie medzi žiakmi, školami, organizátormi rôznych aktivít (mobilné telefóny, email, ICQ, . . .), . . .

Základné otázky starostlivosti o matematické talenty

Pri práci s matematickými talentmi sa objevujú mnohé otázky, ako napríklad:

- Kto je matematický talent?
- Kto má mať primárnu „zodpovednosť“ za rozvoj talentov? Škola? Rodina? Mimoškolské záujmové organizácie?
- Je vhodné separovať matematické talenty do špeciálnych tried? (V niektorých krajinách prevláda názor, že áno, inde si naopak odborníci myslia, že nie.)
  - Ak odpovieme ÁNO, vynárajú sa ďalšie závažné otázky:

    Kedy (v ktorom veku) ich separovať?

    Ako ich rozpoznať? Ako diagnostikovať matematický talent?

    Čo s nimi robiť v špeciálnych triedach? Čím sa má vyučovanie v špeciálnych triedach líšiť?
  - Ak odpovieme NIE, vzniká problém, ako pracovať s talentovanými žiakmi v bežných triedach.

Kto je matematický talent?

Toto je nepochybne zložitá teoretická otázka, ku ktorej by vedeli mnohé povedať psychológovia, pedagógovia i matematici – vedci. Mne sa v praxi najlepšie osvedčil model, ktorý talentovaných žiakov charakterizuje v troch základných rovinách:

- všeobecné intelektuálne predpoklady,
- motivácia,
- aktuálna vedomostná výbava.

Uvedené poradie nie je náhodné – odráža mieru dôležitosti a súvisí so „stabilitou“ uvedených aspektov, resp. s možnosťou ich ovplyvňovania u žiakov: najťažšie sa dá dosiahnuť zmena vo všeobecných predpokladoch, najľahšie v aktuálnej vedomostnej výbave. Pod všeobecnými intelektuálnymi predpokladmi rozumieme také kognitívne schopnosti, ako logické myslenie, abstraktné myslenie, priestorovú predstavivosť, schopnosť analyzovať, zovšeobecňovať, vidieť analógie, argumentovať atď. Častým nedostatkom talentových skúšok organizovaných s cieľom identifikovať matematické talenty je skutočnosť, že sa zameriavajú najmä na tretí, podľa môjho názoru najmenej podstatný aspekt, ktorým je aktuálna vedomostná výbava. Pri tomto prístupe by však možno geniálny indický matematik Srinivasa Ramanujan nemal šancu: keďže nemal možnosť prístupu k literatúre, v čase jeho „objavenia“ G. Hardym bola jeho matematická vedomostná výbava veľmi slabá. O to silnejšia bola jeho intuícia a jeho všeobecné intelektuálne predpoklady pre tvorivú prácu v matematike.

Čo robiť s talentami v špeciálnych triedach, ako pre nich upraviť kurikulum?

Vyčleňovanie matematických talentov do špeciálnych tried umožňuje upraviť:

- vonkajšie podmienky ich vzdelávania (napr. menej žiakov v triede, viac hodín matematiky, osobitne vybraný a vyškolený kvalitný učiteľ, . . .),
- formy a metódy práce,
- obsah ich matematického vzdelávania (kurikulum).

V praxi (aj zahraničnej) sa najčastejšie uplatňujú dva prístupy k obsahovej úprave vzdelávania talentovaných žiakov. Prvý by bolo možné nazvať akceleráciou: rovnaké učivo ako v bežných triedach sa s talentami preberá za kratší čas. Hlavným cieľom je poskytnúť rovnaké vedomosti za kratší čas (napr. kvôli skráteniu doby štúdia). Druhý prístup by bolo možné nazvať extenziou: za rovnaký čas ako v bežných triedach sa s talentami preberá viac učiva. Aj v tomto prípade dochádza k akcelerácii (rýchlejšiemu postupu preberania učiva), nie však s cieľom skrátiť štúdium, ale prebrať so žiakmi viac učiva (viac tematických celkov). Priam ukážkovým príkladom takéhoto prístupu (resp. kombinácie oboch) sú na Slovensku špeciálne triedy a školy pre mimoriadne nadané deti vznikajúce a pracujúce pod vedením psychologičky Dr. Jolany Laznibatovej. Moja 30-ročná skúsenosť s prácou s nadanými žiakmi mi hovorí, že *oba uvedené prístupy sú nesprávne a kontraproduktívne z hľadiska dlhodobého rozvoja matematického talentu. Moja odpoveď na otázku, ako vyučovať matematické talenty znie: Ani rýchlejšie, ani viac, ale hlbšie!*

Čo znamená preberať učivo „hlbšie“?

Preberať učivo „hlbšie“ znamená pracovať so žiakmi tak, aby každodennou súčasťou vyučovania matematiky boli:

- investigácia: žiaci sami objavujú,
- argumentácia: žiaci sa pýtajú PREČO a hľadajú odpovede,
- explorácia: zovšeobecnenia, modifikácie, analógie, súvislosti,
- aplikácia: žiaci aplikujú poznatky v praxi.

Cieľom vyučovania matematiky má byť dokonalá interiorizácia poznatkov (pojmov, faktov aj postupov), minimalizácia či úplné vylúčenie formálneho poznania, rozvoj kreativity, rozvoj kritického myslenia, nácvik vedeckých metód práce.

Zopár konkrétnych príkladov na „hlbšie“ vyučovanie matematiky

V učive matematiky základnej aj strednej školy je množstvo faktov, ktoré sa v bežných triedach žiaci dozvedia od učiteľa viacmenej „hotové“ a jediné, čo s nimi môžu urobiť, je „vziať ich na vedomie“. Netušia nič o tom, ako sa na to prišlo a prečo je to tak. Takýchto situácií by sme sa mali pri práci s talentami vyvarovať. Je dôležité, aby na dôležité poznatky prichádzali sami a aby ich vedeli primerane (na svojej úrovni) zdôvodniť. Takýto postup možno uplatniť napríklad pri preberaní nasledujúcich „faktov“:

- Súčet uhlov v trojuholníku je 180 stupňov.
- Prvočísel je nekonečne veľa.
- Niektoré reálne čísla nie sú racionálne.
- Nulou sa nedá deliť.
- Číslo 1 nie je ani prvočíslo ani zložené číslo.
- Číslo 0 na 0 nie je definované.

Dôležitú súčasť učiva matematiky tvoria rôzne algoritmy, návody postupy a vzorce (vzorec je tiež návodom, ako niečo vypočítať). Je vhodné, aby v čo najväčšom počte prípadov talentovaní žiaci chápali podstatu algoritmu, rozumeli, prečo je postup taký a taký, a chápali, prečo pri danom postupe algoritmus či vzorec „funguje“:

- Prečo sa delí tak a tak?
- Prečo vzorec pre obsah obdĺžnika platí aj pre neceločíselné (či dokonca iracionálne) dĺžky strán?
- Prečo sa obvod (obsah) kruhu počíta tak a tak?

Matematická terminológia obsahuje množstvo pojmov, slovných spojení a zvratov, ktoré nie sú vždy presne definované. Diskusia o rôznych možných významoch takýchto „nejednoznačných“ termínov kultivuje myslenie žiakov a prehlbuje ich porozumenie týmto pojmom. S talentovanými žiakmi môžeme na hodine diskutovať napríklad:

- Čo je to výška trojuholníka (úsečka, priamka, číslo – veľkosť úsečky)?
- Čo je to zlomok? Zápis? Mnohosť? Je $\frac{1}{4}$ zlomok? Sú $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$ dva rôzne zlomky?
- Čo je to rovnica? Je $0 \cdot x + 7 = 2$ rovnica?
- Predstavuje číslo 0,01 jedno percento?
- Čo to znamená „zjednodušiť výraz“?

Čo robiť s matematickými talentami v bežných triedach?

Pokiaľ v rámci vzdelávacieho systému neexistujú špeciálne triedy pre matematické talenty, je potrebné zodpovedať otázku, ako má v praxi postupovať učiteľ, ktorý v bežnej triede objaví nadaného žiaka. (Tento problém sa do istej miery týka aj systémov so špeciálnymi triedami, nakoľko aj tu sa môžu vyskytovať nadaní žiaci, ktorí z rôznych dôvodov neprestúpili do špeciálnej triedy.) Všeobecne možno povedať, že nadaný žiak by mal mať stále nejakú „intelektuálnu potravu“, mal by stále mať nad čím premýšľať, bádať, objavovať. Učiteľ by ho preto mal priebežne zásobovať námetmi na premýšľanie (vhodnými úlohami, problémami, témami na vlastné bádanie). Učiteľ v bežnej triede zväčša nemá dostatok času a priestoru, aby sa talentovanému žiakovi mohol dostatočne venovať priamo na hodinách, preto by mu mal napr. požičiavať knihy, časopisy, dávať mu odkazy na zaujímavé internetové stránky a pod. Veľmi dôležité je informovať žiaka o matematických súťažiach, do ktorých by sa mohol zapojiť. Priamo na hodinách možno uplatniť nadanie žiaka tým, že ho necháme pripraviť referát, vysvetliť niečo spolužiakom a pod.

Nebezpečenstvá prehnanej starostlivosti o talenty

Niektorí pedagógovia, psychológovia i rodičia zastávajú názor, že mladé matematické talenty treba identifikovať čo najskôr a oddeliť ich do osobitného prúdu vzdelávania (t.j. do špeciálnych tried či škôl) a doslova ich „zavaliť" matematikou (čím ťažšou, tým lepšie). Moje dlhoročné skúsenosti ukazujú, že takýto postup – hoci môže byť z krátkodobého hľadiska úspešný – je z dlhodobého hľadiska často kontraproduktívny. Hrozia totiž viaceré nebezpečenstvá, napríklad:

- predčasná strata záujmu o matematiku,
- odradenie niektorých priemerných i dobrých matematikov tým, že špičkoví ich demotivujú (problém matematických tried),
- izolácia od dôležitých životných skúseností v societnej oblasti – žiaci z „talentových" tried a škôl vkročia do bežného života, a nie vždy sú schopní prispôsobiť sa väčšinovej „netalentovej" spoločnosti,
- pestovanie pocitu výnimočnosti (takýto pocit je dobrý, pokiaľ je hnacím motorom, je však zlý, ak vedie k povýšenosti a komunikačným problémom),
- prípadné výrazne nerovnomerné zastúpenie chlapcov a dievčat v špeciálnych triedach môže viesť k istému ochudobneniu v societnej oblasti (komunikácia s iným pohlavím).

Bol to, myslím, Euler, ktorý sa za mladi matematike venoval iba minimálne a keď sa ho niekto spýtal, prečo sa jej nevenuje viac, odpovedal vraj: „Načo? Veď sa jej budem venovať celý život."

Výhody a „handicapy" matematických talentov v bežnom živote

Mal som možnosť dobre poznať mnohé matematické talenty – svojich spolužiakov, žiakov, deti v matematických krúžkoch, táboroch, na sústredeniach korešpondenčných seminároch. Sledoval som ich správanie nielen pri matematických vzdelávacích programoch, ale aj pri rôznych hrách, športových či rekreačných aktivitách a v rozmanitých komunikačných situáciách. Postupne som si uvedomoval, že napriek veľkým individuálnym rozdielom majú aj isté spoločné psychologické črty (súvisiace s ich matematickým nadaním), ktoré sa čiastočne premietajú do ich správania v rôznych životných situáciách. Niektoré tieto charakteristiky sú pozitívne, iné by bolo možné hodnotiť skôr ako negatívne. Na záver uvádzam ich stručný prehľad.

Pozitívne rysy:

- disciplína a systematičnosť myslenia,
- kritické myslenie,
- schopnosť analýzy problému,
- schopnosť rozboru možných prípadov a vyčerpania možností (kombinačné myslenie),
- schopnosť dedukcie,
- schopnosť myšlienkového experimentu, hypotetického myslenia,
- schopnosť aj potreba vecnej argumentácie,. . .

Handicapy:

- potreba zvládať životné situácie intelektuálne, racionálne, potreba mať v každej životnej situácii dostatok informácií a chápať kauzálne súvislosti; keď to nejde dosiahnuť, jedinec môže byť iritovaný, neistý, zmätený,
- očakávanie logického myslenia a konania zo strany iných (čo v praxi často nenastáva),
- implicitný predpoklad, že život je – rovnako ako matematika – dvojhodnotový, že niečo buď je pravda alebo nie je pravda, že niečo je správne alebo nesprávne, že každý je dobrý alebo zlý; iba postupne (a niekedy ťažko) sa dopracovávajú k poznaniu, že život – na rozdiel od matematiky – je fuzzy, subjektívny, mnohovrstvový, komplexný, často rozporuplný,
- implicitný predpoklad, že tak ako matematika je objektívna a v istom zmysle nemenná, že rovnako objektívny a nemenný je život - v živote však občas nečakane dochádza k vážnym zmenám doslova zo dňa na deň,
- apriórna skepsa k tvrdeniam nepodloženým primeranou argumentáciou (toto je ambivalentný rys, na jednej strane je to jeden z pilierov kritického myslenia, na druhej strane môže niekedy pôsobiť ochudobňujúco, nakoľko psychika je uzavretá voči podnetom neracionálnej povahy),
- dešpekt k ľuďom „bez prenikavého intelektu“ (ktorí môžu byť úžasnými osobnosťami z iných hľadísk), . . .

Záver

Možno sa účastníkom konferencie bude zdať, že v mojom zamyslení je príliš málo matematiky. Je to však zámer. Na všetkých konferenciách o matematických talentoch (a absolvoval som ich veru dosť) sa venovala väčšina priestoru konkrétnym matematickým témam, zaujímavým úlohám či námetom na matematické aktivity vhodné pre nadané deti. Iba zriedkavo sa hovorilo o „nematematických“ aspektoch matematického nadania. Svojim príspevkom chcem tento deficit aspoň čiastočne napraviť.

Literatúra

[1] Dočkal, V., Nadanie. In Ďurič, L., Bratská, M., a kol (eds.), *Pedagogická psychológia. Terminologický a výkladový slovník,* SPN, Bratislava, 1999.

[2] Ďurič, L., Nadanie a talent. In Ďurič, L., Bratská, M., a kol (eds.), *Pedagogická psychológia. Terminologický a výkladový slovník,* SPN, Bratislava, 1999.

[3] Koščč, L., *Psychológia matematických schopností.* SPN, Bratislava, 1972.

[4] Laznibatová, J., *Nadané dieťa.* IRIS, Bratislava, 2001.

[5] Mareš, J., Žáci nadaní a talentovaní na matematiku. In *Ani jeden matematický talent nazmar,* JČMF, Hradec Králové, 2003.

[6] Zhouf, J., *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice.* Disertační práce, MFF UK, Praha, 2001.

Úlohy, talent a matematika

František Kuřina[1]

Abstrakt: Cílem příspěvku je podnítit zamyšlení nad otázkou přístupu k vyučování matematice, který by byl příznivý nejen rozpoznávání, ale i rozvíjení talentů. Titul vystoupení odráží mé přesvědčení, že nejen v detekci a kultivaci matematických talentů, ale i při jejich případném zplanění hraje základní roli práce s úlohami.

Abstract: The goal of the contribution is to incite a discussion on the approaches to the teaching of mathematics which would be favourable not only to the identification but to the development of talent, too. The title reflects my conviction that not only in the detection and cultivation of mathematical talents, but also in their possible neglect the main role is played by work with problems.

Pohled do historie

V roce 1951, což byl i rok, kdy jsem začal studovat na univerzitě, byla v tehdejším Československu založena zásluhou akademika *Eduarda Čecha* (1893 – 1960) matematická olympiáda. Vzpomínám, že jsem se jako student zúčastnil slavnostního zahájení celostátního kola soutěže a vybavuje se mi historka, o níž nemohu s jistotou říci, zda je pravdivá. Jeden z akademiků, kteří seděli za předsednickým stolem, se po skončení

[1] *Pedagogická fakulta, Univerzita Hradec Králové, frantisek.kurina@uhk.cz*

ceremonie zamkl ve své pracovně a po pěti hodinách vítězně vyšel a hlásil, že všechny úlohy vyřešil. Jeho asistent mu ovšem se stínem sarkasmu oznámil, že studenti měli na vyřešení úloh pouze čtyři hodiny . . .

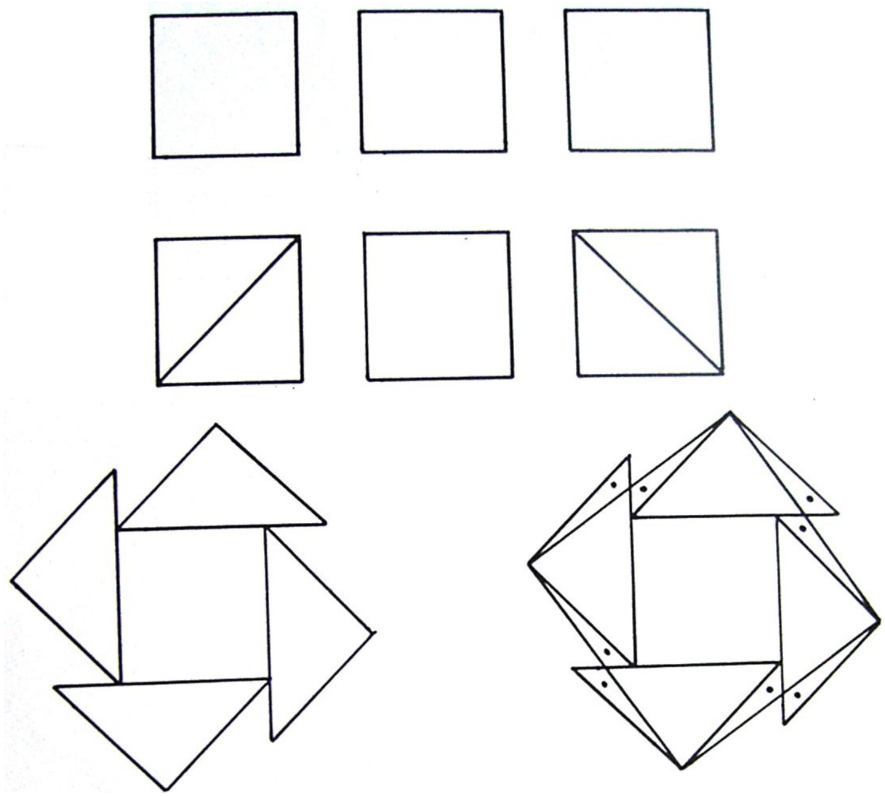
Tato vzpomínka evokuje další, asi o dvacet let mladší příběh. Stařičkému zasloužilému sovětskému akademiku položil někdo otázku, za co vděčí, že se stal matematikem. A on s plnou vážností odpověděl, že snad tomu, že v jeho mládí nebyla matematická olympiáda. Matematiku miluje nade všechno, ale není soutěživý typ. Měl jsem dojem, že se tento akademik jmenoval Aleksandrov, a když jsem si po letech chtěl ujasnit, o koho vlastně šlo, sáhl jsem po encyklopedii [4], která ovšem uvádí šest významných matematiků tohoto jména. Dva z nich bych chtěl připomenout.

Ivan Ivanovič Aleksandrov (1856 – 1919) byl učitelem matematiky na gymnáziu v Tambově a vydal řadu didaktických prací. Jeho *Metody řešení konstruktivních úloh* [1], které se patrně zásluhou nějakého českého legionáře – matematika dostaly až ke mně, představují neobyčejně kvalitní sbírku úloh, z níž čerpalo mnoho autorů. Tato publikace byla mnohokrát vydávána a byla přeložena do němčiny a francouzštiny. Je dokladem toho, jaká péče se věnovala v předrevolučním Rusku řešení úloh ve středoškolské matematice.

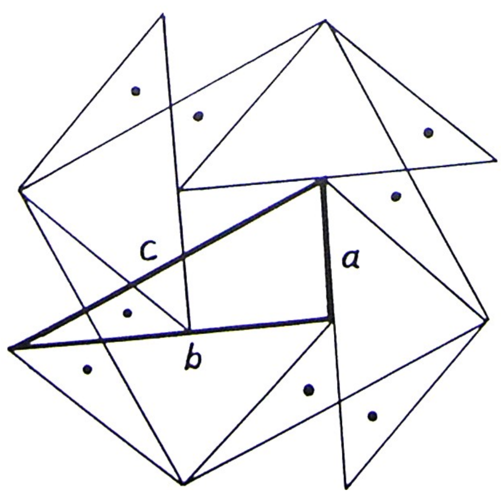
Pavel Sergejevič Aleksandrov (1896) byl významný topolog, jehož kniha *Úvod do obecné teorie množin a funkcí* [2] byla v r. 1954 vydána česky. Zmiňuji se zde o této knize proto, že ji považuji za publikaci, kterou může podle mého názoru s úspěchem číst nadaný středoškolský student jako první matematickou knihu. Tato publikace není ani v nejmenším zatížena matematickým formalismem a tématiku dovádí až k základům topologie. Připomenu ještě, že výborný převod do ruštiny pořídili Ilja Černý, Ladislav Koubek a Miloslav Zelenka, tehdy ještě všichni asistenti Matematicko-fyzikální fakulty v Praze.

Stejně neformální styl matematické dikce měl další z akademiků, které jsem v té době poznal: *Bohumil Bydžovský* (1880 – 1969). Matematická témata byla pro něho zajímavými příběhy, nikoliv formálními strukturami. Profesor Bydžovský oceňoval význam řešení problémů vlastním příkladem. Ve svých 74 letech o sobě prohlásil, že každý den musí vyřešit aspoň jednu matematickou úlohu.

Zajímavá tématika a podnětné úlohy jsou podle mého názoru dva základní směry, na nichž můžeme talenty nejen rozpoznat, ale i rozvíjet. V souladu se svým přesvědčením, že existují významné paralely mezi fylogenezí a ontogenezí matematiky, že tedy vývoj matematických idejí u studenta je do značné míry analogický vývoji těchto idejí v historii vědy, jsou didaktická poučení z historie nezastupitelnou metodou. Sám jsem mnohokrát zopakoval úlohu o „zdvojení“ čtverce a vždy se našel někdo, kdo postupoval jako Sokratův otrok: zdvojnásobil stranu čtverce. Z roku 900 je známý výsledek konstrukce čtverce, který má stejný obsah jako dané tři shodné čtverce. Ačkoliv jsem obr. 1, který pochází od *Abula Vefy* dobře znal, nevšiml jsem si jeho hlubšího významu. Na ten upozornil v r. 1999, tedy po 1000 letech, Poo-sung Park: v obrázku uviděl důkaz Pythagorovy věty (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

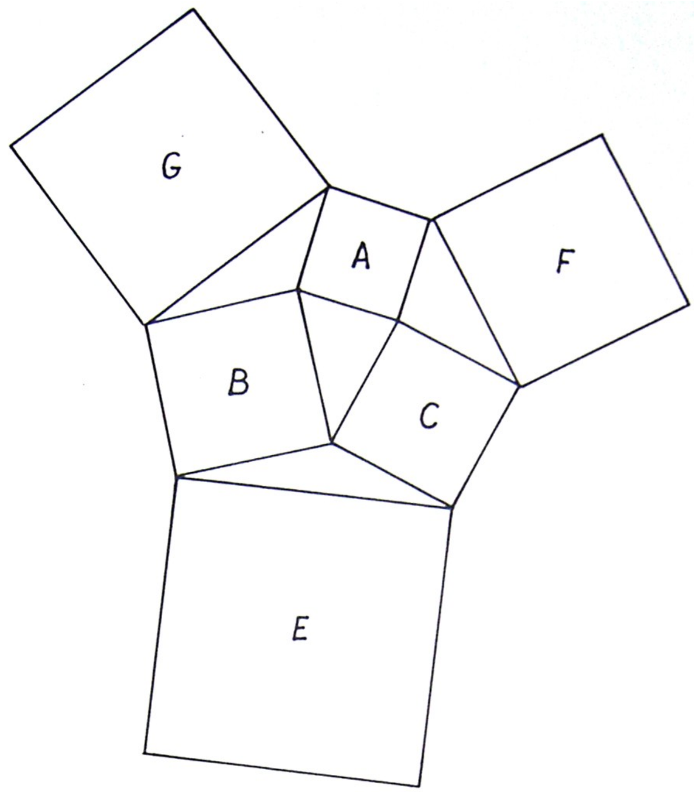
Učit „vidět“ souvislosti je možné na každé úrovni matematických poznatků, uvidět něco, co jsme předtím neviděli, může být zážitek, který ovlivní zájem o matematiku. Je-li navíc výsledek překvapivý a cesta k němu jednoduchá, je škoda se nepokusit o úspěch u studentů. Uvedu zde nyní pět úloh, s nimiž jsem udělal ve své pedagogické praxi dobré zkušenosti.

Úloha 1 . *Z nizozemské olympiády 1992 (viz [16])*

Na obr. 3 jsou sestrojeny čtverce s obsahy A, B, C a E, F, G „nad stranami“ trojúhelníků. Dokažte, že platí

$$E + F + G = 3(A + B + C).$$

Přirozená otázka „Jak spolu souvisejí délky stran nakreslených čtverců?“ vede k nápadu použít kosinovou větu a řešení je již jen otázkou výpočtu.



Obr. 3

Ukázat, že pro řešení úlohy je důležitý vhodný nápad a že matematický aparát pracuje „za nás“, jsou dobrá poučení z této úlohy.

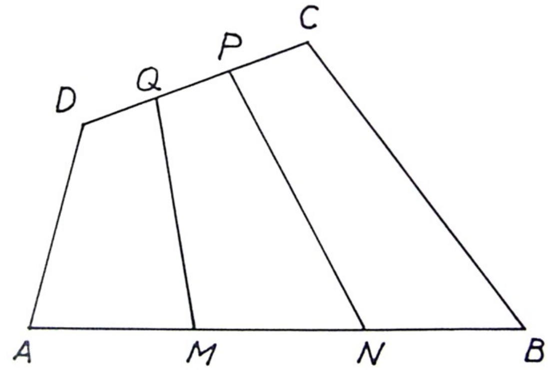
Překvapivý výsledek i jednoduché zajímavé řešení mají následující dvě úlohy.

Úloha 2. *Třetina obsahu*

Body M, N, P, Q dělí strany AB a CD čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě na třetiny (obr. 4). Jakou část obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ zaujímá čtyřúhelník $MNPQ$?

Řešení úlohy vyžaduje pouze „vhodně se podívat“ na situaci. Zájemci je mohou najít v knize [10].

Další úloha se vyskytuje v mnoha sbírkách. Uvádím ji zde proto, že se mi jeví jako podnětná z několika důvodů, zejména proto, že se k neočekávanému výsledku můžeme dostat různými cestami.

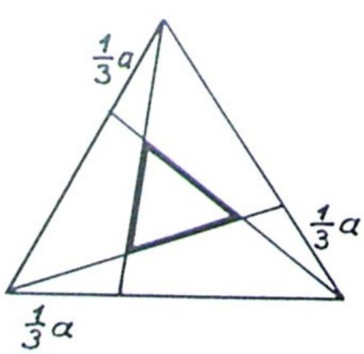


Obr. 4

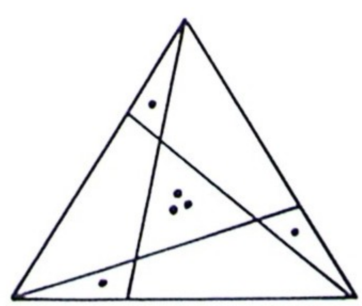
Úloha 3. *Třetiny vedou k sedmině*

Jakou částí obsahu rovnostranného trojúhelníku je silně narýsovaný trojúhelník na obr. 5a?

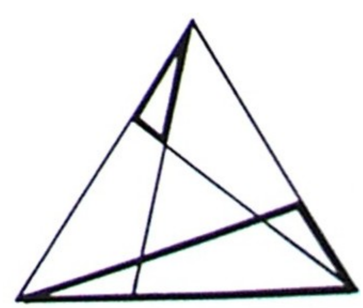
Představa barvení „třetinových“ trojúhelníků na obr. 5b vede k naznačeným výsledkům. Zároveň tak mají studenti možnost poznat větu o obsahu sjednocení překrývajících se útvarů. Na obr. 5c ukazuji řešení, které nedávno nalezla jedna má studentka. Silně vyrýsované trojúhelníky jsou podobné, pomocí kosinové věty můžeme najít poměr příslušné podobnosti ($\sqrt{7}$) a odtud pak výsledek.



Obr. 5a



Obr. 5b



Obr. 5c

V první československé matematické olympiádě byla zadána následující úloha, jejíž původ jsem vystopoval až k pozoruhodné knize [17], kterou napsal americký matematik maďarského původu *George Polya*. Úlohu uvádí i obnovená edice [22] moskevského nakladatelství Fizmatlit

Úloha 4. *Neshodné trojúhelníky*

Dva trojúhelníky se shodují v pěti základních prvcích (stranách a úhlech). Musí být shodné?

Úloha je podle mého názoru dobrou provokací pro bystré studenty. Snadno dojdou k závěru, že by takové trojúhelníky musely být podobné. Mohou se strany „prostřídat“ tak, aby se dále trojúhelníky shodovaly ve dvou stranách a nebyly shodné? Teoreticky lze na výsledek přijít odhadem, ve své praxi jsem se však s takovouto intuicí nesetkal (jde např. o trojúhelníky se stranami dlouhými 27, 36, 48 a 36, 48, 64 jednotek délky). Takovéto uhodnutí výsledku dává odpověď na naši otázku, matematika však obvykle vyžaduje určení všech trojúhelníků s požadovanými vlastnostmi. Porovnat uvedený odhad s Polyovým řešením v knize [17] a s řešením, které uvádí zpráva o naší matematické olympiádě [18], je velmi poučné.

Poslední příklad, který zde uvedu, je ilustrací rozličných přístupů a metod řešení úlohy.

Úloha 5. *Shodné úhly*

Dokažte: Dělí-li těžnice a výška trojúhelníku jeho vnitřní úhel na tři shodné části, je tento trojúhelník pravoúhlý.

O historii této úlohy a jejích řešeních se může zájemce dočíst v článku [11].

O nadání

Pojem nadání je asi stěží možné exaktně definovat. Lidová moudrost vymezuje nadání negativně: „Komu není shůry dáno, v apatyce nekoupí.“ Tento rys, genetický původ nadání, se ozývá v řadě jazyků. Osobně cítím jako synonyma tato slova češtiny, angličtiny, němčiny a ruštiny:

Č	A	N	R
Nadání	Gift	die Begabung	Дарование
Talent	Talent	das Talent	Талант
Vlohy		die Anlage	Способность
Schopnosti		die Fähigkeit	

Někteří autoři ovšem talent a nadání rozlišují. Např. *Jiří Mareš* v přednášce *Žáci nadaní a talentovaní na matematiku* zdůrazňuje, že z teoretického i praktického hlediska je užitečné „chápat talent jako realizaci nadání, projevení se, uplatnění původně skrytých možností (viz [14], s. 10)“. *Pavel Hartl* a *Helena Hartlová* vysvětlují ve slovníku [6]: „Nadání je soubor vloh jako předpoklad k úspěšnému rozvíjení schopností. Talent je projevené nadání.“

Z praktického hlediska je patrně důležitá otázka, jak objevit nadaného žáka a jak s ním pracovat. Neznám veškerou literaturu na toto téma, ale musím konstatovat, že učiteli v tomto směru příliš nepomáháme. *Školní didaktika* [8] z roku 2002 určená přípravě učitelů a učitelům v praxi charakterizuje nadaného žáka takto (s. 78):

1. svými znalostmi přesahuje stanovené požadavky,

2. odpovídá rychle a s jistotou,
3. snadno a rychle chápe nové učivo,
4. objevují se u něho často tvořivé odpovědi,
5. spontánně se zajímá o další informace,
6. má potřebu své znalosti a dovednosti projevit a uplatnit,
7. má pozitivní vztah ke škole a učitelům, . . .

Body 1, 2, 5, 6 a 7 snad popisují žáka vzorného, ne však nutně nadaného. Výzkum popisovaný v práci [14] zjistil, že „studenti gymnázia talentovaní na matematiku, se od svých vrstevníků statisticky významně liší tím, že se dokáží lépe koncentrovat na učení, nepotřebují kolem sebe tolik ticha. Jsou zvyklí učit se spíše u pracovního stolu, méně jim vyhovuje povalování se v křeslech, na gaučích apod. Preferují spíše učení s kamarády, neboť složitější úlohy se patrně lépe prodebatovávají a řeší ve skupině. Výrazněji než běžné gymnazisty je ovlivňuje učitel, který je pro ně autoritou, motivuje je k učení, těší se z jejich úspěchů (s. 13)“.

Takovéto informace nám dává pedagogická věda.

Snad si mohu dovolit připomenout naproti tomu příklad extrémní a historický.

Učitel matematiky hodnotí studenta: „Nelze u něho pozorovat ani stín lásky k nějaké práci. Je nedbalý. Neustále se zabývá něčím, co by neměl dělat. Je to s ním den ze dne horší. Nepořádný, povídavý. Mám dojem, že si vytkl za cíl úplně mne utrápit. . . “

Takto hodnotí učitel *Pierrot* jednoho z největších matematických géniů lidstva *Evarista Galoise* (citováno podle vynikající biografie [7], kterou napsal polský matematik a fyzik *Leopold Infeld*).

Samozřejmě se s geniálními dětmi stěží při svém pedagogickém působení setkáme, avšak představa, že nadaný žák je vzorný žák, asi není správná. Nemám k dispozici žádný výzkum o práci s nadanými studenty. Uvedu pouze své skromné zkušenosti, které mohou zájemci potvrdit nebo vyvrátit.

Matematiku můžeme chápat buď jako teoretickou disciplinu s jejími definicemi, větami a důkazy (tedy např. algebru, teorii čísel, matematickou analýzu, teorii grup, vektorových prostorů, . . .), nebo jako lidskou aktivitu, která k matematickým pojmům, větám a důkazům vede. Přednášky na vysoké škole nebo výklad učiva na škole střední jsou akty transmise matematiky z učebnic a monografií do sešitů studentů. Studenti se snaží problematice porozumět, opakování je přitom matkou moudrosti, neboť k porozumění novému učivu je třeba znát učivo starší. Pracovat individuálně se studenty na konstrukci matematických poznatků je podle mého názoru nejlepší způsob, jak objevovat a rozvíjet talenty. Již reakce studentů na vhodně položené otázky a jejich činnost při řešení problémů napoví mnoho o případném nadání. Otázky studenta jsou projevem jeho aktivního vztahu k problematice a k hledání cesty k řešení. Formální opakování není matkou, ale macechou moudrosti, opakování nepřispívá k rozvíjení tvořivosti. Řešení úloh lze sledovat např. z toho hlediska, čeho si student všímá, co vnímá jako podstatné a co hodnotí jako nepodstatné. Klasifikace jevů, která bývá výsledkem tohoto procesu, může vyústit až k tvorbě matematických pojmů. Matkou moudrosti je sbírání matematických zkušeností, uvažování o problému. Přirozeně při tomto přístupu dělá student chyby, jeho závěry nejsou často podloženy logikou, ale spíše intuicí. Přirozeně, že je tento „badatel“ neukázněný, protože ho řešení plně zaujme, přirozeně, že nedbá na úpravu, protože chce jít rychle k cíli a konvence ho zdržují. Je schopen diskutovat o problému, argumentovat a dokazovat, že má pravdu. Formuluje domněnky, které hodnotí více či méně kriticky. Uvědomuje si teprve na základě zkušenosti potřebu systému v práci (a je to patrně jediný argument, který uznává jako přitakání konvencím). Dochází k novým pohledům na problematiku, je tvořivý.

To vše dobrý a zkušený učitel v kontaktu s nadanými žáky rozvíjí, má-li k tomu aspoň trochu příznivé podmínky, to vše mu umožňuje spolupráci se studenty nad řešením úloh.

Předchozími poznámkami nechci ovšem říci, že pečlivý student s dobrou úpravou grafických vyjádření nemůže být nadaný. Tím méně ovšem není projevem nadání nepořádek a nečitelný rukopis.

Proces řešení úloh je tedy podle mého názoru nejdůležitější oblast i k rozpoznání a rozvíjení talentů. Nemusí to však být úlohy v tradičním pojetí.

Např. ve Spojených státech se provádí výběr účastníků mezinárodní matematické olympiády na základě tohoto systému: 350 000 studentů je podrobeno testu *American High School Mathematical Examination* (AHSME). Nejlepších 5 % účastníků dostává pozvání ke zkoušce *American Invitation Mathematical Examination* (AIME). Z vítězů této zkoušky vzejdou účastníci mezinárodní matematické olympiády (viz [15]). Nemám novější informace o charakteru úloh v uvedených soutěžích, ale vím, že v letech 1973 – 1982 řešili účastníci testu AHSME 30 úloh s výběrovými odpověďmi. Pro informaci zde připomenu ukázku pěti z nich podle publikace [23].

1. Tělesová úhlopříčka krychle má délku a. Povrch této krychle je
(A) $2a^2$, (B) $2\sqrt{2}a^2$, (C) $2\sqrt{3}a^2$, (D) $3\sqrt{3}a^2$, (E) $6a^2$.

2. Součet druhých mocnin reálných kořenů rovnice $x^{256} - 256^{32} = 0$ je
(A) 8, (B) 128, (C) 512, (D) 65 536, (E) $2 \cdot (256)^{32}$.

3. Hodnota zlomku

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}$$

je
(A) $\frac{3}{4}$, (B) $\frac{4}{5}$, (C) $\frac{5}{6}$, (D) $\frac{6}{7}$, (E) $\frac{6}{5}$.

4. Obsah plochy ohraničené grafy $y = |x|$ a $x^2 + y^2 = 4$ je
(A) $\frac{\pi}{4}$, (B) $\frac{3\pi}{4}$, (C) π, (D) $\frac{3\pi}{2}$, (E) 2π.

5. Je-li $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ a $0 \leq x < \pi$, pak $\operatorname{tg} x$ je
(A) $-\frac{4}{3}$, (B) $-\frac{3}{4}$, (C) $\frac{3}{4}$, (D) $\frac{4}{3}$.

Úlohy s nabídnutými odpověďmi nepovažuji osobně za vhodné, zdá se mi, že nevedou řešitele k rozboru textu úlohy. Strategie „která odpověď je správná?“ mi není vlastní. Vzhledem k tomu, že tento typ úloh se lavinovitě šíří, bylo by vhodné rozebrat jejich přednosti a nedostatky.

Roli úloh v matematickém vzdělávání hodnotí významná polská matematička *Zofia Krygowská* (1904 – 1988) takto (viz [9], 3; 4): „Žák si tvoří takovou koncepci matematiky, jaká se mu jeví prostřednictvím úloh, které sám vyřešil. Vztah žáka k matematice a motivace učení matematice záleží ve velké míře právě na tom. Čím matematika pro žáka je a čím pro něho může být, pozná žák aktivně právě při řešení vhodně zvolené matematické úlohy. Je třeba si proto jasně uvědomit, co chceme učit, zda algoritmy a jejich správné užití nebo algoritmizaci, zda pamětné ovládnutí důkazů a definic nebo dokazování a definování, zda hotovou klasifikaci či klasifikování, hotové značky a symboly nebo způsob zavádění symboliky, zda dávání správných odpovědí nebo formulace otázek a studium problémů. Zřejmě chceme učit obojí, ale s výrazným posunutím důrazu na matematickou aktivitu, na matematické činnosti a jejich spojení s realitou, na tvůrčí zkušenosti, které žák postupně získává při řešení vhodných úloh . . . “

O realitě naší školy

Jak jsem naznačil v předcházející části příspěvku, spočívá poznávání a péče o talenty především v individuální spolupráci učitele se studentem. Ovšem úkoly učitele matematiky jsou mnohem komplexnější, realita školního provozu a klima školní třídy individuální péči o nadaného studenta příliš nepřeje. Co máme vlastně ve škole prioritně pěstovat?

Máme rozvíjet nadání studenta nebo jeho výkonnost? Tyto dva požadavky nejsou sice v rozporu, ale přece jen výkonnost bývá obvykle zaměřena na něco měřitelného, formálně zvládnutelného, kontrolovatelného, výkon je obvykle opakovatelný, nadání je zaměřeno na poznání nového, na tvorbu.

Máme zdůrazňovat morální zásady nebo schopnost dosahovat cíle? Cíle bychom měli vždycky dosahovat při respektování morálních zásad, cesty k úspěchu však jsou často v praxi považovány za hlavní kritérium schopností člověka.

Máme pěstovat individualitu nebo loajalitu? Student loajální autoritám a režimu školy to má obvykle snazší než individuum, které se dostává do rozporu s životem ve společnosti.

Máme podporovat originalitu nebo konformismus? Pěstovat talenty znamená podporovat originalitu, originalita při řešení úloh souvisí ovšem s originalitou v jednání a chování. Škola vyžaduje přizpůsobení se kázni, zvyklostem, provozu. Originální myslitel může mít vážné problémy.

Odpovědi na položené otázky lze stěží jednoznačně formulovat. Často přitakáváme „správným" zásadám v teorii, praxe školy a realita společnosti bývá jiná. Cíle pragmatické mívají větší váhu než cíle ideální. Mladý člověk může být stěží originální při řešení matematických problémů a konformní při jednání ve společnosti. Chápeme-li vzdělávání jako utváření osobnosti, mohou se nadaní jedinci dostávat snáze do konfliktů než ti, kteří se drží vzorů při řešení matematických problémů i při kontaktu s okolím.

I tyto aspekty vzdělávání bychom měli promýšlet.

Při kultivaci nadání mladého člověka hraje zásadní roli *motivace*. Podle mého názoru jsou z hlediska vyučování matematice nejdůležitější tato kritéria:

1. *Úspěch.* Úspěch jako motivační síla je stěží něčím nahraditelný. Má-li být vyučování matematice účinné, musí student být *úspěšný*. Tato stránka motivace je v našich silách. Souvisí především s výběrem vhodných úloh. Úlohy „na jeden nápad" jsou dobrou „návnadou" v nejlepším slova smyslu.

2. *Zajímavost*. Ve velké většině školních úloh jsou výsledky zcela irelevantní. Nezáleží nám ani na tom, jaká je vzdálenost dvou míst, ani na tom, zda průnikem roviny s tělesem je či není šestiúhelník. Snad jediné, čím může výsledek úlohy upoutat, je jeho zajímavost, neočekávanost, překvapivost,. . . Uveďme aspoň dva příklady: sítí nemusí být těleso v prostoru jednoznačně určeno. Existuje libovolně dlouhá posloupnost za sebou jdoucích přirozených čísel, která jsou všechna složená. (Zde si dovolím poznámku. Na 1. konferenci o talentech v r. 2003 jsem formuloval tuto úlohu a omylem jsem v textu uvedl místo slova „složená" slovo „prvočísla" (viz [12], s. 102). Vzhledem k tomu, že si tohoto omylu za dva roky nikdo nevšiml, je to pro mne důkaz, že můj článek o matematické kultuře nikdo nečetl.)

3. *Souvislosti*. Matematické úlohy a matematické teorie mohou všem, zvláště pak nadaným studentům, ukázat nečekané souvislosti, např. z jiných oblastí vědění, z aplikací matematiky, ale i umění. Připomenu v této souvislosti např. dvě pěkné knihy, v nichž mohou najít inspiraci učitelé i nadaní studenti: *The Book of Numbers* [5] a *5 000 Jahre Geometrie* [19].

Zaujmout studenty matematikou je nelehký a důležitý úkol nás, učitelů matematiky. Součástí taktiky při realizaci tohoto úkolu je nedělat matematiku zbytečně složitou, omezit umělý formalismus a snažit se přiblížit studentům „zajímavé matematické příběhy". I matematické důkazy by měly mít takovýto charakter (viz [21], s. 49).

Závěr

Anglický matematik *Ian Stewart*, jehož myšlenku jsme citovali na konci předešlého odstavce, napsal: „Dobré myšlenky jsou vzácné, přicházejí však přinejmenším stejně často z obrazotvorných snů o vnitřní struktuře matematiky jako z pokusů řešit praktický problém (viz [21], s. 69).“ Dodávám k tomu: Mohou přicházet i při řešení úloh, které nejsou spjaty ani s hlubokou matematickou teorií ani s aplikacemi matematiky.

Obdivuji naše úspěšné olympioniky, neboť vyřešit obtížnou úlohu v daném časovém intervalu a v daném prostředí je neobyčejně náročné. Vybavuje se mi přitom, jak významní matematici přiznávají své potíže při řešení určitých problémů. Např. *Bernard Russell* píše: „Usilovně jsem se snažil vyřešit rozpor plynoucí z paradoxu holiče. Každé ráno jsem si sedl před prázdný list papíru a celý den jen s krátkou přestávkou na oběd jsem na něj zíral. . . (viz [3], s. 113)“. Významný francouzský matematik, čestný doktor Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze, *Gustav Choquet*, popisuje proces nalézání nového takto: „Chování vědce, ať již v matematice či v experimentálních vědách, připomíná chování průzkumníka v lese, který hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata (viz [13], s. 90).“

Jako učitelé bychom si měli být vědomi toho, že „tvořivá mysl se nejlépe rozvíjí v prostředí, které si upřímně váží tvůrčího přístupu k věci (viz [20]).“

Objevovat a kultivovat talenty, rozvíjet myšlení a připravovat studenty tak, aby pracovali s plným využití svého nadání a schopností, je krásný, leč mimořádně náročný úkol. Při jeho plnění vám přeji hodně úspěchů.

Literatura

[1] Aleksandrov, I., *Metody řešenij geometričeskich zadač na postrojenije*. Lissner-Gešel, Moskva, 1904.

[2] Aleksandrov, P. S., *Úvod do obecné teorie množin a funkcí*. NČSAV, Praha, 1954.

[3] Barrow, J. D., *Pí na nebesích*. Mladá fronta, Praha, 2000.

[4] Borovin, A. I., Butan, A. C., *Biografičeskij slovar dějatělej v oblasti matěmatiky*. Radjanskaja škola, Kijev, 1979.

[5] Conway, J. H. J., Guy, R. G., *The Book of Numers*. Copernicus. Springer, New York, 1995.

[6] Hartl, P., Hartlová, H., *Psychologický slovník*. Portál, Praha, 2000.

[7] Infeld, L., *Vyvolenci bohů*. Mír, Praha, 1952.

[8] Kalhous, Z., Obst, O., *Školní didaktika*. Portál, Praha, 2002.

[9] Krygowska, Z., *Zarys dydaktyki matematyki 1, 2, 3*. WSP, Warszawa, 1977.

[10] Kuřina, F., *Umění vidět v matematice*. SPN, Praha, 1989.

[11] Kuřina, F., Logika a intuice při řešení úloh. *Matematika, fyzika, informatika*, č. 4, 2003.

[12] Kuřina, F., Kultura školské matematiky. In *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF, Hradec Králové, 2003.

[13] Lukeš, J., Netuka, I., Veselý, J., *Profesor Gustave Choquet*. Matfyzpress, Praha, 2002.

[14] Mareš, J., Žáci nadaní a talentovaní na matematiku. In *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF, Hradec Králové, 2003.

[15] Nokelainen, P. a kol., Gross – cultural predictors of mathematical talents and academic produktivity. *High Ability Studies*, Vol. 15, No 2, 2004.

[16] Pawlowski, H., *Zadania z olimpiad matematycznych z całego swiata. Planimetria i stereometria*. Tutor, Toruń, 2004.

[17] Polya, G., *Mathematical Discovery I, II*. John Wiley and Sons, New York, 1962, 1965. Ruský překlad Moskva, 1970.

[18] *První ročník matematické olympiády*. SPN, Praha, 1953.

[19] Scriba, C., Schreiber, P., *5 000 Jahre Geometrie*. Springer, Berlin, 2001.

[20] Selye, H., *K záhadám vědy*. Orbis, Praha, 1975.

[21] Stewart, I., *Čísla přírody*. Archa, Bratislava, 1996.

[22] Škljarskij, D. O., Čencov, N. N., Jaglom, I. M., *Geometrija*. Biblioteka matematičeskogo klasa, Fizmatlit, Moskva, 2000.

[23] *The Contest Problem Book IV*. Compiled and Solutions by Artino, R. A., Gaglione, A. M., Shell, N., MAA, New York, 1983.

Úlohy pro MO – – objevné nápady, nebo náročné manipulace?[1]

Jaromír Šimša[2]

Abstrakt. Příspěvek je zamyšlením autora nad otázkou, jaké rysy by měly odlišovat úlohy matematické olympiády od úloh z běžných hodin školské matematiky. Vyslovené

[1]Odborné zajištění MO v ČR je podporováno prostředky přidělenými výzkumnému záměru č. AV0Z10190503 Matematického ústavu Akademie věd České republiky.

[2]*Matematický ústav AV ČR, Brno, simsa@ipm.cz*

postřehy jsou ilustrovány rozborem několika konkrétních úloh, které autor v posledních létech navrhl pro středoškolské kategorie MO v České republice.

Abstract. The contribution focuses on the features of problems from MO which should distinguish them from usual problems from mathematics lessons. The author illustrates his considerations by the analysis of several problems which he has proposed for the secondary category of MO in the Czech Republic.

Rád bych se zamyslel nad tím, jak by měly být zaměřeny z obsahového, či spíše metodického hlediska úlohy, které předkládáme žákům základních a středních škol v naší tradiční předmětové soutěži zvané matematická olympiáda. Za její dlouhou historii, k níž v letošním roce 2005 dopisujeme již 54. ročník, se v každoročně vydávaných ročenkách nashromáždily stovky rozmanitých úloh. V nich se jistě projevily nejen proměny v pojetí školské matematiky, jakou byla například modernizační reforma 60. let, ale i osobní vkus a zaměření matematiků, kteří se na přípravě zadání úloh pro MO autorsky (po většinu dosavadních let anonymně) podíleli. I když to nebude námětem mého vystoupení, poznamenám, že tento rozsáhlý příkladový materiál by zasloužil hlubší analýzu a posouzení z různých hledisek.

Chceme-li diskutovat o tom, jaké požadavky by měly být kladeny na úlohy MO, měli bychom se sjednotit v názoru, jaké cíle naše soutěž sleduje a kteří žáci by v ní měli slavit úspěchy. Patrně se všichni shodneme v názoru, že matematická olympiáda by měla stimulovat zájem žáků našich základních a středních škol o matematiku nad rámec jejích školních osnov, vyhledávat mezi nimi výrazné talenty, umožnit jim, aby své nadání dále rozvíjeli, a ovlivňovat jejich výběr vysokoškolského studia ve prospěch matematicko-fyzikálních, přírodovědných a technických fakult. I když se matematické olympiády účastní většinou žáci, kteří mívají ve škole z matematiky jedničky, není naše soutěž pouhou prověrkou toho, jak žáci zvládají školní učivo. S tím se někteří učitelé těžko smiřují a pracovníkům MO vyčítají, že soutěžní úlohy nemají užší vazbu na školské osnovy, takže jejich „jedničkáři“ mnohdy v MO neuspějí a o účast v dalším ročníku ztratí zájem. Rád bych tyto kritiky ujistil, že při přípravě úloh MO dbáme na to, aby soutěžící jednotlivých věkových kategorií dostávali k řešení přiměřeně obtížné úlohy, které pracují s matematickými pojmy a konstrukcemi, jež by žákům již měly být známé. Mimochodem tento požadavek je v období narůstající autonomie školních vzdělávacích programů stále obtížněji splnitelný, chceme však bohatou škálu osmi kategorií MO podle studijních ročníků (ve světové rodině národních MO poměrně unikátní) i v budoucnu udržet. Odhad obtížnosti některých úloh je nesnadný a občas se v něm spleteme, nechceme však tradičně vysoký kredit naší soutěže devalvovat jen proto, abychom dosáhli masovější účasti méně disponovaných žáků a větší úspěšnosti soutěžících. Některým našim kritikům chci připomenout, že MO je dobrovolnou soutěží jednotlivců (nikoliv škol), a tudíž výsledky soutěžních kol v okresech a krajích nemohou vypovídat o úrovni běžné výuky matematiky na jednotlivých školách. Výrazné výsledky některých škol jsou však jistě signálem, že se v jejich třídách o talenty systematicky pečuje.

Shodneme-li se na tezi, že úlohy MO by měly testovat u soutěžících spíše talent než souhrn vědomostí a znalostí školských pouček a algoritmů, můžeme přemýšlet o obecných rysech situace, kterou by měla dobrá úloha pro MO popisovat, aby se při jejím řešení projevil právě talent soutěžícího. Za hlavní považuji požadavek, aby zadání úlohy uvedlo soutěžícího do některé aritmetické, algebraické nebo geometrické situace, která je pro něho v lecčems nová, neobvyklá, málo přehledná vazbami mezi objekty, jejich formou, tvarem apod. Úkol by pak měl být zformulován tak, aby se soutěžící musel nejprve v dané situaci zorientovat, vystihnout její podstatné rysy, objevit skryté skutečnosti a pak zvolit vhodné prostředky k řešení daného úkolu, které je často nutné rozdělit do několika dílčích etap. Proces řešení úlohy, který jsem popsal v poslední větě, je tak většinou syntézou objevných nápadů a rutinních početních výkonů (manipulací). Tyto dva druhy duševních výkonů, kterým se chci dále věnovat, jsou pochopitelně v řešení jednotlivých úloh zastoupeny v různých poměrech. Najdeme rovněž v MO úlohy, které nevyžadují „nic více“ než trpělivé výpočty směrem, o kterém je od počátku zřejmé, že povede k výsledku, pokud během úprav neuděláme chybu a projevíme dostatečnou vytrvalost v manipulacích se složitými výrazy. O zmíněných dvou komponentách řešení a jejich vzájemném vztahu teď uvedu několik postřehů, doplněných ukázkami několika úloh, které jsem v posledních letech pro MO navrhl (v úvodu jejich zadání vždy uvádím příslušný ročník MO, kategorii a soutěžní kolo).

Postřeh první. *Často je možné jednu a tutéž úlohu řešit různými postupy, přičemž obvykle platí: čím je v řešení více nápadů, tím méně je v něm nezbytných doprovodných manipulací.*

Příklad 1 (55-C-I). Určete počet všech trojic navzájem různých trojmístných čísel, jejichž součet je dělitelný každým ze tří sčítaných čísel.

Komentované řešení. Na vybrané úloze, kterou vyřešíme dvěma odlišnými postupy, dobře uvidíme, jak nápaditá úvaha může ovlivnit délku a složitost řešení jedné a téže situace. Při rozhodování o obtížnosti úlohy se ovšem nesmíme dát ovlivnit délkou zápisu řešení, jehož „trikovost“ nemusí být na první pohled patrná. Platí to zejména tehdy, když se před čtením trikového řešení nepokusíme úlohu vyřešit vlastními silami.

První postup. Uvedeme výrazně „manipulistický“ přístup k dané úloze. Je pro něj příznačné, že kromě označení x, y, z tří trojmístných čísel, z nichž každé dělí součet $x+y+z$, zavedeme ještě další tři symboly k, l, m, abychom zmíněnou podmínku zapsali rovnostmi

$$\begin{aligned} x+y+z &= k \cdot x, \qquad (1)\\ x+y+z &= l \cdot y,\\ x+y+z &= m \cdot z. \end{aligned}$$

Považujme v této soustavě rovnic přirozená čísla k, l, m za parametry a řešme ji obvyklým postupem – eliminační metodou. Porovnáním pravých stran rovnic soustavy vyjádříme nejprve neznámé y, z pomocí neznámé x:

$$y = \frac{kx}{l} \quad \text{a} \quad z = \frac{kx}{m}. \tag{2}$$

Dosazením těchto vzorců do první z rovnic (1) dostaneme pro zbývající neznámou x rovnici

$$x + y + z = \left(1 + \frac{k}{l} + \frac{k}{m}\right) \cdot x = k \cdot x,$$

ze které po krácení číslem x (které je nenulové) vyjde podmínka pro parametry k, l, m ve tvaru

$$1 + \frac{k}{l} + \frac{k}{m} = k, \quad \text{neboli} \quad lm + km + kl = klm. \tag{3}$$

Vyhněme se i v této chvíli trikovým obratům a zvolme i dále standardní postup: jeden z parametrů, řekněme k, vyjádřeme pomocí ostatních dvou parametrů a ze získaného zlomku oddělme „celou část“:

$$k = \frac{lm}{lm - l - m} = 1 + \frac{l + m}{lm - l - m}. \tag{4}$$

Algebraické manipulace jsou u konce, další zjednodušení posledního zlomku už patrně možné není. Nastal proto čas vhodně využít podmínky, že čísla k, l, m jsou přirozená, dokonce větší než 1 podle rovnic (1). Tak z nerovnosti $k \geqq 2$ a vyjádření (4) plyne, že zlomek

$$\frac{l + m}{lm - l - m}$$

je přirozené číslo, tudíž jeho jmenovatel nepřevyšuje jeho čitatel:

$$lm - l - m \leqq l + m. \tag{5}$$

Čtenář znalý postupu řešení diofantických nerovnic tohoto typu ví, že nerovnici (5) je výhodné upravit do tvaru

$$(l - 2)(m - 2) \leqq 4.$$

Z důvodů symetrie platí i nerovnosti

$$(k - 2)(l - 2) \leqq 4,$$
$$(k - 2)(m - 2) \leqq 4.$$

Snadno usoudíme, že činitelé $k - 2$, $l - 2$, $m - 2$ jsou tři různá čísla (čísla x, y, z, a tedy i k, l, m jsou navzájem různá) tvořící jednu z trojic $(0, 1, 2)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 1, 4)$. Trojice

(k, l, m) je tedy (až na pořadí) jedna z trojic $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ nebo $(2, 3, 6)$, z nichž pouze poslední vyhovuje rovnici (3). Dosazením těchto hodnot k, l, m do vztahů (2) zjistíme, že každá vyhovující trojice čísel (x, y, z) je (v rostoucím pořadí) tvaru

$$(x, y, z) = (t, 2t, 3t), \quad \text{kde } t \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

(Zkouška: součet $t + 2t + 3t = 6t$ je zřejmě dělitelný každým z čísel $t, 2t, 3t$.) Abychom dovedli řešení úlohy MO-55-C-I do konce, dodejme, že trojice z (6) je tvořena trojmístnými čísly, právě když $100 \leqq t \leqq 333$, takže hledaný počet všech takových trojic je $(333 - 100) + 1 = 234$.

Právě dokončený postup bylo možné zkrátit *trikovou úpravou* rovnice získané v pravé části (3): po dělení obou jejích stran součinem klm dostaneme rovnici

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1, \tag{7}$$

na jejíž levé straně stojí tři různé zlomky z množiny

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right\}.$$

Není těžké vysvětlit, proč jsou to nutně zlomky

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Bez zastoupení zlomku $\frac{1}{2}$ bychom na levé straně (7) dostali nejvýše

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 3 \cdot \frac{1}{3} = 1;$$

podobně se vysvětlí, proč druhý největší ze zlomků v (7) musí být $\frac{1}{3}$.

Druhý postup. Nyní přejdeme k řešení téže úlohy *objevným*, na předchozím algebraickém způsobu zcela nezávislým postupem.

Označme hledaná přirozená čísla podle velikosti $x < y < z$. Pro jejich součet $s = x + y + z$ platí odhady

$$z < s < z + z + z = 3z.$$

Má-li proto být číslo s násobkem čísla z, musí to být jeho *dvoj*násobek: $s = 2z$. Z rovnosti $x + y + z = 2z$ pak dostaneme $z = x + y$, tudíž

$$s = x + y + (x + y) = 2(x + y).$$

Nyní pro součet s máme odhady

$$2y < 2(x + y) = s < 2(y + y) = 4y.$$

Má-li proto být číslo s násobkem čísla y, musí to být jeho *troj*násobek: $s = 3y$. Z rovnosti $2(x + y) = s = 3y$ pak dostaneme $y = 2x$, tudíž $z = x + y = x + 2x = 3x$ a konečný vzorec (6) je takto odvozen. Jak jasné, přehledné a působivé!

Postřeh druhý. *K hledání triků a překvapivých vztahů při řešení úloh přistupujeme zpravidla až tehdy, selžou-li obvyklé manipulace nebo nás jejich pokračování svou složitostí odradí.*

Hledání triků při řešení úloh lze s mladými talenty úspěšně trénovat, v některých zemích jsou členové týmů pro mezinárodní matematické olympiády (MMO) internátně připravováni po dobu několika týdnů či dokonce měsíců. V rámci této přípravy se kromě teoretických poznatků učí rovněž *seznamy receptů*, které mají při řešení neznámé úlohy vyzkoušet. Úkolem poroty MMO je vybrat originální úlohy, které jsou vůči takovým „kuchařkám" pokud možno imunní.

Příklad 2 (48-A-III). Najděte všechny dvojice reálných čísel a a b, pro které má soustava rovnic s neznámými x, y

$$\frac{x + y}{x^2 + y^2} = a, \quad \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = b \tag{8}$$

aspoň jedno řešení v oboru reálných čísel.

Komentované řešení. Nejprve uveďme, jak si s úlohou poradili během soutěže účastníci obou ústředních kol v ČR a SR: ze 7 možných bodů (za úplné řešení) získali soutěžící v ČR průměrně 1,36 bodu, v SR 2,81 bodu, přitom 7 bodů získalo celkem 5 soutěžících (1 v ČR a 4 v SR).

Vybranou úlohu teď budeme zdolávat na čtyři pokusy, z nichž první dva ještě nepovedou k cíli. Třetí (již úspěšný) přístup vezmou za vlastní čtenáři znalí teorie symetrických mnohočlenů, mezi něž ovšem středoškolští studenti v drtivé převaze nepatří (zato posluchači univerzitních kurzů algebry ano). Čtvrtý, nejelegantnější přístup je založen na úvaze o stupních homogenity levých stran soustavy (8), tedy poměrně speciální vlastnosti funkcí, o které se v univerzitních kurzech algebry či analýzy obvykle nemluví, která je však nepochybně hojně zastoupena ve vzpomenutých „kuchařkách" pro přípravu MMO-týmů.

Všimněme si nad textem zadání úlohy, že jeho formulace vůbec nevyžaduje, abychom soustavu (8) *řešili*, tj. určili všechny vyhovující dvojice (x, y) vzorci s proměnnými parametry a a b; naším úkolem je pouze najít všechny ty dvojice parametrů (a, b), pro něž řešení (x, y) v oboru reálných čísel *existuje*. První tři přístupy budou založeny na pokusu soustavu (8) nejprve skutečně vyřešit a teprve poté zjistit, kdy nalezené vzorce pro neznámé x, y mají smysl. Až při posledním pokusu z takového plánu „slevíme“ a budeme přemýšlet pouze o otázce existence řešení (x, y), nikoliv jeho explicitního vyjádření.

Dříve než přistoupíme ke zmíněným pokusům, domluvme se, že budeme hledat pouze dvojice čísel (a, b) z pravých stran rovnic (8), jež jsou obě *nenulová*. Je totiž vidět, že pokud je jedno z čísel a, b rovno nule, splňuje každé řešení (x, y) soustavy rovnic (8) nutně podmínku $x = -y$, takže i druhé z čísel a, b je rovno nule (má-li soustava (8) vůbec nějaké řešení).

První pokus. Pro řešení soustav rovnic je patrně nejrozšířenější *eliminační metoda*, kdy jednu z neznámých z některé rovnice vyjádříme pomocí ostatních a toto vyjádření pak dosadíme do ostatních rovnic. (Tímto obratem se jak počet neznámých, tak i počet rovnic soustavy sníží o jedničku.) Taková prostá eliminace je pro řešení soustavy (8) naprosto neschůdná, neboť obě rovnice jsou nelineární vzhledem ke každé z obou neznámých. Vyjádříme-li například z první rovnice

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4ax - 4a^2x^2}}{2a},$$

jistě nás odradí dosazovat tento výraz s odmocninou do druhé rovnice, když si uvědomíme, že bychom museli vypisovat druhou a třetí mocninu takového výrazu. Zajisté odpudivý úkol! Navíc je velmi pravděpodobné, že ve výsledné rovnici zůstane neznámá x ve výrazu pod odmocninou.

Druhý pokus. Nezdařilý první pokus nás jistě přiměje zamyslet se nad tvarem obou rovnic soustavy (8) s cílem dosáhnout eliminace jedné z neznámých cestou rafinovanějších algebraických manipulací. Všimneme si, že oba zlomky

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{a} \quad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

mají stejný jmenovatel, navíc čitatel druhého zlomku je násobkem čitatele zlomku prvního, neboť

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

Proto porovnáme *podíly* levých a pravých stran původních rovnic; dostaneme tak rovnici

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{b}{a}, \quad \text{neboli} \quad x^2 + y^2 = xy + \frac{b}{a}. \tag{9}$$

Dosadíme-li odvozený výraz pro součet $x^2 + y^2$ do jmenovatele první z původních rovnic soustavy (8), dostaneme ekvivalentní soustavu rovnic

$$\frac{x+y}{xy + \frac{b}{a}} = a, \quad x^2 + y^2 = xy + \frac{b}{a}. \tag{10}$$

Tato soustava má oproti původní soustavě (8) tu výhodu, že její první rovnice je lineární vzhledem ke každé z obou neznámých x a y. Proto je eliminační metoda nyní nadějnější. Z první rovnice soustavy (10) vyjádříme například y pomocí x

$$y = \frac{x-b}{ax-1},$$

a po dosazení tohoto zlomku za neznámou y do druhé rovnice v (10) dostaneme po úpravě pro neznámou x rovnici

$$a^3x^4 - 3a^2x^3 + 3ax^2 - abx + b(ab-1) = 0.$$

Eliminace proběhla tentokrát úspěšně, dostali jsme ale rovnici čtvrtého stupně, jejíž kořeny sice lze vyjádřit vzorci, ale jejich odvození je velmi pracné a často zahrnuje počítání třetích odmocnin v komplexním oboru (přestože hledáme reálné kořeny rovnice s reálnými koeficienty). Opět jsme se prakticky ocitli ve slepé uličce!

Třetí pokus. Jak jsme již naznačili v úvodním odstavci komentovaného řešení, v tomto pokusu uplatníme k řešení soustavy (8) základní výsledek teorie symetrických mnohočlenů. Podle něj lze každý symetrický mnohočlen proměnných x, y vyjádřit jako (jiný, obecně nesymetrický) mnohočlen dvou nových proměnných s, p, kterým říkáme *elementární symetrické mnohočleny (proměnných x, y)* a které mají tvar

$$s = x + y \quad \text{a} \quad p = x \cdot y. \tag{11}$$

Od dvojice neznámých (x, y) tedy přejdeme k nové neznámé dvojici (s, p), přitom k přepisu konkrétní soustavy (8) nám postačí dva vzorce

$$x^2 + y^2 = s^2 - 2p \quad \text{a} \quad x^3 + y^3 = s^3 - 3sp,$$

které ověříme velice snadno:

$$\begin{aligned} s^2 - 2p &= (x+y)^2 - 2xy = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = x^2 + y^2, \\ s^3 - 3sp &= (x+y)^3 - 3(x+y)xy = \\ &= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (3x^2y + 3xy^2) = x^3 + y^3. \end{aligned}$$

Pro neznámé s, p tak dostaneme místo (8) novou soustavu

$$\frac{s}{s^2 - 2p} = a, \quad \frac{s^3 - 3sp}{s^2 - 2p} = b. \tag{12}$$

Dříve než ji začneme řešit, popišme obecný postup, jak se lze od hodnot s, p vrátit k původním neznámým x, y. Ty jsou podle vzorců (11) kořeny $t_{1,2}$ kvadratické rovnice

$$t^2 - st + p = 0, \tag{13}$$

takže existují v oboru reálných čísel, právě když je její diskriminant nezáporný:

$$s^2 - 4p \geqq 0. \tag{14}$$

S ohledem na formulaci řešené úlohy nebudeme vzorce pro kořeny x, y rovnice (13) vypisovat, i když by to bylo možné udělat, a pak do nich dosadit hodnoty s a p, které jsou řešením soustavy (12) a pro které odvodíme níže vzorec (15). Místo toho hodnoty s, p dosadíme do podmínky (14) a tu pak budeme analyzovat.

K řešení soustavy (12) již lze uplatnit eliminační metodu, neboť obě její rovnice jsou lineární vzhledem k neznámé p. Tu proto vyjádříme například z první rovnice

$$p = \frac{s(as-1)}{2a}$$

a po dosazení do druhé rovnice a úpravě obdržíme rovnici pro neznámou s tvaru

$$s \cdot \big(as^2 - 3s + 2b\big) = 0.$$

Kořen $s = 0$ jsme v úvodu řešení vyloučili, další kořeny s a jim odpovídající hodnoty p (pokud existují) mají tvar

$$\begin{aligned} s &= \frac{3 \pm \sqrt{9-8ab}}{2a}, \\ p &= \frac{s(as-1)}{2a} = \frac{3 - 2ab \pm \sqrt{9-8ab}}{2a^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Aby vypsaná odmocnina existovala, musí parametry a, b splňovat nerovnost

$$ab \leqq \frac{9}{8}.$$

Dosazením vzorců (15) do podmínky na diskriminant (14) dostaneme po úpravě podmínku

$$s^2 - 4p = \frac{4ab - 3 \mp \sqrt{9-8ab}}{2a^2} \geqq 0.$$

Pro (nenulový) součin $q = ab$ tedy stačí vyřešit nerovnice

$$4q - 3 - \sqrt{9-8q} \geqq 0, \quad 4q - 3 + \sqrt{9-8q} \geqq 0 \tag{16}$$

a pak sjednotit množiny jejich řešení. Tyto rutinní výpočty zde vynecháme a uvedeme pouze výsledek: Zkoumaná podmínka (14) je splněna, právě když parametry a, b splňují nerovnosti

$$0 < ab \leqq \frac{9}{8}. \tag{17}$$

Celá úloha je tak vyřešena, i když dosti pracným postupem, z něhož jsme vynechali některé rutinní výpočty a úpravy, zejména řešení nerovnic (16). Uveďme ještě konečnou odpověď: Hledané dvojice (a, b) jsou kromě $(0, 0)$ právě ty, které splňují podmínku (17).

Čtvrtý pokus. Změníme konečně „filosofii" přístupu k úloze o soustavě (8). Nebudeme ji již více řešit, nýbrž najdeme *množinu všech obrazů* při zobrazení, které dvojici-vzoru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ přiřazuje dvojici-obraz $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ danou rovnicemi dané soustavy, tj.

$$\begin{aligned} a &= \frac{x+y}{x^2+y^2}, \\ b &= \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

(Připomeňme, že z našich úvah vylučujeme ty dvojice (x, y), pro které platí $x + y = 0$ a kterým odpovídá dvojice $(a, b) = (0, 0)$.) Všimněme si jedné vlastnosti takového zobrazení, která bude mít pro náš postup zásadní význam. Podívejme se, jak se změní dvojice (a, b), vynásobíme-li každé z čísel x, y touž konstantou k: po takové změně dostaneme dvojici čísel (a', b') tvaru

$$\begin{aligned} a' &= \frac{kx+ky}{(kx)^2+(ky)^2} = \frac{k(x+y)}{k^2(x^2+y^2)} = \frac{x+y}{k(x^2+y^2)} = \frac{a}{k}, \\ b' &= \frac{(kx)^3+(ky)^3}{(kx(^2{+}(ky)^2} = \frac{k^3(x+y)}{k^2(x^2+y^2)} = \frac{k(x+y)}{x^2+y^2} = kb. \end{aligned}$$

Platí tedy $a'b' = ab$, takže při změně $(x, y) \to (kx, ky)$ se *nemění* hodnota součinu ab. Platí-li naopak pro dvě dvojice (a, b), (a', b') rovnost $ab = a'b' \neq 0$ a existuje-li vzor (x, y) pro dvojici (a, b), pak existuje i pro dvojici (a', b') a má tvar (kx, ky), kde $k = a/a' = b'/b$.

Z objevené vlastnosti plyne, že k popisu všech obrazů (a, b) při zobrazení (18) stačí najít množinu všech součinů

$$q = ab = \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \text{kde} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \neq 0. \tag{19}$$

Součin q jsme vlastně sestavili tak, že je při jakékoliv změně $(x, y) \to (kx, ky)$ neměnný. Můžeme se proto omezit jen na takové dvojice (x, y), jež vyhovují podmínce $x^2+y^2 = 1$.[3] Tím se jednak zbavíme nepříjemného jmenovatele ve zlomku (19), jednak získáme možnost zjednodušit jeho čitatele, když zavedeme *goniometrickou substituci*, totiž $x = \cos\psi$ a $y = \sin\psi$:

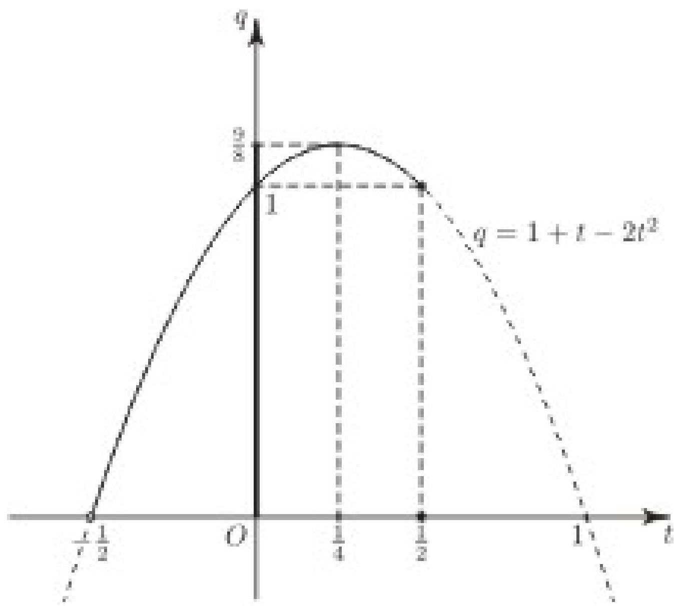
[3]Je-li totiž $x^2 + y^2 = R^2$, stačí provést změnu $x \to x/R$, $y \to y/R$.

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{(\cos\psi + \sin\psi)(\cos^3\psi + \sin^3\psi)}{(\cos^2\psi + \sin^2\psi)^2} = (\cos\psi + \sin\psi)(\cos^3\psi + \sin^3\psi) = \\
&= \cos^4\psi + \sin^4\psi + \cos\psi\sin\psi(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = \\
&= (\cos^2\psi + \sin^2\psi)^2 - 2\cos^2\psi\sin^2\psi + \cos\psi\sin\psi = 1 - 2t^2 + t,
\end{aligned}
$$

kde jsme od proměnné ψ ještě přešli k nové proměnné

$$
t = \cos\psi\sin\psi = \frac{1}{2}\sin 2\psi.
$$

Protože na proměnné x, y – souřadnice bodu jednotkové kružnice – máme jediné další omezení $x + y \neq 0$, probíhá proměnná ψ celý interval $\langle 0, 2\pi\rangle$ s výjimkou hodnot $3\pi/4$ a $7\pi/4$, tudíž proměnná $t = \frac{1}{2}\sin 2\psi$ probíhá celý interval $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$.



Jak vidíme z obrázku, na tomto intervalu je oborem hodnot funkce $q(t) = 1 + t - 2t^2$ interval $\left(0, \frac{9}{8}\right\rangle$. Tím je úloha úplně vyřešena: hledané nenulové dvojice (a, b) jsou znovu určeny nerovnostmi (17).

Postřeh třetí. *Existují úlohy, jejichž řešení vyžaduje jen skvělý nápad a minimum manipulací. Zařazení takových úloh do MO je vždy riskantní, neboť nelze předvídat, jak si s nimi řešitelé poradí. Proto takové úlohy zadáváme pouze účastníkům celostátních kol. Otázka „Jak na to mají přijít?“ přesto visívá ve vzduchu.*

Příklad 3 (54-A-III). Rozhodněte, zda pro každé pořadí čísel 1, 2, 3, ..., 15 lze tato čísla zapsat nejvýše čtyřmi různými barvami tak, aby všechna čísla stejné barvy tvořila v daném pořadí monotonní (tj. rostoucí nebo klesající) posloupnost. (Jednočlenná posloupnost je monotonní.)

Komentované řešení. Úloha byla pro soutěžící v ČR i SR velmi obtížná: z 42 soutěžících ČR jich 37 zůstalo bez zisku jediného bodu, v SR takto dopadlo 34 z 39 soutěžících. Úplné řešení podali pouze dva soutěžící v ČR a tři soutěžící v SR.

Situaci z příkladu nejprve přiblížíme čtenáři pomocí následující tabulky:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	1	7	11	9	13	4	8	15	6	12	2	14	10	5
			11	9			8		6		2			
					13					12			10	5
3		7						15						
	1					4						14		

V horním řádku tabulky jsou zapsána čísla od 1 do 15 v přirozeném pořadí, v druhém řádku je uvedeno jejich jiné, náhodně zvolené pořadí. Poslední čtyři „řídké“ řádky ukazují, jak lze čísla ze zvoleného pořadí v druhém řádku rozmístit do čtyř monotonních posloupností (zapsaných v jednotlivých řádcích): $(11, 9, 8, 6, 2)$ a $(13, 12, 10, 5)$ jsou klesající posloupnosti, $(3, 7, 15)$ a $(1, 4, 14)$ jsou naopak rostoucí posloupnosti. Čísla v téže posloupnosti pak zapíšeme stejnou barvou; protože nemáme k dispozici barevný tisk, rozepsali jsme čísla stejné barvy na jednotlivé řádky tabulky. Otázka úlohy tedy zní: je takové rozdělení do nejvýše čtyř monotonních posloupností možné, ať je pořadí (v druhém řádku) zvoleno jakkoliv?

Čtenáři, který chce opravdu dobře tento problém „osahat“, doporučuji, aby sám několik pořadí čísel 1 až 15 zvolil a hledané obarvení pro každé z nich vyhledal. Pokud se vám nebude dařit u některého pořadí správné obarvení vyhledat, najdete nějaké stručné vysvětlení, proč takové obarvení neexistuje, aniž byste museli dlouze diskutovat v nějakém nepříjemně „košatém“ logickém stromě větvících se možností?

Poslední otázkou jsme naznačili, jaká je odpověď na zkoumanou otázku: *U některých pořadí čísel* 1 *až* 15 *k jejich zápisu požadovaným způsobem čtyři barvy nestačí*. Ukážeme, že takovým je například pořadí z druhého řádku následující tabulky:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4	3	2	1|	9	8	7	6|	12	11	10|	14	13|	15

Všimněme si, jak je pořadí v druhém řádku sestaveno: svislými čárkami je vyznačeno rozdělení čísel do pěti skupin, v nichž čísla tvoří vždy klesající posloupnost, navíc všechna čísla v další skupině jsou větší než čísla ve skupině předchozí.

Nemožnost požadovaného obarvení vypsaného pořadí dokážeme sporem. Připusťme, že jsme čísla přece jen zapsali čtyřmi barvami tak, že čísla libovolné barvy tvoří monotonní posloupnost. V první skupině čísel 5 až 1 je pět čísel nejvýše čtyř barev, dvě z nich proto mají stejnou barvu; protože tvoří klesající posloupnost, barvu těchto dvou čísel nemá žádné z čísel v dalších čtyřech skupinách (napravo od čísla 1). Ve druhé skupině čísel 9 až 6 jsou čtyři čísla nejvýše tří barev; dvě z nich proto mají tutéž barvu, kterou pak už nemůže mít žádné číslo zbylých tří skupin (napravo od čísla 6), ve kterých jsou tudíž pouze čísla nejvýše dvou barev. Ještě jedním opakováním předchozí úvahy zjistíme, že čísla 14, 13 a 15 mají pouze jednu barvu, a to je spor. Úloha je tak vyřešena.

Možná jste v podaném řešení vypozorovali druh úvahy, který se nazývá Dirichletův princip. V nejjednodušší podobě ho pro obarvená čísla[4] můžeme zformulovat takto: *mezi k čísly zapsanými nejvýše $k-1$ barvami se vždy najdou dvě čísla, která mají stejnou barvu*. Všem soutěžícím ústředního kola MO je jistě tento princip znám. Málo koho ovšem napadne, že ho lze několikerým opakováním využít k vyřešení posuzované úlohy.

Závěr. „Chcete-li se naučit plavat, skočte směle do vody, chcete-li se naučit řešit úlohy, začněte je sami řešit." Tento výrok Georgea Pólyi, známého matematika, popularizátora a metodika matematiky, doplním v závěrečné části příspěvku přehledem literatury, podle které lze druhou část Pólyovy rady plnit co nejefektivněji.[5] Většina tuzemských i zahraničních sbírek olympiádních úloh prezentuje úlohy podle jednotlivých kol daných ročníků příslušné soutěže, tudíž jejich uspořádání je z obtížnostního i metodického hlediska pestrou a nesourodou směsicí, ve které se méně zkušený čtenář často jen stěží orientuje. To nijak nesnižuje jejich odbornou i historickou hodnotu, jakou například bezesporu má naše unikátní série ročenek [5]. Míníte-li však ovládnout určitý metodický obrat dokonaleji, je výhodné vyřešit skupinu úloh, které dokonce nemusí zapadat do téže tématické oblasti, které se však řeší *obdobným trikem*. Průkopnickými pracemi v úlohové literatuře, které jsou koncipovány ve zmíněném pojetí, jsou knihy [9], [10] a [11] z poloviny minulého století; pro svou objevnost, promyšlenost a pečlivost nebudou patrně již nikdy překonány. Současnému mladému českému čtenáři budou patrně přístupnější publikace [1], [2], [3] a [6]. K novějším zahraničním titulům v této oblasti matematické literatury patří knihy [7] a [8]. Konečně zájemce o úlohy „nejtěžšího kalibru" upozorňuji na tématicky zaměřenou sbírku úloh [4], v níž její autor zúročil své mnohaleté zkušenosti s tréninkem německého reprezentačního družstva pro každoroční mezinárodní matematickou olympiádu.

Literatura

[1] Hecht, T., Sklenáriková, Z., *Metódy rešenia matematických úloh.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1992.

[4] Obarvení odpovídá rozdělení *objektů* (čísel) do *skupin* (stejně obarvených čísel). Obecně se Dirichletův princip formuluje nejčastěji pro $nk+1$ objektů, rozdělených do k skupin: tvrdíme, že pak v některé skupině je alespoň n objektů.

[5] Chcete-li sebe nebo své žáky učit *umění* řešit matematické úlohy, buďte v první řadě trpěliví a nepospíchejte se čtením vytištěných řešení, aniž se nejprve nepokusíte úlohu sami vyřešit. Nelitujte času ani na úvahy o tom, proč se vám případně nepodařilo vzít úlohu „za správný konec".

[2] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J., *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno, 1989 a 1996. (Anglický překlad *Equations and Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 2000.)

[3] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J., *Metody řešení matematických úloh II.* Masarykova univerzita, Brno, 1991 a 2004. (Anglický překlad *Counting and Configurations*, Springer-Verlag, New York, 2003.)

[4] Engel, A., *Problem-Solving Strategies.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] Kolektiv autorů, N*-tý ročník Matematické olympiády.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, $1952 + N$ pro $1 \leqq N \leqq 40$.

[6] Larsen, L., *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983. (Slovenský překlad *Metody rešenia matematických problémov*, Alfa, Bratislava, 1990.)

[7] Lozansky, E., Rousseau, C., *Winning Solutions.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[8] Krantz, S., *Techniques of Problem Solving.* American Mathematical Society, Providence, 1997.

[9] Pólya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning.* (ve dvou dílech) Princeton University Press, Princeton, 1954. (Ruský překlad *Matěmatika i pravdopodobnyje rassužděnija*, Nauka, Moskva, 1975.)

[10] Pólya, G., *How to Solve It.* Doubleday, New York, 1957. (Nověji Princeton University Press, Princeton, 1988, ruský překlad *Kak rešat'zadaču*, Nauka, Moskva, 1961.)

[11] Pólya, G., *Mathematical Discovery* (ve dvou dílech) John Wiley and Sons, New York, 1962 a 1965. (Ruský překlad *Matěmatičeskoje otkrytije*, Nauka, Moskva, 1976.)

Matematické časopisy v práci s talenty

Jaroslav Švrček[1]

Abstrakt. V příspěvku jsou soustředěny základní informace o matematických časopisech z celého světa, které jsou zaměřeny na práci s matematickými talenty. Tyto časopisy mohou využívat ve své práci s matematickými talenty učitelé matematiky našich středních i základních škol.

[1] *PřF UP Olomouc, svrcek@inf.upol.cz*

Abstract. This article presents a list of mathematical journals from all over the world which focus on the work with mathematically gifted students. They can be used by mathematics teachers at primary and secondary schools in their work.

Práce s matematickými časopisy představuje pro každého učitele matematiky jeden ze zdrojů nových podnětů a užitečné inspirace při práci s našimi matematicky talentovanými žáky. Zejména se to týká nově publikovaných příspěvků a dále pak specializovaných úlohových rubrik v těchto časopisech. V současné době mají učitelé matematiky navíc (díky Internetu) stále větší možnost nacházet další inspiraci pro svou práci rovněž na specializovaných Internetových stránkách. Některé světové matematické časopisy přitom vycházejí vždy v jisté mutaci na příslušných stranách Internetu.

Cílem tohoto příspěvku je seznámit učitele matematiky s nejznámějšími matematickými časopisy na celém světě, které lze využívat při práci s matematickými talenty na našich středních i základních školách. Následující informace o matematických časopisech pro učitele středních a základních škol si však v žádném případě nemůže činit nároky na úplnost. Jde pouze o výčet (autorovi) známých a dostupných časopiseckých titulů.

Česká republika a Slovensko

1. Rozhledy matematicko–fyzikální (vychází od roku 1921 – původně jako Rozhledy matematicko–přírodovědecké, JČMF)
2. Matematika–fyzika–informatika (pod jinými názvy od roku 1946, JČMF)
3. Učitel matematiky (od roku 1991)
4. Matematické obzory (JSMF, Nadace Jura Hronca)

Evropa

1. POLSKO: Matematyka, Delta, Miniatury matematycze, (Gradient)
2. NĚMECKO: Alpha, Mathematik in der Schule
3. RAKOUSKO: Wissenschaftliche Nachrichten
4. MAĎARSKO: KöMaL (Középiskolai Matematikai és Fyzikai Lapok), Matematika Tanitása
5. RUSKO: Kvant, Matěmatika v škole
6. UKRAJINA: Matěmatika v školach Ukrainy
7. GRUZIE: Integral
8. MOLDAVSKO: Foaie matematică
9. RUMUNSKO: Gazeta Matematică, Revista de Matematică din Timisoara, Octogon, Romanian Mathematics Magazine atd. (Celkově v Rumunsku vychází dvacet šest matematických časopisů pro střední a základní školy, viz [1].)
10. BULHARSKO: Matematika Plus, Obučenijeto po matematika i informatika, Matěmatičeski forum
11. SRBSKO a ČERNÁ HORA: Tangenta
12. CHORVATSKO: Matematičko fizički list

13. SLOVINSKO: Presek, Obzornik za matematiko in fiziko
14. BOSNA a HERCEGOVINA: Triangle
15. MAKEDONIE: Sigma
16. NIZOZEMSKO: Euclides
17. ITÁLIE: Archimede, Matematica Elementare
18. ŠPANĚLSKO: Siproma
19. VELKÁ BRITÁNIE: The Mathematical Gazette, Mathematics in School

Asie, Amerika, Afrika a Austrálie

1. VIETNAM: Mathematics and Youth
2. INDIE: Bona Mathematica, Samasya
3. SINGAPUR: Mathematical Medley
4. HONGKONG (ČÍNA): Mathematical Excalibur
5. AUSTRÁLIE: Function, Parabola, Sigma, Delta
6. USA a KANADA: Crux Mathematicorum with Mayhem, Math Horizonts, The American Mathematical Monthly, Combinatorics, Mathematics Teacher, Mathematics Magazine, Pentagon, Pi Mu Epsilon Journal a další
7. JAR: Mathematical Digest

Mezinárodní matematické časopisy

1. Mathematics and Infomatics Qaurterly (Singapore)
2. Mathematics Competitions (WFNMC, The Australian Mathematics Trust, Canberra)

Literatura

[1] Berinde, V., Pop, M. S., Serdean, V., Balasz, I., Ticală, C., *Journals of Mathematics Education and Elementary Mathematics in Romania.* Cub Press 22, Baia Mare, 2004.

[2] Konjagin, S. V. a kol., *Zaruběžnyje matěmatičeskije olimpiady.* Nauka, Moskva, 1987.

[3] Rabinowitz, S. (ed.), *Index to Mathematical Problems 1980-1984.* MathPro Press, Westford, Massachusetts, 1992.

Matematika – fyzika – sport

Ivo Volf[1]

Abstrakt: Matematické disciplíny si často vystačí svým obsahem a metodami samy pro sebe. Školní předmět matematika by však byl pro žáky málo zajímavý, protože by se sami nevyrovnali s pochopením potřebnosti matematiky pro život. Proto potřebujeme žáky nejprve motivovat, aby přijímali matematické poznatky, osvojili si je a na závěr dokázali aplikovat do běžného života. Motivovat i aplikovat je vhodné na situacích, které jsou žákovi blízké. Příspěvek se zabývá sportovními situacemi; k reálné situaci je třeba vytvořit fyzikální a poté matematický model, ve kterém potom pracujeme.

Abstract: The mathematical content and methods are often applied only in the mathematical disciplines themselves. School mathematics, however, should be interesting for pupils as they often do not understand the necessity of mathematics for everyday life. Therefore, pupils must be first motivated to accept mathematical knowledge, grasp it and finally apply in everyday life. To this goal, situations which are close to the pupil should be used. The contribution deals with sport situations. There is a real situation for which a physical and later mathematical model must be made and solved.

Naše školství bývá v současnosti kritizováno, ať už vlastními či zahraničními experty, že příliš přeceňuje systém informací a nedoceňuje tvořivou práci žáků s nimi. Množství informací se neustále zvětšuje a vyžaduje větší kapacitu paměti na jejich zapamatování – na jejich utřídění a uložení. Přitom experti tvrdí, že na tuto činnost má žák k dispozici mnoho prostředků – encyklopedie, počítače, Internet – a škola se má více zabývat použitím informací k řešení problémů a zaměřit se na získávání obecných dovedností nutných k rozvoji tvořivosti. Tato tvrzení vypadají zajímavě nejen z praktické stránky, ale i didakticky, neboť by mohla vést k zásadním změnám v našem školství.

Zcela paradoxně se však v posledních letech v našem (a nejen v našem) školství zdůrazňují především humanitní předměty, jejichž výuka je právě založena na soustavě informací: kdy, kdo, kde... Typickým školním předmětem je historie nebo literatura, v nichž převažují fakta, a úspěšným je ten žák, který má dobrou paměť. Není přece logické řešit v dějepisu problémové otázky typu: co by bylo, kdyby... Nacházení vztahů a souvislostí vyžaduje značnou poznatkovou základnu, a tu představuje dostatečně velký soubor informací a soubor operací, nutných k jejich vyhledávání, uspořádání a používání. Je jasné, že zásady tvořivosti a logického myšlení nelze učit bez faktického materiálu, jako nelze naučit plavat bez vody nebo operovat bez řízené praxe. Bez informací nelze nacházet souvislosti, eventuálně nutné funkční závislosti. Avšak ani vychovávat nelze bez informací a určitého souboru řemeslných dovedností, a např. současná didaktika výtvarné

[1] *UHK, Hradec Králové, ivo.volf@uhk.cz*

výchovy proto sjednocuje vlastní tvorbu žáků s jejich recepcí systému poznatků, včetně setkávání s uměním.

Jsou však disciplíny, u nichž vystačíme s určitou minimální výbavou dovedností, které můžeme aplikovat na velký počet jednotlivostí, a informací, jejichž logický systém je založen na několika základních výchozích bodech. Příkladem může být matematika. Soustava poznatků např. o trojúhelníku může v planimetrii obsahovat nevelký počet základních informací, týkajících se určujících prvků trojúhelníku a jednoduchých vztahů. Potom můžeme vyjmenovat alespoň 80 různých zadání - výchozích podmínek, které pro žáka základní či střední školy představují problémové situace, jejichž řešením dokáže šikovný žák trojúhelník sestrojit pomocí pravítka a kružítka. Obdobná situace nastane i při řešení rovnic či nerovnic. Úspěch při řešení problémů je podmíněn včasným přílivem poměrně malého počtu dodatkových informací a tento úspěch podmiňuje kladnou motivaci žáka¶ Snad i proto mají žáci k matematice vztah kladnější než např. k fyzice, ale současně horší než k dějepisu, v němž je úspěch dnešního žáka budován pouze na dobré paměti.

Řešit matematické problémy pouze matematickými prostředky vede však k situaci, kdy středoškolákům zůstává praktické využití jejich poznatků nedostupné, nechápou příliš možnosti aplikace matematických abstrakcí pro život. Matematické učivo se tak pro ně vzdaluje od reality a o vyučovací předmět matematika ztrácejí postupně zájem. Bez pozitivního postoje nejsou žáci schopni pochopit obtížnější části učiva a zejména tvořivě využívat matematického poznání a způsobů poznávání pro praktický život. Domnívám se, že potom ani tak lákavé aplikace matematiky jako finanční počty nebo kombinatorika nenajdou u žáků své místo. Je tedy třeba hledat nové cesty využívání matematických poznatků a dovedností. Jednou z nich je matematické modelování skutečnosti, práce s tímto modelem a řešení problémů v modelových situacích.

Vytvoření matematického modelu, umožňujícího jednodušší cestu k řešení problému z reality, však není možno budovat jen na slovním popisu výchozí situace bez náležité kvantifikace. Práce s modelem vyžaduje na žákovi vstoupit do problému, najít vnitřní vztahy mezi jednotlivými komponentami. Tady často přináší úspěch vytvoření fyzikálního modelu, který realitu popisuje pomocí vhodných fyzikálních veličin. Fyzikální vztahy bývají často více konkrétní a vyvolávají představy žáků spíše než vrcholné matematické abstrakce (žák spíše pochopí, že když danou trasu projede automobil větší rychlostí, pak doba bude kratší, než matematickou formulaci $y = k/x$).

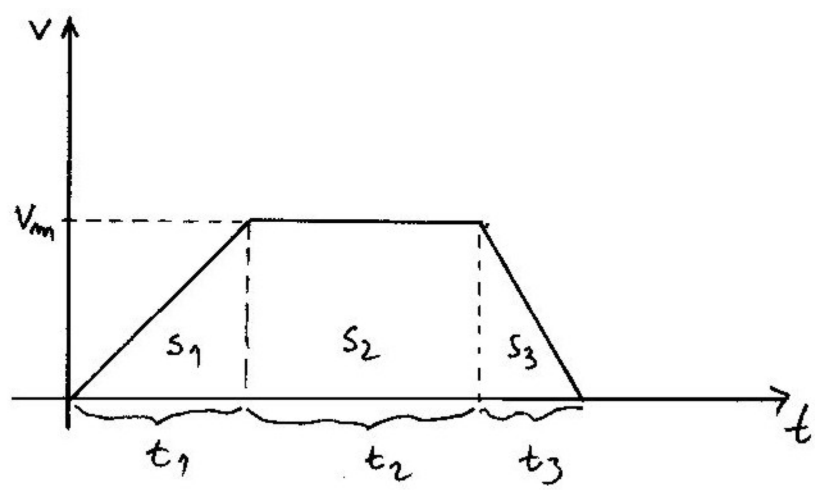
Cestu k vytvoření matematického modelu lze popsat jednoznačně:

Realita → obecný popis reality → odborný popis reality → veličinový popis reality → fyzikální model → matematický model → práce v matematickém modelu → důsledky a výsledky → konfrontace s realitou → závěr úvah, přijetí výsledku, úprava nebo oprava modelu.

Mezi reálným světem a jeho matematickým modelem se tedy často neobejdeme bez fyzikálního zpracování: bez odborného fyzikálního popisu, používajícího fyzikální veličiny, jež vhodnou kvantifikaci umožňují; je nutno měřit a výsledky měření zpracovat. Současně právě tato fyzikalizace vede k možnostem zjednodušování v popisu reality, k vyslovení omezujících podmínek, za nichž je možno problémy z reality zjednodušeně řešit. Tady lze objevit odpověď na otázku, proč je matematika vnímána řadou středoškoláků jako jednodušší školní vyučovací předmět, než je fyzika: matematika pracuje již s abstrakcemi, ale fyzika se musí nejprve poprat s realitou (kdysi mi jeden významný český didaktik fyziky prozradil odpověď své dcery, když se jí ptal, jak se jí studuje z jeho středoškolské učebnice: „Tati, fyzika je vlastně taková otravná matika.“) a teprve pak dospěje k modelu.

Pro vytvoření matematického modelu je didakticky velmi vhodná geometrická nebo grafická interpretace. Matematický model např. jednoduchého mechanického pohybu vlaku metra mezi dvěma stanicemi, kdy se vlak nejprve po dobu t_1 rozjíždí, až dosáhne maximální rychlosti, tou jede po dobu t_2 a pak zastavuje po dobu t_3, vznikne tak, že nejprve reálné pohyby nahradíme pohyby ideálními, jež dokážeme jednoduše matematizovat, a z obr. 1 vidíme, jak si můžeme představit pohyb vlaku metra, včetně „uvnitř modelu skrytých“ poznatků:

$$s_1 = \frac{1}{2} v_m t_1, \quad s_2 = v_m t_2, \quad s_3 = \frac{1}{2} v_m t_3$$



Obr. 1

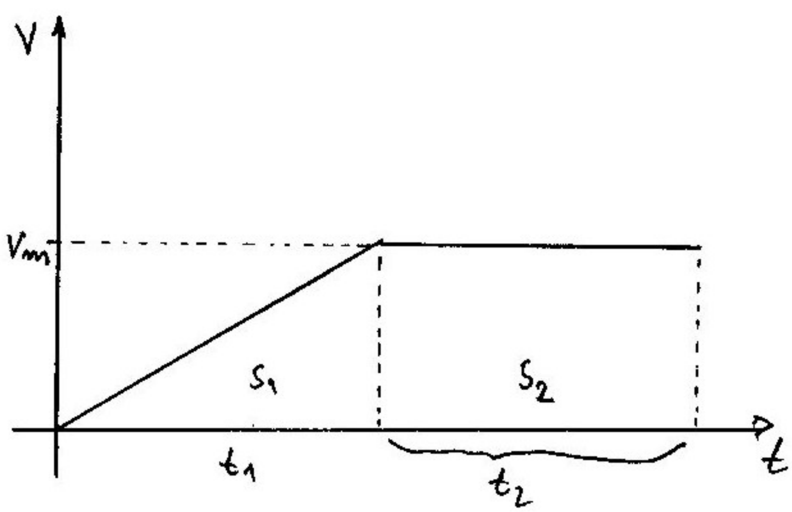
Je třeba sledovat i opačnou cestu: realita poskytuje pro matematiku řadu vhodných motivací, na kterých je vybudováno fyzikální poznávání, jež je podpořeno odpovídajícími matematickými modely. Takovým motivačním polem pro výuku fyziky i matematiky mohou být různé sportovní činnosti. Je známo, že většina středoškolských studentů má ráda sport, a proto předpokládejme, že teoretické zpracování sportovní problematiky zaujme i mnoho z těch žáků, kteří se sportování aktivně věnují. Řadu pozitivních zkušeností jsem získal i při práci studentů tělocvikářů na UHK, kde přednáším předmět Biomechanika tělesných cvičení, jež je založen právě na vytvoření fyzikálních a matematických modelů. Svědčí o tom skutečnost, že po absolvování povinného semestrálního kursu si asi polovina studentů zapisuje následný volitelný seminář.

Zejména v případech, kdy zadané problémy se na první pohled zdají být neřešitelné nebo vzbuzují u žáků obavy, že se jim problém nepodaří vyřešit bez náležitého úsilí či na jeho řešení spotřebují příliš svého času, mohou dospět k přesvědčení, že matematický model je pro řešení užitečný, a začnou se k němu uchylovat i v jiných situacích. Ukažme si proto několik úloh, u nichž je matematický model východiskem pro pochopení i pro řešení.

Úloha 1. *Sprintér na krátké tratě*

Sprintér běží na trati o délce 100 m tak, že prvních 32 m po startu zrychluje a uběhne je za dobu 5,0 s a potom až do cíle běží stálou rychlostí. Jakého času dosáhl?

Řešení: Sestrojíme graf $v(t)$ (obr. 2), v němž z obsahu $s_1 = \frac{1}{2}v_m t_1$ trojúhelníku určíme největší rychlost $v_m = \frac{2s_1}{t_1} = 12$ m/s a z obsahu $s_2 = v_m t_2$ obdélníku určíme dobu $t_2 = \frac{s_2}{v_m} = 5{,}31$ s. Celková doba běhu sprintéra je $t_1 + t_2 = 10{,}31$ s.



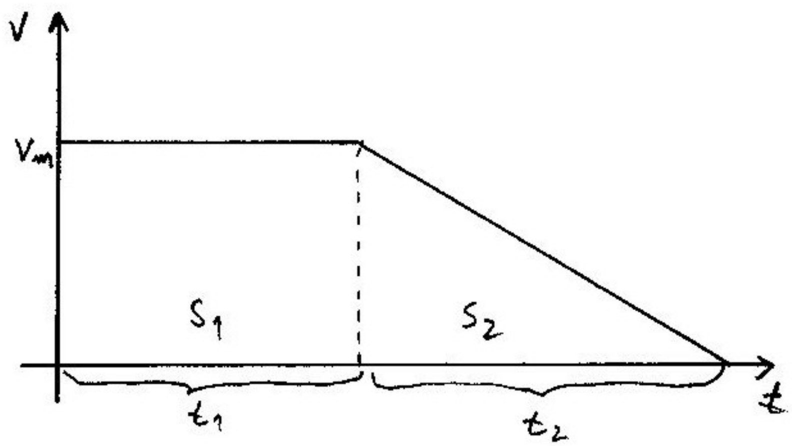
Obr. 2

Úloha 2. *Letmý start*

Na bicyklových závodech na trase 1 000 m s letmým startem urazil mladý cyklista trasu za dobu t_1 a potom na dráze 240 m rovnoměrně zastavoval po dobu $t_2 = 30$ s. Jakého času dosáhl cyklista?

Řešení: Sestrojíme graf $v(t)$ (obr. 3). V něm z obsahu s_1 obdélníku určíme dobu $t_1 = \frac{s_1}{v_m}$; ale neznáme rychlost v_m, kterou určíme z obsahu $s_2 = \frac{1}{2}v_m t_2$ trojúhelníku, takže $v_m =$

$= 2\frac{s_2}{t_2} = 16$ m/s. Potom $t_1 = 62{,}5$ s. Cyklista dosáhl na dráze 1 000 m času 62,5 s.

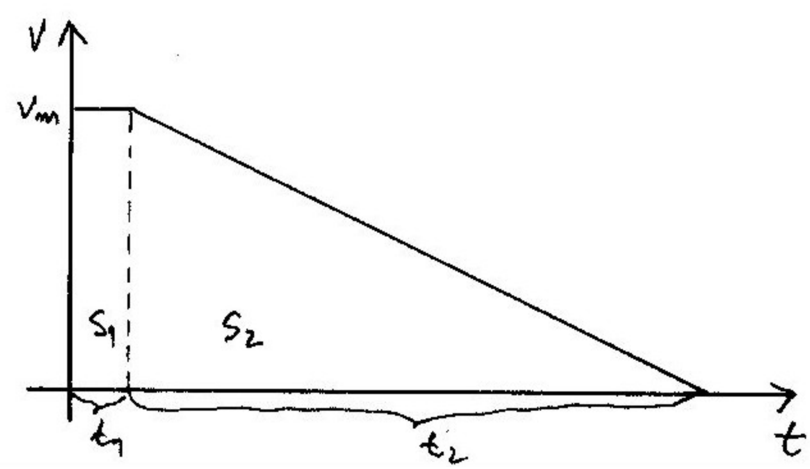


Obr. 3

Úloha 3. *Kobra 11*

V televizním seriálu Kobra 11 jede neukázněný řidič po dálnici stálou rychlostí 162 km/h, když v dálce spatří hromadnou havárii. Od „okamžiku spatření“ do okamžiku, kdy brzdy začnou reálně brzdit, uplyne doba $t_1 = 1{,}2$ s, pak se automobil rovnoměrně zpomaluje tak, že každé 2,0 s se jeho rychlost zmenší o 10 m/s. Podaří se mu zastavit včas, je-li vzdálen od místa havárie 260 m?

Řešení: Sestrojíme graf $v(t)$ (obr. 4). Po dobu t_1 jede automobil rovnoměrně, takže $s_1 = v_m t_1 = 54$ m. Potom zastavuje na dráze $s_2 = \frac{1}{2} v_m t_2$; dobu t_2 lze vyčíst z grafu $v(t)$ nebo určit z rovnice $v = v_m - at_2$, kde $a = 5$ m/s^2. Odtud je $t_2 = 9{,}0$ s a $s_2 = 203$ m. Celková dráha nutná k zastavení je $s = 257$ m, takže stačí zastavit jen tak tak.



Obr. 4

Na tomto místě je vhodné upozornit i na další práci s matematickým modelem:

a) Co se stane, když řidič pojede větší rychlostí?

b) Co se stane, když nebude řidič dostatečně pozorný ($t_2 > 1{,}2$ s)?

c) Co se stane, když brzdy nebudou dobře seřízené (za 2 s se rychlost zmenší o 9,0 m/s)?

d) Co se stane, když řidič pojede menší rychlostí?

Úloha 4. *Lyžař na dlouhém svahu I*

Po dlouhém svahu délky 2 400 m a o rozdílu nadmořských výšek (start, cíl) $\Delta h = 1\,200$ m jede lyžař. Jak velké rychlosti dosáhne, neuvažujeme-li tření během jízdy?

Řešení: Nahradíme skutečný svah modelem - nakloněnou rovinou o stálém sklonu p, $p = \frac{\Delta h}{s} = \sin\alpha$. Potom z pohybové rovnice

$$F_p = ma = mg\sin\alpha = mgp$$

určíme zrychlení $a = 0{,}5g \doteq 5{,}0$ m/s^2. Lyžař za dobu t urazí dráhu $s = \frac{1}{2}v_m t$ a dosáhne rychlosti $v_m = at$, odkud

$$v_m = \sqrt{2as} = \sqrt{2gsp}.$$

Pro dané hodnoty je $v_m = 155$ m/s, doba pohybu po trase je $t = 31$ s.

Oba výsledky jsou zřejmě nereálné (na trase lyžař dosáhne rychlosti 110 km/h až 130 km/h, doba bývá značně vyšší než 1 min). Musíme tedy hledat lepší matematický model, zahrnující jiné zjednodušující podmínky.

Úloha 5. *Lyžař na dlouhém svahu II*

V předchozí úloze zrušíme podmínku o tom, že tření je velmi malé a nahradíme: součinitel smykového tření skluznice při pohybu po sněhu je $f = 0{,}07$.

Řešení: Sice se změní zrychlení na $a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, ale naše výsledky budou opět nereálné: $a = 4{,}4$ m/s^2, $v_m = 145$ m/s. Zde bude $t > 33$ s.

Úloha 6. *Lyžař na dlouhém svahu III*

Při pohybu lyžaře v úloze 4 je nutno uvážit podstatný vliv odporu vzduchu. Pro odporovou sílu platí $F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde v je velikost okamžité rychlosti, hustota suchého vzduchu $\rho = 1{,}20$ kg/m^3, obsah kolmého řezu lyžaře $S \doteq 0{,}70$ m^2 a odporový součinitel $C = 0{,}70$. Jaké maximální rychlosti lyžař na uvedeném kopci dosáhne?

Řešení: Pohybová rovnice pro lyžaře je

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

neboť smykové tření ovlivňuje pohyb lyžaře jen nepatrně. Uvážíme-li, že $a = \frac{dv}{dt}$, potom máme před sebou diferenciální rovnici, jejíž řešení je pro středoškoláka dosti obtížné. Vidíme však, že s rostoucím časem se rychlost zvětšuje a spolu s ní se zvětšuje i odporová síla proti pohybu. Proto se zmenšuje síla vyvolávající změny pohybu, a tedy i zrychlení lyžaři udělované, až nastane případ, kdy $mg\sin\alpha - F_o$, tedy $a = 0$ m/s^2 a další pohyb lyžaře je již rovnoměrný. To se stane při mezní rychlosti v_m. Pak platí

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{1}{2}CS\rho v^2 = 0,$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg\sin\alpha}{CS\rho}}.$$

Zvolíme-li další údaj $m = 80$ kg, bude $v_m \doteq 37m/s \doteq 133$ km/h, což už je přijatelná hodnota. Zde bude $t > 65$ s.

Úloha 7. *Lyžař na dlouhém svahu IV*

Jak se změní řešení úlohy 6, uvážíme-li také smykové tření?

Řešení: Obecný vztah se změní na tvar

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\rho}},$$

kde po dosazení $v_m \doteq 34{,}6$ m/s $\doteq 124$ km/h.

Úloha 8. *Cyklista jede z kopce*

Při jízdě z kopce absolvoval cyklista trasu 3,0 km dlouhou s výškovým rozdílem 375 m. Neuvažujeme-li valivý odpor při jízdě kola po vozovce, stanovte nejvyšší rychlost dosaženou cyklistou.

Řešení: Ač se to na první pohled nezdá, působí na cyklistu (zanedbáme malý valivý odpor) stejné síly jako na lyžaře z úlohy 6, tedy

$$F_p = mg\sin\alpha,$$

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2.$$

Sklon kopce je $p = \frac{\Delta h}{s} = 0{,}125 = \sin\alpha$, odkud pro zajímavost $\alpha = 7{,}2°$. Pro mezní rychlost lyžaře vychází vztah

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg\sin\alpha}{CS\rho}},$$

do něhož převezmeme hodnoty z úlohy 6, neboť postoj lyžaře, který nešlápne do pedálů a nechá se unášet gravitací, i další údaje se od lyžaře příliš neliší. Po dosazení je $v_m \doteq$ $\doteq 18{,}4$ m/s $\doteq 66{,}4$ km/h. Je zřejmé, že uvážíme-li valivý odpor, bude získaná mezní rychlost ještě menší.

Úloha 9. *Cyklista jede po rovině*

Maximální výkon, jehož může dosáhnout cyklista při jízdě po rovině k pohonu kola po delší dobu, zvolíme 1 000 W. Svalovou silou překonává cyklista především odporovou sílu F_o okolního vzduchu. Jaké maximální rychlosti v může cyklista dosáhnout? Hmotnost cyklisty je $m = 80$ kg, obsah kolmého řezu jeho těla $S = 0{,}7$ m^2, odporový součinitel $C = 0{,}70$, hustota vzduchu $\rho = 1{,}2$ kg/m^3.

Řešení: Výkon cyklisty je dán vztahem

$$P = F_o v = \frac{1}{2} C S \rho v^3,$$

tedy jeho maximální rychlost je

$$v = \sqrt[3]{\frac{2P}{CS\rho}} \doteq 15{,}0\,\text{m/s} = 54\,\text{km/h}.$$

Odhadli jsme i lidské meze pro dlouhodobější jízdu cyklisty po vodorovné silnici; ve skutečnosti musíme počítat s tím, že na výsledek budou mít vliv i další odporové síly snižující mechanický výkon cyklisty. Ale to nám je známo, vždyť pracujeme s modelem.

Úloha 10. *Výsadkář padá*

Výsadkář o hmotnosti $m = 90$ kg i s výbavou vyskočil z vrtulníku ve výšce $h_0 = 1\,000$ m a padá svisle dolů. Určete maximální rychlost, jíž během pádu dosáhne.

Řešení: Tato úloha je velmi vhodná právě pro ukázku diskuse, jak vybraný model ovlivňuje získané výsledky.

Úlohu nejprve vyřešíme pro případ volného pádu, kde odporovou sílu uvažovat nebudeme. Pro rychlost padajícího tělesa potom platí $v = gt$, pro okamžitou výšku $h = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Při dopadu na zemský povrch je $h = 0$, takže je $t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ a pro rychlost dopadu platí

$$v_m = gt = g\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{2gh_0}.$$

Doba pádu z výšky 1 000 m je $t \doteq 14$ s, rychlost dopadu $v \doteq 141$ m/s $\doteq 510$ km/h, tedy údaje zcela nereálné. Matematický (i fyzikální) model byly zvoleny nevhodně.

Uvažme proto odporovou sílu, vznikající při pohybu ve vzduchu. Hustotu vzduchu považujeme za stálou, a to $\rho = 1{,}2$ kg/m^3. Pohybová rovnice je ve tvaru

$$ma = mg - \frac{1}{2} C S \rho v^2,$$

odkud pro mezní rychlost pohybu výsadkáře je

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}.$$

Jestliže se výsadkář strachy schoulí do klubíčka, jeho hmotnost je $m = 90$ kg, odhadneme $S = 0{,}50$ m^2 a $C = 0{,}50$, potom je $v_{m1} \doteq 77{,}5$ m/s $\doteq 280$ km/h.

Jestliže se výsadkář „rozplácne“, roztáhne ruce i nohy, takže je $S = 1{,}1$ m^2 a $C = 1{,}1$, potom je $v_{m2} \doteq 35{,}2$ m/s $\doteq 127$ km/h.

Jestliže výsadkář otevře padák a je $S = 50$ m^2, $C = 1{,}33$, potom pro mezní rychlost je $v_{m3} \doteq 4{,}8$ m/s $\doteq 17$ km/h. Tato rychlost odpovídá dopadu z výšky $h = \frac{v_{m3}^2}{2g} = 1{,}2$ m.

Závěrem shrneme výše uvedené úvahy. Zjednodušováním složité a komplexně vnímané reality dospíváme po vhodném popisu k fyzikálnímu modelu, který poskytuje východisko k modelu matematickému. V tomto modelu vnímáme vnitřní funkční vztahy, které nám dovolují najít jednoduché rovnice, do jisté míry obecné a odpoutané od reality. Jejich řešením dospíváme k přijatelným výsledkům, které by mohly platit za zjednodušujících podmínek. Výsledky jsou tedy hypotézou o skutečném řešení, jež musíme ještě ověřit při jejich konfrontaci s realitou. Neměli bychom zapomenout na to, že je třeba také ověřit, do jaké míry zjednodušující podmínky ovlivnily získaný výsledek, zda jejich malá změna nevyvolá radikální změnu získaného závěru (to souvisí s nutností diskuse řešení). Domnívám se však, že tyto zjednodušené úvahy vedou k obecným zásadám pro matematické řešení problémů, a tedy k tomu, že řešení matematických úloh spoluvytváří obecnější kompetence řešení problémů ve všech oblastech lidské činnosti, zejména svou přísnou logičností a uvědoměním si, že pracujeme vždycky s modelem.

Literatura

[1] Volf, I., *Metodika řešení úloh ve středoškolské fyzice.* MAFY, Hradec Králové, 1997.

[2] Volf, I., *Metodika řešení úloh ve výuce fyziky na základní škole.* MAFY, Hradec Králové, 1998.

[3] Volf, I., *Fyzika je všude kolem nás.* MAFY, Hradec Králové, 2001.

[4] `http://pdf.uhk.cz/kfyi/teloc.htm`

Krátké příspěvky

Pár příkladů pro premianty

Emil Calda[1]

Abstrakt: V příspěvku jsou vyřešeny tři úlohy. První je zajímavou aplikací z teorie grafů týkající se obarvování uzlů grafu. Druhá procvičuje důkaz matematickou indukcí na síti jednosměrných silnic a třetí se zabývá počtem telefonních hovorů, které stačí k předání informací mezi daným počtem účastníků.

Abstract: Three problems are solved in the article. The first is an interesting application of graph theory which concerns colouring nodes of a graph. The second practises a proof by mathematical induction on a net of one-way roads and the third deals with a number of telephone calls which are sufficient to pass information among a given number of participants.

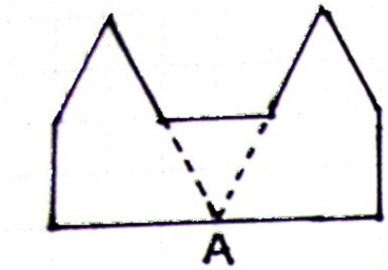
V názvu tohoto příspěvku jsem dal přednost „příkladům" před „úlohami" ze dvou důvodů. Jednak kvůli tomu, že slovo „příklad" začíná stejným písmenem jako zbývající tři slova v tomto názvu, jednak proto, aby premianta, který je zvyklý na „ůlohy" slovo „úlohy" nezaskočilo. Jedná se o příklady, které jsem publikoval už dříve v Učiteli matematiky (první dva) a v Rozhledech MF (třetí). Od této doby však již uplynulo několik let, takže mladší generaci pedagogů nemusí být známy. Doufám, že ti, kteří je znají, si je rádi připomenou.

Příklad 1. *Problém obrazové galerie*

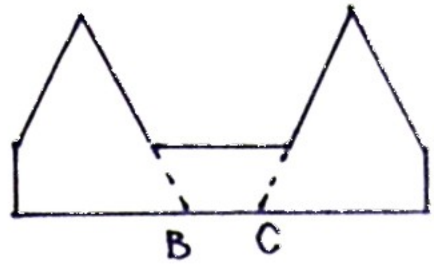
O obrazové galerii vzniklé propojením několika místností ležících v tomtéž podlaží víme, že její půdorys je n-úhelník, u něhož známe číslo n, ale o jeho tvaru žádné informace nemáme (může být i nekonvexní). Máme určit, kolik zřízenců stačí k tomu, aby každá z n stěn, na nichž jsou umístěny obrazy, byla pod dohledem aspoň jednoho; předpokládáme přitom, že každý zřízenec má pod dozorem i obrazy na té stěně, jejíž rovina jím prochází. Pro ilustraci: v osmiúhelníku na obr. 1 stačí jeden zřízenec (umístěný do bodu A), v osmiúhelníku na obr. 2 se však s jedním nevystačí – musí být aspoň dva, třeba v bodech B a C.

Premianty, s nimiž budeme tento příklad řešit, můžeme vyzvat, aby se pokusili najít tvar půdorysu pro $n = 8$, u kterého by dva zřízenci nestačili. Za nalezení tohoto osmiúhelníku jim klidně slíbíme cokoliv, protože nemusíme mít žádné obavy, že se jim to

[1] *MFF UK, Praha, ecalda@volny.cz, calda@karlin.mff.cuni.cz*



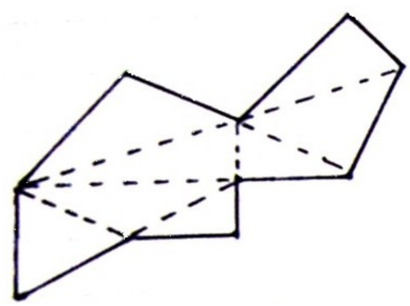
Obr. 1



Obr. 2

podaří. Dokážeme totiž následující tvrzení, v němž číslo v hranatých závorkách znamená jeho celou část:

K uhlídání všech obrazů na n stěnách galerie stačí $[n/3]$ zřízenců.



Obr. 3

Mějme tedy libovolný n-úhelník představující půdorys obrazové galerie a proveďme jeho triangulaci, tj. rozložme ho na disjunktní trojúhelníky, jejichž strany jsou tvořeny jeho úhlopříčkami a stranami (obr. 3). Dá se dokázat (viz [1]), že platí:

Nejmenší počet barev, kterými jsou obarveny všechny vrcholy triangulovaného n-úhelníku tak, že v každém trojúhelníku tohoto rozkladu mají každé dva vrcholy jinou barvu, je roven třem.

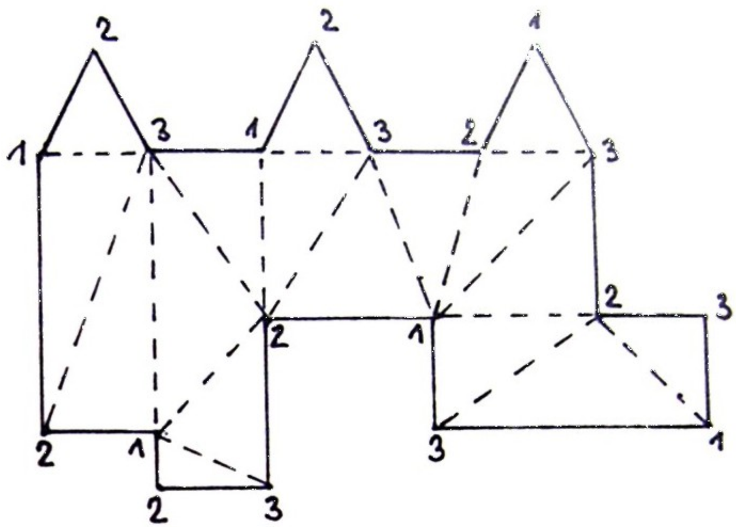
Všimněme si dále, jakou vlastnost mají všechna obarvení n bodů třemi barvami. Po několika pokusech můžeme vyslovit a pak i dokázat větu:

V každém obarvení n bodů třemi barvami existuje aspoň jedna barva, kterou je obarveno nejvýše $[n/3]$ bodů.

Z negace tohoto tvrzení (existuje obarvení n bodů třemi barvami, v němž je každou barvou obarveno aspoň $[n/3] + 1$ bodů) plyne, že v tomto obarvení je všech obarvených bodů aspoň $3([n/3]+1)$, což je spor, neboť toto číslo je větší než počet obarvených bodů:
$$3([n/3] + 1) = 3[n/3] + 3 > n.$$

Obarvíme-li nyní všechny vrcholy triangulovaného n-úhelníku představujícího půdorys obrazové galerie třemi barvami tak, že v každém „rozkladovém“ trojúhelníku mají každé dva vrcholy jinou barvu, pak – jak už víme – existuje nejvýše $[n/3]$ vrcholů obarvených stejně, přičemž v každém „rozkladovém“ trojúhelníku je právě jeden. Dozorce umístěný do každého z těchto bodů bude mít pod dohledem všechny strany svého trojúhelníku, takže dozorci ve všech bodech obarvených touto barvou budou mít pod kontrolou všechny strany všech trojúhelníků, a tedy i všechny strany daného n-úhelníku.

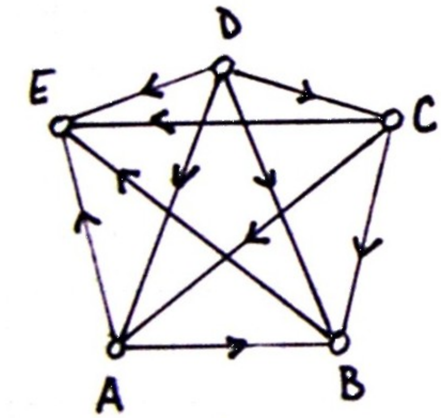
Tím je dokázáno, že $[n/3]$ zřízenců k ohlídání všech obrazů na n stěnách galerie stačí, ať má její půdorysný n-úhelník jakýkoli tvar. Pro ilustraci: na obr. 4 je půdorys galerie pro $n = 19$, jeho vrcholy jsou obarveny barvami 1, 2, 3; k ohlídání obrazů na všech stěnách stačí $[19/3] = 6$ zřízenců umístěných ve vrcholech obarvených barvou 1 nebo 3.



Obr. 4

Příklad 2. *Silniční síť ve Švambránii*

Ve Švambránii je n měst ($n \geq 2$) a každá dvě jsou spojena jedinou silnicí, která však je jednosměrná. Máme ukázat, že v každé silniční síti tohoto typu existuje aspoň jedno město, které je výchozím bodem trasy, na níž se každé ze zbývajících měst nachází právě jednou. Pro ilustraci: na silniční síti znázorněné na obr. 5 je tímto městem město D a příslušná trasa je D–C–A–B–E. (Silniční síť tohoto typu může mít některé nepříjemné vlastnosti – v síti na obr. 5 nemůže motorista dojet do města D a z města E nemůže vůbec vyjet.)

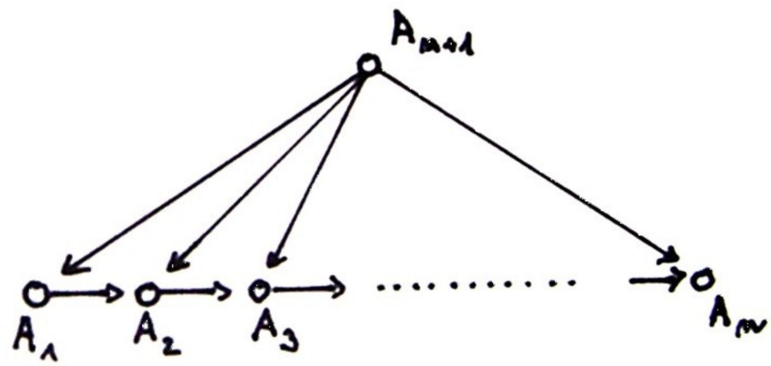


Obr. 5

Požadovaný důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu měst.

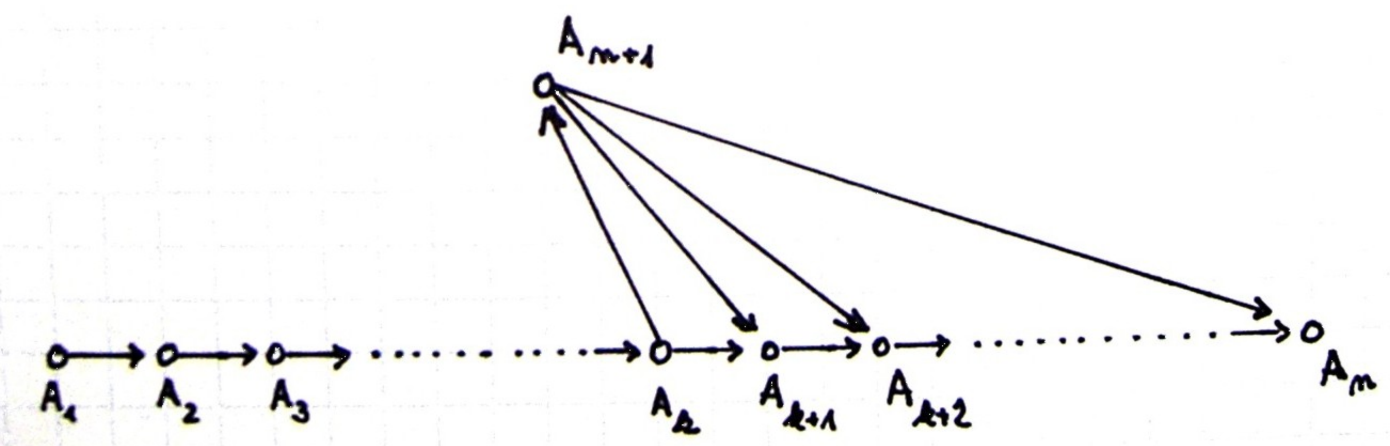
Pro $n = 2$ věta evidentně platí. Budeme proto předpokládat, že platí pro libovolné číslo $n > 2$ a že hledaná trasa je $A_1 - A_2 - \ldots - A_n$. Připojíme město A_{n+1} a dokážeme, že tato věta platí i pro $n + 1$ tak, že rozlišíme dvě možnosti, které mohou nastat:

a) Všechny silnice spojující město A_{n+1} s ostatními jsou jednosměrné ve směru z A_{n+1}. V tomto případě je výchozím městem město A_{n+1} a trasa požadované vlastnost je trasa $A_{n+1} - A_1 - A_2 - \ldots - A_n$ znázorněná na obr. 6.



Obr. 6

b) Existuje aspoň jedna silnice spojující město A_{n+1} s ostatními, která je jednosměrná ve směru do A_{n+1}. Znamená to, že lze najít město A_k, z něhož vede jednosměrná silnice do A_{n+1}, přičemž všechny cesty spojující město A_{n+1} s městy $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ jsou jednosměrné ve směru z A_{n+1}. V tomto případě je výchozím městem město A_1 a trasa požadované vlastnosti je $A_1 - A_2 - A_3 - \ldots - A_k - A_{n+1} - A_{k+1} - A_{k+2} - \ldots - A_n$ znázorněná na obr. 7.



Obr. 7

Tím je úloha o švambránské silniční síti vyřešena. Poznamenejme na závěr, že úlohu není nutné zadávat výše uvedeným způsobem, tj. hned na začátku premiantům sdělit, co mají dokázat. Mohli by na úvod kreslit různé silniční sítě, pokusit se zjistit jejich společnou vlastnost a teprve pak přejít k důkazu.

Příklad 3. *Problém Klubu pro vzájemnou komunikaci a šíření zaručených zpráv*

Uvedený klub má n členek ($n \geq 2$), které si na sklonku každého dne zatelefonují, aby se každá dověděla všechny události, které se během dne dověděla každá ze zbývajících. Máme určit počet $f(n)$ telefonních hovorů, které k tomu stačí.

Snadno zjistíme, že je $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$. Ukážeme, že pro $n > 4$ platí $f(n) = 2n - 4$. Zvolíme čtyři členky A, B, C, D a necháme jednu z nich, třeba dámu A, zavolat postupně každé z $n - 4$ členek zbývajících; proběhne $n - 4$ hovorů, po jejichž skončení bude dáma A vědět všechno, co ví každá z těchto $n - 4$ kolegyň. Poté si navzájem zavolají dámy A, B, C, D – jak už víme, stačí jim čtyři hovory k tomu, aby se informovaly o tom, co ví každá. Po těchto čtyřech hovorech budou už dámy A, B, C, D vědět všechno, co ví všech n členek, takže stačí, aby jedna z nich – třeba opět A – zavolala znovu každé z $n - 4$ kolegyň, kterým telefonovala na začátku. Po skončení této akce bude už každá dáma informována o všem, co vědí ostatní. Zjistili jsme tak, že počet hovorů, které ke vzájemné informovanosti stačí, je pro všechna $n > 4$ roven $f(n) = (n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$. Snadno ověříme, že tento výsledek platí i pro $n = 4$.

Nejednoho premianta však určitě napadne, zda pro $n \geq 4$ nevystačíme s počtem hovorů menším než $2n - 4$. Dá se dokázat, že nikoli: $2n - 4$ je nejmenší počet hovorů, které musí ke vzájemné informovanosti všech $n \geq 4$ účastníků proběhnout. V souladu s pedagogickou zásadou „Žákům nejenže nesdělujeme, co všechno nevíme, ale v některých případech ani to, co víme“, toto tvrzení o nejmenším počtu hovorů nedokážeme, ale přenecháme jeho důkaz čtenářovým premiantům.

Literatura

[1] Calda, E., Problém obrazové galerie. *Učitel matematiky*, roč. 10, č.3 (43), 2002.

[2] Calda, E., Dvě úlohy o silniční síti ve Švambránii. *Učitel matematiky*, roč. 9, č. 1 (37), 2000.

[3] Calda, E., Problém Klubu pro vzájemnou komunikaci a šíření zaručených zpráv. *Rozhledy MF*, roč. 73, č. 3, 1996.

Možnosti statistické analýzy obtížnosti a kvality úloh soutěže Matematický klokan[1]

Jakub Fischer[2]

Abstrakt: Článek se zabývá aplikací obecně známých nástrojů vyhodnocování obtížnosti a kvality úloh na úlohy jednotlivých kategorií Matematického klokana. Je sledována tzv. citlivost (diskriminace) úlohy na základě její obtížnosti pro žáky, kteří se umístili v soutěži nejlépe, oproti těm, kteří se umístili nejhůře, jakož i z hlediska posouzení lineární závislosti mezi umístěním v soutěži a výsledkem v dané úloze. Hodnocení kvality úloh je ilustrováno na dvou konkrétních úlohách. Celá analýza je provedena na vzorku žáků Základní školy Uhelný trh, Praha na úlohách Matematického klokana roku 2004.

Abstract: The article deals with the application of generally known tools of evaluation of the difficulty and quality of a tasks on tasks from categories of Mathematical Kangaroo. So called sensitivity (discrimination) of the task is followed on the basis of its difficulty for pupils who had the best results in the competition as opposed to those who had the worst ones and also from the point of view of evaluation of linear dependency between the result in the competition and the result in the given task. The evaluation of the quality of tasks is illustrated on two tasks. The whole analysis is done on a sample of pupils from Primary school Uhelný trh, Prague, on tasks from Mathematical Kangaroo in 2004.

Úvod

Řadu let v České republice probíhá mezinárodní soutěž Matematický klokan, jíž se v pěti kategoriích pravidelně účastní kolem čtvrt miliónu českých žáků a studentů (viz [7]). Kromě vyhodnocení pořadí nejlepších účastníků v každé kategorii (na úrovni krajské a republikové) jsou plošně zjišťovány informace o četnostech bodových zisků účastníků (z čehož jsou pak na republikové úrovni sestavovány a publikovány tabulky a histogramy četností) a dále pak ve vybraném kraji statistiky jednotlivých úloh. Zde jsou za každou úlohu zjišťovány četnosti (počet žáků, kteří danou úlohu vyřešili správně; počet žáků, kteří danou úlohu vyřešili chybně; počet žáků, kteří danou úlohu neřešili). Cílem uvedeného příspěvku je ukázat na další možnosti analýzy úloh Matematického klokana.

V první části připomeneme obvyklé přístupy k testování úloh, v části druhé se budeme věnovat metodice aplikace těchto přístupů na úlohy Matematického klokana. Ve třetí části představíme výsledky analýzy na vybraném datovém souboru a v části čtvrté shrneme možnosti a omezení naznačené analýzy.

[1]Autor děkuje za spolupráci při zpracování dat pro tento příspěvek panu Janu Hučínovi.

[2]*Česká spořitelna, a.s. Chair, a FIS VŠE, Praha, fischerj@vse.cz*

Testování úloh

U testových úloh je obvykle předmětem zájmu jejich obtížnost a citlivost. Připomeňme si oba koncepty (více viz [5]):

Obtížnost úlohy je vyjádřena podílem počtu žáků, kteří danou úlohu vyřešili správně, a celkového počtu žáků. Obtížnost úlohy odvozujeme na základě úspěšnosti (zatímco pojem úspěšnost používáme ve vztahu k populaci, která řešila danou úlohu, pojem obtížnost formálně chápeme jako vlastnost dané úlohy; lze tedy říci, že obtížnost úlohy měříme, přesněji vzato odhadujeme, pomocí úspěšnosti testovaných žáků), přičemž používáme tři dále uvedené koncepty měření úspěšnosti. Poznamenejme, že se v tomto textu s ohledem na jeho omezený rozsah nezabýváme hodnocením úspěšnosti žáka v celém testu (resp. z toho vyplývajícím hodnocením obtížnosti testu), ale jen hodnocením obtížnosti jednotlivých úloh.

Čistá úspěšnost žáka v dané konkrétní úloze je vyjádřena jako podíl počtu žáků, kteří úlohu vyřešili správně (resp. částečně správně) a počtu všech testovaných žáků. Pokud úloha umožňuje částečně správné řešení, počet žáků se upravuje proporcionálně podle toho, kolik bodů z celkového počtu možných bodů za částečně správnou odpověď získali; v případě, že se odečítají body za nesprávnou odpověď, je i *vynechání* úlohy (tj. žádná odpověď) v rámci tohoto konceptu částečně správnou odpovědí.

Korigovaná úspěšnost se od čisté úspěšnosti liší tím, že se neberou v úvahu výsledky těch, kteří na danou úlohu *nedosáhli*. Úloha se u každého jednotlivého žáka považuje za *nedosaženou* tehdy, když žák neřešil ani jednu z úloh po ní následujících (koncept korigované úspěšnosti vychází z předpokladu, že žáci řeší úlohy v pořadí, v jakém jsou uvedeny v testu). Korigovaná úspěšnost je tedy podílem počtu žáků, kteří úlohu vyřešili správně (resp. částečně správně) a počtu žáků, kteří dané úlohy dosáhli.

Hrubá úspěšnost je podíl počtu žáků, kteří úlohu vyřešili zcela správně (získali plný počet možných bodů) a počtu všech testovaných žáků.

Citlivost testové úlohy (diskriminační schopnost) vypovídá o schopnosti úlohy rozlišovat mezi žáky s většími znalostmi a dovednostmi a žáky s menšími znalostmi a dovednostmi. K rozlišení žáků na „lepší“ a „slabší“ se většinou používá jejich celkový výsledek v testu. Vysokou citlivost pak má taková úloha, kterou řeší „lepší“ žáci podstatně úspěšněji než žáci „slabší“. Může se stát, že „slabší“ žáci vyřeší danou úlohu lépe než žáci „lepší“. Tato úloha by v testu neměla být zařazena, navíc zpravidla obsahuje nějakou konstrukční chybu. Diskriminační schopnost je třeba posuzovat v rámci ostatních charakteristik (zejména obtížnosti). Je zřejmé, že zatímco úloha s obtížností (úspěšností) kolem 50 % může mít vysokou diskriminační schopnost, úloha velmi snadná nebo naopak velmi obtížná takovou diskriminační schopnost mít nemůže. Mimochodem i toto je důvodem, proč v *rozlišovacích* testech[3] jsou právě úlohy s obtížností kolem 50 % obecně

[3]Rozlišovacími testy rozumíme testy, jejichž cílem je rozlišit jednotlivé žáky, tj. co nejlépe sestavit pořadí žáků; naproti tomu cílem ověřovacích testů je ověření, zdali žák dosáhl vyžadovaného penza znalostí, schopností či dovedností.

nejvhodnější. Diskriminační schopnost se nejčastěji vyjadřuje třemi způsoby:

Diskriminace RIR je vypočtena jako Pearsonův lineární korelační koeficient mezi skóre dosaženým v dané testové úloze a celkovým skóre v testu (s vyloučením dané úlohy). Nabývá hodnot v intervalu $\langle -1; 1\rangle$. Čím blíže je hodnota krajním mezím, tím silnější je závislost mezi skóre v dané úloze a celkovým skóre s tím, že znaménko odpovídá směru závislosti. Obvykle je formulován požadavek minimální úrovně diskriminace, např. na úrovni 0,25. Čím je hodnota ukazatele diskriminace vyšší, tím je úloha citlivější, a tedy lepší.

Diskriminace je vypočtena jako rozdíl průměrné čisté úspěšnosti skupiny nejlepších a nejhorších žáků. Skupina nejlepších je tvořena 20 % žáků, kteří dosáhli nejlepšího výsledku v celém testu (1. kvintil), skupina nejhorších je analogicky tvořena 20 % nejméně úspěšných žáků (5. kvintil)[4]. Diskriminace vypočtená v procentních bodech teoreticky nabývá hodnot v intervalu $\langle -100; 100\rangle$. Neměla by být záporná, její hodnota velmi závisí na obtížnosti úlohy. Opět platí, že vyšší hodnota ukazatele diskriminace znamená vyšší citlivost úlohy.

Diskriminační křivka znázorňuje úspěšnost žáků v dané testové úloze v závislosti na jejich celkovém skóre. Žáci jsou rozděleni do pěti skupin (kvintilů) podle úspěšnosti v celém testu a do grafu jsou pro každou z těchto pěti skupin vyneseny průměrné čisté úspěšnosti každé skupiny; diskriminační křivka vznikne propojením těchto pěti bodů. Na rozdíl od diskriminace, která do výpočtu zahrnuje pouze výsledky první a poslední skupiny, diskriminační křivka zobrazí i výsledky prostředních skupin. Při vysoké citlivosti je diskriminační křivka u správného řešení strmě klesající, u distraktorů rostoucí.

Z hlediska celého testu nás zajímá, zdali test měří přesně a spolehlivě. Přesné měření znamená, že výsledek v testu vypovídá o skutečných znalostech a dovednostech žáků, spolehlivé měření znamená, že test poskytuje stabilní, opakovatelné výsledky (a tedy zdali se podařilo potlačit vliv náhody). Míra přesnosti a spolehlivosti se posuzuje pomocí *reliability testu*, vypočtené buď koeficientem KR-20 nebo Cronbachovým alfa[5]; reliabilita je ovlivněna počtem úloh v testu, rozptylem celkového skóre účastníků v testu a obtížností jednotlivých úloh. Čím je reliabilita vyšší, tím je vyšší přesnost a spolehlivost testu.

Aplikace na úlohy Matematického klokana – ukázka analýzy

Uvedené teoretické koncepty posouzení obtížnosti a citlivosti úloh je možné využít v rámci zhodnocení úloh soutěže Matematický klokan. V rámci podrobných údajů zjišťovaných za vybraný kraj (viz úvod) je možné spočítat pouze hrubou a čistou úspěšnost. V případě práce s kompletním souborem dat (odpovědi každého žáka v jednotlivých úlohách) je možné propočítat korigovanou úspěšnost (která se zejména u úloh na konci

[4]Některé společnosti (např. Scio) definují skupinu nejlepších jako 27 % nejlepších žáků a skupinu nejhorších jako 27 % nejhorších žáků.

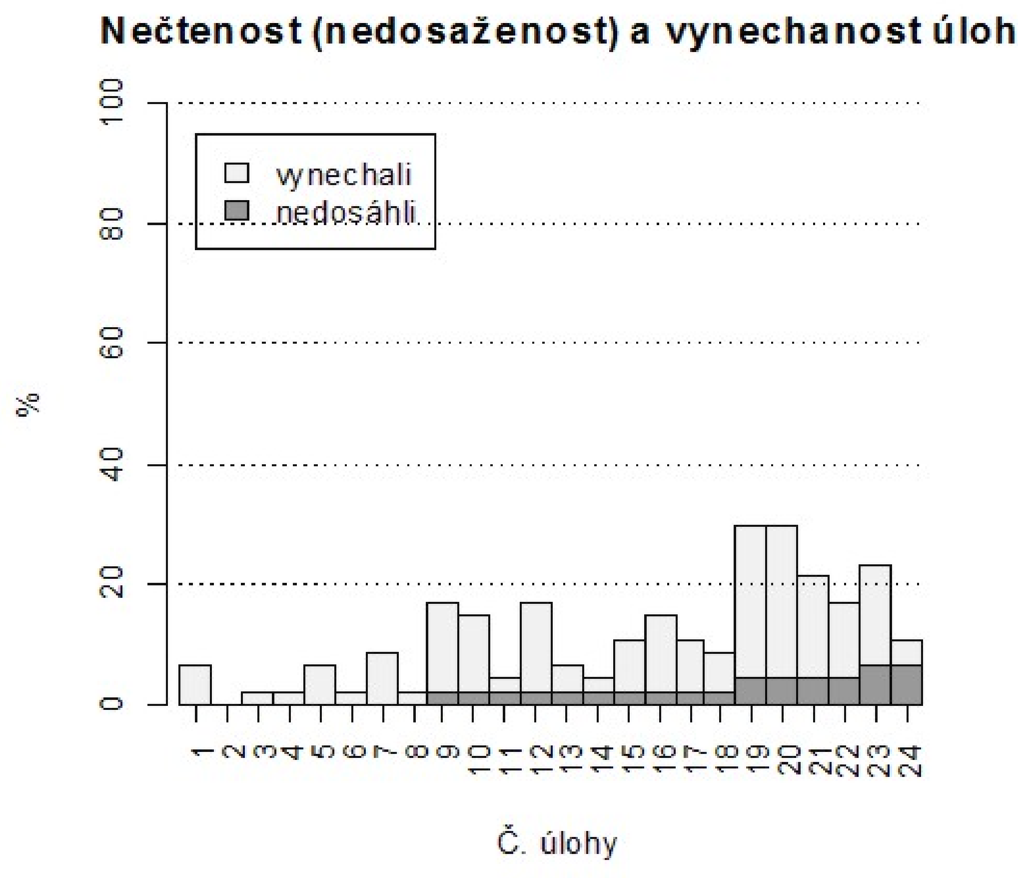
[5]Výpočet a interpretace těchto koeficientů přesahuje možnosti tohoto příspěvku; zájemci tyto informace najdou například v [8].

testu od čisté a hrubé podstatně liší) a zejména sestrojit diskriminační křivky a propočítat diskriminace. Dále je možné vyhodnotit podobnost úloh pomocí korelačních koeficientů.

V rámci naší ukázky je využito souboru dat žáků Základní školy Uhelný trh. Zpracovány jsou tři kategorie (Klokánek, Benjamin, Kadet) při rozsahu souboru 50 – 100 žáků v každé kategorii. Soutěže se účastní všichni žáci školy přítomní vyučování v den soutěže, většina z nich je z matematické třídy[6]. U každé kategorie je graficky zpracována vynechanost a nedosaženost jednotlivých úloh a znázorněn vztah mezi úspěšností a citlivostí. U kategorie Kadet jsou pak na základě tohoto vztahu vytipovány dvě úlohy (jedna dobrá, jedna horší), na nichž je představena ukázka detailní položkové analýzy úlohy.

Výsledky kategorie Klokánek (4. a 5. třída ZŠ)

V grafu 1 jsou zaznamenány v procentech nedosažené a vynechané úlohy v kategorii Klokánek.



Graf 1

[6]To se projevilo porovnáním hrubé a čisté úspěšnosti vybraných souborů s republikovými výsledky; předpoklad podobnosti výsledků žáků z matematických a nematematických tříd z hlediska citlivosti úloh je snad udržitelný.

V tabulce 1 jsou zaznamenány úspěšnost a citlivost v kategorii Klokánek. Na vodorovné ose je vynesena obtížnost, na svislé ose diskriminace (v 10% intervalech). Čísla v buňkách tabulky odpovídají pořadovým číslům úloh podle zadání.

90–100										
80–90							17			
70–80				16	9		1 18			
60–70			7	5						
50–60			21	22	8 10					
40–50			12		11			13		
30–40						4				
20–30		19 24		15				2 3 6		
10–20			23	20						
0–10	14									
	0–10	**10–20**	**20–30**	**30–40**	**40–50**	**50–60**	**60–70**	**70–80**	**80–90**	**90–100**

Tabulka 1

U kategorie Klokánek je ve srovnání s dalšími kategoriemi poměrně malá vynechanost a nedosaženost úloh (graf 1). To je způsobeno zejména tím, že žáci v této nejmladší kategorii se nebojí „riskovat“, tj. úlohu řeší, i když si nejsou jisti správností svého řešení, a neuvědomují si riziko ztráty bodů za chybné řešení. Tomu odpovídá i menší počet vynechaných úloh. Vzhledem k malé nedosaženosti je menší rozdíl mezi čistou a korigovanou úspěšností.

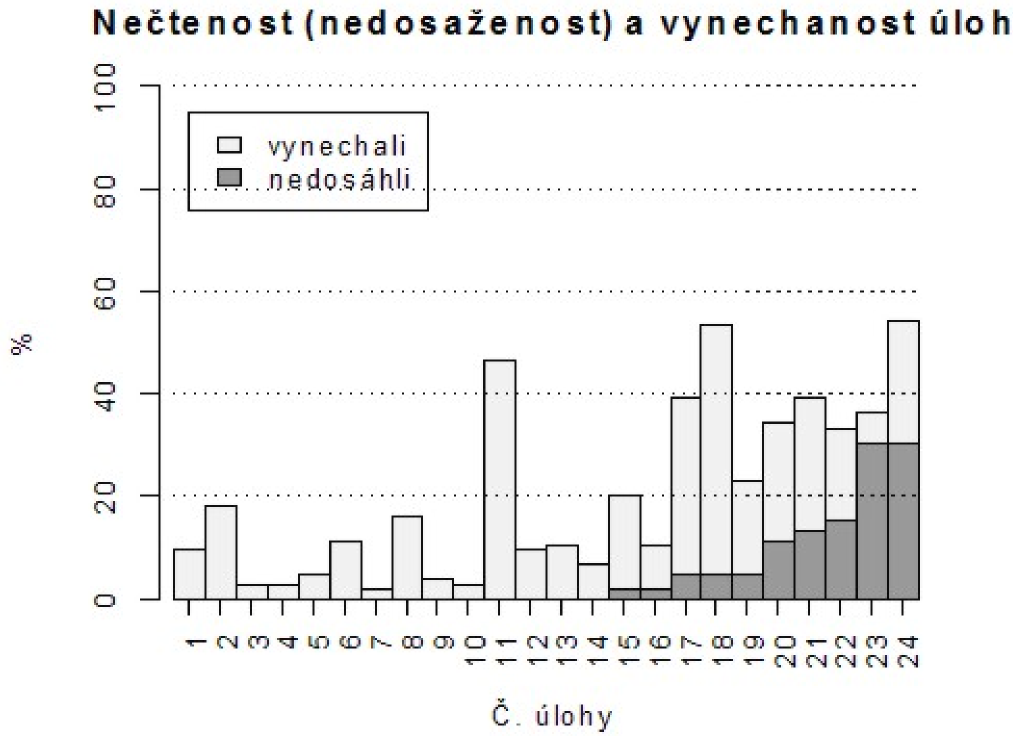
V tabulce 1 vidíme konkávní charakter křivky spojující úlohy s nejvyšší diskriminací vzhledem k obtížnosti. Úlohy ležící pod křivkou (zejména č. 15 a 20) vyžadují bližší prozkoumání za účelem posouzení, proč je diskriminace tak nízká.

Výsledky Kategorie Benjamín (6. a 7. třída ZŠ)

V grafu 2 jsou zaznamenány v procentech nedosažené a vynechané úlohy v kategorii Benjamín.

V tabulce 2 jsou zaznamenány úspěšnost a citlivost v kategorii Benjamín. Na vodorovné ose je vynesena obtížnost, na svislé ose diskriminace (v 10% intervalech). Čísla v buňkách tabulky odpovídají pořadovým číslům úloh podle zadání.

V kategorii Benjamín (graf 2) je v porovnání s Klokánkem větší vynechanost i nedosaženost úloh. Z hlediska vynechanosti stojí za bližší prozkoumání úloha 11 (v porovnání se sousedními úlohami je vynechanost výrazně vyšší). Rostoucí nedosaženost je pak zobrazena v rozdílu mezi čistou a korigovanou úspěšností, kdy například úloha 23 má čistou úspěšnost 34,6 % a korigovanou 49,8 %. Tabulka 2 přehledně znázorňuje úlohy podle obtížnosti a citlivosti a dává možnost rychle vytipovat úlohy určené k hlubší analýze (moc lehké, moc těžké, málo citlivé).



Graf 2

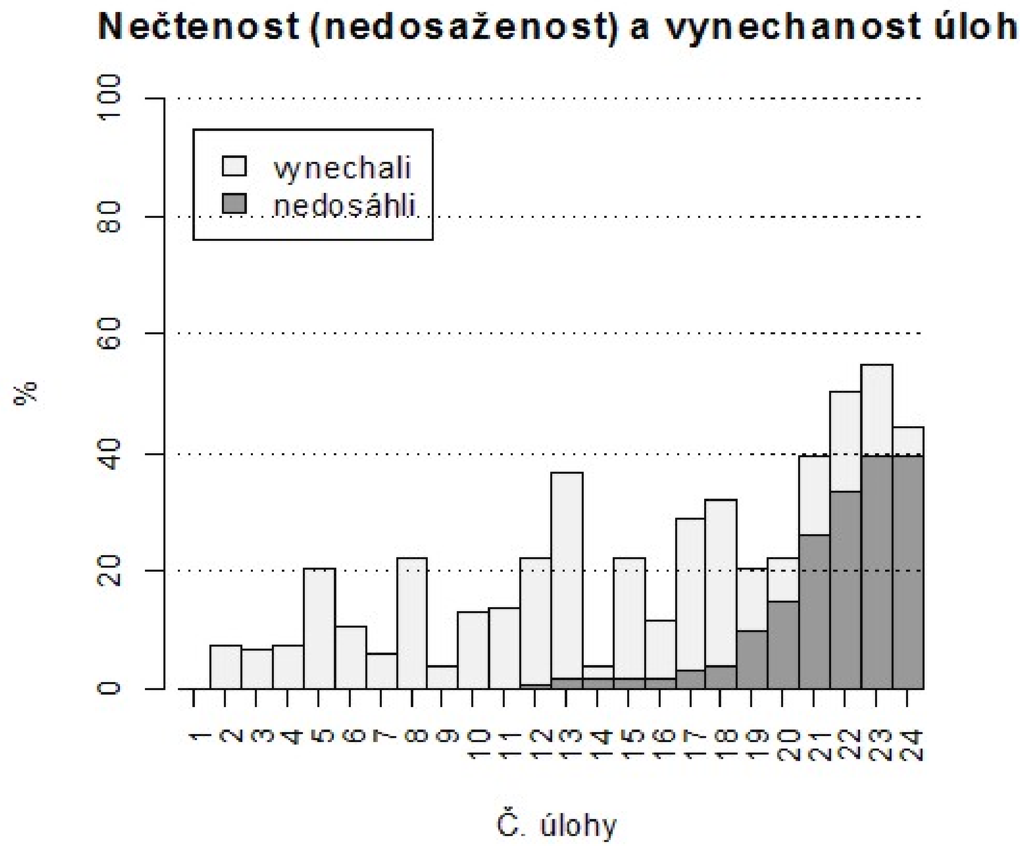
90–100										
80–90										
70–80					12					
60–70				9		3				
50–60			21		8 10	15				
40–50				11 23	7	16		1		
30–40				18			6			
20–30			13 24	22	19		2		14	
10–20		20	17						4 5	
0–10										
	0–10	**10–20**	**20–30**	**30–40**	**40–50**	**50–60**	**60–70**	**70–80**	**80–90**	**90–100**

Tabulka 2

Výsledky Kategorie Kadet (8. a 9. třída ZŠ)

V grafu 3 jsou zaznamenány v procentech nedosažené a vynechané úlohy v kategorii Kadet.

V tabulce 3 jsou zaznamenány úspěšnost a citlivost v kategorii Kadet. Na vodorovné ose je vynesena obtížnost, na svislé ose diskriminace (v 10% intervalech). Čísla v buňkách tabulky odpovídají pořadovým číslům úloh podle zadání.



Graf 3

90–100										
80–90										
70–80					19	14 15				
60–70										
50–60			5	2 17 18	7 12		9	3		
40–50						8				
30–40					6	10				
20–30		21	22 23		20		11			
10–20		13 16 24			4					
0–10									1	
	0–10	**10–20**	**20–30**	**30–40**	**40–50**	**50–60**	**60–70**	**70–80**	**80–90**	**90–100**

Tabulka 3

V kategorii Kadet si lze povšimnout rostoucí nedosaženosti úloh v závěru testu, která dosahuje hranice až 40 % a poněkud tak upřesňuje vypovídací schopnost podílu žáků, kteří úlohy v závěru testu nezodpověděli (je vidět, že to není váháním nad správným řešením a obavou ze ztráty bodu, ale nedosažením daných úloh).

Tabulka 3 opět znázorňuje vztah mezi úspěšností a citlivostí, kdy například úlohy 4 a 19, které jsou zhruba stejně obtížné, mají výrazně odlišnou citlivost (a lze tedy říci, že úloha 19 je z hlediska tohoto kritéria výrazně lepší než úloha 4). Proč tomu tak je, se pokusíme vysvětlit v následující části. Úloha 1 je velmi lehká, což je ospravedlnitelné tím, že je úlohou první (někdy je vhodné na začátek testu vložit jednoduché, kontaktní úlohy).

Ukázka položkové analýzy – kategorie Kadet

Podívejme se nyní postupně na položkovou analýzu dvou úloh, které mají průměrnou obtížnost, ale velmi se liší svou citlivostí (měřenou ukazatelem diskriminace). Jde o úlohy 4 a 19, vytipované na základě tabulky 3.[7]

Úloha 19. *Lucka má mnoho stavebních kostek s rozměry 1x2x3 (v centimetrech). Jaký nejmenší počet kostek bude Lucka potřebovat na to, aby z nich postavila krychli?*

A: 12 B: 18 C: 24 D: 36 E: 60

V tabulkách 4 a 5 a v grafech 4 a 5 je počítačový výstup položkové analýzy úlohy 19. Z výstupu programu Restan vyčteme všechny tři úspěšnosti a diskriminaci. Podstatná je tabulka 5, z níž vidíme četnosti volby jednotlivých alternativ. Všimněme si, že každou z alternativ zvolilo alespoň 5 % žáků, a žádná z nich tedy nebyla vyloženě nevolitelná. Stejně tak se můžeme podívat na rozdělení četností volby alternativ z hlediska pětiny nejlepších a pětiny nejhorších žáků. U každého z distraktorů (tj. alternativy, která není správným řešením) je větší četnost volby distraktoru u nejslabších žáků oproti nejlepším žákům; nejlepší je z tohoto hlediska distraktor A, který volili nejslabší žáci výrazně častěji než nejlepší žáci. Graf 4 znázorňuje graficky četnosti volby alternativ, graf 5 pak diskriminační křivky (viz výše) pro všech pět skupin žáků a všech pět distraktorů (plná spojnice zobrazuje správné řešení D a je strmě klesající, tj. lepší žáci výrazně častěji volí toto řešení než slabší žáci, čárkované spojnice jsou alespoň neklesající). Položková analýza naznačuje, že úloha je v pořádku.

Úloha 4. *Běta má 16 karet: 4 pikové (♠), 4 křížové (♣), 4 kárové (♦) a 4 srdcové (♥) karty. Chce je vyložit do čtverce podle obrázku takovým způsobem, že v každé řadě a v každém sloupci bude po jediné kartě každého druhu. Ve čtverci na obrázku vidíte, jak Běta začala. Kolik ze čtyř druhů karet (pikové, křížové, kárové, srdcové) může ležet na místě označeném otazníkem?*

♠		?	
♣	♠		
	♦		
	♥		

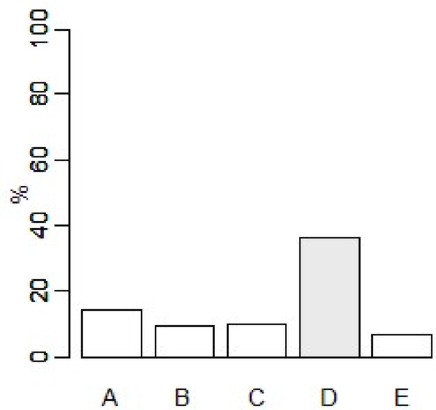
A: žádný B: 1 C: 2 D: 3 E: 4

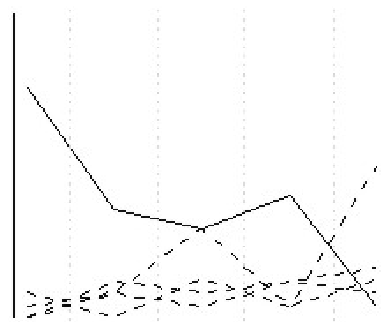
[7] Úlohy jsou přetištěny ze sborníku [4].

Úloha 19

Čistá úspěšnost:	40,3%	Nedosáhli:		12	9,8%
Korig. úspěšnost:	44,7%	Vynechali:		13	10,7%
Hrubá úspěšnost:	36,9%	Neplatné:		0	0,0%
Diskriminace ULI:	71,5%	Korelace RIR:	0,303		

	Celkem		Nejlepší		Nejhorší		Rozdíl	Skupiny		Celková
	počet	%	počet	%	počet	%	%	1/5	5/5	úsp. (%)
A	18	14,8	2	8,3	12	50,0	-41,7	8,3	50,0	30,5
B	12	9,8	0	0,0	4	16,7	-16,7	0,0	16,7	36,1
C	13	10,7	0	0,0	3	12,5	-12,5	0,0	12,5	36,9
D	45	36,9	18	75,0	1	4,2	70,8	75,0	4,2	50,1
E	9	7,4	1	4,2	2	8,3	-4,2	4,2	8,3	41,0





Tabulky 4 a 5, Grafy 4 a 5

V tabulkách 6 a 7 a v grafech 6 a 7 je počítačový výstup položkové analýzy úlohy 4. Tato úloha není vyloženě nevhodná (diskriminace je kladná, obtížnost je průměrná), nicméně vykazuje určité nedostatky a je méně vhodná než úlohy jiné. Všimněme si četnosti volby distraktorů A a E, kdy každý z nich zvolili jen tři žáci (2,5 %). Tyto distraktory jsou zde tedy pouze „do počtu" (ze zadání a nabízených alternativ je na první pohled zjevné, proč tomu tak je). To bohužel a priori snižuje citlivost úlohy, protože slabší žáci nemají tolik možností zvolit špatné řešení. To se následně zobrazuje i na diskriminačních křivkách, kdy diskriminační křivka správného řešení je jen mírně klesající (srv. s křivkou u úlohy 19). Další příčinou nízké citlivosti může být i fakt, že úloha má relativně dlouhé a komplikované zadání.

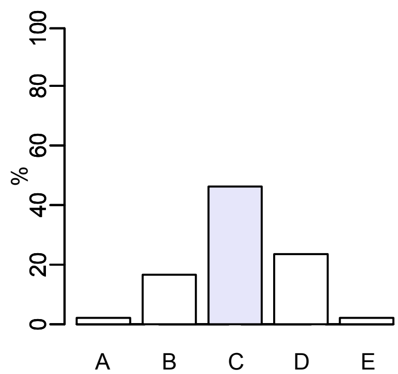
Diskuse

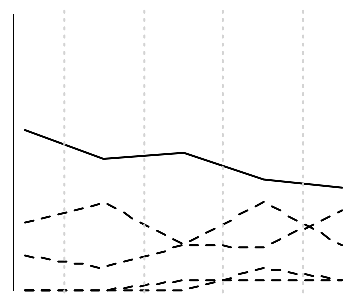
Provedená analýza má oproti klasické, dosud prováděné statistice úloh Matematického klokana tyto rozšířené možnosti:

Úloha 4

Čistá úspěšnost:	48,6%	**Nedosáhli:**	0	0,0%
Korig. úspěšnost:	48,6%	**Vynechali:**	9	7,4%
Hrubá úspěšnost:	46,7%	**Neplatné:**	0	0,0%
Diskriminace ULI:	19,8%	**Korelace RIR:**	0,062	

	Celkem		**Nejlepší**		**Nejhorší**		**Rozdíl**	**Skupiny**		**Celková**
	počet	**%**	**počet**	**%**	**počet**	**%**	**%**	**1/5**	**5/5**	**úsp.(%)**
A	3	2,5	0	0,0	1	4,2	-4,2	0,0	4,2	35,0
B	21	17,2	3	12,5	4	16,7	-4,2	12,5	16,7	38,4
C	57	46,7	14	58,3	9	37,5	20,8	58,3	37,5	44,9
D	29	23,8	6	25,0	7	29,2	-4,2	25,0	29,2	42,1
E	3	2,5	0	0,0	1	4,2	-4,2	0,0	4,2	29,7





Tabulky 6 a 7, Grafy 6 a 7

1. Umožňuje rozlišit mezi úlohou nedosaženou a vynechanou a následně konstruovat korigovanou úspěšnost. Zatímco dosud prováděná statistika úloh umožňuje zjistit pouze četnost žáků, kteří otázku nezodpověděli, provedená analýza zjišťuje, zdali žák řešil ještě nějakou úlohu za danou nezodpovězenou úlohou. Ukazuje se, že nedosaženost úloh v závěru testu není stejná v jednotlivých kategoriích, neboť v kategorii Klokánek se žáci nebojí tipovat, a tím postupují testem rychleji.

2. Analýza umožňuje detailně posoudit jednotlivé úlohy zejména z hlediska jejich citlivosti. Vzhledem k využití celého datového souboru, nikoli jen výstupů z něj, můžeme detailně sledovat jednotlivé úlohy, a posoudit tak jejich citlivost, tj. schopnost rozlišit mezi „lepšími“ a „slabšími“ žáky; kromě toho, že obecně jsou vhodnější citlivější úlohy, indikuje zpravidla nízká citlivost nějakou další chybu.

3. Analýza umožňuje posoudit jednotlivé alternativy. Z analýzy je možné získat přehled nejen o četnostech odpovědí (tj. o tom, zdali jsou všechny distraktory reálně volitelné), ale i o tom, jak jednotlivé distraktory vybírali žáci roztřídění podle celkového výsledku v testu.

Z hlediska vypovídací schopnosti konkrétních výsledků je zřejmé, že je poněkud snížena omezeným rozsahem výběrového souboru, který navíc vzhledem k faktu, že se jedná převážně o žáky ve třídách zaměřených na matematiku, není reprezentativní.

Vzhledem k pokroku při zpracování výsledků soutěže, kdy se postupně přechází na automatizované zpracování i v rámci jednotlivých škol, však pravděpodobně již brzy bude možné získat datový soubor odpovědí všech žáků (a možnosti analýz tohoto druhu snad jsou i jedním z důvodů, proč počítačové zpracování, při němž tyto datové soubory vznikají, postupně zavádět). Podrobné výsledky získané na základě většího souboru pak mohou být prezentovány na příští konferenci.

Závěr

Na omezeném vzorku studentů byly testovány možnosti podrobnější analýzy obtížnosti a kvality úloh Matematického klokana. Již z těchto dílčích závěrů plynou poměrně zajímavé poznatky (relativně vysoká nedosaženost úloh na konci testu, odlišná v různých kategoriích, vytipování úloh, které nejsou příliš citlivé, konstatování nevhodnosti některých alternativ), které by mohly být verifikovány v případě zvětšení rozsahu souboru. Toho by mohlo (a podle mého názoru i mělo) být dosaženo plným přechodem na automatizované zpracování úloh již ve fázi školních kol coby zajímavého vedlejšího efektu tohoto přechodu. Výsledky analýzy by pak mohly sloužit jako vodítko pro přípravu příštího ročníku testu, bylo by možné provádět i další, v tomto textu neuvedená srovnání (např. dílčí obtížnosti jednotlivých úloh podle pohlaví uchazeče, rozdíly mezi žáky jednotlivých ročníků v rámci dvouletých kategorií, posouzení odlišností žáků v matematických třídách atd.). Při tom je však třeba mít na paměti, že Matematický klokan je zejména popularizační soutěží a jednotlivé úlohy jsou sestavovány i na základě jiných kritérií.

Literatura

[1] Byčkovský, P., *Základy měření výsledků výuky. Tvorba didaktického testu.* ČVUT, Praha, 1982.

[2] Hrabal, V., Lustigová, Z., Valentová, L., *Testy a testování ve škole.* PedF UK, Praha, 1992.

[3] Chráska, M., *Didaktické testy.* Paido, Brno, 2000.

[4] Molnár, J., Novák, B., Navrátilová, D., Calábek, P. (eds), *Matematický klokan 2004.* MPS JČMF, pobočka Olomouc a UP, Olomouc, 2004.

[5] *O testování*. Cermat, Praha, `http://www.cermat.cz`.

[6] *Statistické charakteristiky testů – metodika*. Scio, Praha, `http://www.scio.cz`.

[7] `http://www.matematickyklokan.net`

[8] `http://www.scio.cz/tvorba_testu/hodnoceni_kvality/zakl_stat.htm`

Domácí vzdělávání

Kateřina Jančaříková, Antonín Jančařík[1]

Abstrakt: Dne 1. 1. 2005 vstoupil v platnost nový školský zákon, který kromě jiných změn umožňuje rodičům vzdělávat své děti. Individuální vzdělávání, které bylo od školního roku 1998/99 ověřováno na MŠMT v rámci experimentu Domácí vzdělávání, je málo známou alternativní metodou při práci s talentovanými dětmi. V článku je podán stručný přehled historie, teoretických předpokladů a praktických zkušeností s domácím vzděláváním i v zahraničí.

Abstract: On January 1, 2005, a new school law was passed which among others enables parents to educate their children. Individual education, which was evaluated since the school year 1998/99 by the Ministery of Education within the experiment Home Schooling, is a not widely known alternative method of work with talented children. The arcticle briefly sums the history, theoretical prerequisites and practical experience with home schooling in the Czech Republic and abroad.

Elegantním řešením výuky nadaných a talentovaných dětí v naší zemi, kde zatím stále neexistuje ani jedna základní škola specializovaná na jejich výuku (natož jejich síť) a kde je většina dětí s nadprůměrnou inteligencí bez skrupulí zařazena mezi své průměrné vrstevníky, je domácí, respektive individuální vzdělávání.

Individuální vzdělávání je v ČR na prvním stupni uzákoněno od 1. 1. 2005. Fakticky zde ale existuje již sedmým rokem,[2] protože již od školního roku 1998/1999 bylo možné děti zapisovat do experimentu MŠMT „domácí vzdělávání“. V „domácím vzdělávání“ obvykle vzdělává dítě matka nebo oba rodiče, ale není ani zakázáno si učitele najmout (a lze předpokládat, že trend míří tímto směrem).

Terminologie zatím není zcela ustálená – výrazy *individuální vzdělávání*, *domácí škola*, *domácí vzdělávání* se používají často jako synonyma (viz [11]). Vzhledem k potřebám diferencovat různé přístupy se kloníme k používání termínu **domácí vzdělávání** pro „životní styl, který zahrnuje a dotýká se celé rodiny“ a který pramení z poznání, že „učení probíhá kdykoli a na jakémkoli místě; že život sám je neustále pokračující vzdělávání, které není omezeno na určitý čas, místo či věk“ (viz [2], str. 108) (tzv. neformální výuka). V tomto smyslu Raymond Moore (viz [13]) vyzývá rodiče, aby „žili s dětmi“. Kvalitně zorganizovaný a pestrý rodinný život naučí více než učitel přednášející ze stupínku. Mnozí američtí rodiče, kteří své děti vzdělávají doma, se dopracovali k me-

[1] *PedF UK, Praha, killike@volny.cz, antonin.jancarik@pedf.cuni.cz*

[2] Autoři článku domácí vzdělání od začátku sledují a od roku 1999/2000, tj. šestým rokem, takto vzdělávají své děti. Nejstarší syn absolvoval v domácím vzdělávání všech pět možných let, nyní studuje na osmiletém gymnáziu Buďánka. Druhorozeného syna čeká v domácím vzdělávání poslední rok.

todě provokativně nazvané „unschooling“.[3] John Holt i ostatní zastánci „unschoolingu“ vypracovali poměrně pevná pravidla – metodiku – jak správně „nevyučovat“ (viz [14]). Žáci např. nevyplňují početníky, ale rodiče jim postupně svěřují větší zodpovědnost za rodinné nákupy, až i kontrolu daňového přiznání. Tato metodika mimo jiné rodiče povzbuzuje, aby se spolu s dětmi zapojovali do veřejného života obcí, aby pracovali s dětmi a ne na děti.

Termín **domácí škola** pak používáme pro pouhé přenesení stylů a metod ze školních lavic ke kuchyňskému stolu – v rodinách s domácí školou v tomto slova smyslu např. dodržují rozvrh i tempo kmenové školy, děti kmenovou školu také pravidelně navštěvují, někdy v těchto rodinách dokonce i zvoní na začátku a na konci hodin (tzv. formální výuka).

Termín **individuální vzdělávání**, prosazený ministerstvem do znění zákona, je širší – individuálně jsou vzdělávány např. i hendikepované děti ve speciálních školách, mladí sportovci, žáci dlouhodobě nemocní. Individuálně by měly být vzdělávány také děti s dyslexií či s jinými problémy integrované do normálních tříd.

Na českém území má domácí vzdělávání dlouholetou tradici. Povinná školní docházka (uzákoněna 1774) byla pomocí chudým, kteří by své děti do školy jinak neposílali. Lidé lépe situovaní měli před i po jejím uzákonění ke svým dětem soukromé učitele a nebo je učili sami (nejčastější byla kombinace obojího). Domácí vzdělávání bylo z pochopitelných důvodů ve velké oblibě např. u českých obrozenců. František Ladislav Čelakovský a především jeho žena Antonie své starší děti vzdělávali sami. Nejstarší Ladislav (budoucí přírodovědec) nastoupil k pravidelné docházce teprve do gymnázia. Některé předměty učil otec, jiné matka, na další (např. na jazyky) najímali rodiče soukromé učitele (srovnej [10]).

Domácí vzdělávání ostatně probíhá podobně i dnes – jen soukromé učitele nahradily kroužky v Domech dětí a mládeže, lekce v Lidových školách umění, hodiny v jazykových školách a tréninky v Sokole a dalších sportovních organizacích.

Ani ve světě nebylo domácí vzdělávání neobvyklé, jak vyčteme například ze životopisných vzpomínek Agathy Christie nebo Geralda Durrela.

Tradice domácího vzdělávání na našem území byla ukončena teprve fašistickou okupací v roce 1939. Totalitní režimy institucionalizované školství často využívali k manipulaci. Filosof Stanislav Komárek v [8] snad trochu nadneseně, ale trefně říká, že: „Škola . . . nás připravuje na budoucí život: na skutečnost, že jeho větší část budeme držet ústa a krok.“ Novodobě je domácí vzdělávání u nás inspirováno tzv. homeschooling movement (hnutím domácího vzdělávání), které vzniklo v 60. letech ve Spojených státech (viz [9]). Jeho iniciátory byli učitel matematiky na výběrových školách John Holt (viz [4], [5], [6]) a pedagog Raymond Moore.

Výhody individuálního přístupu jsou tyto: ve výuce se postupuje ideálním tempem,

[3] V ČR se využitím této metody pro vyučování matematice zabývá v doktorandské práci na Pedagogické fakultě UK Dana Pražáková.

každý rodič připravuje pro své žáky jejich osobní, jedinečné, „na míru ušité“ kurikulum (maximální responsibilita) (viz [13]). Žáci se nenudí, nemají se s kým srovnávat (nepovyšují se), nezvyknou si, že jsou nejlepší, ačkoli nepracují, nebojí se posměchu, lépe se naučí pracovat s literaturou (ve Spojených státech podporují hnutí domácího vzdělávání veřejné knihovny), děti mají více času na „mimoškolní“ aktivity (v Praze rodiny s domácím vzděláváním podporuje Dům dětí a mládeže Praha 8), žáci si navyknou, že nejde ani o docházku, ani o známky, ale o vzdělání. Mají možnost se naučit lépe vyrovnávat s chybami.

Rodiče vzdělávající své děti jsou pochopitelně mnohem více zainteresováni – vzdělávají se a používají co možná nejlepší a nejpestřejší pedagogické metody – narativní, projektové či dramatické vyučování. Využívají pomůcky vzdělávacího programu Montessori, vyrábějí a vzájemně si zapůjčují všelijaké jiné pomůcky, vytvářejí a poskytují si navzájem vlastní pracovní listy, doporučují si učebnice, dělí se o zkušenosti a předávají si efektivní pedagogické metody. Vzhledem k tomu, že se věnují pouze jednomu, resp. několika málo dětem, mohou reagovat pružněji než učitelé ve třídách s obvyklým počtem dvaceti pěti žáků.

Domácí vzdělávání ve skutečnosti často probíhá *mimo* domov – v knihovnách, muzeích, továrnách, skanzenech, přírodě, na naučných stezkách, ve sklenících, v zoologických zahradách, galeriích, na výstavách a při již zmíněných mimoškolních aktivitách. Kompetence získané „v terénu“ jsou trvalejší. Hře na housle se vyučuje individuálně, protože je to efektivnější. Individuální výuka je efektivnější i při osvojování dovedností trivia, stejně jako při výuce cizím jazykům.

Mnohé výzkumy naznačují, že víra v samonosný přínos kolektivu je neoprávněná. Bronfenbrenner (viz [1]) na základě svého zkoumání žáků šestých tříd uvádí, že upřednostňování vrstevníků je pro děti spíše východiskem z nouze než svobodnou volbou. Všechny děti dávají přednost vztahům s dospělými.

Skutečnost, že domácí vzdělávání je efektivnější než klasická výuka ve škole, přiznává i Výzkumný ústav pedagogický (viz [15]).

Van Galen (viz [3]) odlišuje dvě základní motivace pro domácí vzdělávání – ideologickou a pedagogickou. Rodiče nadaných dětí mají pro tuto volbu nepochybně mnoho pedagogických důvodů. Kromě práce a určitého sebeobětování jsou často překvapeni uspokojením a radostí, které jim výuka vlastních dětí přináší. Pocit uspokojení u rodičů zaznamenal i Thomas (viz [12]).

Proč mnozí nadprůměrně inteligentní žáci odcházejí z našeho základního školství s pošramoceným sebevědomím? Raymond Moore inicioval rozsáhlý výzkum, který poukázal na skutečnost, že věk šesti let je pro začátek klasického školního vzdělávání příliš nízký. Nervový systém dítěte v tomto věku není pro systematickou výuku školních předmětů, zvláště čtení a psaní, dostatečně zralý. Také denní kontakt dítěte s institucionalizovaným prostředím školy nepovažuje v tomto věku za vhodný. Řečeno slovy Stanislava Komárka: „Podobně jako bonsajista, pedagog mladé stromečky ohýbá a láme, ale většina z nás je bohužel nucena v nalomené a ohnuté poloze prožít celý život“ (viz [8]). Domácí vzdělávání oproti tomu umožňuje dětem rozvíjet jejich individuální obdarování bez stresů i v tomto křehkém raném věku.

V ČR se o znovuvytvoření podmínek pro individuální vzdělávání dětí rodiči nejvíce zasloužili manželé Jiří a Hana Tůmovi. Kolem nich a Michala Semína se vytvořila nepočetná, ale silná komunita rodičů a přátel domácího vzdělávání spojená ve dvou organizacích – Společnosti rodičů a přátel domácí školy a Asociaci pro domácí vzdělávání (viz [16], [17]). Tyto organizace prosadily přes poměrně značný odpor možnost individuálního vzdělávání do nového školského zákona. Organizují vzdělávací setkání pro rodiče i rodiny, zvou zahraniční hosty i české odborníky, komunikují se sdělovacími prostředky a publikují. Rodiny, které své děti vzdělávají doma, se ovšem scházejí také neformálně – ke společné výuce i k zábavě. Nyní, když zákon povoluje individuální vzdělávání teoreticky na všech základních školách, avšak počet takto vzdělávaných dětí na každé z nich omezuje, je organizace rodičů zvlášť důležitá, aby nedošlo k poklesu vzájemné podpory a politické síly těchto rodin. Metodičky Hana Tůmová a Věra Chloubová kolem sebe tyto rodiče soustřeďují, organizují dokonce i výběr škol (mnohým by hrozilo zrušení kvůli malému počtu žáků, vztah mezi školou a doma vzdělávajícími rodiči je tedy oboustranně výhodný), vyjednávání o podmínkách přijímání, hodnocení a přezkušování domácích školáků. Doma vzdělávající rodiny kolem zmíněných metodiček jsou proto na kmenové škole prakticky nezávislé, a mnohé z nedůstojných podmínek domácího vzdělávání stanovených zákonem se jich tedy nedotýkají tak, jak by mohly.

Susan a Larry Kasemanovi (viz [7]) upozorňují na to, že v demokracii nestačí umožnit vznik různých vzdělávacích alternativ. Je potřeba dovolit těmto alternativním přístupům, aby se mohly plně rozvinout, a tak byly co nejpřínosnější. Přílišná regulace může mít na domácí vzdělávání negativní vliv a může omezovat jeho efektivnost, přesun od *domácího vyučování* k *domácí škole*, tj. nedá rodině prostor vyjít vstříc vzdělávacím potřebám dítěte. Proto například psycholog Václav Mertin podporuje možnost domácího vzdělávání bez jakýchkoli omezení a také navrhuje, aby se dovolilo ověřovat možnosti domácího vzdělávání i na druhém stupni (viz [18]).

Nezbývá než doufat, že náš stát tuto alternativu osvobodí od nesmyslných podmínek a že se klauzule „povinná školní docházka“ konečně nahradí termínem „povinné vzdělávání“.

Literatura

[1] Bronfenbrenner, U., *Two worlds of childhood*. Simon and Schuster, New York, 1970.

[2] Dobson, L., *The homeschooling book of answers: The 101 most important questions answered by homeschooling's most respected voices (Prima home learning library)*. Three Rivers Press, 1998.

[3] Van Galen, J. A., Ideology, curriculum and pedagogy in home education. *Education*

and Urban Society, vol. 21, no. 1, 1988, p. 52–67.

[4] Holt, J., *Teach your own*. Dell publishing, New York, 1989.

[5] Holt, J., *Proč děti neprospívají*. Agentura Strom, Praha, 1994.

[6] Holt, J., *Jak se děti učí*. Agentura Strom, Praha, 1995.

[7] Kasemanovi, L. a S., *Foundations of the Rights and Responsibilities of Homeschooling Parents*. Homeschool Information Library, `www.education-otherwise.org/europe`.

[8] Komárek, S., Pocem, synu. . . a uč se! *Právo* 9. 6. 2005, příloha Salon.

[9] Lyman, I., What's behind the growth in homeschooling? *USA-Today* (periodical), Vol. 127, No. 2640, 1998, s. 64–66.

[10] Macura, V., *Guvernantka*. Mladá fronta, Praha, 1997.

[11] Nitschová, D., *Domácí vzdělávání*. Diplomová práce, FF UK, Praha, 1999/2000.

[12] Thomas, A., *Educating children at home*. Cassell, London, 1999.

[13] `http://www.moorefoundation.com/formula.html`

[14] `http://www.naturalchild.com/guest/earl_stevens.html`

[15] `http://www.vuppraha.cz/index.php?op=media&mid=28`

[16] `http://www.volny.cz/domvzd`

[17] `http://www.domaciskola.cz`

[18] `http://www.rodina.cz/clanek3305.htm`

Vývoj písemné komunikace v matematice na 1. stupni ZŠ aneb cesta žáka P k číslu a

Michaela Kaslová[1]

Abstrakt: Článek má charakter případové studie. Tříleté sledování nadprůměrného žáka prvního stupně, které probíhalo ve třech různých kontextech, umožnilo detailněji registrovat změny postupů, zájmů i zrání žáka v matematice ve vazbě na osobnostní specifika.

[1] *PedF UK, Praha, michaela.kaslova@pedf.cuni.cz*

Abstract: The article concerns a case study. A three-year observation of an above-average elementary pupil, which ran in three different contexts, enabled to register changes in procedures, interests and maturation of the pupil in mathematics connected to personality specifics.

Zaměření studie a metody práce

Cílem studie je:
a) popsat tříletý vývoj nadprůměrného žáka P,
b) ilustrovat tento vývoj na cestě k algebře (zkoumání především písemné komunikace),
c) poukázat na vlivy podílející se na utváření jeho vztahu k matematice, respektive ke školní matematice.

Studie vychází především z několikaletého *pozorování* ve třech různých kontextech:
a) ve třídě,
b) v Klubu přátel matematiky (KPM),
c) na individuálních hodinách matematiky (IP).

Studie se opírá o *rozhovory* s třídní učitelkou (TU), s učitelkou matematiky (UM), s vychovatelkami školní družiny (ŠD), s otcem a prarodiči sledovaného žáka (R).

K zachycení a analýze vývoje slouží *písemné práce* sledovaného žáka, *záznamy* a *poznámky* experimentátorky a *audiozáznam*.

Východisko

Žádný proces kognitivního zrání i procesu řešení nelze podrobit analýze bez posouzení situací a kontextu, ve kterých se to odehrává. Kontextem chápeme něco, co je nezávislé na sledovaném individuu (třídu, učitele, pomůcky, úlohy), situace je specifický kontext, který lze obtížně opakovat a je mimo jiné závislý na osobnosti zkoumaného, na podílejících se emocích a aktuálních sociálních vztazích.

Charakteristika žáka P

Škola

Žák P šel o jeden rok dříve do školy; během prvního ročníku zvládl díky schopnostem a také individuálnímu přístupu učitelky (jeden rok po ukončení Pedagogické fakulty) látku prvního i druhého ročníku. Po konzultacích s psychologem a vedením školy byla podána žádost o možnost navštěvovat hodiny matematiky ve vyšším ročníku. V této třídě byl se žáky, kteří byli o dva roky starší než on. Při opakovaných měřeních IQ v oblasti kognitivní dosahoval hodnot 150 i více. Od druhého ročníku vykazoval stále průměrnou až podprůměrnou úroveň grafomotoriky vzhledem ke spolužákům. V průběhu tří let jeho svalová koordinace čím dál tím více zaostávala oproti spolužákům ve třídě. Jeho zvyšující se zájem o PC byl provázen snížením zájmu o čtení a postupné neschopnosti držet krok v čtenářské úrovni se třídou (držet se v první polovině třídy).

Snaha řešit co nejvíce problémů zpaměti, včetně jazykových, zvýšený zájem o cizí jazyky (francouzštinu a angličtinu) se odrazily mimo jiné i ve zhoršení prospěchu z českého jazyka. Zájem o jazyky se projevil i v matematice přáním být vyučován v matematice v cizím jazyce.

Rodinné zázemí

Ve vztahu k rodině přešel z pozice obdivovaného předškoláka do pozice dítěte, které díky své inteligenci dovede svým adaptivním chováním docílit často toho, co si přeje.

Třída

Je problematické mluvit o jedné třídě, poněvadž na matematiku chodí do vyššího ročníku. Ve kmenové třídě má čím dál tím méně kamarádů. Nerad se přizpůsobuje ostatním. Ve třídě na matematiku spolupracuje jen s některými nadprůměrnými spolužáky, čím dál tím více volí jen on témata k hovoru, nezaujme-li ho téma navržené jinými, nereaguje nebo se snaží vnutit své téma nebo odchází. Zvětšující se izolaci kompenzuje zdůrazňováním toho, v čem se liší, kde na sebe snadněji upozorní. V libovolném prostředí čím dál tím méně snáší prohru, odmítá aktivitu opakovat, pokud se mu hned nedaří, vzteká se nebo reaguje požadavkem na změnu činnosti. Ve školní družině vyhledává fyzický kontakt, chová se dětštěji než ve třídě. Popsané projevy chování zřejmě úzce souvisejí se ztrátou výjimečnosti, zázračnosti, pozice, kterou ztratil v průběhu druhého ročníku. Obě učitelky (TU i UM) se snažily o plné zaměstnání P, o jeho integraci ve třídě, o spolupráci s rodinou i experimetnátorkou.

Matematika

Školní matematika

Ve škole patří P mezi nejrychlejší v počítání zpaměti, pokud není nejrychlejší (je mezi žáky o dva roky staršími). Jestliže nezvládá tempo řešení slovních úloh kvůli čtení a pomalému psaní, odpoutává pozornost k aritmetice, k prezentaci jeho znalostí o velkých číslech a podobně. V geometrii se postupně blokují některé představy tím, že je při poslechu nepozorný (podceňuje tuto fázi) nebo že není schopen si vytvářet - črtat obrázek (pokud ano, jeho grafická úroveň je podprůměrná, a tak je často nefunkční). Pokud obrázek vytvoří soused, je zpravidla schopen ho intelektově funkčně zpracovat, ale nedokáže proces verbalizovat. V posledním půl roce nestíhá uvažovat o textu tak rychle jako první třetina o dva roky starších žáků. Během složitějších úloh (např. se dvěma podmínkami) projevuje poslední 4 měsíce motorický neklid. UM to zdůvodňuje obavami o ztrátu pozice mezi staršími spolužáky.

V Klubu přátel matematiky

V KPM se sdružují zájemci o matematiku ve věku od 6 po 11 let bez ohledu na úspěchy dosažené ve školné matematice. Žák P byl pozorován v tomto heterogenním kolektivu, který je stabilní vždy pouze v rámci jednoho školního roku. Hned první rok se zařadil mezi „nejšikovnější“. V průběhu tří let lze už pozorovat řadu specifik:

a) Vyžaduje pozornost, dává přednost aritmetice před geometrií a slovními úlohami, nerad píše a kreslí, preferuje ústní řešení. Má rád hry pro jednoho hráče, kde jde opakováním dospět k nalezení vítězné strategie. Intuitivně dovede rychle odhadnout, do jaké míry může hráč ovlivnit výsledek, zda má tedy jeho snažení velký význam či ne.

b) Diskutuje, smlouvá o metody řešení, nerad hledá všechna řešení, postupně akceptuje správnost odpovědi, že úloha nemá řešení: „Jak to může být dobře, když se to vlastně neřešilo?“

c) Objevil, že ke stejnému výsledku se dá dojít různými cestami, a od té doby prožívá dilema, zda řešit originálně, nebo ekonomicky, je však brzděn negativně osobním vztahem k tvorbě poznámek, zápisů. Ty případně tvoří jen útržkovitě, na druhou stranu ho daný způsob žene ke snaze zobecňovat, a tím mu občas unikají podmínky řešení; na dotaz je schopen je zformulovat.

d) Ne každou úlohu chce řešit, ale akceptuje argumenty na úrovni typu – touto úlohou se rozvíjí. . . , trénuje. . . , umožní ti to později. . . a takovým argumentům dává přednost před „motivacemi“ námětem nebo samotným materiálem. Již nevyžaduje hodnocení: „Tak co, byl jsem dobrej?“ V tichosti očekává konkrétnější hodnocení, případné výzvy jsou formulovány např.: „Co tomu dneska říkáte? Co vy na to? Já vím, že mi všechno nešlo, že jo?“ Očekává detailnější rozbor typu: „Snaha skvělá, kdyby ses déle soustředil, našel bys všechno a lépe by se ti odpovídalo.“ Na to reaguje zpravidla: „Když jsem to chtěl ukázat. Musel jsem to říct.“ Příčina nedokončení často tkví v tom, že hlava nestačí zpracovat záplavu informací a P potřebuje slyšet dílčí výsledek, aby mohl případně pokračovat. To znamená, že si ventilací dílčích výsledků jednak pomáhá, jednak tak dělí proces řešení do specifických etap. Pokud si udělá poznámky, tato situace nenastává.

e) Po celou dobu se vyskytují problémy ve spolupráci (ve dvojici či trojici). Výjimku představuje situace, kterou umí popsat pomocí terminologie, kterou ostatní neznají. Rád by měl ve skupině hlavní slovo, ale nedovede si získat respekt. Je nutné poznamenat, že přesto vyhledává pro práci ve skupině starší žáky. Příčina problematické kooperace zřejmě spočívá i v tom, že jeho uvažování jde ve větších skocích, že interpretuje své řešení jinak než ostatní.

Domácí úkoly (DÚ)

V KPM nebo IP vyžaduje domácí úkoly, a to pravděpodobně ze tří důvodů:

a) Předvádí rodičům, co už umí, poněvadž školní DÚ jsou příliš snadné, proto také navrhuje náměty pro DÚ: „Dej mi něco s písmeny. Dneska rovnice, jo? Ještě nějakou strategii. . . “

b) Doma se nudí a vidí v nich zábavu, pokud má plány, žádá o odložení DÚ.

c) Rád pokračuje v aktivitě, která umožní při jistém počtu opakování popsat optimální strategii, ví, co ocením a za co bude obzvlášť pochválen (pokud to není psaní a kreslení). Strategie volí také proto, že mu v budoucnu umožní zvítězit nade mnou, otcem nebo spolužáky v KPM.

Vyhýbá se slovním úlohám a úlohám s geometrickou tématikou, pokud není geometrická podstata „schována“. Více dává přednost úlohám písemným, rád se s řešením pochlubí, ale při řešení doma zpaměti řešení zapomíná a je pro něho problém řešení opět rekonstruovat (paměť, motivace) a spoléhá na to, že mu věřím: „Fakt jsem na to přišel, ale teď se mi do toho už nechce.“

Individuální práce

Volba aktivit se řídí dvěma pravidly:

a) rozvojem schopností, které jsou v disharmonii s ostatními a současně jsou potřebné pro jeho další rozvoj v matematice,

b) posilováním vztahu k matematice volbou zajímavých témat, formou aktivit či podřízením se jeho zájmu - přáním. Přes všechny možné překvapivé zvraty, kontrasty v dotazech od naivních po netriviální, jsou jeho celkové projevy stále dětské a často je vedle pocitu z úspěšného řešení, objevení něčeho „nového“ důležité ocenění obrázkem. Tématické okruhy vztahující se k číslu jsou na konci článku v příloze.

Rozvoj

Cesta žáka P k číslu je dominantní a rozvíjí se přes zájem o znaky a práci s nimi. Fascinace většími a většími čísly (sextilion apod.) je přerušována etapami, ve kterých se zabývá možnostmi jejich kódování a vlastnostmi jednotlivých čísel, skupin čísel, skupin zápisů. Objevování vlastností čísel v souvislosti se zápisy představovalo relativně nepřerušovanou etapu, ve které dokázal jednotlivé objevy propojovat zprvu na přirozených číslech, později v oboru celých čísel a navázal dotazy na dané vlastnosti čísel v dalších oborech.

Následovaly etapy, které prokládaly práci s přirozenými (desetinnými, celými zápornými čísly). V těchto etapách se zabýval písmeny a jejich vztahy k číselnému oboru, ve kterém naposled intenzivněji pracoval. Například po zvládnutí vlastností přirozených čísel do milionu prošel etapami: kódování čísla v jiných kulturních systémech, význam písmene v rovnici (číslo a písmeno, obr. 2), řešení algebrogramů (číslice a písmena, obr. 3), další rozšíření číselného oboru, jiné významy písmene v geometrii (písmeno jako délka úsečky), zájem o iracionální čísla. Po objevu, že jedno číslo může mít různou podobu zápisu v závislosti na základu soustavy, formuloval dotazy typu: „Jak by se psalo pí ve dvojkové soustavě, bylo by pí dále pí, může se a rovnat pí?“ Po práci se zlomky a celými čísly následoval zájem o operace s písmeny a vztah mezi číslem vyjádřeným písmenem a číslicemi zaznamenanými velkými písmeny (kombinace algebrogramů a rovnic). Po hrách s čísly v desítkové soustavě nastoupil opětovný návrat k písmenům, řešení rovnic, objevení ekvivalentních úprav, řešení diofantovských rovnic pomocí tabulky, kde dával najevo strategii zkrácení s komentářem a poprvé akceptoval nutnost hledání všech řešení úloh s tím, že by možná stačilo najít nejmenší a největší hodnotu: „Najdu nejmenší a největší číslo pro ‘každý písmenko´ a nemusím to počítat celý, když to. . . po třech. . . “ Spontánní snaha vyjádřit objevený vztah pomocí písmen nebyla sice zakončena úspěchem, ale protože mu zpravidla není poskytnuta nápověda, vyžadoval takové úlohy, kde by to takto bylo zadáno.

Využívá sociální inteligence k tomu, aby dosáhl nápovědy jinou cestou možná i proto, že nedokáže svou prosbu či dotaz dostatečně formulovat, možná i proto, že se této strategii daří doma. Zájem o operace s čísly je zpravidla velmi krátký, jakmile pochopí algoritmus, vyžaduje obtížnější zadání (odčítání šestimístných čísel zapsaných v osmatřicítkové soustavě tak, aby nebyla použita ani jedna číslice, jen písmena, obr. 1). Je-li pro něho způsob dosažení výsledku evidentní, nemá tendenci práci dokončit. Odkazuje na práci s kalkulačkou, stručným popisem toho, co je třeba udělat, kdyby to měl dělat (včetně práce ve dvojkové soustavě). Sám ovšem o kalkulačku nejeví zájem, bere ji jako nástroj pro situace, kdy se mu něco nechce dělat, a ví, že se to na kalkulačce vyřešit dá. Hůř se pro něho vytvářejí podmínky pro to, aby cítil potřebu výsledky ověřovat. To se ovšem promítá negativně v práci s písmeny.

Zájem o řešení slovních úloh a úspěšnost jejich řešení jsou závislé na tom, zda jej problém zaujme. Jakmile přijde na princip, není snadné ho donutit práci dokončit, což vede někdy k tomu, že není schopen říci, zda (ne)existuje více řešení. Pokud má v řešení slovní úlohy použít písmena, zájem o ně stoupá. Preferuje ústní řešení, nebo podání návodu. Takové situace ovšem u řešení rovnic nenastávají. Diskuse o ekonomičnosti procedury řešení se mu líbí, tvrdí, že je zajímavější hledat „zkratky" i na počítačových nebo jiných hrách. Najít a popsat optimální strategii je závislé na hře a zájmu, který v něm vzbudí. U některých her není schopen k objevení dospět proto, že není dost trpělivý dosáhnout potřebné herní zkušenosti nebo dostatečného počtu výher. Pro popsáni objevené strategie mu někdy chybí slova, rád by použil matematickou symboliku, ale neví si s ní rady (např. u hry Číselný logik). Při řešení znakových závislostí a šifer je úspěšný jak u číslicových, tak obrázkových kódů, u písmenkového kódu má nižší úspěšnost.

Typicky jako žák mladšího školního věku dlouho nevydrží u jednoho tématu, ale rád se k němu v určitém cyklu vrací. Jeho návraty k tématům směřují do hloubky, avšak dobu a míru si do jisté míry reguluje sám. Z pohledu dospělého se jeví jeho hlubší dotazy nesystematické, avšak posuzujeme-li je v horizontu tří a více měsíců, je patrné, že se spirálou k podstatě dostává. Není mu dopřán instruktivní přístup (na který je zvyklý z domova), je většinou stavěn před otevřené problémy, podněcován k objevování a k diskusi. Vzhledem k (pravděpodobně dočasně) stagnující schopnosti provádět sluchovou analýzu jsou mu exkurze do historie podávány formou vyprávění bez použití grafické podpory, dokud o ni sám nepožádá, nebo pokud není ke grafické komunikaci (např. tvorbě poznámek) nucen. Schopnost si dělat poznámky je problematická; pokud se soustředí, vykazuje nadprůměrnou paměť, a tudíž necítí potřebu si poznámky dělat. Poznámky jsou redukovány především na číslice a písmena, vyhýbá se jiným znakům a obrázkům. Je možné, že patří k těm 3 % populace, pro které má symbolika významně vyšší výpovědní hodnotu než písmo hláskové nebo obrázkové.

Jeho komunikace ústní zůstává smíšená. Tedy není schopen v převážné většině spontánních výpovědí podat přesné a úplné informace. Proces řešení úloh vykazuje, že řešení není náhodné. Písemná komunikace u něho je více určena pro něho samého s tím, že má vedle sebe osobu, která problému rozumí a umí zápis dešifrovat tak, aniž by ho poškodila (zde naráží ve škole, protože UM ani TU tuto hru na lehčích úlohách nepřijímají. Do jaké míry je zkratkovitý způsob komunikace, jako například ukazování, pohled očí, přidechování, pauzy mezi slovy, zapříčiněn rychlostí myšlení, při které nestačí ústně kompletně formulovat, se lze jen dohadovat podle znaků nonverbální komunikace. Zajímavá je ovšem i volba slov ve slovní komunikaci v momentě, kdy přechází od čísel zapsaných číslicemi k číslům zapsaným písmeny nebo pokud uvažuje o čísle v obecnější rovině. Typické jsou, zejména v zahájení komunikace o číslech jako takových, odbočky, které nemusí být vždy těsně spjaty s tématem. Prožívání v takovém momentu zřejmě spouští asociační myšlení, které ho ovšem rozptyluje (např. [4]). Ve zrychleném podávání informací má tendenci vynechat sloveso nebo atributy sledovaných jevů. Na požádání se snaží myšlenky zformulovat přesněji, považuje to někdy za zbytečné: „Dyť to víte!“ Je ovšem přístupný dvěma typům zdůvodnění: a) „Je to pro mě kontrola, že sis to v hlavě dobře srovnal.“ b) „Co kdybys teď vyslovil matematickou větu.“ Od druhého ročníku je schopen postřehnout neúplnost zadání úlohy a od třetího ročníku i některé nepřesnosti, na které rád upozorní, avšak do provedení jejich korekce se nehrne.

Jeho relativně rychlý postup v práci s číslicemi i písmeny se ve svém důsledku projevuje negativně nejen v menší schopnosti komunikovat, popsat, co právě dělal, co právě vidí, ale dokonce i vyjádřit zájem a dostatečně přesně se zeptat. Spoléhá na to, že se dospělý přizpůsobí a bude se mu snažit vyjít vstříc, vcítí se do toho, co sám chce asi vědět. Nepřistoupit na tuto jeho hru není snadné.

Závěry

U žáka P se projevuje *zájem o písmena v matematice* v jakýchsi *spirálách*. Propojení prvních relativně izolovaných zkušeností s písmenem v matematice naráží na jeho malou zkušenost v oblasti aritmetiky, což mu brání hledat společné charakteristiky situací odehrávajících se v odlišných kontextech.

Vliv přetrvávajícího konkrétního myšlení, které dominuje pokaždé v naprosto nové situaci, v *prvních fázích* práce s písmenem v nové situaci se jeví jako tendence propojovat písmeno s konečným počtem objektů (zpravidla do deseti) ve smyslu, jak to rozebírá Peregrin (viz [5], s. 42). Zdánlivé těkání od jednoho tématu k druhému lze zdůvodnit i tak, že P potřebuje danou zkušenost zpracovat (uležet) a po nasycení této potřeby se pak sám k tématu po určité době vrací. *Druhou fázi* nazvěme návraty. Jsou dvojího typu a lze je charakterizovat jako potřebu prohloubení se zaměřením na pravidla fungování a potřebu ujasnění významu. Začíná se formovat určitá struktura ve světě písmen. Ve třetím následném typu návratu lze rozpoznat potřebu poznání hranic platnosti, pokud už tomu tak nebylo předtím, potřebu tvořivosti, požadování nových situací, kde by bylo možné použít aplikaci nebo využít analogie. *Třetí fáze*, kdy chápe proměnlivost významu a možných hodnot písmene v závislosti na kontextu, startuje spontánně zatím jen zřídka. Práce s kontextem je více intuitivní než vědomá. Příčiny nemusejí spočívat jen ve věku žáka P nebo volbě aktivit, ale i v jeho (dočasném?) zhoršení schopnosti se soustředit a občasné neschopnosti či nechuti zapsané přečíst (transformovat psaný kód do mluveného). Kontext zatím nechápe jako zdroj specifických informací, které uvolňují nebo limitují informační jádro, který podporuje rozhodovací procedury. Příčinou může být i obecně dosavadní malá čtenářská zkušenost, nebo způsob práce učitele ve třídě. Funkce kontextu žák P zatím objevuje.

Proces *zobecňování* je obtížné mapovat i vzhledem k tomu, že se P vyjadřuje zpravidla útržkovitě a jeho slovní zásoba (při vstupu do školy nadprůměrná) stagnuje. Poměrně snadno pochopil rozdíl mezi „je možné" a „je nutné" v popisech pravidel her a v zadání úloh. Jeho zaměřenost na fungování pravidla, zákonitosti (týkající se skupiny objektů) na principu „vždy" je pro něho natolik dominantní, že při shrnování zkušenosti necítí potřebu toto slovo užít, na výzvu uvádí nebo naznačuje výčet objektů, pro které podle něho pravidlo platí. V poslechu má tendenci nevěnovat pozornost kvantifikátorům. Při tvorbě vlastních úloh je situace odlišná, je schopen se dotazovat na obecnou platnost, i když sám někdy není s to pravdivost odpovědi posoudit. V argumentaci přijímá dobře vyvrácení obecné platnosti uvedením případu, kdy pravidlo nefunguje (lépe na úrovni symbolů než slov).

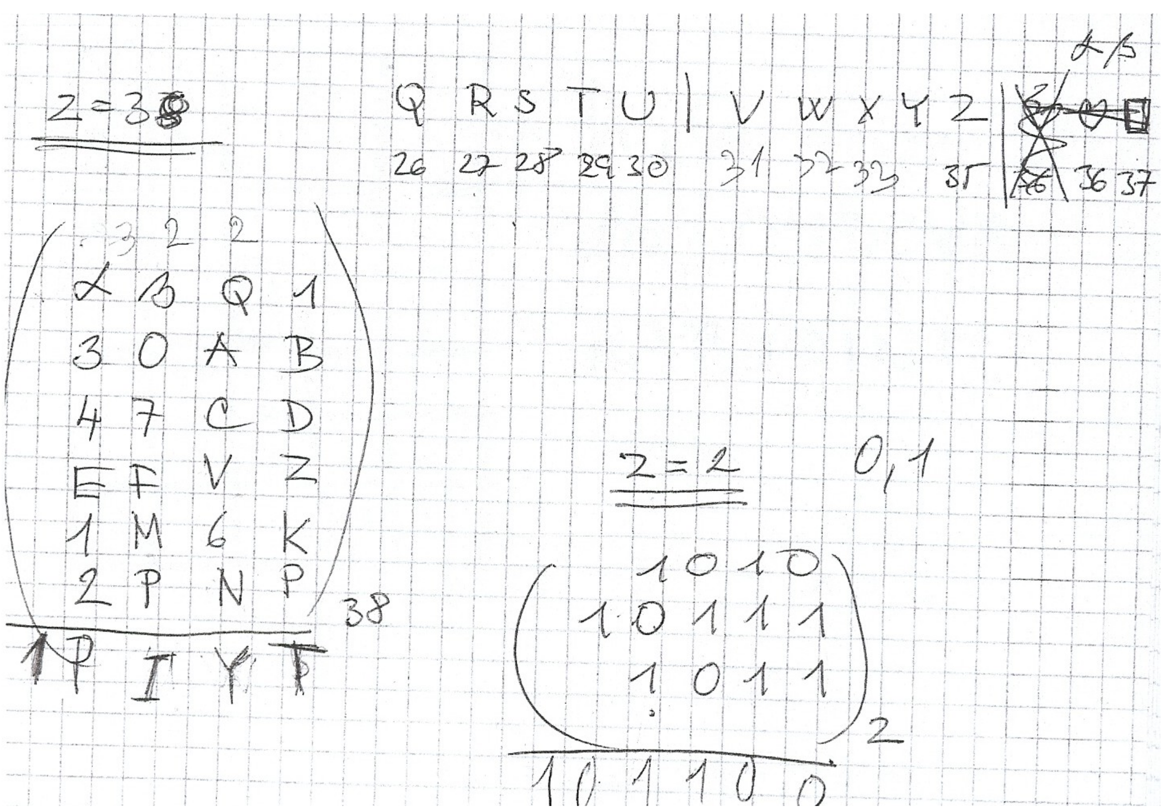
Problém existence či neexistence řešení naráželo v prvních dvou letech především na problém „zbožštění" symbolu ve smyslu „jde-li to zapsat, pak to existuje", což lze považovat za detail, ale ve své podstatě jde o problém filosofický (Russel, Nesvatba, Wittgenstein, Kesner a další). Nedořešena pro P zůstává otázka vztahu rovnosti mezi dvěma matematickými symboly (ať již jde o čísla, nebo písmena). Je zřejmé, že číslo zapsané číslicemi se může rovna číslu zapsanému pomocí písmene, ale není dokončena diskuse, zda a kdy se mohou dvě různá písmena sobě rovnat (patrně vliv střetu algebraických úloh s algebrogramy).

Propojení dvou světů, „světa písmen" se „světem čísel", je u P v rámci popsaných situací poměrně úspěšné zejména ve srovnání s žáky téhož věku, avšak opačné propojení „světa čísel" se „světem písmen" je problematičtější. Obě cesty nejsou pro začátečníka P stejně obtížné. Interpretaci můžeme hledat i v oblasti psychických potřeb (potřeba jistoty, bezpečí, smysluplnosti, přiměřenosti podnětů – Langmaier, Matějček a další). První cestu můžeme charakterizovat jako cestu ze „světa neznáma" do „bezpečného světa", druhou jako cestu v opačném směru. Svět písmen pravděpodobně není pro P jen jeden, už ovšem nejde o izolovanou práci s jednotlivými písmeny. Písmena jsou minimálně v rámci jedné úlohy propojena, jsou nositeli informací a již v izolovaných situacích (vázaných na obrázky a z jeho pohledu ne na čísla) i nástrojem vyjádření obecnějších pravidel.

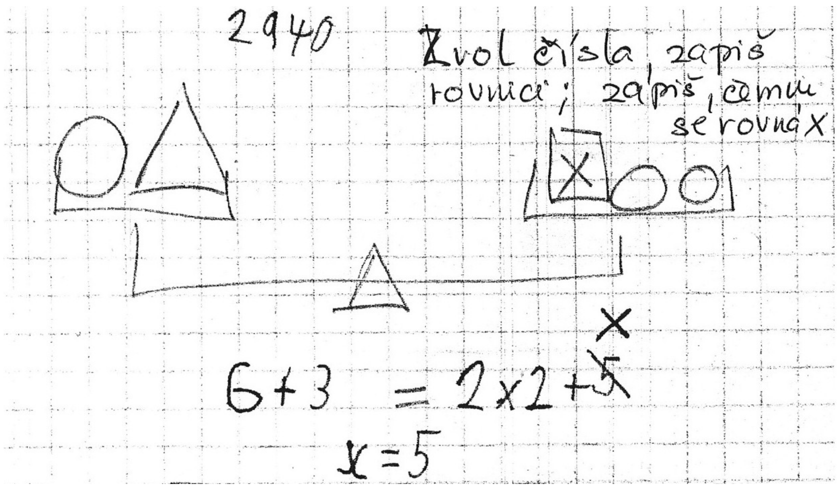
Příloha

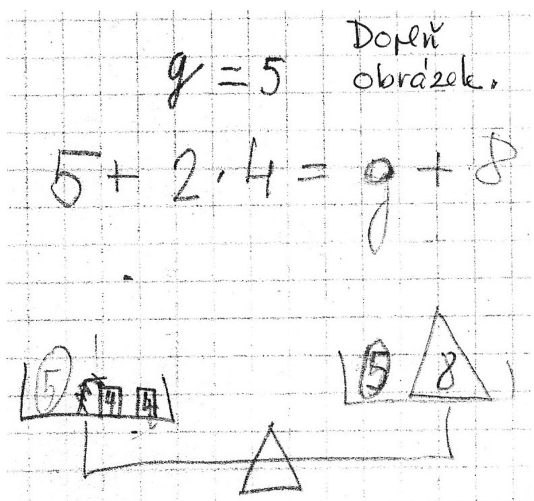
Období	Zájem o	Diskutované okruhy, terminologie
konec 1.r.	velká čísla	číslo – číslice
		jednotky, desítky, ...
		triliony, ..., počet cifer
		nekonečno (v kontextu číselných oborů)
	čísla do milionu	figurální čísla (modely Pythagora, Montessori)
		dělitelnost dvěma, deseti, pěti
1.pol. 2.r.	historie zápisu čísla	poziční a nepoziční soustavy
		základ soustavy, tvoření pozičního zápisu
		počet cifer a soustava
		sudost a lichost v soustavách mimo $z = 10$
	poziční desítková soustava	symetrická čísla
		dělitelnost 3, 6, 9, 11
		součet lichých (sudých) čísel s využitím figurálních čísel
	počítání s velkými čísly (nad milion)	
	test na substituce na úrovni obrázků	
	rovnice I	písmeno – číslo
	algebrogramy	písmeno – číslice
2.pol. 2.r.	písmena a geometrie	písmeno – úsečka (doc. Novotná)
		$a + a = 2a$
		n vyjadřující počet hran, stěn
	desetinná čísla	zápis čísel v poziční desítkové soustavě
		zápis desetinných čísel v jiných soustavách
	rovnice II	obrázek a matematické symboly
		počet písmen
	počítání v jiných soustavách	číslice soustavy o $z = 32$ (7, 8, 15, 16, 25, ...)
		zápis čísla, pokud nestačí abeceda
	problém π a ostatní písmena	písmena jako čísla v $\mathbf{R}$ (pro $z = 10$)
		π v dvojkové soustavě
	počítání zpaměti i s písmeny	písmena jako čísla (pro něho v $\mathbf{N}$)
		$\pi + \pi$
		může se součet dvou písmen rovnat nule?
	závislosti	na úrovni obrázků, znaků, číslic i písmen
		pravidlo, pravidelnost
	převody	převod zápisu čísla do soustavy o jiném základu
	diofantovské rovnice	tabulky

	diofantovské rovnice	pravidlo
		meze pro čísla
	násobky 10 a 2 v pozičních soustavách pro $z \neq 10$	
	šifrování	písmena a číslice jako kódy, dekódování
	rozdíly mezi číselnými obory	písmena mimo **N**
		číselné obory a číselná osa
3.r.	nezávislost podmínek na volbě písmen	
	soustavy rovnic	
	nerovnice v **N**	podmínky
	nerovnice a rovnice	
	operace, jejich vlastnosti a písmena	platí vždy, někdy, neplatí nikdy
	diskuze ke vzorcům v geometrii	
	rovnice III	
	písmeno a slovní úlohy	

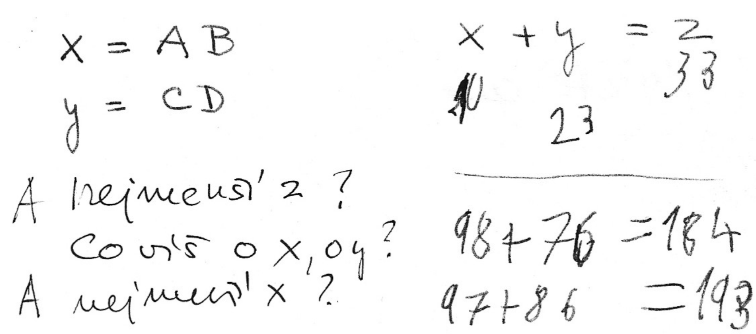


Obr. 1


2940
Zvol čísla, zapiš rovnici; zapiš, čemu se rovná x
6+3 = 2x2+5
x=5


g = 5
Doplň obrázek.
5+ 2 · 4 = g + 8

Obr. 2


x = AB
y = CD
x + y = z
23
33
A nejmenší z ?
Co víš o x, o y?
A nejmenší x ?
98+76 = 184
97+86 = 193

Obr. 3

Literatura

[1] Bonnet, C., Ghiglione, R., Richard J. F., *Traité de psychologie cognitive – perception, action, langage*. DUNOD, Paris, 1989.

[2] Kaslová, M., Komunikace s nadprůměrnými žáky. In Zhouf, J. (ed.), *Sborník Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF, Hradec Králové, 2004.

[3] Kesner, L., *Vizuální teorie*. H and H, Jinočany, 1997.

[4] Koukolík, F., *Mozek a jeho duše*. Makropolus, Praha, 1995.

[5] Peregrin, J., *Filosofie a jazyk*. Triton FS/9, Praha, 2003.

[6] Sperberg, D., Wilson, D., *Relevance – Communication and cognition*. EdM, Paris, 1989.

[7] Tondl, L., *Znalost, její lidské, společenské a epistemické dimenze*. Filosofia, Praha, 2002.

[8] Weil-Barais, A., *L´homme cognitif*. PUF, Paris, 2001.

[9] Wittgenstein, L., *Filosofická zkoumání*. FU AV ČR, Praha, 1993.

Fyzikální soutěže pro studenty středních škol

Zdeněk Kluiber[1]

Abstrakt: Studenti středních škol ČR se mohou účastnit řady republikových a mezinárodních fyzikálních soutěží, resp. odborných aktivit. Každá soutěž má svoje výrazná specifika, avšak jejich společným základem je příprava ke vstupu na vysokou školu, ke studiu fyziky, resp. technických disciplín.

Abstract: Secondary school students in CZ can take part in many national and international physical competitions and other scientific events. Each competition has its specifics but their common basis is the preparation for the entrance to university to study physics or technical disciplines.

Řada studentů gymnázií se hodlá již v průběhu svého studia před maturitní zkouškou „poměřit se svými soky“, porovnat svoje kvality s kvalitami spolužáků. Tím nejjednodušším způsobem je pak vstup do odborných soutěží a aktivit (viz [1]).

Soutěž obecně představuje i prostředek ke zvýšení zájmu o daný obor. Stanovená pravidla hodnocení soutěže umožňuji klasifikovat studentovy kvality, a tím mu i sdělit,

[1] *Pedagogická fakulta, Univerzita Hradec Králové, zdenek.kluiber@email.cz*

ve které oblasti je, resp. není, dobře odborně připraven. U všech dále uvedených soutěží jsou jednotně uvedeny následující údaje: rok založení, realizovaný ročník v roce 2005, místo konání, počet účastníků (přibližně 400 – D, přibližně 1000 – M), způsob řešení úloh, resp. problémů (základem je písemné řešení – P, základem je ústní presentace řešení – U, presentace probíhá v angličtině – A), základní charakteristiky.

Studenti středních škol v ČR se mohou zúčastňovat čtyř náročných soutěží ve fyzice v rámci své mimoškolní práce, která však na výuku fyziky bezprostředně navazuje. Všechny mají mezinárodní nadstavbu. Jde o tyto soutěže:

1. Fyzikální olympiáda (viz [3]): 1959, 46., střídají se města zúčastněných zemí, D – 60 zemí, P, nejosvědčenější systém práce při rozvoji studentů – individualit – talentovaných na fyziku, samotná soutěž je vyvrcholením dlouhodobější činnosti se zájemci o fyziku.

2. Středoškolská odborná činnost v oboru fyzika: 1978, 27., nadstavbou jsou soutěže, resp. přehlídky První krok k Nobelově ceně za fyziku, Intel ISEF, EU Contest, ESI, ICYS, D, P, U, A, zpracování písemného řešení (jedním až třemi studenty) zvoleného tématu a na přehlídkách jeho veřejná obhajoba, v mezinárodní nadstavbě – A.

3. První krok k Nobelově ceně za fyziku: 1992, 14., Varšava – zakladatel a organizátor soutěže je Fyzikální ústav Polské akademie věd, D – 50 zemí, P, práce předkládány v angličtině, zajímavé a hodnotné výsledky řešení významného fyzikálního problému podle vlastního výběru studenta – individuality.

4. Turnaj mladých fyziků: 1979, 18., střídají se města zúčastněných zemí, D – 30 zemí, P, U, A, soutěž pětičlenných družstev studentů středních škol, jsou řešeny originální, náročné úlohy, obecně formulované fyzikální problémy podobné úkolům, které řeší vědci při zkoumání fyzikálních jevů.

Dále se mohou studenti ČR zúčastňovat soutěží a aktivit:

5. Intel International Science and Engeneering Fair-Intel ISEF: 1950, 56., střídají se města USA a Kanady, přibližně 1 500 účastníků z 50 zemí, P, U, A, presentace řešení odborných problémů z oborů chování a sociální vědy, biochemie, botanika, chemie, výpočetní technika, vědy o Zemi a vesmíru, strojírenství, vědy o životním prostředí, vědy o stáří člověka, matematika, medicina a zdravotnictví, mikrobiologie, fyzika, zoologie, průměrně je asi 90 prací v jednom oboru, generálním sponzorem je firma INTEL

6. European Union Contest for Young Scientists – EU Contest: 1984, 22., vybrané evropské město, 80 prací z 30 evropských zemí, P, U, A, je chápána jako soutěž vítězů národních přehlídek – každou zemi mohou representovat maximálně 3 práce, práce nejsou děleny do oborů – soutěž probíhá mezioborově, soutěž pořádá Evropská komise při Evropské unii.

7. QUANTA: 1995, 11., Lucknow, Indie, soutěž probíhá na největší střední škole na světě – City Montessori School, D – 40 zemí, P, U, A, soutěží až sedmičlenná družstva – jejich členové jednotlivě nebo ve dvojicích, v soutěžích debata – mezinárodní společenské téma, skupinová diskuse – moderní technické nebo přírodovědné téma,

matematický kvíz – soubor teoretických otázek a úloh (písemně), astronomický kvíz – soubor teoretických otázek a úloh (písemně), přírodovědný kvíz – odpovědi na otázky, obsah fotografií z fyziky, chemie a biologie (ústně), programování – na libovolné téma, vytvoření programu během pěti hodin, jeho předvedení a vysvětlení funkčnosti, koláž – aktuální, např. ekologické téma, předvedení modelu – prezentace předem stanoveného odborného projektu ve výstavním boxu.

8. Konference ICYS – International Conference of Young Scientists: 1994, 12., různá města zúčastněných zemí, D – 30 zemí, P, U, A, soutěžní obory fyzika, matematika, výpočetní technika, ekologie, presentace řešení kvalitních odborných projektů.

9. Přehlídka ESI – Expo Science International: 1988, 10., různá města zúčastněných zemí, 1 600 účastníků ze 70 zemí, prezentace výsledků řešení odborného problému, projektu, pořadatelem přehlídky je MILSET (Mezinárodní hnutí vědeckotechnické činnosti ve volném čase).

Do budoucna zřejmě přibudou:

10. EUSO – European Union Science Olympiad: 2003, 3., různá města zúčastněných zemí, účast – 15 zemí, U, A, soutěž pro tříčlenná družstva studentů ve věku do 16 let, soutěžní obory spojení fyziky, chemie, biologie – právě odborníků z těchto tří oborů se Evropě v současné době nedostává.

11. IJSO – International Junior Science Olympiad: 2004, 2., zakladatel – Fyzikální společnost Indonésie, účast – 30 zemí, soutěž pětičlenných družstev studentů ve věku do 14 let, akcent na přírodovědné vzdělání jako celek.

Je tak několik mezinárodních soutěží, ve kterých je vedle výborných písemných výsledků zpracování úlohy, resp. projektu, výrazně dbáno na presentaci. Tyto soutěže probíhají v anglickém jazyce. Je tedy možné tvrdit, že od studentů je požadována velmi dobrá angličtina, správná anglická terminologie, schopnost v angličtině diskutovat a argumentovat (viz [2]).

Získat skutečně dobré zkušenosti z vyřešeného problému, z perfektního a smysluplného přednesení výsledků vlastní práce, zkušenosti z rytířsky vedené diskuse – to jsou zřejmě nejvyšší kvality provázející účast studentů v mezinárodních soutěžích.

Rozhodnutí studenta střední školy pro určitý směr jeho budoucího, resp. pracovního zaměření musí vycházet z odpovídajícího se seznámení s kvalifikovanou prací v daném oboru. Splnění tohoto požadavku předpokládá, aby studenti při svém středoškolském studiu získali možnost si osvojovat vědecké poznatky daného oboru (na příslušné úrovni odpovídající střední škole), ale aby měli především možnost projevit aktivní tvůrčí činnost simulující práci vědce, vysoce kvalifikovaného odborníka.

Úkolem proto je zajistit organizační a materiálovou stránku vysoce efektivní přípravy talentovaných studentů střední školy.

Až na základě vlastní práce studenta učitel poznává charakteristické rysy talentovaného studenta. Teprve pak mu může doporučit jeho účast v některé ze zmíněných soutěží.

Přirozeně že společným jmenovatelem všech odborných středoškolských fyzikálních aktivit je cílená příprava k vysokoškolskému studiu fyziky, resp. technických oborů.

Pro všechny vítěze matematických, programátorských a fyzikálních soutěží v daném školním roce pořádá Komise pro talenty JČMF pracovní konference (v roce 2005 již po sedmé), na kterých studenti přednášejí o řešeních problémů, které je v soutěžích zaujaly.

Literatura

[1] Kluiber, Z., *Tvořivost učitele a účastníci fyzikálních soutěží.* ARSCI, Praha, 2004.

[2] Špulák, F., Problematika vytváření pojmů ve vyučování fyzice. In *4. pražská konference o kybernetické fyzice*, UK a ČVUT, Praha, 1991.

[3] Volf, I., *Pro mladé talentované fyziky?*. MAFY, Hradec Králové, 2001.

Stručné shrnutí výsledků testování žáků 9. tříd

Eva Lesáková, Eva Řídká[1]

Abstrakt: Některé výsledky testu matematických dovedností v devátých třídách třech českých krajů ukazují, co vlastně je ve výuce matematiky opravdu důležité.

Abstract: Some results of the test of mathematical skills in Grades 9 of three Czech districts show what is really important in the teaching of mathematics.

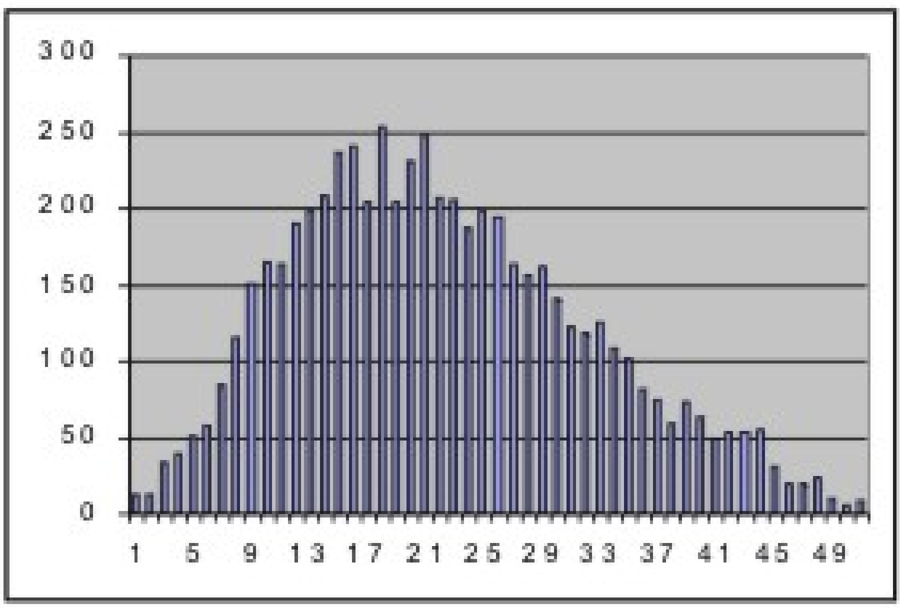
MŠMT má snahu doplnit zavádění Rámce vzdělávacích programů do základních škol Národními srovnávacími zkouškami. Tyto zkoušky by prozatím v závěru 5. třídy a 9. třídy ověřovaly, do jaké míry byl na školách respektován vzdělávací obsah a učivo stanovené RVP pro ZŠ, a perspektivně by doplnily portfolia žáků. Pro ředitele středních škol, na kterých by absolventi 9. tříd rádi pokračovali ve studiu, by byla tato portfolia souborem informací o žácích. Výběrové řízení by pak bylo možné provést bez konání přijímacích zkoušek.

Cermat (od 1. 1. 2005 Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání) byl již v loňském roce v rámci přípravného Projektu Kvalita pověřen testováním žáků v kraji Karlovarském. V letošním roce proběhlo ověřování dovedností žáků 9. tříd již ve třech krajích ČR, v kraji Libereckém, Pardubickém a opět Karlovarském. Uskutečnilo se 4. února na všech ZŠ jednotně, a to z testů Matematické dovednosti, Studijní dovednosti a Dovednosti v českém jazyce. Každý test trval 40 minut čistého času. Ve svém příspěvku chceme představit zjištěné výsledky. Testy jsou celé k dispozici na stránkách [3] Cermatu.

[1] *Cermat, Praha, lesakova@cermat.cz, ridka@cermat.cz*

Po loňských zkušenostech z Karlovarského kraje jsme letos již do pilotáží zařazovali úlohy s menšími požadavky například na schopnost abstrakce, či úpravu algebraických výrazů. Vynechali jsme též složitější slovní úlohy vedoucí k sebeméně komplikovaným rovnicím. Stejným problémem jako v loňském roce však zůstala doba trvání testu. Je-li cílem testu prověřit vzdělávací výstupy z deváté třídy, není dost dobře možné připravit test na 40 minut. Doporučujeme tedy všem uživatelům testu, aby zadávali test na 60 minut.

Letošní test obsahoval 17 úloh, prvních devět úloh bylo otevřených, žáci v nich uváděli postup řešení, úlohy 10 a 11 byly rozhodovací, žáci vybírali mezi odpovědí ANO-NE, a úlohy 12–17 byly úlohy s výběrem odpovědi. Test byl zadán ve dvou srovnatelných mutacích A, B. Maximum možných bodů v testu bylo 50. Testování se zúčastnilo 10 953 žáků. Graf 1 znázorňující rozložení bodů ve skupině A koresponduje s obvyklou situací v klasifikaci matematice. Vrchol křivky normálního rozdělení je posunut k nižším bodovým hodnotám.



Graf 1

Nicméně z grafu 1 také vyplývá, že talentovaní žáci v matematice nevymřeli. Konkrétní údaje k výsledkům testu jsou v tabulce 1. Podle ní *právě 50 bodů získalo v obou skupinách 14 žáků*!

nejvýše 15 bodů (30% úspěšnost)	nejvýše 25 bodů (50% úspěšnost)	alespoň 40 bodů (80% úspěšnost)	alespoň 45 bodů (90% úspěšnost)
1 961 žáků (33 % řešitelů)	4 094 žáků (69 % řešitelů)	330 žáků (5,5 % řešitelů)	87 žáků (1,5 % řešitelů)

Tabulka 1

Pro zajímavost uvedeme několik příkladů z testu a úspěšnost žáků při jejich řešení.

Úloha 1

Vypočtěte (a je kladné číslo):
1.1 $-3-(-8)=$
1.2 $2\frac{1}{3}-1{,}3=$
1.3 $2a\cdot\frac{a}{2}=$
1.4 $2a:\frac{a}{2}=$

[Nejlépe byla řešena úloha 1.1 (sčítání čísel, 88 %), nejhůře 1.2 (sčítání zlomků, 45 %). Bez chyby řešilo všechny úlohy 30 % žáků, nejvýše s jednou chybou řešilo 57 % žáků. Všechny čtyři úlohy mělo zcela chybně 8 % žáků, nejvýše jeden správný výsledek mělo 26 % žáků. Výsledek svazku ovlivnily výrazněji druhé dvě úlohy (vyšší RIR), tyto úlohy žáky výrazněji odlišily. Nejmenší rozlišovací schopnost měla první úloha svazku, kterou zvládla většina žáků. Asi 57 % dětí učivo zvládlo, 26 % jej nezvládlo.]

Úloha 2

Rodina Lacinových platí *měsíční zálohu* na elektřinu 1 000 Kč. Jejich skutečná spotřeba elektřiny za minulý rok je zaznamenána v tabulce. Spotřeba elektřiny je uvedena v kilowatthodinách (kWh).

období roku	1. pololetí	2. pololetí
spotřeba v kWh	1 450	1 350

Cena 1 kWh je 3,96 Kč.
Uveďte, jakou částku Lacinovi při *ročním* vyúčtování dopláceli, případně kolik jim bylo vráceno.

[Úspěšnost žáků v úloze byla 52 %, úlohu neřešilo 28 % žáků, plný počet bodů (4 body) získalo 44 % žáků.]

Úloha 3

Zakreslete body K, L a M do souřadnicového systému Oxy, jsou-li dány jejich souřadnice: $K[-1;3]$, $L[6;4]$, $M[3;0]$.

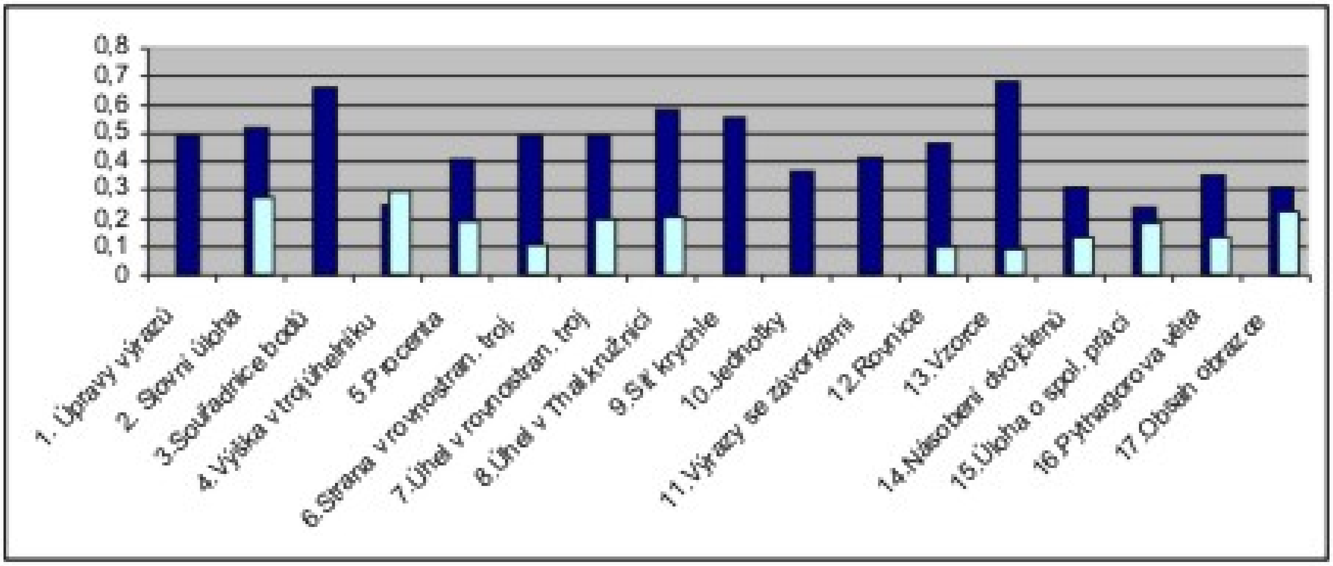
[58 % žáků mělo úlohu bezchybně, nejvýše s jednou chybou zvládlo učivo 73 % žáků. Úlohu neumělo vyřešit 27 % žáků.]

Úloha 4

V trojúhelníku ABC jsou dány souřadnice vrcholů $A[1;0]$, $B[5;0]$, $C[-2;4]$.
4.1 V trojúhelníku narýsujte výšku z vrcholu B.
4.2 Určete vzdálenost bodu C od přímky AB.

[Úspěšnost žáků v úloze byla 24 %, úlohu neřešilo 29 % žáků, plný počet (3 + 1 bod) mělo 15 % žáků a 28 % žáků.]

Z grafu 2 je možné nahlédnout obtížnosti jednotlivých úloh. Tmavé sloupce představují úspěšnosti žáků v jednotlivých úlohách (maximum je 1). Světlé sloupce vyjadřují relativní četnosti žáků, kteří se nepokusili danou úlohu řešit.



Graf 2

Zkušení pedagogové jistě i z této ukázky nahlédnou, které úkoly dělaly žákům potíže. Mohou si také ověřit znalosti svých žáků a mj. je porovnat s tímto vzorkem. Uvedené podklady rovněž najdou na výše uvedených stránkách Cermatu. Tento test by mohl být i dobrou pomůckou pro učitele středních škol. Jeho použitím na začátku 1. ročníku studia by získali informaci o úrovni znalostí a dovedností nových žáků a věděli by tak, s čím mohou při dalším výkladu počítat. Je možný i opačný závěr: věděli by tak, které dovednosti u svých žáků nemohou předpokládat a co jim musí znovu vysvětlit. Získanými informacemi by mohli rozumně argumentovat i u ředitelů škol, budou-li spolu s nimi zvažovat potřebnou hodinovou dotaci matematice.

Literatura

[1] Hanousek, J., Charamza, P., *Moderní metody zpracování dat – Matematická statistika pro každého*. Grada a Computer Equipment, Praha,1992.

[2] Lesáková, E., Řídká, E., *Hodnocení výsledků vzdělávání žáků devátých tříd*. Cermat-UIV, Praha, 2005.

[3] `www.cermat.cz`

Hravá kombinatorika

Eva Milková[1]

Abstrakt: V článku je představeno několik příkladů z oblasti rekreační matematiky. Jsou zde zařazeny pro inspiraci, jako ukázka netradičních úloh, které mohou být využity při vysvětlování pojmů z kombinatoriky.

Abstract: The article contains a couple of examples from the area of recreation mathematics. These examples illustrrate non-traditional tasks that can be used when explaning combinatorial concepts.

Kombinatorika je krásná matematická disciplína, která je vynikajícím prostředkem pro rozvíjení logického myšlení. Množství úloh máme k dispozici v učebnicích určených ke studiu této milé partie matematiky. Chceme-li však nabídnout studentům nějaké další, netradiční příklady, je zapotřebí poohlédnout se jinde. Dobrým zdrojem jsou jistě různé matematické časopisy, ale nejen ty. Inspiraci lze čerpat i v oblasti „hádankářské“. V naší rodině se těší velké oblibě časopis Křížovka a hádanka. V něm vždy najdeme vedle různých typů křížovek a hádanek též zajímavé logické úlohy. A právě ty mě v poslední době zaujaly i z hlediska možnosti zpestřit svoji výuku Diskrétní matematiky, a to v části, kdy se v přednáškách či cvičeních věnuji kombinatorice.

Začněme jednoduchou *lištovkou*. Úkolem tohoto typu hádanek je přerovnat sloupce tabulky 1 tak, abychom získali smysluplnou větu. (Výsledek naší lištovky, jejímž řešením je věta v jazyce anglickém, je uveden na konci článku.)

I	I	R	M	B	A	O	N	O	C	T	C
N	E	H	S	O	O	T	E	I	S	F	S
G	U	Q	O	N	S	E	E	R	T	T	I
T	N	I	E	N	F	R	S	M	P	O	C
I	O	L	A	S	G	F	N	E	R	O	G
T	N	I	A	L	I	K	H	C	I	N	G

Tabulka 1

Jak tuto lištovku můžeme použít při probírání kombinatorických pojmů? Například tak, že si na ní studenti uvědomí, že se jedná o příklad permutace dvanácti prvků, kde prvkem je každý sloupec tabulky. A že jinou takovou permutaci dostanou, vyluští-li lištovku. A dále uvedenou lištovku můžeme využít k položení otázky: „Kolik řetězců obsahujících 12 krát 6 písmen by vypsal počítač, kdyby provedl všechna možná seřazení sloupců uvedené lištovky?“

[1] *UHK, Hradec Králové, eva.milkova@uhk.cz*

Dalším klasickým příkladem permutací jsou *přesmyčky*. Nejprve se zabývejme těmi, v nichž se žádné písmeno neopakuje. Začněme krátkým slovem KRA. Nechť z něj studenti udělají určující zvíře (patrně bez problémů okamžitě najdou slovo RAK). Nechť vypíší všechny permutace uvedeného slova KRA. Je poměrně zajímavé, že z šesti možných permutací hned čtyři dávají smysluplné slovo. Dejme jim pak prostor, aby pro své spolužáky oni sami vymýšleli různé přesmyčky. A pak přejděme k přesmyčkám, v nichž se písmena opakují, tedy k permutacím s opakováním. Například ze slova SAKRA udělejme rybu (KARAS). A nechť nám posluchači sdělí, kolik slov (i nesmyslných) by v tomto případě mohli vypsat.

A v hrátkách s přesmyčkami můžeme pokračovat, například řešením *přesmyčkové výpustky*. Aby všem čtenářům bylo zřejmé, o jaký typ hádanky jde, uvádíme příklad přesmyčkové výpustky s následující legendou (viz [1]):

1. Tichnout; nápor.-**2.** Kopati; Evropan.-**3.** Odmítání něčeho nebo někoho; opuchlina.-**4.** Nekultivovaní; hornina.-**5.** Figurína jako symbol zimy; vápencové území.-**6.** Dobývané motykou; starý zbrojnoš.-**7.** Pentlička; německá karetní hra.-**8.** 60 minut; končetina.-**9.** Sebevědomost; kupa slámy.-**10.** Sbor pověřených osob; smekající se potáč.-**11.** Sdružení; pomluva.-**12.** Kovový prvek; silné provazy.-**13.** Fúrie; stan.

1	Z	M	L	K	A	T						
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												

Tabulka 2

V tabulce 2 je, pro názornost, vyluštěna levá část prvního řádku (řešení celé přesmyčkové výpustky je uvedeno níže) a můžeme začít s otázkami. Například:

- Luštíme-li pravou část (prvního) řádku, kolik existuje slov (i nesmyslných), která lze získat výběrem čtyř písmen z šesti nacházejících se v nalezeném slově v levé části příslušného řádku?
- Kolik různých řešení na konci (prvního) řádku (tj. kolik různých dvojic písmen) můžeme dostat z šesti písmen slova uvedeného v levé části příslušného řádku?

• Jak spolu souvisí výše uvedené dvě otázky?

V hledání inspirací lze pokračovat dál a dál. To však již nechám na každého z vás, koho tento krátký výlet do světa logických hádanek alespoň trochu zaujal.

Výsledky úloh

Lištovka: COMBINATORICS IS ONE OF THE STRONGEST EQUIPMENTS FOR INCREASING OF LOGICAL THINKING

Přesmyčková výpustka:

1	Z	M	L	K	A	T	T	L	A	K	Z	M
2	R	U	B	A	T	I	B	R	I	T	U	A
3	B	O	J	K	O	T	O	T	O	K	B	J
4	S	Y	R	O	V	Í	S	V	O	R	Y	Í
5	S	M	R	T	K	A	K	R	A	S	M	T
6	K	O	P	A	N	É	K	N	A	P	O	É
7	S	T	U	Ž	K	A	S	K	A	T	U	Ž
8	H	O	D	I	N	A	N	O	H	A	D	I
9	H	R	D	O	S	T	S	T	O	H	R	D
10	K	O	M	I	S	E	S	M	E	K	O	I
11	S	P	O	L	E	K	K	L	E	P	S	O
12	T	A	N	T	A	L	L	A	N	A	T	T
13	L	I	T	I	C	E	C	E	L	T	I	I

Literatura

[1] *Křížovka a hádanka.* NOVUM, roč. 56, č. 25, Praha, 2004.

Matematické nadání a prostorová představivost[1]

Josef Molnár[2]

Abstrakt: Tento příspěvek je míněn jako podnět k diskusi či ke zkoumání, jak to se vztahem matematického nadání a prostorové představivosti vlastně je. Po připomenutí základních pojmů jsou zde na několika příkladech z výzkumů prostorové představivosti

[1]Zpracováno v rámci řešení grantu 112208-CP-1-2003-1-AT-COMENIUS-C21.

[2]*PřF UP, Olomouc, molnar@inf.upol.cz*

talentovaných a „netalentovaných" žáků demonstrovány rozdílné výsledky korelace matematického nadání a prostorové představivosti.

Abstract: The contribution is meant to be an incentive for discussion about the relationship between mathematical talent and space imagination. After introducing basic notions, different results of correlation between mathematical talent and space imagination are demonstrated on some examples from research on space imagination of talented and less able students.

Sami jste si asi všimli, že ne všichni matematicky talentovaní žáci mají nadprůměrně rozvinutou prostorovou představivost. Mne k této problematice přivedlo vyhodnocení Stereoboje pořádaného v rámci soustředění tříd gymnázií se zaměřením na matematiku a vítězů bíloveckého korespondenčního semináře, které se konalo v roce 1984 v Morávce v Beskydech. Ze šesti účastníků části soutěže zaměřené na užití prostorové představivosti při řešení šesti zadaných úloh jen jeden účastník vyřešil všechny úlohy správně a jedna účastnice naopak nezískala ani jediný bod (viz [6]). Jak to tedy s prostorovou představivostí vlastně je?

Připomeňme si několik potřebných pojmů. Homola a Trpišovská v [1] říkají, že *nadání* je podmíněno vlohovým vybavením (úhrnem vrozených předpokladů k vykonávání určité činnosti) a jeho rozvoj závisí na okolních podmínkách (učení, zkušenost, pedagogické působení, motivace hodnotové zaměření, specializace aj.) *Talent* pak je nadprůměrné nadání nebo konkrétní projevová stránka schopností spojená s vysokým výkonem.

Názory na to, co to jsou *matematické schopnosti*, si uveďme v historickém přehledu podle Košče (viz [3]). Matematická schopnost je:

- schopnost řešit matematické úlohy, které se zadávají ve škole (Meinander, 1943),
- schopnost řešit matematické testy a úlohy (a to nejen takové, jaké se zadávají ve škole) (Spearman, 1927),
- vlastnost(i) osobnosti, která je podmínkou úspěšného studia a užívání matematiky (Říčan, 1964),
- schopnost chápat povahu matematických (a podobných) úloh, znaků, metod a důkazů; naučit se je, udržet je v paměti a reprodukovat je; kombinovat je s jinými úlohami, znaky, metodami a důkazy; a používat je při řešení matematických (a podobných) úloh (Verdelin, 1958).

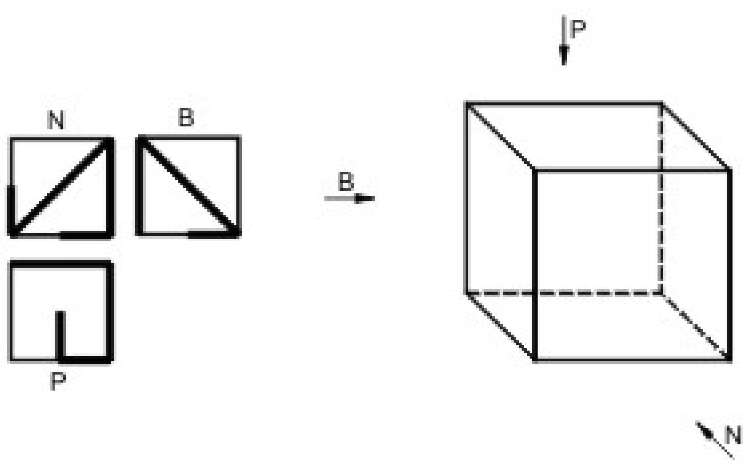
Sám Košč říká, že matematická schopnost má tyto složky:
a) numerický faktor, uplatňující se v operacích s číselnými daty,
b) prostorový faktor, který je důležitý zejména v geometrii, ale i např. v aritmetice při pozičním zápise čísla,
c) verbální faktor, využívaný při řešení slovních úloh,
d) faktor usuzování, související s
e) g-faktorem všeobecné inteligence, který je patrně základem všech mentálních úkonů.

Prostorovou představivost chápejme pro naše potřeby v užším smyslu (jako geometrickou představivost potřebnou ve stereometrii) jako soubor schopností týkajících se našich reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru (viz [7]).

Problematikou odhalování souvislostí a vztahů prostorové představivosti s dalšími schopnostmi se ve své disertační práci [2] zabývala Zuzana Juščáková. Porovnávala výsledky vlastních testů prostorové představivosti uchazečů o studium na několika vysokých školách technického zaměření s jejich známkou ze střední školy nebo s bodovým hodnocením závěrečné zkoušky z matematiky po prvním semestru na jedné z fakult Technickej univerzity v Košiciach. Ukázala se nízká korelace ($r \approx -0,16$) mezi těmito jevy.

V disertační práci [5] Pavla Leischnera lze nalézt jak srovnatelné, tak i rozdílné výsledky studentů matematických (GMK Bílovec a G tř. Kpt. Jaroše) a „nematematických“ (G Strakonice a Český Krumlov) tříd při řešení testových úloh vyžadujících prostorovou představivost. Použity byly mimo jiné úlohy podobné této úloze:

Vyznačte ve volném rovnoběžném průmětu krychle průmět jednoho kusu pozohýbaného nerozvětvujícího se drátu podle jeho nárysu, půdorysu a bokorysu (obr. 1).



Obr. 1

Rovněž v článku [4] Jolany Laznibatové a kol. jsou mimo jiné uvedeny výsledky výzkumů prostorové představivosti dětí 6–7letých v testu Figurální analogie. Děti experimentálních tříd v Bratislavě (IQ nad 130) zde dosáhly výrazně lepších výsledků než děti kontrolních „běžných“ tříd.

Ukazuje se tedy, že výše zmiňovaná problematika je otevřená a zasluhuje si naši pozornost. Za Vaše zkušenosti či výzkumy ke vztahu matematického nadání a prostorové představivosti předem děkuje autor tohoto příspěvku.

Literatura

[1] Homola, M., Trpišovská, D., *Psychologie osobnosti (Stručný výkladový slovník).* UP, Olomouc, 1992.

[2] Juščáková, Z., *Rozvoj priestorovej predstavivosti v deskriptívnej geometrii.* Disertační práce, MTF STU, Bratislava, 2002.

[3] Koščo, L., *Psychológia matematických schopností.* SPN, Bratislava, 1972.

[4] Laznibatová, J. a kol., Vplyv testosterónu na priestorovú predstavivosť detí. *Psychológia a patopsychológia dieťaťa*, r. 33, č. 1, 1998.

[5] Leischner, P., *Rozvíjení prostorové představivosti žáků středních škol.* Disertační práce, MFF UK, Praha, 2003.

[6] Molnár, J., Stereoboj. *MFvŠ*, r. 17, č. 1, 1986.

[7] Molnár, J., *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* UP, Olomouc, 2004.

Projekt MathEU: Identifikace, motivace a podpora matematických talentů v evropských školách

Jarmila Novotná, Jaroslav Zhouf[1]

Abstrakt: Článek informuje o projektu MathEU v rámci programu Socrates – Comenius 2.1. Projekt má v podtitulu Identifikace, motivace a podpora matematických talentů v evropských školách. Těmito složkami projektu se článek zabývá podrobněji v jednotlivých kapitolách. Na závěr je uveden nástin pokračování projektu v rámci programu Socrates – Comenius 2.2.

Abstract: The article informs about MathEU project within Socrates – Comenius 2.1 programme. Its subtitle is Identification, motivation and support of mathematical talents in European schools. The individual aspects of the project are treated in more detail. In conclusion, a continuation of the project within Socrates – Comenius 2.2 is suggested.

Úvod

V mnoha evropských školách jsou osnovy pro matematiku navrženy pro průměrné žáky a žáky s poruchami učení, aniž by byla větší pozornost věnována rozpoznání

[1] *PedF UK, Praha, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz*

a podpoře žáků nadaných na matematiku. Žáky nadané na matematiku je třeba vyhledávat již v raném období a systematicky. Běžnou metodou pro rozpoznávání takových žáků jsou soutěže, ale je všeobecně známo, že o mnoha žácích nadaných na matematiku se to nikdy nedozvíme jednoduše proto, že se takových soutěží nezúčastňují, nebo proto, že nejsou v soutěžích mezi deseti nejlepšími, nebo proto, že nejsou schopni dobře pracovat při časovém omezení.

Na zasedání Education Council of the European Union dne 12. února 2001 ve Stockholmu bylo odsouhlaseno, že matematika je jedním z prioritních předmětů. Základním cílem je zvyšování zájmu o matematiku od raného mládí a podnícení mládeže, aby se tomuto oboru věnovali profesionálně, speciálně výzkumu v tomto oboru.

Evropské země se proto rozhodly hledat způsob, jak udržet matematické talenty v Evropě. K tomu je třeba, aby matematici, vědci a pedagogové pracovali společně v evropských dimenzích a navrhli program, který změní postoje vlád, univerzit a nadací k podpoře matematických talentů v Evropě a ke zmenšení odlivu mozků mimo Evropu. Nadaní žáci potřebují pozornost, lásku, výcvik, uznání.

Projekt MathEU

Jednou z aktivit popsaných výše je vytvoření projektu MathEU (Identifikace, motivace a podpora matematických talentů v evropských školách) v rámci programu Socrates - Comenius 2.1 (referenční číslo 112212-CP-1-2003-1-CY-COMENIUS-C211, logo na obr. 1). Partnery v projektu jsou Kypr (koordinátor), Bulharsko, Česká republika, Itálie, Maďarsko, Německo, Rumunsko a Řecko a externí hodnotitelskou zemí je Rakousko. Za Českou republiku se projektu zúčastní Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze. Řešitelský kolektiv tvoří Jarmila Novotná a Jaroslav Zhouf z Katedry matematiky a didaktiky matematiky a Marie Hofmannová z Katedry anglického jazyka a literatury. Projekt byl zahájen v září 2003 a bude ukončen v roce 2006.

Obr. 1

Partneři projektu chtějí nabídnout řešení pro rozvoj nadaných žáků v Evropě přes učitele, pedagogické pracovníky, další vládní i nevládní instituce a pomocí přímých spojení přes Internet.

Cílem projektu je rozvíjet metody a vzdělávací nástroje, které pomohou pedagogům rozpoznat a motivovat žáky nadané pro matematiku a současně podporovat jejich rozvoj v rámci Evropské unie bez jakéhokoli zvýhodňování.

Hlavní cíle projektu lze shrnout do těchto základních bodů:

- vyvinutí metod a doprovodných materiálů pro vyhledávání žáků nadaných na matematiku v evropských školách a podpora jejich rozvoje,
- vytvoření (za pomoci univerzit, matematických společností a nadací) evropské sítě pro trvalou podporu žáků nadaných na matematiku,

- zkoumání otázky „žáků nadaných na matematiku s problémy v učení“.

Hlavní aktivity při řešení projektu jsou stanoveny takto:

- navržení metod a nástrojů pro rozpoznávání potenciálních žáků nadaných na matematiku na prvním i na druhém stupni školy,
- navržení materiálů a aktivit pro přípravu učitelů k tomu, aby uměli odhalit u svých žáků jejich nadání na matematiku a toto nadání rozvíjet,
- navržení pedagogických metod a materiálů pro rozvoj a podporu nadaných žáků v evropských školách,
- rozvinutí metod řešení a programu pro změnu postojů vlád, univerzit a nadací k vypisování stipendií a k podpoře při udržování „matematických mozků“ v Evropě,
- navržení speciální webové stránky určené pro tento projekt, která umožní splnit cíle projektu.

Na závěr projektu jsou očekávány tyto hlavní výstupy:

- evropská příručka obsahující metody a nástroje pro rozpoznávání, motivování a podporu žáků nadaných na matematiku,
- informační program pro vlády, univerzity a nadace,
- kurs pro pedagogické pracovníky připravující učitele pro první a druhý stupeň školy zaměřený na rozpoznávání a rozvíjení žáků nadaných na matematiku.

Přímý užitek budou mít všichni učitelé matematiky na všech úrovních škol spolupracující s partnerskými organizacemi. Podněty mohou získávat i pedagogové v dalších oblastech, protože metody a nástroje pro rozpoznávání matematických talentů mohou být využity i při rozpoznávání nadaných žáků v jiných předmětech. Zveřejňování výsledků v následném projektu v kursech nabízených v rámci Comenius Action 2.2 umožní jednotlivým pedagogům ve všech zemích Evropské unie i mimo ni a všem pracovníkům ve školství (včetně řídících orgánů) využívat výstupy projektu. Největší skupinu, která bude využívat výsledky projektu, budou tvořit studenti nadaní na matematiku.

Identifikace žáků nadaných na matematiku

Názory na to, co je to talent a konkrétně matematický talent, jsou různorodé, některé společné znaky ale mají. My zde zmíníme pohled J. Novotné (viz [8]) na tuto problematiku, která uvádí tyto složky matematického talentu:

1. nadání (talent), tj. schopnost orientovat se v problémových situacích, řešit je a uvědomovat si význam teoretických úvah,

2. matematický talent, který se týká neobvykle vysoké schopnosti porozumět matematickým myšlenkám a matematicky myslet, ne pouze velké schopnosti provádět aritmetické operace nebo dostávat nejlepší známky v matematice.

Na jedné straně ne všichni žáci, kteří získají nejvíce bodů v testech a mají nejlepší známky v matematice, jsou nutně matematickými talenty (školní matematika často upřednostňuje získávání početních dovedností místo toho, aby žákům nabídla dostatek prostoru pro komplexní uvažování, které je pro talentované žáky charakteristické). Na druhé straně řada talentovaných žáků neprojevuje výrazné nadšení pro práci ve škole, takže je možno jejich matematické nadání snadno přehlédnout.

Většinou se objevuje názor, že žáci nadaní na matematiku musí být identifikováni co nejdříve (viz [2]), na druhou stranu je ale provázen pochybnostmi o přesnosti identifikace v raném věku. Je proto velmi důležité rozvíjet rozmanité způsoby identifikace talentovaných žáků.

Charakteristiky, které mohou být klíčem k identifikaci matematického talentu, můžeme shrnout do tohoto seznamu:

- nezvykle velká vnímavost a zvídavost v matematice,
- neobvykle rychlé učení se, pochopení a aplikování matematických myšlenek,
- velká schopnost myslet a pracovat abstraktně a schopnost vidět matematické pravidelnosti a vztahy,
- velká schopnost řešit matematické problémy pružně, tvořivě, raději než stereotypním způsobem,
- vysoká schopnost přenášet získané znalosti a dovednosti do nových matematických situací.

Tento seznam není vyčerpávající, existuje jich řada jiných.

Společné prvky získané z různých seznamů pro nadaného studenta jsou (viz např. [3]):

- má vhled do aritmetických úloh, které vyžadují pozorné uvažování, pokládá otázky, které míří k jádru úlohy,
- odhaluje možná zjednodušení postupů a „slepých“ cest, používá větší „skoky“ v úvahách, zapisuje jen některých kroky, rychle se učí,
- má nadprůměrnou schopnost odůvodňovat,
- má mimořádnou schopnost zobecňovat a přenášet znalosti do nových, neznámých matematických situací,
- výborně řeší úlohy,
- vidí alternativy, je připraven v odůvodněných případech změnit názor, pracuje tvořivě,
- neztrácí rychle pozornost, má zájem a přijímá výzvu, která je v problému obsažena, je trvale intelektuálně zvídavý,
- skvěle komunikuje,
- „vidí“ důsledky,

- dlouhodobě si pamatuje, co se naučil,
- vidí úlohy z různých úhlů pohledu, navrhuje originální, nevyučované postupy pro řešení úloh, tvořivě kombinuje znalosti,
- je iniciativní, nečeká, až mu někdo ukáže, jak postupovat, ale má snahu řídit vlastní postupy a rozvoj, používat své znalosti,
- má potěšení z intelektuálních výzev, je vnitřně motivován k tomu, aby se učil matematiku, méně je ovlivněn vnější motivací,
- má velké pozorovací schopnosti,
- mimořádně rychle se učí, porozumí a aplikuje matematické myšlenky,
- má vysokou schopnost abstrakce a rychle vidí zákonitosti a vztahy,
- z matematických úloh odvozuje formální strukturu a dále pracuje už v této struktuře,
- snadno přechází z jednoho přístupu k jinému a odhaluje a zamítá neproduktivní přístupy,
- operuje se symboly a prostorovými objekty,
- rychle rozezná podobnosti, rozdíly a pravidelnosti,
- vizualizuje a interpretuje fakta a vztahy,
- používá srozumitelné, jednoduché, ekonomické a racionální argumenty, ...

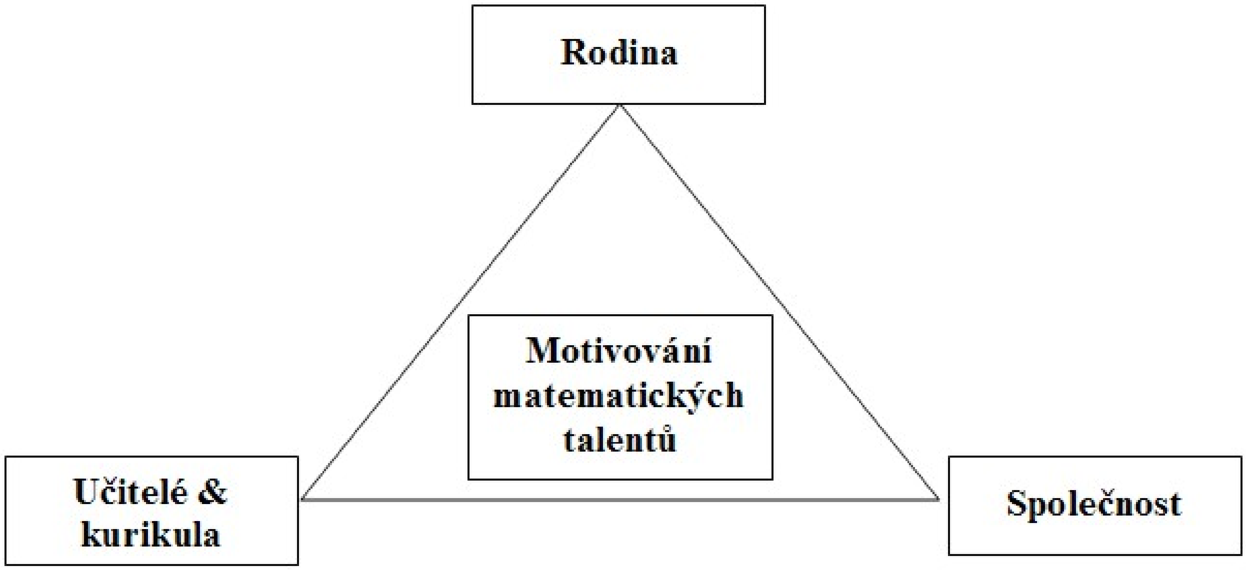
Tři hlavní charakteristiky talentovaného žáka na matematiku jsou:

- ochota tvrdě pracovat (zahrnuje řadu charakteristik, např. rozhodnost, angažovanost, energičnost, vytrvalost, sebejistotu, schopnost snášet stres a vyrušování),
- přirozená matematická zručnost,
- výrazná tvořivost (schopnost myslet odlišně, kombinovat zkušenosti a dovednosti ze zdánlivě neslučitelných oblastí a propojovat je do nových myšlenek a výsledků).

Motivace žáků nadaných na matematiku

Po identifikování matematických talentů je hlavní otázkou, jak studenty motivovat, aby svůj talent rozvíjeli. Neexistuje jediný přístup, je třeba vytvořit individuální programy pro žáky tak, aby byla respektována žákova osobnost a potřeby (rozdíly např. v rychlosti průchodu matematického obsahu).

V rámci projektu MathEU byly stanoveny tři úrovně motivování matematického talentu (Michalides, interní materiál projektu, 2004), jež jsou schematicky znázorněny na obr. 2.



Obr. 2

Úroveň 1: Podpora rodiny

Výzkum potvrzuje při motivování matematického talentu důležitost postojů rodičů a jejich podpory a vedení. Rodiče

- jsou považováni za prvotní vliv, i když ne vždy mohou sami nabídnout dostatečné matematické znalosti a dovednosti,
- hrají zásadní roli vytvářením kognitivního a emocionálního prostředí, v němž děti vyrůstají, učí je mentální disciplíně, usměrňují jejich schopnosti, hodnotí jejich silné a slabé stránky, pěstují přání učit se a využívat nabízené možnosti, . . .

Úroveň 2: Učitelé a kurikula

Učitelé nabízejí žákům vnitřní i vnější motivaci. Mají dvě klíčové funkce:

- vybírají úlohy, které jsou pro matematické talenty dostatečnou výzvou a podporují poznání (např. myšlení a uvažování jako nalézání pravidelností a vztahů, tvorbu holistických a laterálních řešení), meta-poznání (např. porovnání a rozvíjení různých metod řešení úloh) a motivaci (např. řešení náročných úloh),
- připravují pro žáky příležitosti, při nichž se mohou zapojit do řešení náročných úloh, ...

Matematické talenty potřebují diferencované kurikulární programy, které jsou přizpůsobeny jejich individuálním charakteristikám, potřebám, schopnostem a zájmům. Kurikulum má:

- podporovat, aby matematické talenty spolupracovali – budou se tak učit jeden od druhého, podněcovat se navzájem, pomáhat si překonávat překážky - budou z toho těžit jak akademicky, tak i emocionálně,
- zdůrazňovat a rozvíjet uvažování a nezávislé výzkumné dovednosti např. zařazováním řešení úloh a učení se objevováním, zařazováním projektů, hledáním zákonitostí a vztahů; aktivity mají pomáhat žákům rozvíjet strukturované i nestrukturované bádání, podněcovat dovednosti, kategorizovat a syntetizovat, rozvíjet účinné studijní návyky a podporovat kladení otázek,
- potlačovat dril, nabízet mezipředmětové a mezioborové souvislosti,
- být pružné jak v oblasti hodnocení znalostí a dovedností (nabízet příležitosti k sebehodnocení), tak v oblasti obsahu a zkušeností žáků, . . .

Úroveň 3: Společnost

Motivovat matematicky nadané žáky ze strany společnosti je dána povinností na úrovni místních organizací, vlád a univerzit a může se v současné době uskutečňovat formou programů podporujících rozvoj matematických talentů. Podrobnější informace je možné najít na adrese [11].

Podpora žáků nadaných na matematiku

Na podporu žáků nadaných na matematiku jsou v rámci projektu vypracovány učební materiály. Celý podpůrný materiál se skládá ze zpracování řady matematických témat (tzv. ladders). Každé téma (ladder) je zpracováno jako gradovaná série úloh proložená teoretickými podklady a pedagogickými komentáři pro učitele.

Při používání tohoto učebního materiálu je role učitele nezastupitelná, proto je nutno učitele na práci s materiály připravit. Počítá se s tím, že v každé zastoupené zemi proběhne školení učitelů pracujících s talentovanými žáky v matematice.

Materiály jsou připraveny ve dvou úrovních – pro základní školu a pro střední školu.

Současný stav projektu

Práce na projektu kontinuálně probíhají, do současné doby jsou vypracovány identifikační a motivační nástroje a odborné texty na podporu rozvoje talentů (ladders).

Již bylo provedeno pilotování těchto textů na žácích, kteří byli identifikováni jako talentovaní jinými prostředky v jednotlivých partnerských zemích. Pro tyto vytipované žáky se během pilotáže jako mimořádně motivující se ukázalo:

- kontakt s odborníky v dané problematice,
- možnost prezentace řešení úloh z ladderů,
- kontakty mezi studenty z různých zemí nadanými na matematiku,
- získání sebevědomí při úspěšné prezentaci své práce.

Výhled do budoucna

Další fází projektu mají být výukové kurzy pro učitele, kteří budou pomocí ladderů vyhledávat talentované žáky a pracovat s nimi ve své zemi. K tomu je třeba nejprve doplnit pedagogické složky vypracovávaných materiálů a metodické pokyny a pak provést školení učitelů, aby uměli laddery používat. To už ale bude součástí pokračujícího projektu v rámci programu Socrates – Comenius 2.2, který se rozeběhne na přelomu května a června 2006 na Kypru.

Literatura

[1] Gardner, H., *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. BasicBooks, New York, 1999.

[2] Kissane, B. V., Selection of mathematically talented students. *Educational Studies in Mathematics* 17, D. Reidel Publishing Company, 1986.

[3] Koščo, L., *Psychológia matematických schopností*. SPN, Bratislava, 1972.

[4] Kubínová, M., Mareš, J., Novotná, J., Changing Teaching Methods in School Mathematics, An Analysis of Some Episodes from Classes. In Nakahara, T., Koyama, M. (eds.) *Proceedings PME 24*, Vol. 3, Hiroshima University, Hiroshima, 2000, s. 183–190.

[5] Kubínová, M., Novotná, J., Promoting students' meaningful learning in two different classroom environments. In Cockburn, A., Nardi, E. (eds.) *PME 26 Proceedings*, Vol. 3, University of East Anglia, Great Britain, 2002, s. 233–240.

[6] Littler, G. H., Taylor, V., Novotná, J., Kubínová, M., Do Teaching Strategies Affect Student's Attitudes to Mathematics. In Hejný, M., Novotná, J. (eds.) *SEMT 93*, Charles University, Prague, 1993.

[7] Niederer, K., Irwin, K. C., Using problem solving to identify mathematically gifted children. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (ed.) *Proceedings of PME25*, Vol. 3, Utrecht, 2001, s. 431–438.

[8] Novotná, J., How can we modify and motivate mathematical talents? Case of word problems. In Gagatsis, A., et al. (eds.) *Proc. of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education MEDCONF 2005*, Cyprus Mathematical Society, Nicosia, 2005, s. 523–532.

[9] Sheffield, L. J., *Developing mathematically promising students*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1999.

[10] Zhouf, J., Preparation of problems for mathematical examinations and competitions. In Gagatsis, A., et al. (eds.) *Proc. of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education MEDCONF 2005*, Cyprus Mathematical Society, Nicosia, 2005.

[11] `www.matheu.org`

Smečka zakopaných psů v našem školství

Alena Šarounová[1]

Abstrakt: Článek se zamýšlí nad změnami, k nimž dochází v lidské společnosti, hlavně však v českém školství za posledních několik desítek let. Nejde o objektivní studii, jedná se pouze o subjektivní pocity autorky, a to hlavně o pocity negativní.

Abstract: The article focuses on changes which have taken place in society and mainly in the Czech educational system in the last decades. It is not an objective study, it only includes the author's subjective thoughts, mainly negative.

Nelehce se mi píší tyto řádky; je mi jako člověku, který účtuje se svým životem a zjistí, že se marně snažil naplnit některý z ideálů svého dětství. Že pracoval marně – protože špatně, popřípadě proto, že si vybral nereálný cíl. A smutné je, že už není čas na nápravu toho omylu, protože okolnosti jsou mnohem silnější než jedno lidské přání a nejsme tu navěky. Od svých deseti let, od okamžiku, kdy mne pan učitel Josef Maudr poslal na stupínek a řekl: „Šarounko, uč! Já musím odejít.“, jsem se zajímala o učitelství – a zůstala jsem mu přes všechny „zlé časy“, které mě potkaly, věrná. Ráda rozdávám energii, dobrou náladu a odvahu – ale přišel čas, kdy je bohužel nutné říci něco jiného.

Stejně jako v ostatních oblastech našeho života jsme i ve školství zahlceni množstvím studií, výzkumných zpráv, zákonů atp. Všechny školské dokumenty nás přesvědčují o nutnosti zlepšení a o tom, jak to bude pro nás všechny užitečné. Před oči nám kladou samé výhody zaváděných změn a příklady krásných výsledků podobných opatření v cizině. Ano, o kladech hovoří i instituce, které stojí u kolébky těchto snah, velmi naléhavě. Často je ale důležitější to, o čem se mlčí, než co se vychvaluje. Možná, že pobouřím řadu učitelů, ale je nutné vidět i druhou stranu dějů a věcí – a kde to jde, něco pro jejich nápravu udělat.

Dovolte mi odcitovat zde jednu myšlenku prezidenta USA (nikoliv proto, že ji vyslovil prezident USA, ale protože stojí za zamyšlení): „Svoboda bez vzdělání je nebezpečná, vzdělání bez svobody je zbytečné.“ S první částí bezvýhradně souhlasím, s druhou nikoliv. I v nejtěžších situacích může vzdělání usnadnit život lidem zbaveným svobody. „Civilizační slupka“ na nás je příliš křehká – a spadne-li z nás, propadneme se do chaosu a hrůz, protože lidské zákony nedodržíme a o přírodní řád zvířecích skupin jsme přišli už asi dávno. Dostali bychom se (díky technice bez lidskosti) až na dno samé existence. Lidstvo nemá jinou cestu než neustálé vzdělávání, chce-li tu ještě nějaký čas pobýt.

Pominu zde nedostatek zodpovědnosti celé společnosti k vlastní budoucnosti (plánování od voleb k volbám, ničení přírody, hazardování s ornou půdou atd.) i vládu peněz nad vším a ve všem (naše svoboda je iluze, jen si to přiznejme!).

[1]*MFF UK, Praha, sarounov@karlin.mff.cuni.cz*

Vzdělání je velmi významnou složkou kultury. Je pravda, že jen část vzdělání získáme ve škole, ale je to část velmi důležitá, protože tvoří určitý systém, který nás spojuje. Současná doba je charakteristická „kulturním zmatením“ v mnoha oblastech Zeměkoule; do jisté míry jsou jím zasaženy všechny země. Stáváme se povrchnějšími, nevyváženými, náchylnými zapomínat i neuváženě přejímat.

„Kultura degeneruje jen tehdy, když příliš zkostnatí – nebo tehdy, když se příliš směle a ukvapeně řítí do průzkumu,“ tvrdí D. Morris v knize [1]. Uspěje jenom ta kultura, která nalezne správnou rovnováhu mezi oběma směry. Dnes vidíme kolem sebe plno dokladů příliš ztrnulých i příliš ukvapených kultur. Malé zaostalé společnosti, jež úplně ovládlo těžké břímě zákonů a starých zvyků, patří k těm prvním. Tytéž společnosti, když se jich ujmou vyspělé kultury, pomohou jim a zvrátí jejich život, se rychle stávají příkladem druhých. Výsledkem je kulturní zmatek a rozpad. Totéž tvrdí i D. Morris: „Šťastná je ta společnost, která postupně získá dokonalou rovnováhu mezi napodobováním a zvědavostí, mezi otrockým mechanickým přejímáním a rozumným zkoušením nových možností.“

Nu – podívejme se, co bychom si také měli přiznat v oblasti školství my, učitelé! Školství jako celek je nemocné neustálým reformováním. (Víte, kolik bylo od r. 1945 reforem?) Základní chybou je, že se nikdy nevyhodnotil jejich „skutečný dopad“ na mládež (to je záležitost velmi dlouhodobá), že se zdůvodňovaly „zkvalitňováním výuky“, ač šlo většinou o politiku (vliv mocností) a o ekonomiku (hrátky s délkou školní docházky. . .).

Kdy veřejně přiznáme např. to, že přemíra osmiletých gymnázií škodí – a to základním školám, jimž „vyzobe“ slušné žáky (a výsledky v ochuzených třídách se nutně zhorší), i samotným gymnáziím (kvůli financím přijmou co nejvíc dětí – nejen těch opravdu nadaných – a úroveň jde opět dolů)?

Proč se vytváří ve společnosti představa, že dříve učily školy špatně, protože učily fakta – a teď budou učit kvalitně, protože se nebudou zabývat fakty, ale rozvojem myšlení? Proč jsou školy nuceny tvořit si vlastní školní vzdělávací programy? Ve společnosti je pěstována představa, že škola bude moderní (= dobrá), bude-li mít svůj program. Je pravda, že po dvě léta probíhal experiment na „pilotních školách“ – ale kolik jich bylo? A jak se vlastně hodnotil výsledek toho experimentu? Považuji za krajně nezodpovědné zavádět do všech škol to, co se někde (částečně!) krátce zkoušelo a ve skutečnosti nevyhodnotilo.

Mezi učiteli (a i řediteli) škol kolují nejasné představy, že je třeba slučovat předměty, vymycovat fakta. . . hlavně „učit jinak“ – ale většinou není jasné jak. Dobré školy učily i dříve žáky logicky myslet a samostatně pracovat, zdůrazňovaly mezipředmětové vztahy a umožňovaly výběr volitelných aktivit podle zájmu žáků. Špatné školy to nebudou schopné dělat ani po této reformě, spíše jejich kvalita ještě poklesne, protože jen velmi zodpovědní učitelé s reformou vzad (na předchozí školní stupně) i vpřed (na navazující školy) mohou vytvořit smysluplný školní vzdělávací program. V opačném případě hrozí chaos a prudké zhoršení znalostí našich žáků. Kromě pár vybraných škol vidíme postupné zhoršování školních výsledků už řadu let.

Kdybychom chtěli být upřímní sami před sebou, museli bychom si přiznat, že kvalitnímu vzdělání by prospěla řada velmi nepopulárních opatření ve škole:

- šestidenní školní týden (po dvou volných dnech máme už prázdninový syndrom – a pátek i pondělí jsou „špatné“,
- jasný řád, důslednost v kontrole povinností žáků (nemají jen práva!),
- dodržování (rozumného) rozvrhu a podobné aktivity jako bruslení, divadla atd. nekonat dopoledne, . . .

Žákům také nesvědčí školní kolosy s anonymním prostředím (sídlištní velkoškoly) – ty ovšem nejsou dobré ani pro učitele (bohužel pro ekonomiku asi ano).

Reformační horečka se nevyhnula ani vysokým školám. Už sám přechod na kreditní systémy hodnocení studia umožňuje řadě posluchačů těžit ze situace a proklouznout metodou nejmenší námahy. Za pohromu však považuji násilný přechod studia učitelství na dvojstupňový systém bakalář-magistr. Lékařským fakultám se prý podařilo ubránit tomuto dělení studia, ale my budeme zřejmě vychovávat bakaláře „půlučitele“, kteří budou buď umět např. počítat, ale didaktické předměty ještě mít nebudou, nebo naopak. (Trochu přeháním, ale toto nebezpečí tu opravdu je.) Formalizace, která nevychází z podstaty věci – z potřeby, nemůže nikomu prospět.

Ještě bych měla vysvětlit, jak škodí školství přemíra testování, ale to si nechám na „jindy“ (bude-li jaké). Na závěr snad něco optimističtějšího, čím můžeme navzdory všemu aspoň trochu prospět našemu školství:

- Zajímejme se o to, co se děje na všech stupních škol bez ohledu na to, kde učíme. Učitelům z nižšího stupně pomáhejme radou a ctěme jejich zkušenosti. Víc se tak dozvíme o svých žácích i „kantořině“ obecně.
- Mezi svými kolegy šiřme dobré nápady i materiály – a také optimismus. (To je ovšem nejtěžší, ale zkusme to.)
- Své nápady a zkušenosti se nebojme zveřejňovat. Některému z kolegů se mohou hodit – a ani my nevíme všechno.
- Pokud se nám něco ve školství nelíbí, říkejme to NAHLAS. Šeptem ničeho nedosáhneme. Asi nebudeme populární, ale nám jde přece o děti, ne? A nemáme-li dostatečně moudré nadřízené orgány, musíme být moudří (a odvážní) sami.

Literatura

[1] Morris, D., *Nahá opice*. MF, Praha, 1971, s. 76–77.

Projekt FRVŠ na rok 2004: Péče o talenty v matematice

Vladimír Vaněk[1]

Abstrakt: V současnosti se problematice péče o talentované žáky, zvláště pak na matematiku, nevěnuje velká pozornost. V porovnání s ostatními vyspělými státy lze říci, že práce s nadanými studenty u nás stojí mimo oblast zájmu, přestože v minulosti jsme na tomto poli zaznamenávali úspěchy. Článek se zabývá právě současným stavem a největšími problémy, se kterými se v praxi potýkají učitelé při práci ve speciálních třídách gymnázií. Autor se spolu s řediteli a učiteli těchto gymnázií snaží najít řešení výše zmiňovaných problémů. Informace o současné situaci a data uvedená v tomto článku byla získána v rámci řešení projektu FRVŠ. Jedná se především o statistiku počtů studentů studujících v těchto třídách v průběhu posledních pěti let. Dále zde čtenář může nalézt informace o historii vzniku matematických tříd na gymnáziích v ČR.

Abstract: There are not many current publications dealing with the care of talented pupils, mainly mathematically talented. In comparison with other western countries, the care of gifted students in our country is not in the centre of interest even though we reached many achievements in this field in the past. The paper discusses current state and the most serious problems of the teachers working in the special secondary grammar school classes. The author and the headmasters and teachers of these secondary grammar schools try to find a solution to the above-mentioned problems. All the information about the current situation and data introduced in this article were gathered in a survey conducted as a project of FRVŠ. It means foremost the statistical number of students attending these schools during the last five years. You can also find information about the history of establishing mathematical classes at Czech secondary grammar schools there.

Historie

Jednou z nejkoncentrovanějších forem péče o matematicky nadané středoškoláky je jejich vzdělávání ve třídách gymnázií se zaměřením na matematiku. První třídy se zaměřením na matematiku (01-Matematika) vznikly v roce 1974 v tehdejším Československu na čtyřech gymnáziích. V České republice to bylo na Gymnáziu W. Piecka, Korunní 2 v Praze 2, které se později přemístilo do Zborovské 45 v Praze 5 a roku 1999 získalo čestný název Gymnázium Ch. Dopplera, na Gymnáziu M. Koperníka, 17. listopadu 526 v Bílovci, jež si zachovalo své jméno dodnes. Na Slovensku to bylo na Gymnáziu v ulici A. Markuša v Bratislavě (dnes se ulice nazývá Grösslingová) a na Gymnáziu ve Šmeralově ulici v Košicích.

[1] *KMPdF UP, Olomouc, vlavan@email.cz*

Později bylo k těmto školám připojeno ještě Gymnázium v Žilině. Roku 1984 byla síť matematických gymnázií podstatně rozšířena tak, aby na teritoriu každého tehdejšího kraje (s výjimkou Středočeského) byla ustavena aspoň jedna taková třída – tak bylo mezi matematická gymnázia v České republice zařazeno Gymnázium, Mikulášské nám. 23 v Plzni, Gymnázium, Partyzánská 530 v Liberci 11, které 1. 1. 1999 získalo čestný název Gymnázium F. X. Šaldy, Gymnázium J. K. Tyla, Tylovo nábřeží 682 v Hradci Králové a Gymnázium, tř. kpt. Jaroše 14 v Brně. Od školního roku 1985/86 byly zřízeny matematické třídy na Gymnáziu, Jírovcova ulice v Českých Budějovicích a od školního roku 1986/87 na Gymnáziu, tř. Jiřího z Poděbrad v Olomouci.

Dnes už bohužel existují třídy s matematickým zaměřením pouze na gymnáziích v Bílovci, Plzni, Brně a Hradci Králové. Pražské Gymnázium Ch. Dopplera v roce 2002 uzavřelo poslední třídu se zaměřením 01-Matematika. Takže nyní jsou v celé České republice pouze čtyři matematická gymnázia.

V současné době se velmi diskutuje právě o problematice spojené s práci s matematicky talentovanou mládeží. V loňském roce v rámci řešení projektu Fondu rozvoje vysokých škol proběhl výzkum, který měl za úkol zmapovat současný stav péče o talentované žáky v matematických třídách gymnázií v ČR.

Výzkumný projekt

Vlastní realizace daného projektu byla zahájena ještě před jeho schválením, samotný výzkum pak započal v roce 2004. Výzkum probíhal v několika etapách.

1. etapa: V této etapě šlo o zmapování aktuálních problémů spojených s péčí o matematicky talentovaného žáka v třídách gymnázií původně označovaných jako 01-Matematika, a to především o zjištění názorů pedagogů, kteří bezprostředně pracují s talentovanými žáky v uvedených třídách. Současně šlo o studium dostupné literatury zaměřené na identifikaci matematického talentu, organizační formy práce s žáky nadanými na matematiku a možnosti péče o talentované žáky. Na základě studia odborných materiálů a rozhovorů s odborníky v dané oblasti byl sestaven dotazník pro pedagogy a ředitele gymnázií, jež mají třídy se zaměřením na matematiku. Jedním z cílů projektu bylo také využití poznatků pro přípravu budoucích učitelů matematiky na fakultách připravujících učitele. Tento cíl byl naplněn přípravou volitelného semináře „Péče o talentované žáky v matematice“ pro studenty učitelství druhého stupně ZŠ.

2. etapa: Tato část byla věnována samotnému empirickému výzkumu. V květnu 2004 byli kontaktováni ředitelé všech čtyř gymnázií, které v současné době na území ČR provozují třídy se zaměřením na matematiku, jmenovitě Mgr. Václav Vaněk (Gymnázium M. Koperníka, Bílovec), RNDr. Marta Pětová (Gymnázium J. K. Tyla, Hradec Králové), RNDr. Jiří Herman, Ph.D. (Gymnázium na tř. kpt. Jaroše, Brno) a Mgr. Josef Trneček (Gymnázium na Mikulášském nám., Plzeň). Zde pak výzkum probíhal, dotazníky pro učitele byly rozeslány poštou, data pro zpracování počtu žáků byla shromažďována osobně, čímž bylo dosaženo maximální efektivnosti. Návštěv gymnázií bylo využito k získání řízeného interview všech jmenovaných ředitelů. Ty pak byly převedeny do podoby psaného textu se zachováním maximální diskrétnosti.

3. etapa: V této etapě došlo k zpracování do elektronické podoby a vyhodnocení získaných dat. Dílčí výsledky výzkumu pak byly prezentovány na mezinárodním workshopu *MAKOS 2004* v Jiřetíně pod Jedlovou a na konferenci *Aktuální problémy pedagogiky ve výzkumech studentů doktorských studijních programů* na PdF UP v Olomouci. Stěžejní prezentace souhrnných výsledků pak proběhla v dubnu 2005 na konferenci *Ani jeden matematický talent nazmar II* v Hradci Králové.

4. etapa: V rámci řešení projektu se podařilo navázat spolupráci s předními odborníky v dané oblasti ze Slovenska (s prof. L. Koščem). Výsledkem vzájemné spolupráce bude uskutečnění dosud neprováděného výzkumu na zjištění matematického kvocientu u žáků matematických tříd gymnázií v ČR, který je připravován na rok 2005. Výzkum bude stěžejní částí disertační práce autora tohoto článku a významně přispěje k možnostem zkvalitnění péče o talentované žáky.

Získané hodnoty

- V současnosti existují v ČR pouze čtyři gymnázia celkem s dvaceti třídami zaměřenými na matematiku.
- Prvním z cílů bylo osvojit a utřídit základní poznatky spojené s vyhledáváním, identifikací a následnou péčí o matematicky talentované žáky gymnázií v ČR.
- Další úkol představoval zmapování počtů žáků studujících v posledních několika letech ve speciálních třídách. Za posledních 5 let absolvovalo, či studuje tyto třídy 2683 žáků, 2057 chlapců a 626 dívek (podrobnosti viz tab. 1).
- O úspěšnosti absolventů hovoří např. jejich procentuální úspěšnost přijetí na VŠ, která se pohybuje mezi 95 %–100 %, či zastoupení těchto studentů v matematické olympiádě.
- Dalším úkolem bylo charakterizovat největší problémy spojené s existencí matematických tříd a návrh jejich řešení. Jde o:

  1. nedostatečný počet matematických tříd jak na ZŠ, tak i na gymnáziích,
  2. zrušení talentových zkoušek,
  3. nízká dotace hodin matematiky,
  4. s tím spojené omezování rozsahu vyučovaných oblastí matematiky,
  5. nedostatečná možnost individuální péče o talenty z časových důvodů,
  6. povinnost vyučovat v daném počtu hodin týdně ve speciálních třídách předměty, které nejsou, dle názorů pedagogů, stěžejní při rozvoji matematického talentu,
  7. nízká atraktivita studia matematiky,
  8. absence koncepce přírodovědného vzdělávání v ČR,

9. nedostatečné finanční i materiální zabezpečení vysoce náročné výuky ve specializovaných třídách,
10. malá podpora ze strany státu, ...

Počty studentů matematických tříd gymnázií v ČR				
školní rok	ročník	žáci	chlapci	dívky
1999/2000	I.	111	73	38
	II.	107	82	25
	III.	97	77	20
	IV.	85	75	10
2000/2001	I.	109	78	31
	II.	108	72	36
	III.	107	82	25
	IV.	93	75	18
2001/2002	I.	109	84	25
	II.	108	78	30
	III.	107	71	36
	IV.	104	79	25
2002/2003	I.	99	77	22
	II.	105	81	24
	III.	104	77	27
	IV.	104	70	34
2003/2004	I.	118	89	29
	II.	93	73	20
	III.	104	81	23
	IV.	106	79	27
celkem		2683	2057	626

Tabulka 1

Řešení a výsledky

Na některé z těchto problémů byla po diskusi s řediteli a učiteli matematických tříd nalezena odpověď. Stručně tedy lze říci, že stěžejním řešením by bylo ponechat větší možnosti rozhodování o počtu hodin a množství předmětů v rukou ředitele, dále pak odlišit specializované třídy od klasických, a to administrativně a materiální a finanční dotací, s čímž souvisí i vznik koncepce přírodovědného vyučování vůbec.

Na talentové zkoušky uskutečňované měsíc před klasickými přijímacími zkouškami je dvojí pohled, dvě gymnázia je velmi postrádají a zbývající dvě jejich zrušení akceptovala, neboť vytvářely nepříjemnou atmosféru mezi ostatními gymnázii.

Popularizace matematiky je nutnou součástí práce učitelů matematiky, již lze uskutečňovat hlavně dokonalou přípravou hodin, sebevzděláváním a práci v mimoškolních aktivitách zaměřených na matematiku.

Současné metody výuky jsou z časových důvodů omezeny pouze na frontální výuku. Hlavní formou péče o talenty je zapojování vysokoškolských odborníku do výuky, pořádání seminářů pro studenty a učitele gymnázií a především motivování studentů formou matematických soutěží, jako je matematická olympiáda, Matematický klokan apod. Navázání spolupráce s předními odborníky na Slovensku při přípravě ojedinělého výzkumu matematických schopností žáků speciálních tříd na rok 2005 se jeví jako velice přínosné.

Závěr

Některé skutečnosti, na něž stručně upozornila tato stať, opravňují k tvrzení, že se momentálně matematicky nadaným žákům nevěnuje dostatečná pozornost. Tento jev je ovšem paradoxem, neboť v zahraničí je nadaným jedincům věnována maximální péče. Pokud se tento trend nezmění, bude se deficit naší společnosti neustále zvyšovat.

Literatura

[1] Vaněk, V., *Péče o talenty v matematických třídách gymnázií.* Diplomová práce, Fakulta přírodovědecká UP, Olomouc, 2002.

[2] Vaněk, V., Problémy tříd se zaměřením na matematiku. In *Sborník abstraktů a elektronických verzí příspěvků na CD-ROMu, XXII. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu*, Fakulta ekonomiky a managementu, Vysoká vojenská škola pozemního vojska, Vyškov, 2004.

[3] Zhouf, J., *Práce učitele matematiky s talentovanými žáky v matematice*. Disertační práce, MFF UK, Praha, 2001.

NYEX, UNESCO a nezletilé talenty pro vědu

Eva Vondráková[1]

Abstrakt: Příspěvek navazuje na sdělení „Povinná školní docházka budoucích vědců a matematika“, přednesené na minulé konferenci. Seznamuje s nejnovější mezinárodní iniciativou podporující vědeckou výchovu středoškoláků ve spolupráci s univerzitami a vědeckými pracovníky od doktorandů po nositele Nobelovy ceny. Na základě zkušeností

[1] *Společnost pro talent a nadání, vondrakova@chello.cz*

z práce s mimořádně nadanými dětmi upozorňuje na některé problémy, se kterými se u nás nadaní, motivovaní a úspěšní středoškoláci během studia setkávají. Informuje rovněž o nových trendech v požadavcích rodičů na vzdělávání a rozvoj osobnosti nadaných dětí. Nabízí zamyšlení nad variantami péče o nadané respektujícími specifické vzdělávací potřeby těchto dětí i ve světě pociťovaný nedostatek talentů pro přírodovědu a techniku.

Abstract: The contribution is a continuation of the article „Compulsory school education of future scientists and mathematics" from the last conference. It deals with the most up-to-date international iniciative supporting the scientific education of secondary schools in cooperation with universities and scientific workers beginning with PhD students and ending with Nobel prize winners. Some problems which talented, motivated and successfull secondary students meet in the Czech Republic during their studies are mentioned. New trends in parents' demands on education and development of personalities of talented children are dealt with. The article muses on the types of care for talented students which respects their specific educational needs and on the lack of talended students for natural and technical sciences.

V dubnu 2002 se v maďarském Visegrádu konalo pracovní setkání NATO – UNESCO. Jeho cílem bylo seznámit pozvané odborníky z 23 členských států NATO a partnerských zemí se současnými nejúspěšnějšími příklady vědecké výchovy dětí v Evropě, USA a Izraeli a rozšířit tyto poznatky do dalších, zejména středoevropských postkomunistických zemí. Setkání se zúčastnili vynikající odborníci z oblasti přírodovědy a vzdělávání nadaných a zástupci významných mezinárodních institucí (NATO, UNESCO, Rada Evropy a další).

Na odborném programu i organizaci setkání se významnou měrou podíleli mimořádně nadaní, sympatičtí, organizačně schopní a vstřícní studenti, komunikující v několika cizích jazycích, motivovaní pro vědu a nadšeni oborem, kterým se zabývají, i možností setkat se s podobně zaměřenými studenty a odborníky z mnoha dalších zemí. Ve středoškolském věku spolupracují na skutečných výzkumech a většinou studují na univerzitě. Mají radost z poznávání a z možnosti sdílet své nadšení s ostatními. Samozřejmě jim nechybí smysl pro humor. Rozhodně nepůsobí dojmem nešťastných, vyčerpaných, přetížených, pro běžný život nepoužitelných exotů.

Workshop umožnil účastníkům rozšíření obzoru, navázání nových kontaktů se zajímavými lidmi a přinesl radost z opětovného setkání těm, kteří se díky společným zájmům znali nebo spolupracovali už dříve. Setkání v roce 2002 bylo základem k vytvoření sítě pracovišť i jednotlivců, kteří se chtějí podílet na výměně zkušeností, informací a vzdělávacích nabídek pro vědeckou průpravu velmi mladých adeptů zejména přírodních věd.

Druhý workshop NATO o vyhledávání a rozvoji talentů pro přírodní vědy a technologie se konal 1.–3. října 2004 opět v Maďarsku, v Egeru. Tentokrát byl počet účastníků menší a program byl zaměřen především na vědeckou průpravu nadaných a motivovaných středoškoláků. Složení účastníků se částečně změnilo, nadšení zůstalo stejné.

S důkladně vypracovaným systémem péče o vědecké talenty se nově představili zástupci Jihokorejské republiky. Jejich zásluhou byl pozván další český účastník, doc. Zdeněk Kluiber. Setkali se s ním v Brazílii, kde je v soutěži talentů pro fyziku zaujal výkon jím vedených českých studentů.

Zástupcem Slovenska byl doc. Lubomír Tomaška z katedry genetiky Přírodovědecké fakulty UK v Bratislavě, který spolupracuje se Školou pro mimořádně nadané děti a gymnáziem, také v Bratislavě. Popsal situaci v péči o mimořádně nadané na Slovensku.

Každá ze zúčastněných postkomunistických zemí má v něčem mírný „náskok“ před ostatními a v něčem jiném proti nim zaostává. Výjimkou je Maďarsko, které je v péči o talenty mnohem pokročilejší. Všechny státy ale mají co zlepšovat a mají před sebou podobný úkol: *upravit vzdělávací podmínky tak, aby se motivovaní žáci a studenti nemuseli brzdit ve svém rozletu*. Řešením není pouhá změna legislativy, ale zejména to, jak odpovídá skutečným potřebám mimořádně nadaných a jejich pedagogů, do jaké míry lze možností v legislativě uvedených v praxi opravdu využívat a zda jsou některé školy i za příznivých podmínek vůbec ochotny potenciálním talentům mimořádnou péči věnovat a umožnit jim program odpovídající jejich individuálním vzdělávacím potřebám.

Maďarsko má velký zájem o rozvoj potenciálu své mladé generace. Svědčí o tom mimo jiné skutečnost, že se zde konaly už dvě ECHA (European Council for High Ability) konference – v r. 1990 v Budapešti a r. 2000 v Debrecíně. Na té druhé už byla sekce v maďarštině (neboť stejně jako u nás, ani v Maďarsku neumí většina učitelů anglicky), věnovaná učitelům pracujícím s nadanými. Vzdělávací systém je pružnější, školy mají daleko větší volnost v tvorbě vzdělávacích programů a je zde tedy i větší možnost výběru z pestré nabídky. Obce jsou hrdé na své školy a na školách je to vidět – jak měli možnost se přesvědčit účastníci debrecínské konference. Maďaři se také snaží využívat nabídek zahraničních stipendijních pobytů pro své žáky a studenty. Zdá se, že dělají vše proto, aby se uplatnili i v mezinárodním měřítku, což se jim ostatně daří.

V tomto prostředí vznikla výše zmíněná iniciativa NYEX. Předcházel jí program, pomáhající nadaným středoškolákům (ve věku 14 – 20 let) najít mentory, kteří by je uvedli do vědeckého výzkumu na maďarských univerzitách a ve výzkumných ústavech. Iniciátorem programu je molekulární biolog Peter Csermely, který spolupracuje s psycholožkou Marií Herskovits, ředitelkou Centra pro nadané v Budapešti a bývalou členkou mezinárodního výboru ECHA.

I u nás máme spoustu žáků a studentů, intelektově nadaných podobně jako vědecké naděje z Maďarska, Indie a USA, se kterými jsme se ve Visegrádu a Egeru setkali. Proč tedy svůj potenciál realizuje jen malá část z nich? Příčin je celá řada. Nespočívají v tom, že bychom neměli kvalitní odborníky, ochotné věnovat se „vědeckému potěru“. Rozhodně jich ale není dost. Stálo by určitě za zamyšlení, proč tomu tak je. Jistě zde hraje roli zájem společnosti a z něj vyplývající priority, jejich finanční podpora a vytvoření systému, nejen formálního, ale především funkčního.

Dalším velkým problémem je jazyková bariéra, týkající se žáků i učitelů. *Společnost pro talent a nadání* nabízela učitelům možnost účasti na mezinárodních projektech, zaměřených na práci s nadanými žáky. Najít partnery ke spolupráci, schopné domluvit se anglicky nebo německy, vyžadovalo značné úsilí. Podobně tomu bylo při vyhledávání vhodných kandidátů pro účast na prestižní německé akademii pro nadané a motivované středoškoláky. Zájemců, kteří by byli v něčem výjimeční a ještě uměli výborně německy, bylo poskrovnu. Když už se ale našli, byli někteří z nich na špičkové úrovni, srovnatelné s výše zmíněnými talenty. Jednoho představíme v následujících kasuistikách.

Nabídka účasti na mezinárodních programech pro čím dál tím mladší žáky z ČR stoupá. Problém je v tom, že obvykle nejsou dostatečně pokročilí v cizím jazyce. V tomto směru se situace zlepšuje jen velmi zvolna a ve výhodě jsou děti, jejichž rodiče vyřeší to, co považují za potřebné, vlastními silami. Nerovnost příležitostí k rozvoji intelektu a osobnosti dětí se tím samozřejmě zvyšuje. Řešením by ale neměla být snaha bránit v rozletu těm, kteří se vzdalují od průměru. Naopak je třeba vytvořit takový systém, který by pomohl k co nejlepší realizaci potenciálu i dětem znevýhodněným. Vhodné modely bychom našli např. ve Velké Británii, kde projekt „Excellence in Cities“ je zaměřen na vyhledávání a podporu nadaných dětí z problémových oblastí. Maďarský program „János Arany“ je určen na podporu nadaných dětí z míst, vzdálených od center vzdělávání.

Bariérou, úspěšně bránící mnoha našim žákům a studentům v rozvoji potenciálu, ale také v jeho uplatnění, je způsob, jakým jsou mnozí studenti vychováváni, jakým způsobem je s nimi jednáno, nakolik jsou vedeni k samostatnosti a zda je podporován rozvoj jejich sebedůvěry, potřebný k vytváření kompetencí.

Mimořádně nadané děti mohou mít studijní problémy vzdor motivaci ke vzdělávání, zájmu o obor, výborným známkám a úspěchům v soutěžích. Základním problémem je nuda. Jsou-li v určité oblasti napřed, nudí se i tam, kde by se většina ostatních, třeba i výrazně nadprůměrných, cítila přetěžována. Navštěvují nejprestižnější gymnázium v dosahu svého bydliště. Jsou považováni za premianty a vysíláni, aby reprezentovali školu v různých soutěžích, což úspěšně plní. V čem je tedy problém?

Student je ve „svém“ oboru na mnohem vyšší úrovni a to, co mu nabízí jeho, byť prestižní gymnázium, mu nestačí. Navíc je frustrován zbytečnou ztrátou času, když je nucen se „učit“ něco, co už má dávno zvládnuté a nemůže se věnovat tomu, co by pro něj bylo nové, zajímavé a dostatečně náročné, aby mohl rozvíjet svůj intelektový potenciál.

Řešení by nemělo být problémem, pokud by existovala možnost otevřené partnerské komunikace mezi vedením školy, pedagogy, studenty (žáky), případně rodiči. Takové školy existují, stále jich však není dost. Většinou máme jiné zkušenosti. V poradenství pro nadané, kterým se zabýváme při Společnosti pro talent a nadání, se opakovaně setkáváme s tím, že existují školy natolik spokojené se svou pověstí prestižního vzdělávacího ústavu, že na sobě nehodlají nic měnit. V menších městech možná spoléhají na to, že nespokojený student nemá jinou možnost volby. Podobné problémy ale mohou mít i studenti ve velkých městech. Výše uvedené ilustrují dva příklady z poslední doby.

1. Premiantka z menšího města, která měla zájem o matematiku, opakovaně žádala vedení gymnázia o individuální studijní plán, který by jí umožnil náročnější variantu studia. Nestalo se tak, naopak vedení školy neslo nelibě, že je dívka nespokojena přesto, že studuje na prestižní škole a má vynikající prospěch. Po dvouletém marném úsilí přestoupila do Prahy na školu, která jí tuto možnost poskytla. I za cenu změny bydliště se teď nadšeně věnuje studiu, které si může do značné míry řídit sama. I na škole, která dává studentům značnou volnost a přenechává zodpovědnost za studijní výsledky převážně na nich, má vynikající prospěch a znalosti. V příštím školním roce bude maturovat a uvažuje o studiu fyziky.

2. Prestižní gymnázium vysílalo svého studenta na několik druhů olympiád, neboť v nich školu opakovaně úspěšně reprezentoval. Chlapec sám měl zájem jen o některé ze soutěžních oborů, ze zdvořilosti však škole účast na těch dalších neodmítal, ač ho příprava na ně, vzhledem k jeho zodpovědnému přístupu, zatěžovala a zdržovala. Sám měl zájem o biologii, ve které se vypracoval na vysokoškolskou úroveň. V tomto oboru se také dostal až do mezinárodního kola soutěže. Jeho škola byla poněkud vstřícnější, přesto však měl velké problémy, než se mu podařilo vymoci si individuální studijní plán a dostat souhlas k uvolnění z výuky, aby se mohl v zahraničí zúčastnit soustředění nejúspěšnějších řešitelů olympiád.

Tento chlapec byl hostem Klubu rodičů nadaných dětí. Na otázku, co by od školy nejvíce potřeboval, odpověděl, že volnost ve způsobu, jakým si bude organizovat studium, zejména v biologii. Jeho znalosti a porozumění tomuto oboru jsou mnohem vyšší než u jeho spolužáků a v některých tématech je patrně větším expertem než jeho pedagog.

V obou případech by se teoreticky dalo předpokládat, že škola, navíc s pověstí prestižního vzdělávacího zařízení, bude rozlet svých mimořádně nadaných, motivovaných a úspěšných studentů podporovat. Realita je ale často taková, že škola pokračuje v tom, s čím má dlouholeté zkušenosti (jako např. soutěže), má teoretické znalosti nových pojmů a trendů (např. emoční inteligence, kompetence), ale zatím je nespojuje s vlastní praxí.

Mimořádně nadaní žáci mají větší potřebu nezávislosti než jejich vrstevníci a v mnohem větší míře dokážou řídit proces svého učení sami. Málokdy k tomu ale mají příležitost. Velmi často mají problémy s příliš autoritativním vedením ve škole a někteří i s nadměrnou péčí rodiny. Takovéto, byť dobře míněné podmínky, ve skutečnosti omezují jejich osobnostní rozvoj, neumožňují převzít zodpovědnost za řízení vlastního života a brání ve vytváření kompetencí.

V čem by se měla nabídka školy změnit, viděno očima nadaného, motivovaného a mezinárodně velmi úspěšného studenta? Jednu možnost uvedl již citovaný talentovaný student: „V současné době... spíše neexistuje výuka práce s informací, jakož i výuka řečnických a prezentačních dovedností. Přitom jsem měl možnost na vlastní kůži si ověřit, že právě způsob prezentace výsledků mého projektu je přinejmenším z poloviny zodpovědný za to, zda se mi podaří zaujmout, popř. přesvědčit.“

Jako úspěšnou variantu podpory talentů uvádí tento student „občanské sdružení *Arachne*, které pořádá odborná biologická soustředění pro středoškoláky. Jádro tohoto sdružení tvoří především postgraduální studenti Přírodovědecké fakulty UK, kteří celé soustředění organizují ve svém volném čase. . . . Arachne je jedinečné tím, že se pokouší krom podpory intelektuálního vývoje potenciálních talentů i o jejich všestranný osobnostní rozvoj“.

Arachne je známa mnoha účastníkům této konference, neboť ještě před nedávnem se soustředění biologů konala společně s obdobným soustředěním zájemců o fyziku, pořádaným nadšenci z MFF UK.

Na webových stránkách NYEX se dočtete, že se Arachne velmi aktivně zapojila do této iniciativy. Jste-li fandy svého oboru a hledáte „sobě podobné“, podívejte se, prosím, jestli by třeba i pro vás nebyla zajímavá spoluúčast na tomto projektu. Netýká se jen biologie. Bylo by dobré zapojit i naše studenty ve větší míře do tohoto sympatického a nadějného mezinárodního společenství.

I rodiče malých dětí hledají čím dál tím častěji zájmové činnosti, zaměřené na vědu a techniku. Pokud hledají školu, chtějí takovou, která bude rozvíjet vzdělanost dětí a zároveň podporovat rozvoj samostatné kompetentní osobnosti. Mnozí jsou ochotni už se kvůli dobré škole pro své dítě i přestěhovat, jak to známe ze zahraničí. Zatím u nás chybí možnost finanční podpory vzdělávání mimořádně nadaných dětí. Lze předpokládat, že i zde časem vznikne nadace, podobná např. Davidsonově nadaci v USA.

To bude ale předmětem sdělení na příští konferenci, kde porovnáme naplňování specifických vzdělávacích potřeb dětí, které se „nevejdou“ do našeho systému ani po jeho úpravách, s řešením podobných případů jinde.

Literatura

[1] Best Practices of Research Training for Students under 21. In Csermely, P., Korcsmáros, T., Lederman, L. (eds.), *Science Education*, NATO Science Series, IOS Press, 2005.

[2] Holub M., Vědecký dorost. In *Skrytá zášť věku*. Avicenum, Praha, 1990.

[3] Maďaři líčí na Nobelovky už od školky. Týdeník *Ekonom* (17), 28. 4. 2005.

[4] Polišenský J., *Jan Ámos Komenský a jeho odkaz dnešku*. SPN, Praha, 1987.

[5] Pryč s nadanými! Aspoň v Česku. Týdeník *Ekonom*, 28. 4. 2005.

[6] Talent Recruitment and Public Understanding. In Csermely, P., Lederman, L. (eds.), *Science Education*, NATO Science Series, IOS Press. 2003.

[7] Vondráková, E., Povinná školní docházka budoucích vědců a matematika. In Zhouf, J. (ed.), *Ani jeden matematický talent nazmar*, JČMF, Hradec Králové, 2003.

[8] Vondráková, E., RVP ZV a zkušenosti s nadanými a mimořádně nadanými žáky na 1. stupni ZŠ. In *Učitelský NÁPADník pro 1. stupeň ZŠ*, Raabe, Praha, 2005.

[9] `www.nyex.info`

[10] `www.chaperone.sote.hu/nato`

[11] `http://stan-echa.aktualne.cz`

[12] `http://www.natur.cuni.cz/~arachne/`

Úlohy na aritmetické posloupnosti vyšších řádů v české (československé) MO[1]

Jaroslav Zhouf[2]

Abstrakt: Na střední škole se téma Aritmetické posloupností probírá, ale neprobírá se téma Aritmetické posloupnosti vyšších řádů. Přitom obtížnost tohoto rozšiřujícího tématu je pro středoškoláky také přijatelná. Dokazují to úlohy, které na toto téma můžeme nalézt v naší matematické olympiádě.

Abstract: The topic of arithmetic sequences is a part of secondary mathematics, however, arithmetic sequences of higher orders is not. But the difficulty of this topic is acceptable for secondary students. It can be seen in problems which can be found in the Czech Mathematical Olympiad and which can be solved using the idea of arithmetic sequences of higher order.

Úvod

Na střední škole se probírá téma Aritmetická posloupnost a řeší se v jeho rámci řada zajímavých úloh. Ve středoškolské matematice se ale řeší i úlohy, které patří do obecnější kategorie Aritmetické posloupnosti vyšších řádů, která se však na střední škole neprobírá. Důkazem toho, že se nejená o obtížné téma, jsou úlohy, s nimiž se můžeme seznámit v [9] a [10].

Rekurentní definice aritmetických posloupností vyšších řádů

Ze střední školy známe rekurentní definici aritmetické posloupnosti. Ze znalosti této definice můžeme analogicky vytvořit rekurentní definici aritmetických posloupností vyšších řádů.

[1]Příspěvek byl vytvořen s podporou grantu GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

[2]*PedF UK, Praha, jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz*

Všechny dále uvedené definice platí jak pro nekonečné, tak pro konečné posloupnosti.

Posloupnost (b_n) se nazývá *aritmetická posloupnost druhého řádu*, právě když posloupnost $(a_n) = (b_{n+1} - b_n)$ je aritmetická posloupnost.

Posloupnost (c_n) se nazývá *aritmetická posloupnost třetího řádu*, právě když posloupnost $(b_n) = (c_{n+1} - c_n)$ je aritmetická posloupnost druhého řádu.

Analogicky se definují další *aritmetické posloupnosti vyšších řádů*.

Na střední škole definovaná aritmetická posloupnost (a_n), pro kterou platí $a_{n+1} - a_n = d$, kde d je její diference, je vlastně *aritmetická posloupnost prvního řádu*.

A posloupnost (d), kde d je konstanta, je *aritmetická posloupnost nultého řádu*.

Vzorec pro n-tý člen aritmetických posloupností vyšších řádů

Na střední škole se také uvádí vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti. Analogicky lze najít vzorec pro n-tý člen aritmetických posloupností vyšších řádů.

Víme, že n-tý člen aritmetické posloupnosti (prvního řádu) (a_n) je $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$, neboli $a_n = An + B$, kde A a B jsou reálná čísla. Platí i opačné tvrzení, a sice že každá lineární funkce $a_n = An + B$, kde A a B jsou libovolná reálná čísla, je aritmetická posloupnost (prvního řádu), protože je $a_{n+1} - a_n = [A(n+1) + B] - [An + B] = A$.

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti druhého řádu (b_n) je analogicky $b_n = An^2 + Bn + C$, kde $A \neq 0$, B, C jsou reálná čísla. A platí i opačné tvrzení, a sice že každá kvadratická funkce $b_n = An^2 + Bn + C$, kde $A \neq 0$, B, C jsou libovolná reálná čísla, je aritmetická posloupnost druhého řádu, protože $b_{n+1} - b_n = [A(n+1)^2 + B(n+1) + C] - [An^2 + Bn + C] = 2An + (A + B)$ je lineární funkce.

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti třetího řádu (c_n) je analogicky $c_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$, kde $A \neq 0$, B, C, D jsou reálná čísla. A platí i opačné tvrzení, a sice že každá kubická funkce $c_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$, kde $A \neq 0$, B, C, D jsou libovolná reálná čísla, je aritmetická posloupnost třetího řádu, protože $c_{n+1} - c_n = [A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) + D] - [An^3 + Bn^2 + Cn + D] = 3An^2 + (3A + 2B)n + (A + B + C)$ je kvadratická funkce.

Analogické úvahy platí i pro další aritmetické posloupnosti vyšších řádů.

Podrobněji se o těchto pojmech můžeme dočíst v [8] a [11].

Úlohy z české (československé) matematické olympiády využívající aritmetických posloupností vyšších řádů

Jelikož je téma aritmetických posloupností vyšších řádů docela jednoduché a pro středoškoláky přístupné, domníval se autor tohoto článku, že to bude častým námětem úloh matematické olympiády, neboť řešitelé těchto úloh by si mohli jednoduše objevit příslušnou teorii týkajících se těchto posloupností. Zjištění autora o počtu úloh týkajících se aritmetických posloupností vyšších řádů je však pro něj překvapivé. Můžeme se tom přesvědčit sami, neboť všechny úlohy za dobu 54 let naší matematické olympiády založené na této teorii jsou dále uvedeny. V tomto je nám matematická olympiáda ještě něco dlužná.

1. Ročník 3 (53/54), kategorie A

Určete součet
$$s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2,$$
kde n je dané přirozené číslo.

Výsledek:

n sudé: $s_n = -\frac{1}{2}n(n+1)$

n liché: $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$

2. Ročník 3 (53/54), kategorie A

Jestliže n je přirozené číslo, určete součet
$$s_n = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \cdots + (-1)^{n+1}n(n+1).$$

Výsledek:

n sudé: $s_n = -\frac{1}{2}n(n+2)$

n liché: $s_n = \frac{1}{2}(n+1)^2$

3. Ročník 4 (54/55), kategorie A

Určete počet trojúhelníků, které mají tyto dvě vlastnosti:

(1) Délky stran trojúhelníků jsou celá čísla.

(2) Délka libovolné strany těchto trojúhelníků není větší než dané přirozené číslo n.

Výsledek:

n sudé: $s_n = \frac{1}{24}n(n+2)(2n+5)$

n liché: $s_n = \frac{1}{24}(n+1)(n+3)(2n+1)$

4. Ročník 14 (64/65), kategorie A

Vypočtěte součet všech možných součinů xy, jejichž činitelé x, y jsou navzájem různá čísla vybraná z přirozených čísel $1, 2, \ldots, n$, kde n je dané přirozené číslo.

Výsledek: $s_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

5. Ročník 16 (66/67), kategorie A

V prostoru je dáno n rovin, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou a žádné čtyři neprocházejí týmž bodem. Určete, na kolik oblastí dělí tyto roviny prostor.

Výsledek: $s_n = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$

6. Ročník 16 (66/67), kategorie A

V tabulce cyklických permutací

$$\begin{array}{c} 1, 2, \ldots, n-1, n \\ 2, 3, \ldots, n, 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n, 1, \ldots, n-2, n-1 \end{array}$$

($n \geq 2$) znásobíme každé číslo prvního řádku tím číslem k-tého řádku, které je ve stejném sloupci. Všechny tyto součiny sečteme a výsledek označíme s_k (např. $s_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n + n \cdot 1$).

a) Odvoďte vztah mezi s_{k-1}, s_k a z něho vzorec pro s_k.

b) Zjistěte, pro která k je při daném n součet s_k nejmenší, a vypočtěte tento součet.

Výsledek:

a) $$s_k = s_1 + \tfrac{n}{2}[k^2 - (n+2)k + n + 1]$$

b)

n sudé: $k = \frac{n+2}{2}$, $\quad s_k = s_1 - \frac{n^3}{8}$

n liché: $k = \frac{n+1}{2}$ nebo $k = \frac{n+3}{2}$, $\quad s_k = s_1 - \frac{n^3-n}{8}$

7. Ročník 23 (73/74), kategorie A

V téže rovině leží kružnice $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geq 1)$.

a) Najděte vzorec pro největší možný počet s_n oblastí, na který tyto kružnice rozdělí rovinu. Jaký má odvozený výsledek význam pro Vennovy diagramy?

b) Budiž $n = 4$; popíšeme symbolem (1010) každou z oblastí, která leží uvnitř k_1, k_3 a vně k_2, k_4, symbolem (0100) každou z oblastí, která leží uvnitř k_2 a vně k_1, k_3, k_4, a obdobně dále. Ukažte, že je možné zvolit kružnice tak, že dělí rovinu na s_4 oblastí a každá z nich má jiný popis. Nakreslete obrázek.

Výsledek:

a) $$s_n = n^2 - n + 2$$

8. Ročník 23 (73/74), kategorie B

Je dána kružnice k a přirozené číslo n. Zjistěte nejmenší a největší počet částí, na které lze vnitřek kružnice k rozdělit n tětivami.

Výsledek:

nejmenší počet: $s_n = n + 1$

největší počet: $s_n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$

9. Ročník 44 (94/95), kategorie B

V rovině je dáno n bodů. Jestliže navzájem pospojujeme přímkami každé dva z těchto bodů, vytvoří se další průsečíky. Dokažte, že počet těchto nových průsečíků není větší než

$$s_n = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

10. Ročník 54 (04/05), kategorie B

Na stole leží k hromádek o 1, 2, 3, ..., k kamenech, kde $k \geq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte.

Výsledek: konečný počet kamenů: $s_k = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k-1}{2} = \frac{k^2+2k-1}{2}$

Závěr

Počty možností ve výše uvedených příkladech zde nejsou dokázány. Je možné je najít v příslušných ročenkách matematické olympiády. Některé z těchto úloh nejsou tak obtížné, takže se staly součástí středoškolské matematiky. Jinak je možné všechny výše uvedené počty možností dokázat matematickou indukcí, případně důkazem přímým.

V tomto článku však nešlo o důkazy, šlo zde hlavně o zjištění stavu, jak mnoho se v naší matematické olympiádě vyskytují úlohy na téma Aritmetické posloupnosti vyšších řádů. A ukázalo se, že to není moc časté téma takových úloh, i když to není téma obtížné.

Možná toto zjištění vyprovokuje tvůrce úloh pro matematickou olympiádu k tvorbě dalších úloh na toto téma.

Literatura

[1] Zelinka, R., *Třetí ročník matematické olympiády*. SPN, Praha, 1955.

[2] Zelinka, R., *Čtvrtý ročník matematické olympiády.* SPN, Praha, 1956.

[3] Vyšín, J., Macháček, V., Zelinka, B., Moravčík, J., *XIV. ročník matematické olympiády*. SPN, Praha, 1966.

[4] Vyšín, J., Macháček, V., *XVI. ročník matematické olympiády.* SPN, Praha, 1968.

[5] Vyšín, J., Macháček, V., Mída, J., Moravčík, J., *XXIII. ročník matematické olympiády.* SPN, Praha, 1975.

[6] Horák, K., Kollár, R., Višňovská, J., Vinař, T. a kol., *44. ročník matematické olympiády (1994/95).* JSMF, Bratislava, 1995.

[7] Horák, K. a kol., *54. ročník matematické olympiády.* (v tisku)

[8] Zhouf, J., Figurální čísla, Pascalův trojúhelník, aritmetické posloupnosti vyšších řádů. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Sborník Dva dny s didaktikou matematiky*, PedF UK, Praha, 2004.

[9] Zhouf, J., Středoškolské úlohy na aritmetické posloupnosti vyšších řádů. In Zhouf, J., Hofmanová, P. (eds.), *Sborník příspěvků Makos 04*, UJEP, Ústí nad Labem, 2005.

[10] Zhouf, J. Stehlíková, N., Rozšíření pojmu aritmetická posloupnost na SŠ. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.), *Sborník Dva dny s didaktikou matematiky*, PedF UK, Praha, 2005.

[11] Zhouf, J., Aritmetická posloupnost druhého řádu. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, č. 3, JČMF, Praha, 2005.

Pracovní dílny

Otevřené úlohy a rozvíjení matematického talentu žáků 2. stupně ZŠ

Jana Cachová[1]

Abstrakt: Článek se zabývá otevřenými úlohami v didaktice matematiky a možností jejich využití ve vyučování na 2. stupni ZŠ. Poukáže na spojitost mezi řešením otevřených úloh a rozvojem matematického myšlení žáka – otevřené úlohy podněcují děti k aktivní činnosti v matematice, čímž výrazně přispívají k rozvoji jejich intelektuálních schopností. Práce s otevřenou úlohou rovněž podporuje tvořivost žáka a vede také k rozvoji tvořivosti učitele.

Abstract: The article deals with open problems in mathematics education and their use in the teaching at primary schools. It points to the connection between solving open problems and the development of the student's mathematical thinking – open problems encourage children to work in mathematics actively and thus contribute to the development of their intellectual abilities. Solving open problems also supports the pupil's creativity and leads to the development of the teacher's creativity, too.

K matematice neodmyslitelně patří řešení nejrůznějších úloh a problémů. Řešení úloh jako podstatná součást vyučování matematice bezpochyby přispívá k rozvíjení matematických schopností a dovedností žáka. Pojem *úloha* je však velmi široký, můžeme jím označit procvičování početních dovedností v první třídě primární školy stejně jako hledání odpovědí na složité otázky, kterými se zabývá odborná matematika. F. Kuřina (viz [2]) pod pojmem *matematická úloha* chápe *jakoukoli výzvu k matematické činnosti*. Za nejběžnější ve školské matematice považuje úlohy kalkulativní, rozhodovací, určovací, konstrukční a důkazové. Podle rolí, které mohou hrát úlohy ve vzdělávacím procesu, rozlišuje úlohy motivační, instruktivní, procvičovací, diagnostické a kontrolní. Podle náročnosti dělí úlohy na cvičení (prostá aplikace jednoho nebo několika algoritmů), úlohy (v užším slova smyslu – obvyklá aplikace probrané teorie) a problémy (vyžadují tvořivý přístup).

Dvě úlohy, které se váží k jednomu problému, nemusí být stejné, ačkoli se zčásti shodují. Srovnejme následující dvojici úloh:

[1] *Pedagogická fakulta, Univerzita Hradec Králové, jana.cachova@uhk.cz*

1. Zapiš dvě nejmenší čísla, která mají dělitele 1, 2, 3 a 5.

2. Zapiš dvě nejmenší čísla, která mají dělitele 1, 2, 3 a 5.

a) Co se stane, když zvětšíme počet hledaných čísel na tři, popř. čtyři?

b) Jak je třeba změnit společné dělitele, abychom nemohli použít dosavadní postup řešení?

K řešení první z úloh žák pravděpodobně využije obvyklý postup, který užívá při řešení podobných úloh, ovšem který je méně efektivní pro vytváření vztahů mezi pojmy a postupy, nebo pro třídění a strukturování poznatků. U druhé z úloh musí žák přemýšlet o souvislostech – užít nestandardní postupy, které rozvíjejí poznání, podporují vznik důležitých vztahů a vazeb mezi pojmy a přispívají k lepší orientaci poznatků. Poznatky a dovednosti, které se v souvislosti s řešením úlohy rozvíjejí, jsou pak lépe použitelné v praxi (viz [5]).

V čem spočívá hlavní podstata rozdílu obou úloh?

První z úloh patří do skupiny tzv. uzavřených úloh, druhá patří k tzv. otevřeným úlohám (viz [3]). Oba typy úloh jsou pro vyučování matematice důležité, oba napomáhají rozvíjení matematických schopností a dovedností žáka. Otevřené úlohy mohou posilovat schopnost žáka řešit problémy a problémové úlohy a přispívají k rozvoji jeho poznání. Také dvojice následujících úloh patří k otevřeným úlohám:

3. Nakreslete šachovnici 8 x 8 polí. Zaškrtněte červeně některá z bílých polí šachovnice tak, abyste označili přesně čtvrtinu všech polí šachovnice.

4. Přikreslete k šachovnici nová červeně značená políčka, aby červeně vyznačená plocha tvořila přesně třetinu celkové plochy všech políček.

Které úlohy tedy vlastně můžeme označit za otevřené?

S přívlastkem *otevřený* se setkáváme u velkých matematických problémů, známých z historie (např. *Velká Fermatova věta – rovnice $x^n + y^n = z^n$ pro přirozená čísla x, y, z, n, kde $n \geq 3$, je neřešitelná* – zůstávala otevřenou, nedokázanou až do devadesátých let 20. století; dodnes patrně stále zůstává otevřen i tzv. *Goldbachův problém – každé sudé číslo $n \geq 6$ lze vyjádřit součtem dvou lichých prvočísel* – zatím se nepodařilo nalézt jediné sudé číslo, které by domněnce odporovalo, ani se ji nepodařilo dokázat). Z pohledu historie matematiky je tak možné chápat otevřený jako *dosud nevyřešený*.

Pod *otevřenou úlohou* ale z pohledu didaktiky matematiky nebudeme rozumět dodnes nevyřešené problémy, ale *otevřenost* se bude týkat *otázek*, které úloha klade, *metod* jejího řešení a charakteru *výsledků*.

Zařazování takových úloh do výuky matematice je častější u vyučovacích přístupů, které patří k tzv. otevřenému vyučování. Žáci mohou řešit úlohy, obdobné té následující:

5. Třída 8. C pojede na výlet do Prahy. Kolik je třeba vybrat do třídního fondu? Na Internetu jsme zjistili, že jedna cesta do Prahy vlakem stojí 130 Kč, cena jedné vstupenky je 120 Kč.

S dětmi se začnou diskutovat eventuální obměny reálné situace – *například kolik ušetříme, pokud využijeme zpáteční slevu (cena jízdného tam i zpět je 144 Kč). Plné jízdné ale bude hradit pouze učitelský doprovod – pro žáky je možné požadovat dětské jízdné, rovněž bude možné využít hromadnou slevu atd. Po Praze se budeme pohybovat prostředky městské dopravy* – diskutujeme ceny jízdného. *Vyplatí se objednat autobus a jet do Prahy autobusem (ušetříme za městskou dopravu)? Pokud ano, od jakého počtu osob?* Stejně je možné hovořit o ceně vstupného – *např. lístek do divadla – jednotná cena pro děti i dospělé, lístek na výstavu – lze požadovat dětskou slevu. Co se stane, když tři žáci v den zájezdu onemocní? Atd.*

Otevřené vyučování charakterizují Průcha, Walterová, Mareš (viz [4]):

a) ve smyslu „otevírání školy dítěti“ podle jeho zájmů a schopností,

b) ve smyslu „otevírání školy navenek“ kontaktem k mimoškolnímu prostředí.

Pod otevřené vyučování je tak možné zahrnout např. problémové vyučování, projektovou výuku, ale i konstruktivní přístupy k vyučování, rozvíjení matematického světa dítěte – všechny koncepce vyhovují oběma bodům.

Otevřené vyučování můžeme podle Silvera (viz [5]) vymezit jako:

vyučování, ve kterém žák analyzuje problémy a hledá možné cesty, které povedou k jejich řešení, poté některou z těchto možností vybraný problém řeší, následně o něm diskutuje, rozvíjí další metody, jak situaci vyřešit, a svůj postup ukáže a obhajuje před třídou.

Otevřené úlohy mohou být z aritmetiky, z geometrie, aplikované do praxe, je rovněž možné při jejich řešení využívat počítač atd.

Pojem *otevřené úlohy* je stejně jako samotný pojem *úlohy* velmi široký. K podrobnějšímu vymezení použijeme klasifikaci podle Silvera (viz [5]):

I. Otevřená úloha je taková *úloha, na kterou neexistuje jedna jednoduchá odpověď.* Silver uvádí úlohu:

6. Kolik buněk má tělo průměrného dospělého muže?

Jako příklad je možné použít úlohy z knihy autorů Hejný a kol. (viz [1]):

7. Podél cesty stojí sloupy, vzdálené od sebe 15 m. Turista jdoucí po této cestě prošel kolem osmi sloupů. Kolik metrů ušel?

8. Kolik roků uběhlo od roku 1965 do roku 1983?

9. Kolik hodin uplynulo od 1. 10. 1983 do 8. 10. 1983?

Tento typ úloh je tedy vymezen specifickým charakterem jejich výsledků.

II. Otevřená úloha, je *úloha, která vede k různým metodám řešení*, k různým způsobům žákovských řešení. Jako příklad je možné uvést tradiční úlohu z kombinatoriky:

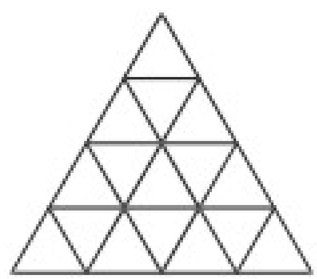
10. Ve školním turnaji v kopané se proti sobě utkalo systémem každý s každým jeden zápas 6 mužstev (8.A, 8.B, 8.C, 9.A, 9.B, 9.C). Kolik žáci dohromady sehráli zápasů?

Jako učitele nás možná nejprve napadne řešení výpočtem podle vzorce pro kombinace. Děti na 2. stupni ZŠ ale tento aparát k dispozici nemají. Ovšem úlohu mohou řešit hned několika způsoby – např. tabulkou zápasů, výčtem všech odehraných zápasů, systematickým výčtem všech možností, graficky pomocí *pavouka* – kdo s kým může ještě hrát, pomocí uzlových grafů (uzly uspořádané v přímce, nebo jako vrcholy šestiúhelníku atd.) – výhodou grafů je to, že pro ně děti nepotřebují složitou teorii, ale mohou je snadno intuitivně aplikovat.

V následujících bodech III.–V. je otevřená úloha vymezena na základě otázek, které klade a které je z ní možné vyvodit.

III. Otevřená je rovněž *úloha, která vede přirozeně k dalším úlohám a zobecněním*.

11. Ukažte, že počet všech nejmenších trojúhelníků v každém z větších trojúhelníků je druhou mocninou přirozeného čísla (obr. 1).



Obr. 1

Otázky, které mohou žáky napadat v souvislosti s řešenou problematikou, popřípadě na které je může učitel navést:

Bude totéž platit i pro větší trojúhelníky?
Proč počty trojúhelníků nesouvisejí s trojúhelníkovými, ale se čtvercovými čísly?
Jak úlohu upravit, aby počty trojúhelníků souvisely s trojúhelníkovými čísly?

IV. Otevřená úloha je taková *úloha, která evokuje proces formulování problému*. Ukážeme to na předchozí úloze:

12. Ukažte, že počet všech nejmenších trojúhelníků v každém z větších trojúhelníků je druhou mocninou přirozeného čísla (obr. 1). Vyzkoušejte, že to skutečně platí – jaká další tvrzení z toho můžete odvodit? Kreslete obdobné pravidelné obrazce dokreslováním menších trojúhelníků do větších (popř. čtverců, obdélníků) a popisujte jejich vlastnosti.

Otevřené úlohy tak přirozeně rozvíjejí žákovu tvořivost, vedou k aplikování matematiky.

V. *Otevřené úlohy* je možné *pro potřeby školní praxe konstruovat pomocí úvodních vět: „Co se stane, když. . . “ „Co se stane, když ne. . . “*

Tyto návodné otázky pomáhají dětem formulovat další úlohy. (Pro učitele – *vyberte jednu vhodnou úlohu z učebnice a zkuste ji pomocí úvodní otázky upravit na otevřenou úlohu*.)

Příkladem takového typu úloh je úloha 2 z úvodu tohoto článku.

Otevřené úlohy mohou být aritmetické – např.:

13. Pokuste se pomocí řeči čísel popsat pravidelnost v pravidelných obrázcích z úloh v bodech III a IV.

Také mohou být slovní – např.:

14. Barborce je 5 let, je to právě polovina stáří jejího bratra Michala. Kolik je Michalovi nyní let? Co budeš moci říci o jejich věku v průběhu času?

Otevřené úlohy mohou být i geometrické – např. práce s tangramem:

15. Skládejte z dílků tangramu obrazce, aby obsah čtvercového dílku tangramu představoval polovinu (třetinu, čtvrtinu, osminu) obsahu tohoto obrazce.

16. Sestavujte ze dvou dílků tangramu různé konvexní (nekonvexní) mnohoúhelníky. Jaké typy různých n-úhelníků jde takto sestavit?

17. Vytvářejte z dílků tangramu středově (osově) souměrné útvary.

18. Sestavujte ze dvou dílků tangramu útvary a doplňujte je pomocí zbylých dílků tak, aby byly výsledné útvary středově (osově) souměrné.

Domnívám se, že na základě uvedených ukázek je patrné, že všechny typy otevřených úloh rozvíjejí matematické myšlení žáka, vedou jej k různým činnostem v matematice, vybízejí k aktivitě. Zájem žáka o matematiku tak může přirozeně vyrůstat ze samotné podstaty matematiky, není potřeba žáky pro matematiku získávat *falešnou* motivací (jako např. řešením různých tajenek či kryptogramů, kde je matematika vlastně *překážkou*, kterou je na cestě ke kýžené odpovědi potřeba překonat).

Otevřené úlohy je možné využít v problémovém vyučování (jako vhodné problémové situace), v projektové výuce (vyučování je přirozené, využívá dětskou zkušenost s okolním světem), ke konstruktivnímu vyučování (žák si pomocí některých úloh částečně konstruuje vlastní poznání).

Řešení úloh přispívá k vytváření žákova vlastního světa matematiky. Domnívám se, že zvláště otevřené úlohy jsou vhodným prostředím, které žákům napomáhá matematickými činnostmi rozvíjet jejich představy, utvářet pojmy, vede je k pochopení souvislostí a ujasnění struktury poznatků.

Podle Silvera (viz [5]) souvisí schopnost formulovat problém s intelektuálními schopnostmi jedince, je důležitým hlediskem pro úroveň matematických činností. Schopnost jasně formulovat problém může sloužit k odhalení matematického talentu žáka.

Pokud tedy zařazujeme otevřené úlohy do vyučování matematice, můžeme tím přispět k rozvoji či odhalení matematického nadání žáků.

Literatura

[1] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava, 1990.

[2] Kuřina, F., Matematika je řešení úloh. *MFI*, roč. 13, č. 3, Prometheus, Praha, 2003.

[3] Pehkonen, E., Use of open – ended probléme. *ZDM*, č. 2, 1995.

[4] Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J., *Pedagogický slovník*. Portál, Praha, 1995.

[5] Silver, E. A., The nature and use of open probléme in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM*, č. 2, 1995.

Quatro a klasifikace[1]

Antonín Jančařík[2]

Abstrakt: V článku se seznámíme s moderní strategickou hrou Quatro a jejím využitím při výuce matematiky.

Abstract: The article introduces a modern strategic game Quatro and its use in the teaching of mathematics.

Hra Quatro

Hra Quatro patří mezi moderní strategické hry z dílny firmy Gigamic (viz [1]). Od téhož výrobce jsou známy také hry Goblet, Quixo, Quadas či Pylos. Všechny tyto hry patří mezi abstraktní strategie pro dva hráče. Vzhledem k tomu, že v nich není zakomponován žádný prvek náhody, jsou tyto hry plně deterministické, a lze u nich proto nalézt vyhrávající strategie. Tato úvaha nemusí být pro žáky základních i středních škol zcela triviální, ale je to základní myšlenka celé kombinatorické teorie her.

Vzhledem k počtu možností jsou algoritmy potřebné pro nalezení vyhrávající strategie obvykle komplikované a pro výpočet vyhrávajících tahů je třeba použít počítač. S výsledky takového výpočtu v případě hry Quatro se můžete seznámit na Internetu na stránkách [2].

Pravidla hry

Podívejme se nyní na didaktické využití hry Quatro při výuce matematiky. Nejprve uvedeme její pravidla. Hra Quatro se hraje na desce 4×4, hru hrají dva hráči, kteří

[1]Tento příspěvek vznikl s podporou grantu GA ČR 406/05/P561.

[2]*PedF UK, Praha, Antonin.Jancarik@pedf.cuni.cz*

se pravidelně střídají v tazích. Tah je zahájen tím, že hráč vybere kámen, který má být umístěn na desku, a předá jej protihráči. Ten kámen umístí na volné pole. Kameny mají čtyři různé vlastnosti (velikost: malé $\times$ velké, barvu: černé $\times$ bílé, tvar: hranaté $\times$ kulaté a ozdobu: s otvorem $\times$ bez otvoru). Od každého typu je ve hře jeden kámen. Hráč, který utvoří řadu ze čtyř kamenů stejné vlastnosti, vyhrává.

Klasifikace kamenů

Je velmi zajímavé sledovat, jak děti hrající tuto hru spontánně klasifikují kameny. Uvedeme příklad úvah, které dítě před výběrem kamene provádí:

Dítě si prohlédne hrací desku a zjistí, že se na ní nachází řada tří černých kamenů. Tuto situaci glosuje slovy: „Černý nemohu poslat." A následně oddělí černé kameny od bílých. Při dalším zkoumání zjistí, že se na desce již nachází i řada tří kamenů s otvory. Tento stav je opět glosován: „Nemohu poslat kámen s dírkou." A oddělí od bílých kamenů všechny s dírkami. Po oddělení kamenů dítě zkontroluje situaci na desce a zjistí, že se další řada tří stejných kamenů již na desce nenachází, a proto situaci ohodnotí: „Musím poslat bílý kámen bez dírky." (K tomuto převrácení podmínek (nemohu poslat černý, posílám bílý) dochází velmi často.) Následně z oddělených kamenů splňujících všechny podmínky vybírá jeden kámen a předává jej protivníkovi.

U zkušenějších hráčů k tomuto vyhodnocování pozice dochází již před položením vlastního kamene. Uvedeme si tyto úvahy na příkladu našeho protihráče. Jeho cílem je nastražit co nejvíce posloupností tří kamenů tak, aby již musel dostat kámen, který se mu bude hodit. Proto se v první řadě snaží kámen umístit tak, aby již byl třetím stejným v řadě. Protože dostal malý bílý hranatý kámen bez otvoru, snaží se jej přidat do řady dvou bílých malých kamenů. Ovšem než jej položí, začne vyhodnocovat situaci: „Nebudu moci poslat malý bílý (nová řada), s dírkou, ani černý (stávající řady)." Prohlédne si zbývající kameny a shrne situaci: „Nemohu poslat bílý ani černý, musím dát kámen jinam." Načež hledá další pozici, kam by kámen položil. Při tomto rozhodování děti často své zbývající kameny přeskupují, takže je velmi jednoduché sledovat jejich myšlenkové postupy. Navíc se v průběhu hry kritéria mnohokrát mění, v našem případě hráč nakonec přece jen umístí kámen do řady malých bílých kamenů, ale na druhé volné pole, čímž přeruší řadu černých kamenů a pošle protivníkovi velký černý hranatý kámen bez otvoru.

Po seznámení se s průběhem hry si ukážeme několik didaktických aplikací této hry.

Množina a její doplněk, Vennovy diagramy

Na této hře se děti prakticky seznamují s tím, co je doplněk, průnik a sjednocení množin. V průběhu hry mnohokrát vyhledávají například kámen, který leží v komplementu sjednocení dvou množin. Tím že mají odpovídající motivaci (touhu vyhrát) a možnost kameny fyzicky přeskupovat, nečiní jim tato úloha nejmenší potíže.

Na kamenech můžeme také demonstrovat všechny možné vzájemné průniky a doplňky čtyř množin.

Binární kódování

Další zajímavou možností této hry je praktická ukázka binárního kódování. Na příkladu 16 kamenů rozdílných vlastností lze ukázat některé vlastnosti dvojkové soustavy. Pokud si například zvolíme v každé kategorii vlastností jednu volbu a kámen označíme 1, pokud má požadovanou vlastnost, a 0, pokud nemá, dostáváme (při zachování pořadí vlastností) všechna binární čísla od 0 do 15.

Na tomto kódování můžeme dětem vysvětlit, že pro rozlišení jednoho kamene potřebujeme čtyři otázky s binární odpovědí. To si děti mohou vyzkoušet. Můžeme jim také položit otázku, kolik by bylo potřeba kamenů, kdybychom přidali ještě jednu vlastnost, a kolik by bylo potřeba otázek na jejich rozlišení. Zobecněním této úvahy pak můžeme například ukázat, že na rozlišení 1024 čísel stačí 10 otázek, ale na 1 025 je jich už potřeba 11.

Závěr

Závěrem je třeba zmínit, že vzhledem k vyšší ceně hry a tomu, že ji mohou hrát pouze dva hráči, lze hru těžko hrát přímo v hodinách. Je ale vhodným doplňkem třídy či školní knihovny k trávení volného času či pomůckou na schůzky kroužků pro matematicky nadané děti.

Literatura

[1] `http://www.gigamic.com`

[2] `http://ktiml.ms.mff.cuni.cz/~maj/?`

Fyzika proti matematice nebo s matematikou? – – několik námětů z projektu Heuréka

Irena Koudelková[1]

Abstrakt: Příspěvek je věnován možnostem rozvíjení matematických představ žáků prostřednictvím výuky fyziky. Jsou uvedeny konkrétní náměty ověřené při práci se žáky a studenty v projektu Heuréka.

[1]*KDF MFF UK a ZŠ Červený Vrch, Praha, irena.koudelkova@mff.cuni.cz, koudelkova@zscvrch.cz*

Abstract: The contribution is devoted to the possibilities of developing pupils' mathematical images in the lessons of physics. Some concrete suggestions are given taken from the work with pupils in Heureka project.

Úvod

Ve svém příspěvku bych se ráda věnovala tomu, jak může fyzika pomoci při rozvoji matematických představ a znalostí dětí. Jedná se o několik námětů, které používáme při výuce fyziky podle projektu Heuréka (viz [1]).

Fyzika a základní představy o rovnicích

V 6. třídě v souvislosti s měřením hmotnosti necháváme děti hledat princip rovnováhy na vahadle. Děti pomocí experimentů dojdou k tomu, že rovnováha nastává tehdy, když součin počtu závaží a jejich vzdálenosti od osy otáčení je na obou stranách vahadla stejný. (Analogické úvahy můžete s dětmi dělat i v sedmé třídě při výuce rovnováhy na páce.)

Pak učitel položí otázku, čím se zásadním způsobem liší sčítání a násobení. V diskusi s dětmi jim může připomenout, co se učily při sčítání již v první třídě. Děti si obvykle vzpomenou, že jim paní učitelka zdůrazňovala, že mohou sčítat jen jablíčka s jablíčky, ale už ne jablíčka s hruškami. Pak se učitel vrátí k nově objevené zákonitosti rovnováhy na vahadle a vede děti k tomu, aby si uvědomily, že při násobení (a také při dělení) nevadí, když jsou činitelé různí (počet závaží krát vzdálenost). Nechá děti hledat další příklady, ve kterých mohou najít stejný princip.

Pokud zúžíme experiment pouze na rovnoramennou páku, můžeme děti přirozeným způsobem dovést k základním představám o rovnicích (a nerovnicích). Děti si uvědomí, že pokud nějaké závaží odeberou nebo přidají na jedné straně vahadla, musí totéž udělat na druhé straně. Tento poznatek může později učitel matematiky velmi dobře využít při seznamování dětí s ekvivalentními úpravami rovnic.

Fyzika a grafy

Velmi výrazně se vzájemná provázanost fyziky a matematiky může projevovat při grafickém znázorňování různých fyzikálních jevů.

Kyvadlo

V 6. třídě si s dětmi povídáme o historii měření času, mluvíme o různých typech hodin a také o tom, jak Galileo Galilei zkoumal princip kyvadla. Děti dávají návrhy, na čem by kývání kyvadla mohlo záviset, a pak svoje návrhy ověřují. Dojdou k tomu, že pohyb kyvadla závisí pouze na délce závěsu. (Jsme na úrovni šesté třídy, takže to, že kývání kyvadla závisí na gravitačním zrychlení a že při přesnějším měření bychom zjistili i závislost na počáteční výchylce, v tuto chvíli s dětmi neřešíme. Pokud děti tento návrh dají, může jim učitel o závislosti říci, ale současně jim řekne, že ověření této závislosti není zatím v jejich možnostech.) Nyní chceme podrobněji zjistit, jaká je závislost na délce závěsu. Děti pracují ve dvojicích. Na tabuli nakreslíme tabulku, ve které budou v prvním sloupci délky závěsu (od cca 15 cm až do cca 2 metrů – dle podmínek školy; máte-li možnost zavěsit kyvadlo mezi schodištěm či z okna, můžete zkoumat i výrazně delší kyvadla). Do dalších tří sloupců budou děti zapisovat výsledky měření.

Každá dvojice dostane dvě hodnoty délek (doporučuji dávat vždy délky odlišné – např. ze začátku a prostředku tabulky). Má za úkol ze stativového materiálu sestavit stojan, zavěsit na něj závaží na niti tak, aby byla dodržena požadovaná délka kyvadla (délku je třeba měřit od místa závěsu do těžiště závaží) a změřit počet kmitů kyvadla za deset sekund. Dětem bude vycházet necelý počet kmitů, proto je vhodné jim říci, aby výsledek zaokrouhlily na celky nebo poloviny. Každé měření se třikrát opakuje, výsledky děti píší do tabulky na tabuli. Splní-li všechny dvojice svůj úkol, může učitel s dětmi diskutovat, proč se každé měření třikrát opakovalo. Pak buď sám nebo společně s dětmi vypočítá aritmetický průměr ze tří hodnot a napíše ho do posledního sloupce tabulky. Opět je příležitost k úvahám o tom, zda má smysl opsat do tabulky číslo, které ukazuje displej kalkulačky, o zaokrouhlování vypočtených hodnot, případně o počtu platných číslic (samozřejmě na úrovni, které mohou děti rozumět). Děti si pak opíší do sešitu část tabulky s délkami závěsu a průměrem naměřených hodnot.

Učitel pak rozdá dětem milimetrový papír a zadá dětem za domácí úkol nakreslit graf vyjadřující závislost počtu kmitů za deset sekund na délce závěsu. Vzhledem k tomu, že děti pravděpodobně do té doby žádný složitější graf nedělaly, je vhodné jim dát podrobnější pokyny – jaké zvolit měřítko na osách, jak označit osy apod. Je nutné dětem zdůraznit, aby získané body nespojovaly a přinesly graf na příští hodinu.

V další vyučovací hodině učitel zkontroluje a ohodnotí přinesené grafy. Pak s dětmi rozebere, zda má smysl spojit získané body lomenou čarou, nebo zda by čára měla být „hladká“. Děti si pak od ruky do svých grafů příslušnou křivku nakreslí. V další diskuzi učitel s dětmi uvažuje o tom, co vlastně graf vyjadřuje, zda získaná křivka protne osy souřadnic, nechává děti z grafu odečítat počet kmitů kyvadla pro zadanou délku a naopak. Podle svého uvážení může dětem říci, že se jedná o křivku, která se jmenuje hyperbola.

Metodická poznámka

Přestože se jedná o aktivitu, která zabere zhruba dvě vyučovací hodiny, s dětmi ji dělám a považuji ji za velmi důležitou. Děti se při ní poprvé setkávají s jiným tvarem grafu než s přímkou – z tohoto důvodu také volím graf závislosti počtu kmitů na délce, přestože jsou získaná měření zatížena velkou chybou. Hyperbola je totiž svým tvarem velmi odlišná od přímky. Pokud bych žáky nechávala měřit závislost doby deseti kmitů na délce (což by se jistě měřilo snáze a přesněji), získali bychom odmocninovou závislost, kterou by děti mohly považovat „skoro za přímku“.

Děti se také většinou poprvé setkávají s grafem vytvořeným z naměřených, nikoliv z vypočítaných hodnot, a vůbec pro ně není jednoduché připustit, že jednotlivé body grafu neleží přesně na křivce, že je tedy měření zatíženo chybami (a dokonce že skutečné měření je vždy a zákonitě zatíženo chybami).

Z hlediska matematiky se jedná o téma, které zdaleka předbíhá učivo 6. třídy, avšak dovednosti a poznatky, které děti získají (a které budou dále prohlubovány), mohou být využity později v mnoha oblastech.

V podstatě stejný experiment a jeho vyhodnocování dělají kolegové z Heuréky i se studenty středních škol. V tomto případě je vhodné měřit dobu deseti kmitů a do grafu vynášet závislost doby kmitu na délce. Je možné se studenty hovořit o tom, že se jedná o mocninnou křivku ($y = x^k$) a nechat je odhadovat koeficient mocniny ($k = 1/2$). Pak je možné provést linearizaci křivky sestrojením grafu závislosti T^2 na délce. Považuje-li to učitel za vhodné, je možné úvahy se studenty vést až ke statistickému zpracování dat, korelačním koeficientům apod.

Úlohy o pohybu

Na začátku 7. třídy bývá obvykle zařazován tematický celek Pohyb. Žáci se v něm seznamují s klasifikací pohybů, řeší úlohy týkající se rovnoměrného přímočarého pohybu a setkávají se i s grafy závislosti dráhy na čase a rychlosti na čase při rovnoměrném přímočarém pohybu (případně při nerovnoměrném pohybu, který je složen z několika úseků, na nichž se rychlost tělesa nemění). Já osobně považuji toto téma za velmi důležité pro rozvoj pochopení grafického znázornění fyzikálních dějů, věnuji proto grafům velkou pozornost.

Zadávám dětem různé typy úloh:

- Popiš pohyb něčeho, s čím se nedomluvíš (např. domácího zvířátka, autíčka, vláčku, maminky při úklidu; nikoliv bratra, kterému řekneš, běž tam a zase sem). Nakresli graf popisující tento pohyb. (Jedná se o jednu z úvodních dobrovolných domácích úloh tematického celku, není upřesněno, o jaký graf se musí jednat. Děti tedy volí různá řešení. A vzhledem k tomu, že mají obrovskou fantazii, tak už jsem dostala např. velký, mírně zmuchlaný balicí papír, na kterém byla stopa pohybu vodní želvy s vyznačenými polohami po půl minutě, s komentářem, že želva lezla za hlávkovým salátem, jindy zase na čtverečkovaném papíře nakreslenou trajektorii pohybu slunéčka sedmitečného. A jednou se holčička omlouvala, že přinese úkol příště, protože chtěla zkoumat pohyb kocoura, ale ten jí utekl.)
- K danému grafu (s měřítkem na osách) napiš příběh. (Začínám s grafem, kde pohyb začíná v počátku soustavy souřadnic, postupně však zařazuji i úlohy složitější, ve kterých čára znázorňující pohyb nevychází z počátku soustavy souřadnic.)
- K danému grafu závislosti dráhy na čase (bez měřítka na osách) napiš příběh. (Tato varianta předchozí úlohy je pro děti zajímavá tím, že nejsou omezovány předepsanou rychlostí těles, jejich příběh může být jak o šnecích, tak o raketách.)
- K vyprávěnému příběhu načrtni graf závislosti dráhy na čase (bez měřítka). (Podstatné je pochopení jiného sklonu přímky při odlišných rychlostech, nikoliv přesné vypočítání a narýsování.)

- Obtížnější, ale podle mého názorů důležité, je s dětmi uvažovat o tom, jak znázornit do grafu pohyb, při kterém se těleso vrací na původní místo (běžec na stadionu) nebo se pohyb opakuje (běží několik kol). (Úlohy tohoto typu se často vyskytují ve fyzikální olympiádě a děti, které se s nimi nesetkaly ve škole, mívají při jejich řešení velké problémy.)
- K danému grafu dráhy na čase, složenému z několika úseků s různým sklonem čáry, narýsuj graf závislosti rychlosti na čase. (Zde můžeme s dětmi diskutovat o tom, zda je reálné, aby byla rychlost nespojitá, aby se měnila skokem. V případě, že se jedná o fyzikálně zdatnou třídu, můžeme uvažovat o tom, jak graf "opravit", aby odpovídal realitě, a třeba dojít až k pohybu zrychlenému.)
- Lze také s dětmi řešit úkol, kde je v grafu závislosti rychlosti na čase „schovaná" dráha (obsah plochy pod křivkou).

I kdybyste však s dětmi obtížnější úlohy již neřešili – ať již z časových nebo jiných důvodů – a dovedli je jenom k pochopení rozdílu mezi grafem závislosti dráhy na čase a grafickým znázorněním trajektorie pohybu, vykonali byste velmi záslužnou činnost (výsledky testu Kalibro – přírodovědný základ, ročník 2004/2005, ukazují, že tento rozdíl chápe jen zhruba 25 % žáků 7. tříd).

Další tematické celky

Schopnost žáků pracovat s grafy je možné ve fyzice rozvíjet i v dalších tematických celcích, například: Teplo a změny skupenství (graf závislosti teploty na dodávaném nebo odebíraném teple při zahřívání a změnách skupenství), Elektřina (graf závislosti proudu na napětí při určování elektrického odporu, případně i voltampérová charakteristika diody apod.), Radioaktivita (určování poločasu rozpadu radioaktivní látky, máte-li k dispozici potřebné pomůcky, nebo alespoň modelování radioaktivního rozpadu pomocí mincí (viz [2], část Pokusy).

Fyzika a práce s výrazy, řešení lineárních rovnic

Zřejmou aplikací matematiky do fyziky je úprava výrazů, vyjadřování neznámé ze vzorce, řešení rovnic apod. Přesto že se jedná skutečně o zcela zjevnou aplikaci, uvádím ji zde proto, abychom si uvědomili, že pokud žáci mají s touto matematickou látkou potíže, prakticky nejsou schopni řešit fyzikální příklady. Nebo, v lepším případě, provedou fyzikální analýzu problému a ztroskotají na matematických úpravách (např. při řešení již zmiňované kalorimetrické rovnice, kdy při výpočtu výsledné teploty směsi potřebují vyjádřit neznámou, která je ještě v závorce). Fyzika může matematice pomoci při hledání úloh a příkladů z běžného života, potřebuje však od matematiky, aby žáci bez větších problémů zvládali základní operace s výrazy a úpravy rovnic.

Fyzika a rozměrová analýza

Matematika se při řešení úloh z praxe obvykle příliš nezabývá jednotkami příslušných fyzikálních veličin (např. v úlohách o pohybu se v rovnici jednotky nevyskytují), jednotky se většinou píší až k výsledku, případně do odpovědi. Naopak učitelé fyziky velmi často zdůrazňují nutnost používat správné jednotky v průběhu celého výpočtu, nezapomínat je psát při jednotlivých úpravách. Děti ale mnohdy považují jednotky za cosi zbytečného, neuvědomují si jejich důležitost.

Učitel fyziky může – třeba při nějaké volnější hodině v 8. či 9. ročníku před prázdninami – zadat dětem problém, který jim pomůže vhodné využití jednotek ocenit. Námět na následující úlohu pochází ze starších přijímacích zkoušek do 1. ročníku Gymnázia Jana Keplera v Praze:

- Představ si, že píšeš písemnou práci z úloh o pohybu. Neučil jsi se a vůbec netušíš, co by se s úlohou dalo dělat. V úloze se vyskytují časy t_1, t_2 a vzdálenosti d_1, d_2. Má se spočítat nějaká rychlost. Díky dobrým kamarádům se ti na stole sešly taháky s různými výsledky. Vyber, které výsledky by možná mohly být správně a které jsou zcela určitě špatně (další možná řešení jistě vymyslíte sami):

  a) $v = \frac{d_1 t_1 + d_2 t_2}{t_1 + t_2}$

  b) $v = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2}$

  c) $v = \frac{d_1}{d_2} + \frac{t_1}{t_2}$

Vzhledem k tomu, že o zadání úlohy žáci nevědí téměř nic, mohou tento problém řešit pouze tak, že si uvědomí, v jakých jednotkách by vycházel výraz na pravé straně, a porovnají to s jednotkami rychlosti, která má vyjít jako výsledek.

Následující úlohu, která má podobný princip řešení předkládám jako námět pro vás:

- Víte, jak se z desetihaléře udělá desetikoruna? Vezměte deset haléřů a proveďte s ním následující operace (ale pozor, funguje to i obráceně, ať nepřijdete o všechny své peníze):

$$10 \text{ hal} = \frac{1}{10} \text{ Kč} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \text{ Kč} = 50 \cdot 20 \text{ hal} = 1\,000 \text{ hal} = 10 \text{ Kč}$$

Závěr

Vrátím-li se k názvu svého příspěvku, jednoznačně bych doporučila, aby se při výuce žáků a studentů fyzika a matematika spolu doplňovaly. Vlastně stejně jako se doplňují a využívají navzájem své poznatky „velká“ fyzika a „velká“ matematika – vědecké obory důležité pro rozvoj lidského poznání.

Literatura

[1] `www.kdf.mff.cuni.cz/heureka/`

[2] `www.energyweb.cz/`

MATEMATICO – soutěž i pro nematematiky

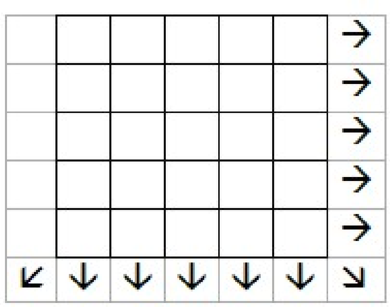
Zdeněk Lauschmann[1]

Abstrakt: Článek prezentuje jednu matematickou soutěž, která je přiměřeně náročná, takže je přístupná i průměrně nadaným žákům na matematiku. Tvoří proto vhodné zpestření výuky matematiky na všech typech škol.

Abstract: The article presents one mathematical competition of an adequate difficulty so that it is accessible for average pupils, too. It livens up the teaching of mathematics at all types of schools.

MATEMATICO je jednoduchá soutěžní hra s prvky matematiky; její velkou předností je to, že dává příležitost vyniknout i nematematikům, jak opakovaně ukazuje praxe. Matematico totiž prověřuje a bystří především kombinační schopnosti a strategické myšlení - tedy dovednosti, jež nejsou nutně vázány na matematické nadání. Proto má tato hra široké použití jako zpestřující náplň suplovaných hodin a volného času ve škole i jinde. Matematičtí talenti pochopitelně touto aktivitou mohou jen získat.

Matematico se koná už řadu let na Arcibiskupském gymnáziu v Praze, na podzim 2005 proběhne již 5. ročník otevřené soutěže v této zajímavé hře – Matematico OPEN. Každoročně se utkávají dvojice reprezentantů pražských škol, originální diplomy získávají nejlepší jednotlivci i školy.



Obr. 1

2 stejná čísla	(S_2) 1b.
3 stejná čísla	(S_3) 2b.
2 dvojice stejných čísel	(S_{22}) 3b.
3 stejné a 2 jiné stejné	(S_{23}) 5b.
4 stejná čísla	(S_4) 4b.
Postupka tří čísel	(P_3) 1b.
Postupka čtyř čísel	(P_4) 3b.
Postupka pěti čísel	(P_5) 6b.

Obr. 2

Popis pravidel Matematica lze najít např. v [1]. Do předem připravené čtvercové mřížky 5x5 okének (obr. 1) se postupně vpisuje 25 čísel, která hlásí rozhodčí. Čísel je celkem 52, čtyřikrát od 1 do 13 (jako kanastové karty) a jsou tažena zpravidla po 5 sekundách. Soutěžící se snaží vytvořit co nejvíce tzv. figur (obr. 2) – bodují se řádky,

[1]*Arcibiskupské gymnázium, Praha, 211.cz@centrum.cz*

sloupce i hlavní úhlopříčky, stejná čísla nemusí sousedit, postupky mohou být přeházené. Příklad bodování uvádí obr. 3. Kdo takto získá nejvíce bodů, zvítězil.

K prvnímu provedení je vhodné namnožit přehled figur s bodováním a třeba i mřížky, zkušenější hráči už si figury i body pamatují a stačí připomenout pravidla – např. to, že tažené číslo je třeba zapsat do mřížky ihned po ohlášení. Jako časomíra rozhodčímu postačí digitální hodinky, tažená čísla je vhodné pokládat na stůl také v řadách po pěti – pro kontrolu počtu i čísel. Interval mezi čísly, zprvu aspoň pětisekundový, lze zkušeným hráčům zkracovat – třeba až na 2 sekundy. Zajímavou obměnou uvedených pravidel je hra „na nulu“, při níž je cílem úplná absence figur ve vyplněné mřížce – podaří se to málokdy, ale odměnu zaslouží i hráči s jedním či dvěma body. Jiná obměna, možná ještě obtížnější, je hra „na 17“, tzn. na fixní zisk bodů (může to být i jiný počet) – jen mistři dokáží průběžně sledovat a řídit tvorbu figur, aby zisk dosáhl předem stanovené výše bodů. Lze tvořit i další obměny.

Na závěr uvádíme nový rekord v tzv. maximální sestavě: 14 dní po konferenci v Hradci Králové přišel z Gymnázia Sokolov a činí 68 bodů ze 72 teoreticky možných (obr. 4).

	1	**3**	**1**	**2**	**7**	□	S_2	P_3	**2b.**
	2	**3**	**2**	**2**	**1**	□	S_3	P_3	**3b.**
	4	**6**	**7**	**5**	**5**	□	S_2	P_4	**4b.**
	4	**3**	**6**	**7**	**5**	□	P_5		**6b.**
	4	**3**	**5**	**6**	**1**	□	P_4		**3b.**
□	□	□	□	□	□	□			
S_2	S_3	S_4	P_3	S_2	S_{22}		S_{22}		
P_3				P_3				**3b.**	
2 b.	**2 b.**	**4 b.**	**1 b.**	**2 b.**	**3 b.**				
									35b.

Obr. 3

3	4	5	1	2
4	5	6	2	3
5	6	7	3	4
6	7	8	4	5
7	8	9	10	6

Obr. 4

Jelikož organizace této soutěže není tak náročná, určitě by stálo za to uvažovat o Přeboru škol ČR ve hře Matematico!

Literatura

[1] Zapletal, M., *Encyklopedie 1000 her*. Olympia, Praha, 1973.

Využití Cabri geometrie při vyšetřování množin bodů s danou vlastností

Pavel Leischner[1]

Abstrakt: Příspěvek si klade za cíl ukázat metodické možnosti vyšetřování množin bodů dané vlastnosti s podporou Cabri.

Abstract: The goal of the contribution is to show didactic possibilities of investigating loci using Cabri.

Úlohy na vyšetřování množin bodů s danou vlastností se často zařazují do matematických olympiád. Přispívají k rozvoji matematického myšlení studentů. Přesto bývá jejich výuka na škole zanedbávána jak učiteli, tak i autory aktuálních učebnic. Je tomu tak pravděpodobně proto, že téma se jeví obtížné, řešení úloh pak zdlouhavé a nezáživné. Nástroje dynamické geometrie umožňují tuto problematiku zpřístupnit učitelům i studentům jednak posílením motivace, jednak vizualizací sestrojování jednotlivých bodů hledané množiny či jejím přímým zobrazením. Řešitel tak snadno vytvoří hypotetický závěr a získá prostor na vytvoření přesného důkazu, že nalezený geometrický útvar je množinou bodů s danou vlastností.

Než přistoupíme k vlastnímu řešení některých úloh, připomeňme si metodiku vyšetřování množin bodů s danou vlastností. Nechť M je hledaná množina takových bodů v dané rovině, které splňují danou vlastnost V. Při klasickém způsobu řešení (v první fázi – tzv. rozboru či analýze úlohy) nejprve zkoušíme sestrojit několik bodů množiny M tak, aby splňovaly danou vlastnost. Z jejich rozložení pak učiníme hypotézu, že $M = G$ kde G je geometrický útvar, o němž se domníváme, že obsahuje sestrojené body. Druhou a podstatnou fází řešení je nalezení důkazu této hypotézy. Nezkušení studenti sem většinou ani nedospějí. Stačí jim vyslovení hypotézy $M = G$ a v řešení se omezují na popis, jak jednotlivé body sestrojovali. To je ovšem bezcenné. Zápis správného řešení může začínat uvedením, že hledanou množinou je útvar G, po němž následuje důkaz. Ten se skládá ze dvou částí:

a) Dokážeme, že každý bod X, jenž náleží útvaru G, splňuje vlastnost V.

b) Dokážeme, že když libovolný bod X dané roviny splňuje vlastnost V, pak náleží G.

Místo každého z posledních dvou tvrzení můžeme dokazovat jeho obměnu. Existují tedy čtyři možné způsoby provedení důkazu,[2] které lze symbolicky zapsat takto:

[1] *Pedagogická fakulta JU, České Budějovice, leischne@pf.jcu.cz*

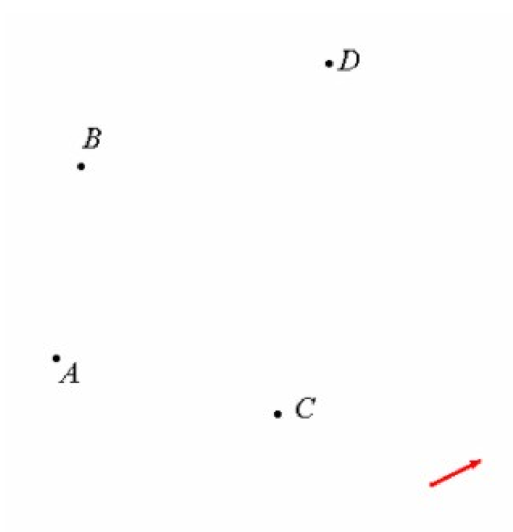
[2] pomineme-li záměnu pořadí bodů a), b)

(1) a) $X \in G \Rightarrow V(X)$ platí $\wedge$ b) $V(X)$ platí $\Rightarrow X \in G$
(2) a) $X \in G \Rightarrow V(X)$ platí $\wedge$ b) $X \notin G \Rightarrow V(X)$ neplatí
(3) a) $V(X)$ neplatí $\Rightarrow X \notin G \wedge$ b) $V(X)$ platí $\Rightarrow X \in G$
(4) a) $V(X)$ neplatí $\Rightarrow X \notin G \wedge$ b) $X \notin G \Rightarrow V(X)$ neplatí

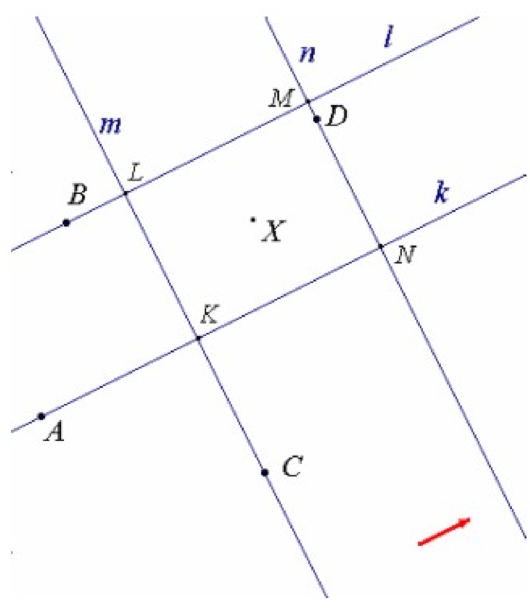
Vzhledem k omezenému rozsahu příspěvku popíšeme možnou metodiku vyšetřování množin bodů dané vlastnosti s podporou Cabri na jediném příkladu (včetně zápisu řešení).

Úloha: V rovině jsou dány body A, B, C a D, z nichž žádné tři neleží na téže přímce. Těmito body vedeme po řadě přímky k, l, m a n tak, aby ohraničily pravoúhelník $KLMN$ a body K a M byly průsečíky přímek k, m a l, n v daném pořadí. Vyšetřete množinu středů všech takových pravoúhelníků $KLMN$.

Metodika postupu vyšetřování množiny s podporou Cabri: Na prázdné pracovní ploše nového souboru sestrojíme body A, B, C, D. Vytvoříme ještě pomocný ovladač (například v pravém dolním rohu), a to menší kružnici (příkaz „Kružnice“) a vektor s počátečním bodem ve středu kružnice a koncovým bodem na kružnici. Kružnici skryjeme, vektor ponecháme (obr. 1).



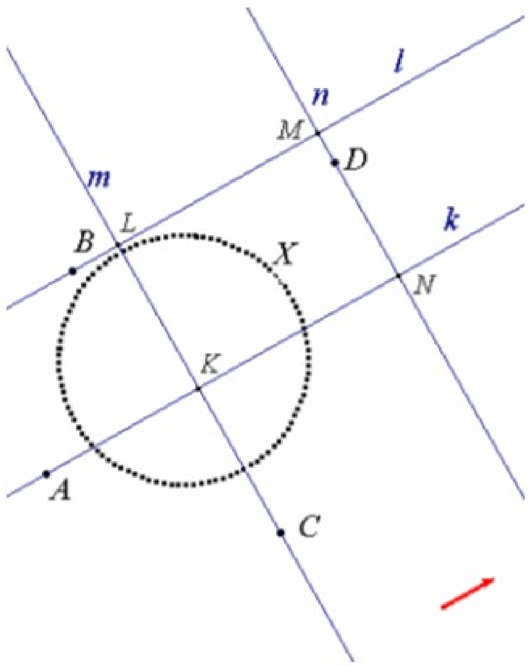
Obr. 1



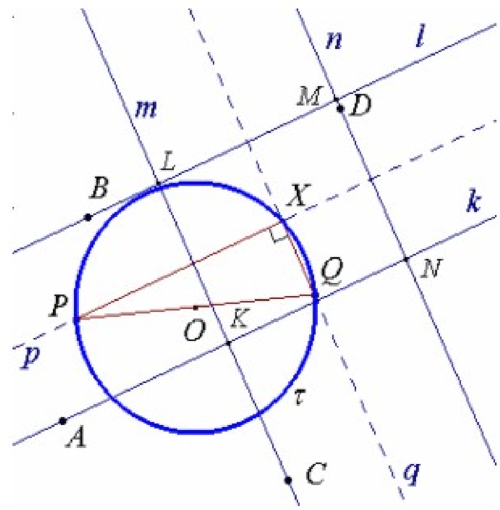
Obr. 2

Pomocí příkazů „Rovnoběžka“ a „Kolmice“ sestrojíme přímky k, l jako rovnoběžky v bodech A, B se sestrojeným vektorem-ovladačem a přímky m, n jako kolmice v bodech C, D na tento vektor. Dále vytvoříme vrcholy K, L, M, N pravoúhelníka v souladu se zadáním úlohy. Střed X pravoúhelníka sestrojíme např. jako střed úsečky KM (obr. 2).

Pomocí nabídky „Stopu ano/ne“ (menu – druhý sloupec ikon zprava) nyní označíme bod X a pomocí nabídky „Pohyb objektu“ uvedeme do pohybu koncový bod vektoru-ovladače. Postupně se začnou vykreslovat jednotlivé body hledané množiny. Jejich hustota bude tím větší, čím méně natáhneme „pružinku“. Na obr. 3 vidíme výsledek popsané akce. Je též možné nepoužít nabídku „Pohyb objektu“ a pohybovat vektorem pomocí myši úchopem za její koncový bod. Tento způsob je však méně elegantní a patrně nedosáhneme rovnoměrného rozložení vytvářených bodů.



Obr. 3



Obr. 4

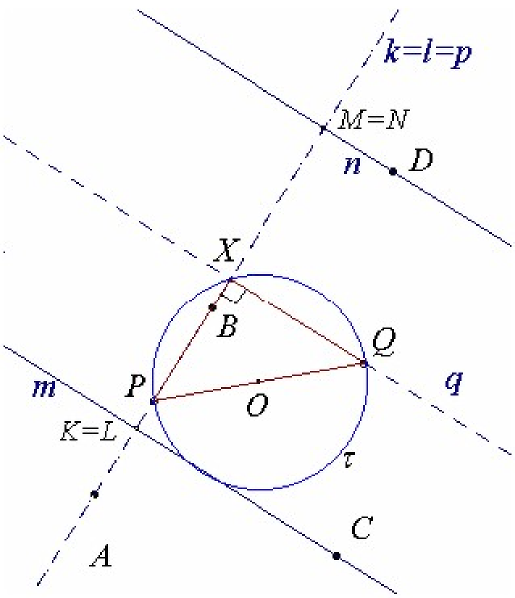
Dospěli jsme k hypotéze, že body hledané množiny leží na kružnici. Potřebujeme určit její střed a poloměr, dále pak zjistit, zda je množinou celá kružnice, a dokázat, že nalezený geometrický útvar je množinou bodů s danou vlastností. K tomu nám pomohou dva geometrické postřehy:

1) Střed X pravoúhelníka je průsečíkem jeho os souměrnosti. To znamená, že je průsečíkem os p, q rovinných pásů ohraničených rovnoběžkami k, l a m, n.

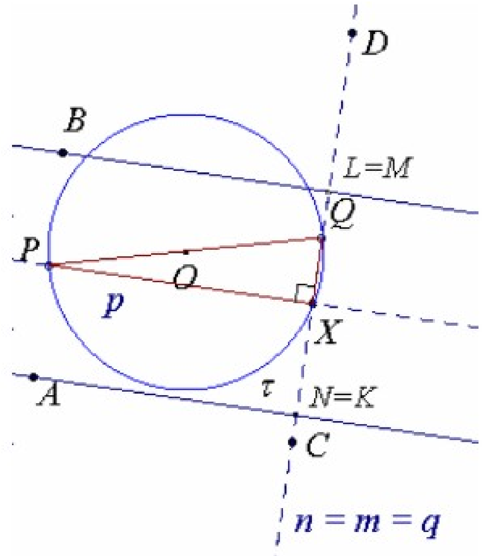
2) Osy p, q procházejí po řadě středy P, Q úseček AB, CD (obr. 4).

Body P a Q jsou pevně určeny zadáním a trojúhelník PQX má (pokud existuje) pravý úhel při vrcholu X. Odtud snadno zjistíme, že bod X leží na Thaletově kružnici τ s průměrem PQ.

Může s však stát, že přímky k a l, resp. m a n splynou, a tudíž se pravoúhelník $KLMN$ „zvrhne“ v úsečku. Příslušné body X, to znamená středy úseček, které odpovídají těmto limitním situacím, musíme vyloučit. Pokud jsou přímky AB a CD sečnami kružnice τ, vyloučíme ty průsečíky sečen s kružnicí τ, které jsou různé od bodů P, Q (obr. 5 a 6). Je-li přímka AB tečnou kružnice τ, vyloučíme bod P (obr. 7), je-li CD tečnou, vyloučíme Q.



Obr. 5

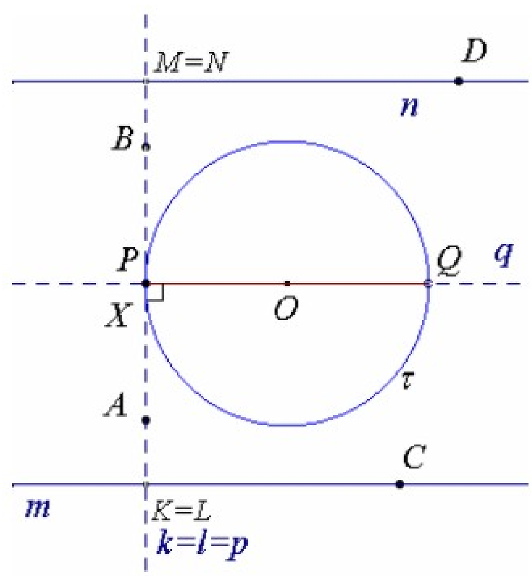


Obr. 6

Nyní již na základě rozboru můžeme zapsat vlastní řešení úlohy, ve kterém pouze popíšeme nalezený geometrický útvar a dokážeme, že je roven množině bodů s danou vlastností. Důkaz provedeme podle schématu (2).

Řešení úlohy: Jestliže označíme P, Q po řadě středy úseček AB, CD, je hledanou množinou kružnice τ s průměrem AB, z níž vyloučíme střed E úsečky s krajními body v patách kolmic z bodů C, D na přímku AB a střed F úsečky s krajními body v patách kolmic z bodů A, B na přímku CD.

Důkaz: a) Nechť bod $X \in \tau - \{E, F\}$, $X \notin \{P, Q\}$. Pak přímky k, l vedené body A, B rovnoběžně s přímkou PX a přímky m, n vedené body C, D rovnoběžně s přímkou QX ohraničí pravoúhelník $KLMN$ se středem X. Je-li $X = P \neq E$, ohraničí pravoúhelník $KLMN$ kolmice k, l na přímku PQ v bodech A, B a přímky m, n vedené body C, D rovnoběžně s přímkou PQ. Je-li $X = Q \neq F$, sestrojíme přímky k, l jako rovnoběžky s přímkou PQ v bodech A, B a přímky m, n jako komice na PQ v bodech C, D.



Obr. 7

b) Nechť $X \notin \tau - \{E, F\}$. Kdyby pravoúhelník $KLMN$ s vlastnostmi požadovanými v úloze existoval, svíraly by některé jeho sousední strany úhel shodný s úhlem PXQ.

To však není možné, neboť úhel PXQ není pravý (promyslete situace $X = E = P$ a $X = F = Q$).

Na závěr poznamenejme, že ve zmíněné dílně byla provedena i ukázka práce s předem připravenými soubory, kterou však není možné v tomto příspěvku realizovat. Dílna byla připravena na základě zkušeností z letní školy matematiky pro řešitele MO ze středních škol (Zadov, červen 2004). Následující úlohy k procvičení byly původně připraveny pro zmíněnou letní školu.

Úlohy k procvičení

1. Určete množinu všech bodů X v rovině, které mají od daných bodů A, B stejnou vzdálenost.
2. V rovině určete množinu všech středů X úseček dané délky l, jejichž jeden krajní bod leží na jednom rameni daného pravého úhlu a druhý na druhém rameni téhož úhlu.
3. Dané kružnice k se zevnitř dotýká kružnice h polovičního poloměru, na níž je pevně zvolen bod X. Určete množinu všech poloh bodu X, jestliže se kružnice h kutálí po kružnici k.
4. Určete množinu těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků sestrojených nad pevnou přeponou AB.
5. Určete množinu středů X všech kružnic vepsaných do trojúhelníků ABC, kde C leží na dané půlkružnici s průměrem AB.
6. V rovině je dána přímka AB. Určete množinu všech bodů vnějšího dotyku kružnic k, h, jestliže se kružnice navíc dotýkají přímky AB po řadě v bodech A, B. ([1], 11, C-II-2)
7. Uvažujme navzájem shodné polokružnice. které leží v daném pravém úhlu a jejichž koncové body leží každý na jiném rameni. Určete množinu všech takových polokružnic. ([1], 48, B-I-2)
8. Nechť K je daný kruh s poloměrem 1. Určete množinu vrcholů C všech rovnostranných trojúhelníků ABC, jejichž vrcholy A, B leží uvnitř nebo na hranici kruhu K. ([1], 30, B-P-4)
9. Určete množinu vrcholů C všech čtverců $ABCD$, jestliže vrchol A leží na dané přímce p a vrchol B je pevně dán. ([2], 1.24)
10. V jedné z polorovin vyťatých v rovině danou přímkou AB uvažujme všechny pravoúhlé trojúhelníky s přeponou AB. Označme X patu kolmice vedené bodem B na osu úhlu BCA. Dokažte, že osy všech takových úhlů BCA procházejí pevným bodem, a vyšetřete množinu všech bodů X. ([1], 21, C-P-3)
11. Nad danou úsečkou AB, která má délku c, jsou v jedné z polorovin vyťatých přímkou AB sestrojeny všechny ostroúhlé trojúhelníky ABX takové, že vzdálenost pat výšek

vedených vrcholy A, B je rovna danému číslu d. Vyšetřete množinu všech vrcholů X uvažovaných trojúhelníků. Proveďte diskusi vzhledem ke kladným číslům c, d. ([1], 14, B-II-4)

12. Bod O leží na úsečce AC. Určete množinu bodů M, pro které platí $|\angle MOC| = 2|\angle MAC|$. ([2], 1.1)
13. Ke každé dvojici kružnic o poloměrech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$), které se dotýkají přímky p a leží (každá ve vnější oblasti druhé z nich) v pevně zvolené polorovině ohraničené přímkou p, sestrojíme průsečík X jejich vnitřních tečen. Určete množinu všech těchto průsečíků X. ([2], 1.2)
14. Je dána úsečka AB a její vnitřní bod C. Uvažujme dvojici shodných kružnic, z nichž jedna prochází body A, C a druhá body B, C a které mají kromě bodu C další společný bod X. Určete množinu všech takových bodů X.
15. V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné. ([1], 53, A-I-2)
16. Je dán pravoúhelník $ABCD$. V rovině pravoúhelníka zvolíme bod X tak, aby se součet jeho vzdáleností od přímek AB a CD rovnal součtu jeho vzdáleností od přímek BC a AD. Najděte množinu všech takových bodů X. ([2], 1.3)
17. V rovině jsou dány čtyři body. Veďme každým z nich přímku tak, aby tyto přímky ohraničily pravoúhelník. Co je množinou středů všech takto vzniklých pravoúhelníků? ([2], 1.15)

Literatura

[1] *Brožury matematických olympiád* (první číslo v odkazu udává ročník soutěže, po něm následuje označení úlohy).

[2] Vasiljev, N. B., Gutenmacher, V. L., *Přímky a křivky.* Škola mladých matematiků (ŠMM), sv. 51, ÚV MO, Mladá fronta, Praha, 1982.

Krátke matematické hry

Ivan Masaryk[1]

Abstrakt: Ako sa dá spestriť hodina matematiky či výlet v škole prírode je ukázané na odskúšaných krátkych matematických hrách, ako sú boje o hrady, stavby ciest i dobývanie

[1] *FMFI UK, Bratislava, ivan.masaryk@fmph.uniba.sk*

pokladov. Očakávania, pozornosť, komunikácia, spolupráca, fantázia, v takomto duchu sa niesie tento článok.

Abstract: The article deals with one way of animating a mathematics lesson or a trip during „school in nature" by using short mathematical games such as fights for castles, building roads and conquering treasures. This text has an atmosphere of expectation, attention, communication, cooperation, imagination.

Dielňa je zameraná na hraní niekoľkých krátkych matematických hier, ktoré väčšinou vznikli úpravou existujúcich hier. Ich cieľom je zmyslový zážitok, ktorý podnecuje motiváciu detí, ale taktiež zabezpečuje voľnejšiu komunikáciu vnútri triedy a v neposlednom rade precvičuje matematické strategické myslenie spojené s množstvom ľahkých matematických úkonov.

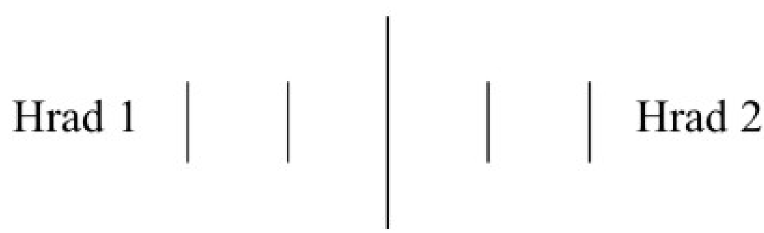
Citadely

Pri tejto hre sa rozvíja

- náhoda, resp. intuícia, tvorivosť,
- schopnost vnímať „realitu" súperovými očami,
- strategické myslenie počas paralelného odpočítavania celých čísiel.

Hudba, ktorú je možné púšťať na dielni, môže pôsobiť spočiatku zaujímavo, avšak neskôr môže rušiť. Viac sa mi osvedčilo, keď si deti nakreslia vlastný herný plán podľa obrázku na tabuli bez hudby. Pri tabuli sa odohrá jedna vzorová partia podľa nasledujúcich pravidiel a potom sa deti pustia do hry vo dvojiciach najlepšie vo svojich laviciach.

Pravidlá



Obr. 1

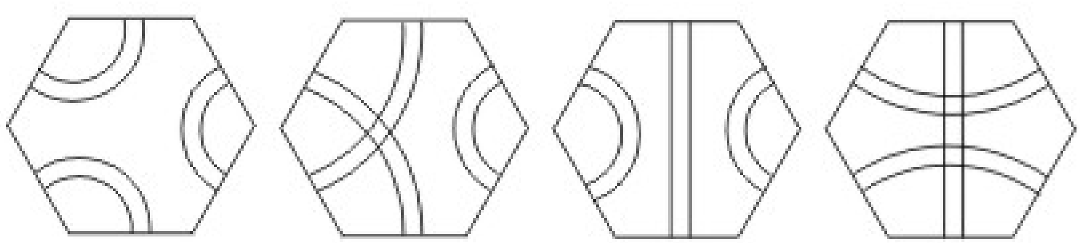
Na hernom území (obr.1) má každý hráč svoj hrad a okrem toho je na ňom načrtnutých päť možných pozícií bojových línií. Cieľom hry je pomocou vojska dobyť súperov hrad. Obaja hráči majú na začiatku hry po 30 vojakov a bojová línia (pero) je v strede. Po každej bitke sa línia posunie o jednu pozíciu doprava alebo doľava podľa toho, kto vyhral. Ak nastane remíza, bojová línia sa neposúva. Bitka prebieha tak, že si obaja hráči určia tajne počet vojakov, ktorých pošlú do boja, od nula až po ten stav, ktorý majú. Tento počet si aj napíšu na papier. Hráči si potom naraz ukážu, koľko vojakov poslali do bitky. Ten, kto poslal do bitky viac vojakov, bitku vyhral, a preto sa posunie bojová línia o jednu pozíciu v prospech tohoto hráča. Obaja hráči si však odpočítajú všetkých vojakov, ktorých poslali do tejto bitky. V prípade, že do boja poslali rovnaký počet vojakov, tak sa bojová línia neposúva, ale vojakov si hráči musia odpočítať. Ak sa podarí posunúť bojovú líniu až na súperov hrad, tak sa vyhráva. Ak nemá žiaden hráč vojakov a nie je dobytý ani jeden hrad, tak hra skončila remízou.

Tantrix

Pri tejto hre sa rozvíja

- hmat (žetóniky – nový predmet), zrak (estetické útvary), pamäť,
- schopnost komunikovať pomocou reči a posunkov bez možnosti vidieť,
- kombinovanie všetkých možností a kontrola zdanlivo jednoduchého pravidla.

Hra Tantrix má zložité pravidlá, ku ktorým sa možno dostať napríklad na stránke [1], ale pre túto obmenu hry stačí vedieť, že žetóny tejto hry majú tvar šesťuholníka a na ňom je jeden zo vzorov na obr. 2.

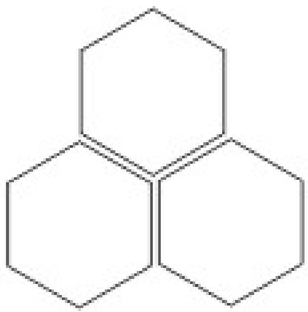


Obr. 2

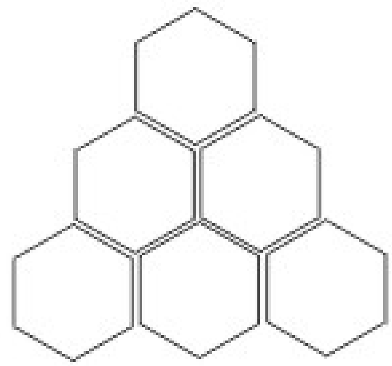
Každý žetón obsahuje cesty troch farieb zo štyroch možných. V 56dielnej sade Tantrix sú všetky kombinácie takýchto žetónov. Modifikácia hry využíva špeciálnu vlastnosť tejto sady. Z každých troch žetónov je možné spraviť pyramídu tak, aby sa susedné žetóny dotýkali rovnakou farbou. Teda farba musí súhlasiť na všetkých troch spojoch. Tvar pyramídy je na obr. 3. Na túto hru potrebujete jednu sadu hry Tantrix.

Pravidlá

Učiteľ rozdá žetóny a požiada žiakov, aby si presne zapamätali vzor i farbu na ich žetóne. Potom si žiaci obrátia žetón na ruke tak, aby naň nevideli a na pokyn učiteľa sa snažia nájsť takých spolužiakov, aby sa s nimi dala vytvoriť pyramída z troch žetónov, pričom žetóny sa môžu dotýkať len rovnakou farbou. Nie je povolené pozerať sa na cudzí žetón z opačnej strany a ani obracať ten svoj, kým si nieste istí, že máte žetóny nastavené v správnej pyramíde. Ak sa deťom nedarí vytvoriť pyramídu, môžete ich povzbudiť, že z niektorej trojice sa robí pyramída ťažšie, ale vždy sa to dá. Môžete im povoliť znova si pozrieť svoj žetón. Ak nezvládajú urobiť pyramídu po pamäti, s tým že si aj častejšie pozerajú na svoj žetón, tak nech to skúsia s otočenými žetónmi. Tí, ktorým sa to podarilo, sa môžu zlúčiť do šestice a vytvoriť pyramídu zo šiestich žetónov (obr. 4), poprípade z 10, 15, 21, 28, 36, 45 či 55 žetónov. Prekvapujúce je práve to, že sa to dá urobiť z ľubovoľného počtu žetónov.



Obr. 3



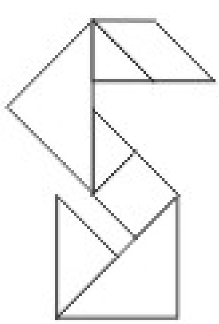
Obr. 4

Je potrebné, aby bol počet hráčov deliteľný tromi a aby sa mohli deti voľne hýbať po triede. Hra s troma žetónmi trvá asi päť minút, ale deti chytí vytváranie cestičiek, a tak sa s žetónmi dokážu hrať aj omnoho dlhšie.

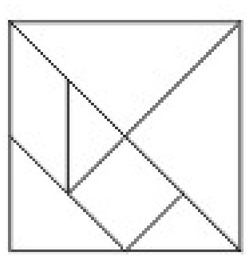
Tangram

Pri tejto hre sa rozvíja

- hmat bez zraku, zrak bez hmatu,
- schopnost verbálnej komunikácie a predstavivosti a spolupráce pri obmedzení jedného zmyslu,
- aktívne používanie názvov základných geometrických útvarov.



Obr. 5



Obr. 6

Na túto hru je potrebné mať sadu Tangramu alebo inej skladačky pre každú dvojicu. Je potrebné, aby mala skladačka obal, do ktorého sa jednotlivé časti presne vmestia napríklad v tvare na obr. 5. V hre súťažia dvojice proti sebe. Jeden z dvojice má za chrbtom obal skladačky, poprípade má aj zaviazané oči. Druhý z dvojice vidí a radí, ale nesmie sa dotknúť žiadnej časti skladačky. Po tomto preteku si hráči vymenia úlohy. Po preteku šikovní žiaci stihnú poskladať napr. štvorec (obr. 6)

Brány

Pri tejto hre sa rozvíja

- chuť, pohyb,
- spolupráca, čestnosť,
- porovnávanie čísiel (od 0 po 100), alebo od (-30 po 30), ...

Táto pochodová hra síce nepatrí medzi krátke, ale je vhodná napríklad na výlet, či do školy v prírode. Výnimočná je tým, že je zameraná na chuť a okrom toho nemá víťaza. Na hru je potrebné zaobstarať dva balíky piškót, platidlá (nakrájané slamky alebo hlinené guličky, ...)

Pravidlá

Žiaci sa rozdelia do dvojíc a rozdelia si úlohy. Jeden z nich sa stane bránou a druhý dobyvateľom. Spolu dostane dvojica 10 platidiel. Úlohou brány je vymyslieť také číslo z dohodnutého intervalu, ktoré sa bude ťažko hádať. Úlohou dobyvateľa je dobývanie brán. Ak chce dobyvateľ dobyť bránu, musí sa jej spýtať nejakou otázkou, na ktorú existuje odpoveď áno alebo nie, napríklad: „Je tvoje číslo väčšie ako 40?“, „Je deliteľné siedmymi?“, ... Brána musí po pravde odpovedať. Za každú otázku však dobyvateľ poctivo zaplatí jedno platidlo dobýjanej bráne. Ak sa dobyvateľovi minie platidlo, môže si ísť po ďalšie ku svojej bráne. Svoju bránu prirodzene nedobýja. Ak sa dobyvateľovi podarí uhádnuť kód brány, tak ju dobyl a spolu s ňou sa vyberie za pokladom (za učiteľom). Ten si potvrdí u brány dobytie a obdarí dobyvateľa piškótou. Brána si vymyslí nové číslo a dobyvateľ si nájde novú bránu, ktorú začne dobíjať. Tesne pred tým, ako sa minie prvé balenie piškótov, sa hra preruší. Každej dvojici sa doplní stav platidiel na desať a v dvojici si vymenia úlohy. Poklad sa počas celej hry pomaly posúva, čo spôsobuje premiešavanie žiakov.

Shrnutie

Krátka matematická hra je dobrá vtedy, ak

- sa pri jej hraní väčšina detí dostane do stavu, v ktorom začne (intenzívne) premýšľať,
- má jednoduché a jasné pravidlá,
- má rýchly priebeh, počas ktorého sa opakujú jednoduché matematické operácie alebo úvahy.

Dve možnosti, kde sa dá hra zaradiť do vyučovania, sú

Koniec hodiny

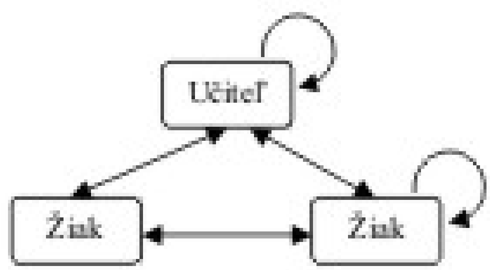
Žiakom sa buď sľúbi na začiatku hodiny, že ak budú pozorne pracovať, tak na konci hodiny ostane chvíľka času na hru, ktorú sme si pre nich pripravili, alebo naopak ak ostane čas na konci hodiny, tak môžeme pochváliť žiakov za prácu a hru tam zaradíme.

Malou nevýhodou je to, že ak hra deti „chytí“, tak sa jej venujú aj počas prestávky, čím sme ich o tú prestávku vlastne ukrátili. Hlavne ich však už počas prestávky nemáme ako sledovať, a tak vlastne môžeme ukracovať aj seba o rôzne postrehy.

Koniec celku

Rozvoju kompetencií a logického myslenia pomocou matematických hier sa dá pripisovať až taký význam, že sa na ne vyčlení celá hodina alebo jej väčšia časť, najlepšie po dobratí väčšieho tématického celku.

Hra rozvíja vzťahy medzi učiteľom a žiakmi a zároveň aj vzťahy medzi žiakmi navzájom. V neposlednom rade však pomáha k sebapoznaniu ako žiaka, tak i učiteľa. Do uvedeného trojuholníka sa zapája aj trieda ako celok, ale pri ďalších úvahách ju vynecháme. Schematicky sú uvedené vzťahy zobrazené na obr. 7. Veľkou výhodou súčasného školstva je možnosť priamej komunikácie medzi žiakmi. Ak by bola výuka zabezpečovaná iba prostredníctvom internetu a konzultáciami s učiteľom, táto výhoda by ubudla.



Obr. 7

Obr. 8

Zaradením hry, v ktorej je v popredí používanie nejakého zmyslu, môžeme docieliť, že sa hra stane pre deti pestrá v podnetoch, a teda je väčšia šanca, že sa pre nich stane zážitkom. Zmyslové vnímanie pomocou *zraku, sluchu, hmatu, čuchu* a *chuti* podporuje v hre vznik zmyslového zážitku. Rozvíjaním niektorých kompetencií, ako sú *schopnosť spolupracovať, organizovať, rozhodovať, plánovať, byť čestný, byť empatický*, . . . , dostáva hra výchovný charakter. Opakovaním matematických úkonov a operácií a rozvojom matematických schopností, ako sú *logické, strategické, či pravdepodobnostné myslenie, systematické štruktúrovanie, formulovanie hypotéz*, . . . , sa stáva hra odbornou, v tomto prípade matematickou.

Matematická hra môže zabezpečovať komunikáciu medzi oblasťami zobrazenými na obr. 8.

Nie je jednoduché vymyslieť dobrú úplne novú matematickú hru. Na druhej strane mnoho takýchto hier je už vymyslených a zväčša stačí malá zmena pravidiel a hneď padne na tých vašich žiakov ako uliata. Niekoľko pomerne nových inšpirácií hier môžete nájsť na stránke [2]. Sú to zväčša stredne dlhé hry, a tak si budú musieť zaslúžiť nejakú zmenu.

Literatúra

[1] www.tantrix.com
[2] www.hrajeme.cz

Algebraická témata v Cabri Geometrii

Michal Musílek[1]

Abstrakt: Výuku matematiky lze zpestřit použitím matematického software doporučeného autory modulu „ICT ve výuce matematiky“. Pořizovací náklady na všechny programy jsou však poměrně vysoké. Úkolem článku je ukázat, že i s jedním vhodně zvoleným programem, kterým je Cabri Geometrie, lze pokrýt většinu témat středoškolské matematiky. Můžeme jej použít například i pro znázornění grafů funkcí, grafická řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav, nebo pro znázornění některých algebraických vzorců.

Abstract: The teaching of mathematics can be enlivened by the use of mathematical software recommended by the authors of moduel „ICT in the teaching of mathematics“. The cost of the programs is, however, quite high. The goal of the article is to show that even one program, Cabri Geometry, can cover most of the topics of secondary mathematics. For instance, it can be used for plotting graphs of functions, graphic solutions of equations, ineaqualities and their systems, or for representing some algebraic formulas.

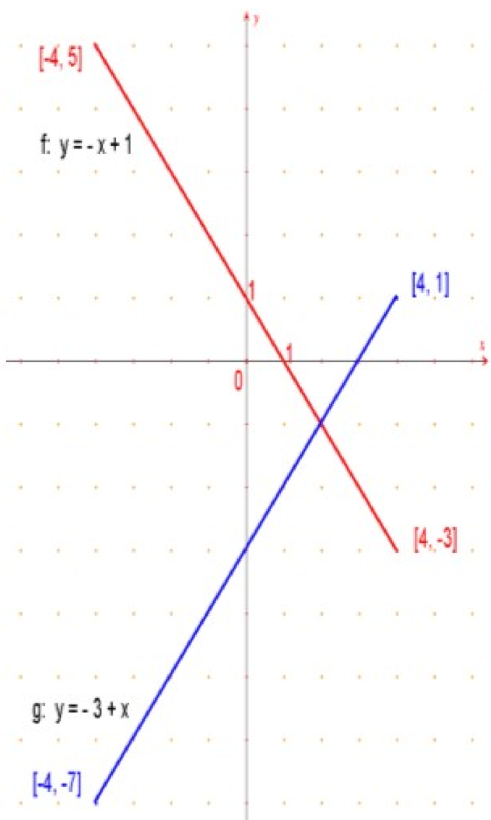
Jednou z možností, jak zpestřit výuku matematiky a probudit zájem žáků o matematiku, je pravidelné používání vhodného matematického software ve výuce. Učitelé matematiky SZŠ a VZŠ Hradec Králové mají to štěstí, že pro ně škola zakoupila neomezené školní multilicence na veškerý základní software doporučený autory volitelného modulu „ICT ve výuce matematiky“ (viz [1]) školení úrovně P v rámci Státní informační politiky ve vzdělávání (SIPVZ) (viz [2]) a zároveň jim umožnila absolvovat tento volitelný modul. V počítačové učebně tedy mají na všech počítačích nainstalovány programy Cabri Geometrie II Plus, Derive 6, Imagine Logo a OpenOffice 1.1.3. V této učebně vedou učitelé pravidelně jednu hodinu matematiky týdně, učí žáky nejen obsluhovat prostředí Cabri Geometrie a Derive, ale především pomocí těchto nástrojů řešit konkrétní matematické úlohy.

Pořizovací náklady na veškerý uvedený software nejsou malé. V době konání konference se jednalo o 45 tisíc Kč. Logicky se nabízí otázka, zda je nutné pro solidní počítačovou podporu výuku matematiky obstarávat všechny uvedené programy, zda by

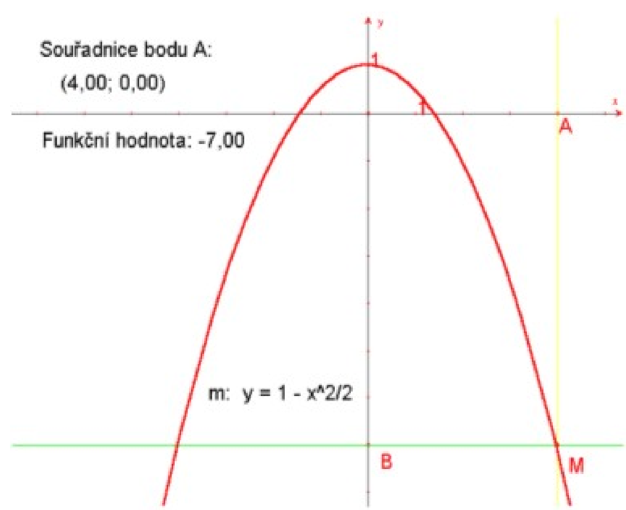
[1] *Střední zdravotnická škola a Vyšší zdravotnická škola, Hradec Králové, michal.musilek@seznam.cz*

pro většinu témat nestačil jeden. Úkolem tohoto příspěvku je dokázat, že skutečně můžeme vystačit s jedním velmi univerzálním nástrojem, kterým je interaktivní geometrický náčrtník Cabri Geometrie. Přestože to název software nijak nenaznačuje, je možné ho velmi dobře využít i při výuce algebraických témat. Ovšem i v případě, kdy máme k dispozici Cabri Geometrii i Derive 6, je často výhodné při výuce algebraických témat některé úlohy řešit pomocí Cabri, protože Derive 6 řeší problémy příliš automaticky, aniž by žákovi ukázal postup řešení, použitou metodu. Naproti tomu při práci s Cabri je žák nucen sám konstruovat řešení (geometrické objekty, grafy, tabulky), program pouze pomáhá s řešením a urychluje rutinní úkony.

Většina následujících úloh je řešena v kartézské soustavě souřadnic a s využitím mřížových bodů. Žákům je třeba zdůraznit, že pro zobrazení mřížových bodů je potřeba kliknout na některou osu souřadnic, protože Cabri umí pracovat s více soustavami souřadnic současně. Body je vhodné označovat uspořádanou dvojicí souřadnic v hranatých závorkách. Pro zápis levé (pravé) hranaté závorky použijeme kombinaci kláves AltGr + F (G).

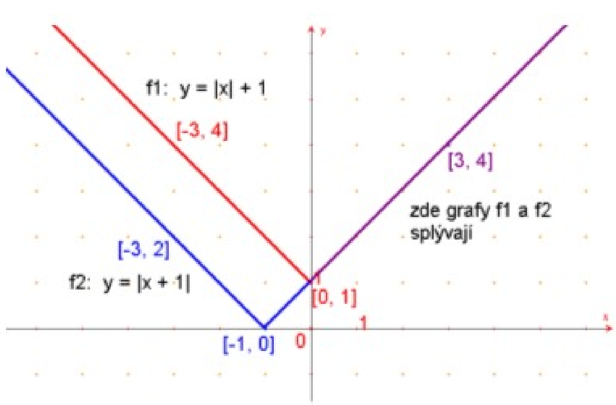


Obr. 1

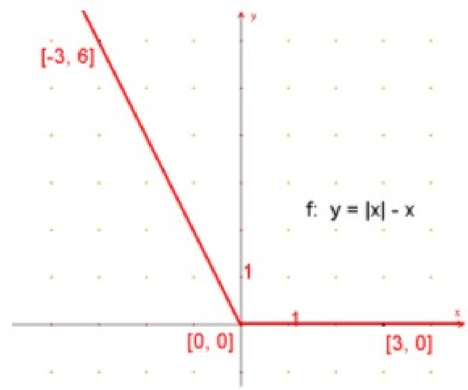


Obr. 2

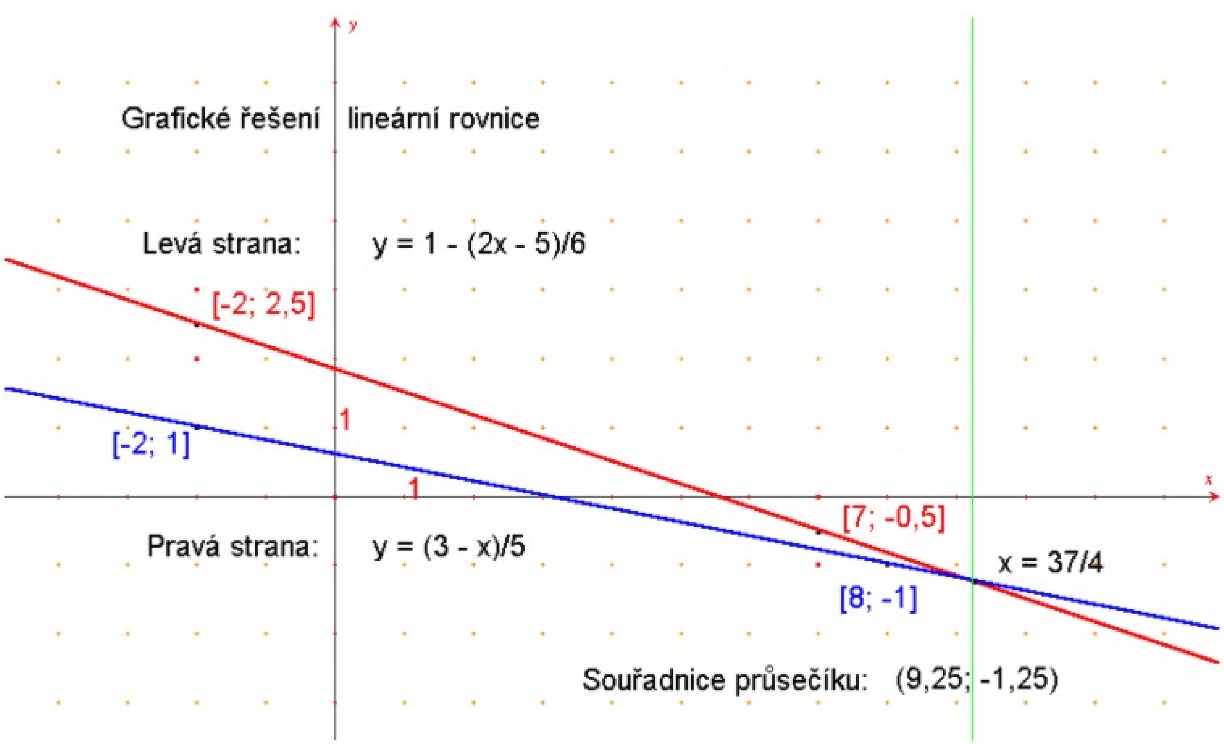
Pomocí Cabri můžeme snadno zobrazit grafy lineárních (obr. 1), kvadratických (obr. 2) i dalších funkcí (obr. 3, 4). Cabri Geometrie je vhodná i ke grafickému řešení rovnic (obr. 5, 6) a nerovnic (obr. 7) o jedné neznámé i ke grafickému řešení soustav rovnic se dvěma neznámými (obr. 8, 9). Mnohem více ukázek řešení úloh můžete najít na www stránkách [3].



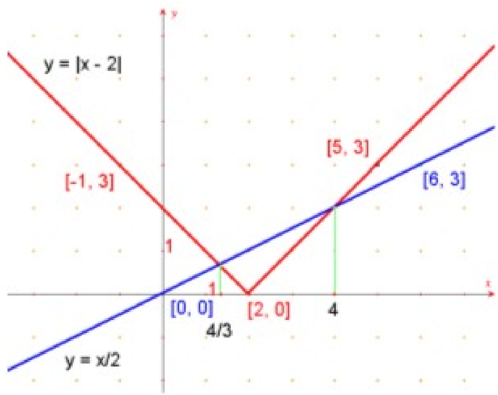
Obr. 3



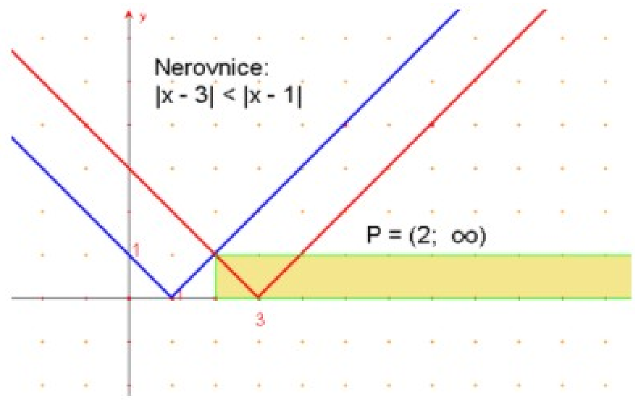
Obr. 4



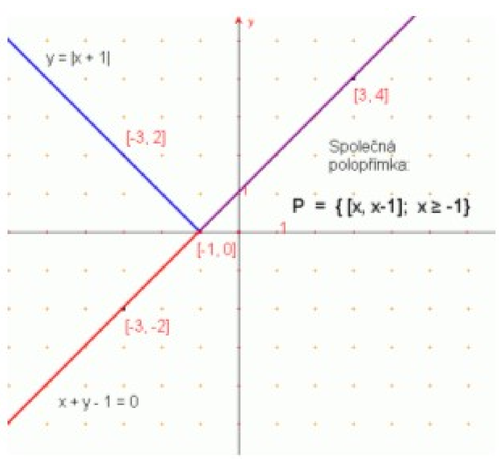
Obr. 5



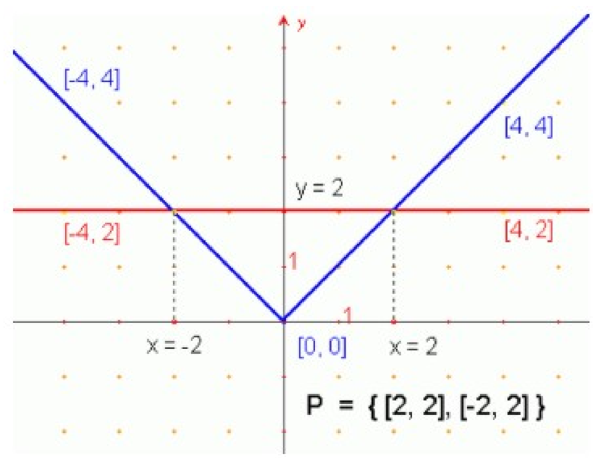
Obr. 6



Obr. 7



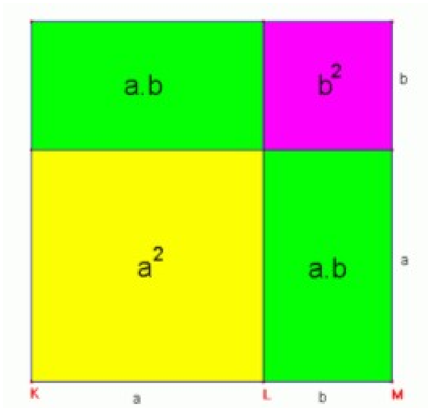
Obr. 8



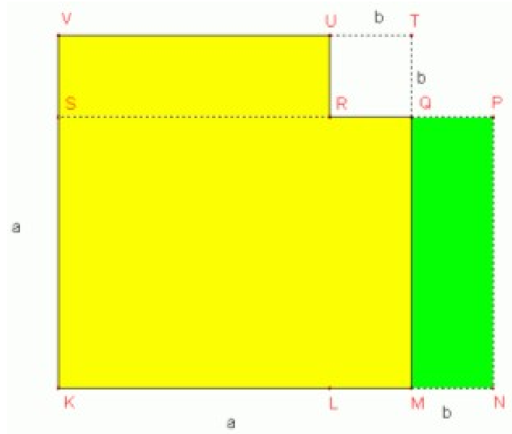
Obr. 9

Velmi pěkně se dají v Cabri Geometrii graficky znázornit různé algebraické rovnosti. Obr. 10 je popsaný, takže je hned zřejmé, že se jedná o vzorec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Obr. 11 je záměrně bez popisu. Jistě snadno určíte, o jaký vzorec se zde jedná.

S Cabri Geometrií se rychle naučí pracovat i průměrní žáci. Počítačem podporované konstrukce grafických řešení provádějí rychleji než klasické rýsování do sešitů a výsledek je vždy přesný a působí velmi esteticky. Díky tomu se žáci mohou soustředit na matematickou podstatu problému. V neposlední řadě je výuka s počítačovou podporou i pro průměrné žáky vítaným zpestřením a motivací k práci. Tím spíš bychom ji měli nabízet matematickým talentům.



Obr. 10



Obr. 11

Literatura

[1] `www.pf.jcu.cz/p-mat/`

[2] `www.e-gram.cz/`

[3] `www.zshk.cz/mefisto/talent2/`

[4] `www.zshk.cz/mefisto/musilek.html`

Grafy funkcí sinus a kosinus

Michal Musílek[1]

Abstrakt: Výuka matematiky v počítačové učebně s využitím matematického software je na SZŠ a VZŠ Hradec Králové výrazně podporována. Počítačem podporovaná výuka matematiky baví žáky i učitele a motivuje k hlubšímu zájmu o matematiku. V počítačové učebně probíhá pravidelně jedna vyučovací hodina týdně. Jedno z probíraných témat je Grafy funkcí sinus a kosinus. K výuce se používají počítačové programy Cabri Geometrii a Derive 6.

Abstract: The teaching of mathematics in a computer lab with the use of mathematical software is very encouraged at SZŠ and VZŠ in Hradec Králové. Teaching with computers is enjoyable both for pupils and teachers and motivates for a deeper interest

[1] *Střední zdravotnická škola a Vyšší zdravotnická škola, Hradec Králové, michal.musilek@seznam.cz*

in mathematics. One lesson a week is organised in a computer lab. One of the topics is Graphs of Sine and Cosine Functions. Programs Cabri Geometry and Derive 6 are used in this lesson.

Díky pochopení a vstřícnosti vedení SZŠ a VZŠ Hradec Králové mohu pravidelně jednu hodinu matematiky vést v počítačové učebně vybavené veškerým základním softwarem doporučeným autory volitelného modulu „ICT ve výuce matematiky" (viz [2]) školení úrovně P v rámci Státní informační politiky ve vzdělávání (SIPVZ) (viz [3]). V prvním ročníku oboru zdravotnický asistent (učím paralelní třídy 1.A a 1.B) používáme podle potřeby programy Cabri Geometrie II Plus a Derive 6. Mým cílem není seznámit žáky se všemi funkcemi a možnostmi obou programů, ale využíváme pouze ty funkce, které potřebujeme k řešení běžných středoškolských úloh z učebnice. V počítačové učebně probíhá v každé třídě pouze jedna hodina týdně z celkového počtu tří hodin, zbývající dvě hodiny pracujeme klasickým způsobem „tabule – křída".

Téma „Grafy funkcí sinus a kosinus" vyšlo na týden, ve kterém se konala konference „Ani jeden matematický talent nazmar" podle ročního tematického plánu. Přípravy na hodiny v počítačové učebně mám zpravidla uloženy ve formě souborů na síťovém disku, ve složce přístupné žákům. Přípravu na tuto hodinu jsem výjimečně připravil na webu (viz [4]), aby byla trvale přístupná všem hospitujícím a aby ji mohli případně využít ve své výuce. Z hlediska stavby jde o běžnou smíšenou hodinu s úvodním opakováním spojeným se zkoušením a dále s výkladem nové látky, jejím krátkým procvičením a shrnutím. Další důkladnější procvičení přijde v následující hodině v běžné učebně s černou tabulí, kde budeme kreslit náčrty posunutých nebo jinak obměněných funkcí sinus a kosinus barevnými křídami na tabuli a pastelkami do sešitů.

V opakovací části zadáme žákům dvě úlohy připravené jako soubory *.fig pro Cabri Geometrii. V první jde o určení správné velikosti orientovaného úhlu v radiánech a jeho vyznačení pomocí geometrického zobrazení otočení (otáčíme polopřímku kolem jejího počátečního bodu o úhel dané velikosti). Ve druhé úloze jde o zopakování definice goniometrických funkcí sinus a kosinus pomocí jednotkové kružnice, úkolem zkoušeného žáka je také určit a odůvodnit, jaké znaménko mají funkce v jednotlivých kvadrantech.

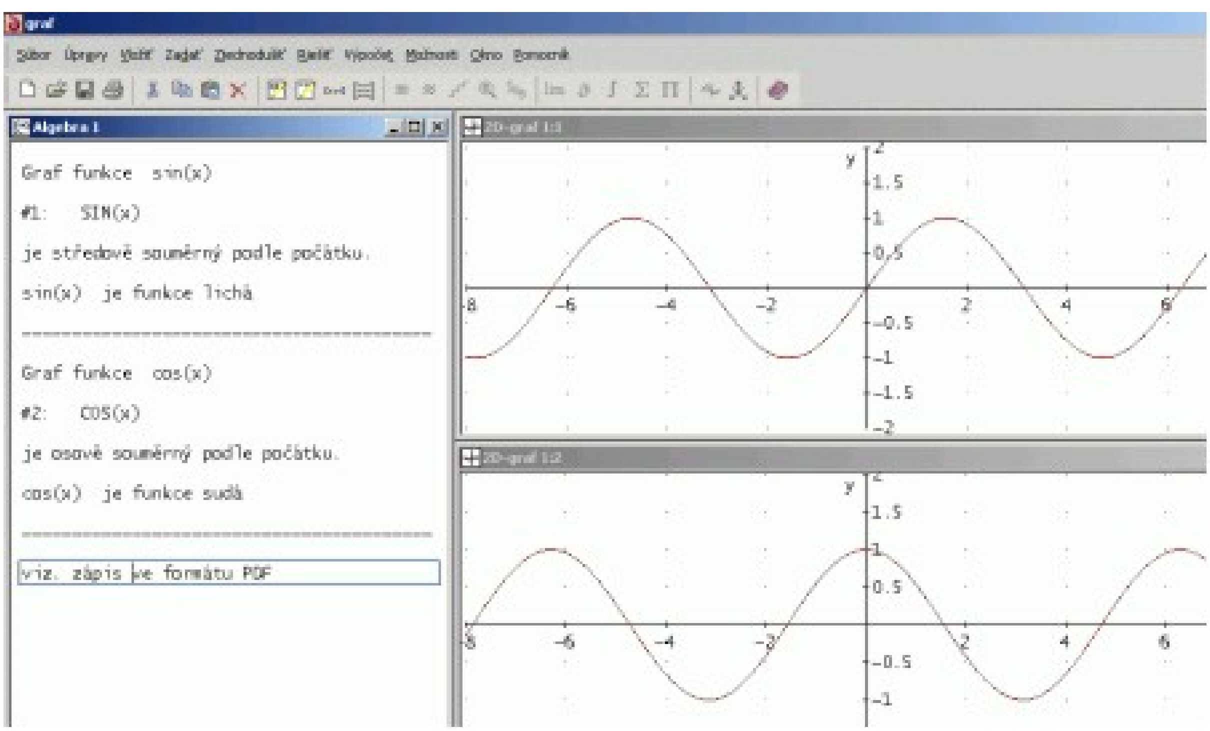
Na opakovací část plynule navazuje nové učivo. Učitel žákům ukáže esteticky působivou konstrukci pravidelného čtyřiadvacetiúhelníka (ornament podobný květu), díky níž získáme 24 různých poloh bodu na jednotkové kružnici. Svislé (y-ové) souřadnice těchto 24 poloh bodu vyneseme na systém rovnoběžek s osou x. Kolmo k těmto rovnoběžkám sestrojíme druhý systém rovnoběžných přímek, tentokrát v pravidelných „rozestupech". Tím získáme mřížku, do jejichž průsečíků můžeme vynést body grafů funkcí sinus a kosinus.

Protože příprava mřížky je pracná a žákům by zabrala podstatnou část vyučovací hodiny, dostanou mřížku připravenou v souboru *.fig, který načtou do programu Cabri Geometrie a tam s ním dále pracují. Nejprve vyznačí průsečíky náležející grafu funkce sinus a pak aproximují graf funkce sinus pomocí systému úseček spojujících vždy dva nejbližší vyznačené průsečíky. Žák, kterému jde v lavici (na žákovském počítači) úkol nejlépe (nejrychleji), vyznačí s určitým časovým odstupem řešení na učitelském počítači, aby je všichni viděli promítnuté na plátně pomocí dataprojektoru. Učitel mezitím prochází mezi lavicemi, kontroluje práci a pomáhá s úkolem slabším žákům. Když jsou žáci hotovi s grafem funkce sinus, načtou znovu soubor s „prázdnou“ mřížkou a obdobně sestrojí graf funkce kosinus. Jako dobrovolný domácí úkol učitel zadá narýsování stejného obrázku klasickými pomůckami (tužka, pravítko, trojúhelník s ryskou, kružítko).

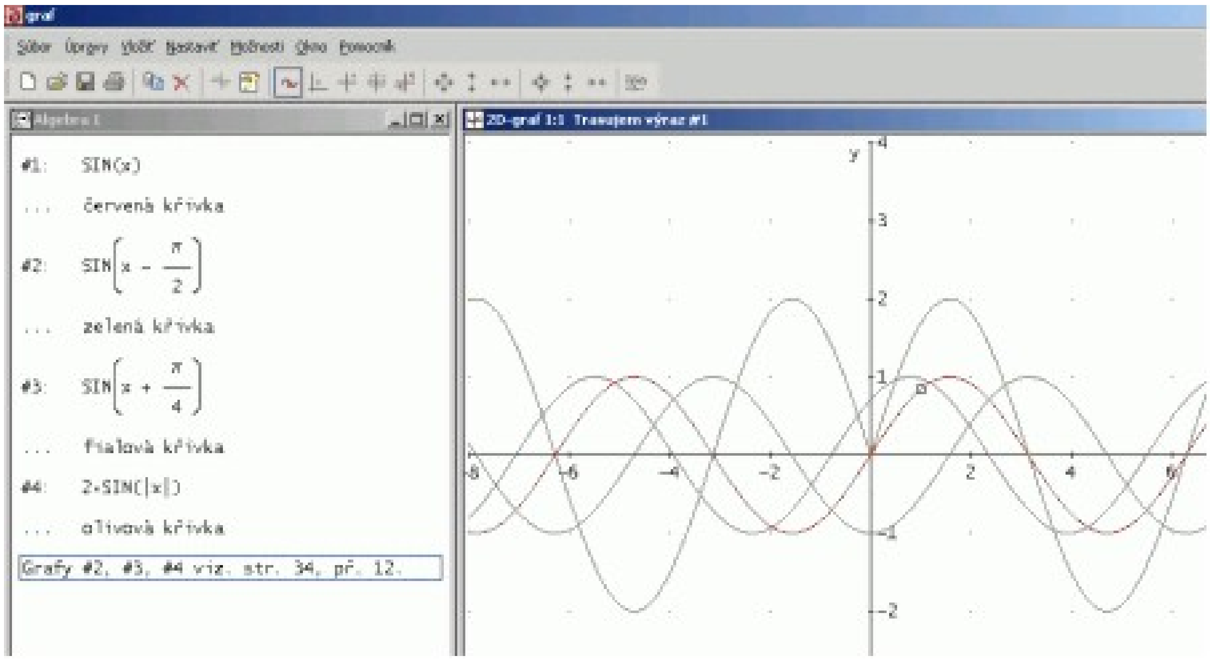
V další části hodiny se budeme zabývat symetrií grafů funkcí sinus a kosinus (funkce lichá, funkce sudá) a také grafy posunuté nebo jinak obměněné. Pro tyto účely by byla práce v Cabri Geometrii příliš pomalá, proto spustíme další matematický software – program Derive 6 (viz [5]). V algebraickém okně programu vždy zadáme funkční předpis a zobrazíme ho ve 2D grafickém okně (obr. 1, 2). Učitel naváže na vztahy odvozené v minulé hodině a zavede pojmy „funkce lichá“ a „funkce sudá“. Potom společně se žáky řeší úlohy z učebnice [1].

V závěru vyučovací hodiny shrneme a zopakujeme nově probrané pojmy a vyvozené vlastnosti funkcí sinus a kosinus a jejich grafů.

Počítačem podporovaná výuka matematiky baví žáky i učitele. Vhodně doplňuje klasické vyučovací metody, ačkoliv je nemůže zcela nahradit. Je nepochybné, že programy Cabri Geometrie a Derive 6 svými možnostmi motivují k hlubšímu zájmu o matematiku.



Obr. 1



Obr. 2

Literatura

[1] Calda, E., *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 3. díl*. Prometeheus, Praha, 2002.

[2] `www.pf.jcu.cz/p-mat/`

[3] `www.e-gram.cz/`

[4] `www.zshk.cz/mefisto/gon-fce/`

[5] `www.zshk.cz/mefisto/gon-fce/derive.html`

[6] `www.zshk.cz/mefisto/musilek.html`

Pokusy a pokoušení aneb Kolmice spadlé z nebe

Alena Šarounová[1]

Abstrakt: Myšlení a řeč spolu úzce souvisejí, je proto nutné rozvíjet obojí. A pokus je důležitou metodou poznávání světa a má velkou roli ve výuce. Tyto prostředky jsou aplikovány na modelování kolmic v rovině.

[1] *MFF UK Praha, sarounov@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract: Thinking and speaking are closely linked, therefore, both should be developed. An experiment is an important methods of getting to know the world and its role in teaching is significant. An example of the above is given on modelling perpendicular lines in plane.

Milí přátelé, ač chci psát o záležitostech týkajících se matematiky a její výuky, dovoluji si začít několika poznámkami takřka jazykovědnými. Jde o vztah „myšlení“ a „řeči“. Vztah, kterým se zabývali a zabývají filozofové i psychologové, ale bohužel málokdy učitelé (nejen matematiky). Ať už se přikloním k té či oné teorii vysvětlující jemné předivo vztahů mezi řečí a myšlením, jedno je nezpochybnitelné: myšlení a řeč spolu velmi úzce souvisejí. Rozvíjením řeči se zlepšují schopnosti logického myšlení a logické myšlení výrazně zkvalitňuje přesnost a srozumitelnost našeho vyjadřování. Proto tvrdím, že učitel žádného školního předmětu nemá právo opomíjet jazykové schopnosti svých žáků. Nemám na mysli jen odbornou terminologii „svého předmětu“ (názvy výtvarných technik, tělovýchovné názvosloví, chemickou terminologii atd.), ale stručný a výstižný popis běžných činností, správné vyjádření souslednosti či následnosti dějů, dokonavosti sloves. Je neštěstím, neumí-li diplomant – budoucí učitel – jednoznačně a gramaticky správně zformulovat myšlenku tak, jak ji sám „má v hlavě“, tj. aby jí čtenář rozuměl stejně jako autor. Celková úroveň jazykových schopností mládeže (bohužel i vlivem televize a tisku nejen denního – tj. „nositelů kultury“) klesá a hodiny „jazyka českého“ v současném pojetí tomu nezabrání. (A naplní-li se představy našeho ministerstva o výuce dvou jazyků na prvním stupni, bude zřejmě ještě hůře.)

Obě počáteční podstatná jména nadpisu tohoto článku spolu etymologicky souvisejí. Můžeme ještě doplnit: ty pokusy – ta pokoušení. Nemyslíte, že tajemno – neznámo – nás pokouší, abychom mu přišli na kobylku, abychom hledali jeho vysvětlení, abychom se pokusili jeho tajemství odhalit? A pokud se nám to podaří, jaký krásný pocit máme, když zvítězíme nad problémem, jehož řešení jsme přijali jako svůj úkol!

Sílu tohoto prožitku a trvalost objeveného poznatku v naší mysli si velmi dobře uvědomují učitelé snažící se zařazovat do výuky co nejvíce experimentů při výuce nové látky. Někteří didaktici tvrdí, že vše by mělo být objevováno vlastní činností dítěte. Zní to krásně – ALE. . .

Pozorujeme-li chování mláďat obratlovců, zjišťujeme, že si mnoho užitečných reakcí přinesla na svět díky dědičnosti a dalším se učí pokusy, odměnami (dosažením cíle) a „tresty“. Zvířata kromě toho v mládí napodobují chování dospělých jedinců (matky, členů stáda atp.), vyšší savci prokazují už jistou úroveň myšlení i formální komunikace (postoje, výstražné zvuky, počátky řeči). Pochopí-li mláďata tyto signály, ušetří si „práci“ – řadu neúspěšných pokusů – a rychleji se obeznámí se způsobem života v daném životním prostředí. Stejně tak my – lidé – většinu nutných poznatků získáváme zprostředkovaně: nápodobou, z knih, přednášek a z diskusí. Náš život (a vůbec prostředí vytvořené naší civilizací) je příliš složitý, nemáme dostatek času ani prostředků k objevování všeho, co musíme nezbytně znát, abychom „slušně přežili“. Není možné učit se vše pomocí experimentů. Nemám ráda lhaní ani ve formě dobře myšlené nadsázky. Nemohu proto souhlasit s články (nejen!) problematiku neovládajících novinářů, které líbivě popisují „novou školu a nové pedagogy“, kteří nebudou děti učit fakta, ale myšlení, a nebudou je nutit dodržovat „nějaká zastaralá pravidla“ (úprava, vyjadřování, koneckonců i sezení, které neničí páteř).

Nelze učit vše jen pomocí experimentů. Nelze zanedbat soustavnost a zabývat se pouze vyhledáváním informací (internet, encyklopedie), nelze trpět lajdáctví a povrchnost. (Vlastně LZE zanedbat – ale kam to povede?) – Ovšem: co chceme po žácích, musíme v první řadě dodržovat sami, chceme-li se oprávněně honosit názvem „učitel“.

Doufám, že jste si z předchozích řádků neutvořili závěr: „Šarounová je proti pokusům ve výuce.“ Ne, není tomu tak. Ale jako u každého „léku“ je dobré znát jeho dávkování, čas i množství. Pokusy jsou velmi důležité. Je to metoda řešení problémů, k níž se vracíme mnohokrát v běžném životě. Už proto bychom se jimi měli zabývat ve škole všude tam, kde je to možné. Důležitý je výběr problému, načasování pokusu, příprava, průběh pokusu (JAK jsme objevovali) i jeho dokumentace a závěr (CO jsme „objevili“). Pokus špatně zvolený či „hala-bala“ provedený je ztrátou času – ale o tom snad někdy příště.

Na závěr Vám nabízím dva náměty práce - první je pro vás, učitele matematiky, druhý pro žáky:

1) Jsou učebnice matematiky pro 1. stupeň ZŠ odborně bez chyb? Prohlédněte si je a upozorněte kolegy, kteří podle nich učí, na případné chyby, dvojznačnosti atp. Myslím, že budete překvapeni, jak mnoho autorů učebnic nemá patřičný nadhled nad matematikou ZŠ a připravuje dětem problémy ve vyšších ročnících. (Příklad: Jsou-li na obrázku dvě „málo různoběžné“ úsečky a, b, jak má dítě 3. třídy poznat, že „přímky a, b jsou různoběžné“?)

2) Na ZŠ se žáci neučí o „kolmici k rovině“, ale při popisu těles ji text považuje za známou. Napravte to: Předložte dětem kružítko, jeden trojúhelník, provázek, vystřižený papírový kruh a tužku. Požádejte je, aby vymodelovaly přímku kolmou k rovině školní desky. Až děti vyberou vhodnou „pomůcku“ a úlohu provedou, zformulujte definici i kritérium kolmosti přímky k rovině.

Odpověď k úkolu 2): Definice toho, že přímka je kolmá k rovině, je, že je kolmá ke všem přímkám roviny. Kritérium toho, že přímka je kolmá k rovině, je, že je kolmá aspoň ke dvěma různoběžkám ležícím v této rovině.

Literatura

[1] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, Bratislava, 1990.

„Kalendářové úlohy“ – inspirující problémy pro matematické talenty na ZŠ

Marta Volfová[1]

Abstrakt: Článek upozorňuje na tzv. kalendářové úlohy, které svou formulační jednoduchostí a zároveň často značnou obtížností při nalézání řešení se mohou stát právě pro nadané žáky výzvou a motivovat je k orientaci na hledání matematických řešení nejrůznějších problémů. Problematika je uvedena na několika úlohách (často z MO).

Abstract: The article focuses on so called calendar problems which are simply formulated but quite difficult to solve. Therefore, they can become a challenge for talented pupils and motivate them to look for mathematical solutions of different problems. The ideas are illustrated on several problems (mostly from the Mathematical Olympiad).

Kalendářové úlohy jsou zahaleny určitou tajemností a přitahují pozornost i zájem žáků. Poměrně jednoduchá formulace úloh však skrývá často obtížnou cestu k nalezení řešení, proto jsou tyto úlohy vhodné zejména do různých typů matematických seminářů a olympiád.

Uveďme nejprve několik autentických odpovědí žáků 8. třídy (z výzkumu [2]) o tom, jak se jim kalendářové úlohy líbily, proč je ta či ona úloha zaujala a zda by si je přáli zařadit přímo do hodin matematiky:

„Byly supr, skoro jako IQ rozcvička.“

„Byly dobrý, na logický myšlení.“

„Líbily, je to něco jiného než v učebnicích.“

„Byly velmi zajímavé. Nikdy by mě nenapadlo, že mohou být matematické úlohy z kalendáře.“

„Úlohy se mi líbily, protože se u toho musí víc přemýšlet.“

„Tak ani moc ne, byly moc těžký na pochopení.“

„Tyto úlohy byly zábavné a líbily se mi.“

„Dané úlohy jsou velmi záludné.“

„Jó, byly dobré, ale ne moc pro moji hlavu.“

„Nejzajímavější byla čtvrtá úloha, protože byla nejtěžší.“

„Nejzajímavější byla pátá úloha, protože s ní to bylo na experimentování.“

A jak vidí žáci vhodnost zařazení do výuky:

„Ne, protože bych z matematiky propadla.“

„Určitě ano. Je to něco jiného než v učebnicích.“

„Jo, jasně. Je to lepší než učit se vzorečky, i když je už umím.“

[1] *PdF, Univerzita Hradec Králové, marta.volfova@uhk.cz*

„Jó! Zařadit! Určitě!“

„V žádném případě. Matematika je už tak pro mě dost těžká.“

„Do některý hodiny by se mělo zařadit, protože je to zábava.“

„Jo třeba jako ňáký prémie k písemce.“

Mnohé kalendářové úlohy, které byly zařazeny do nižších kategorií MO-Z v posledních letech, orientují žáky na experimentování a kombinační myšlení. Ty přemýšlivé by pak mělo poněkud nudné probírání a ověřování jednotlivých případů dovést k nápadu – malému objevu – jak počet zkoumaných případů zmenšit a dojít k řešení „elegantněji“, jako např. v úlohách U1 a U2.

U1: Moje maminka je narozena 16. 3. 1948. Je to pěkné datum, platí totiž $16 \cdot 3 = 48$. V kterých letech 20. století taková pěkná data

– byla zastoupena nejvíce, (MO – Z9, 51. roč.)
– byla zastoupena nejméně, (MO – Z6, 51. roč.)
– nebyla žádná? (MO – Z6, 36. roč.)

U2: Narodila jsem se v den, jehož datum zapsané bez teček je současně pořadovým číslem dne toho roku (např. 14. leden dá číslo 141., ale 14. 1. je jen 14. den roku, ne 141.). O jaký den jde? (MO – Z8, 52. roč., zestručněno)

[Možné je např. probrat všech 365 dní v nepřestupném a zbývajících 307 dní v přestupném roce, nebo uvážit, že v lednu by pořadové číslo končilo číslicí 1, v únoru číslicí 2 atd., dále že dny v lednu mají pořadová čísla 1 – 31, v únoru 32 – 60 (61) atd. a pak prověřit jen 11., 21., 31., 32., 42., 52., 63., 73., 83., 94., 104., 114. atd. den roku.]

Menší děti může fascinovat určitá (polo)magičnost kalendáře libovolného měsíce (tabulka 1):

Po	Út	St	Čt	Pá	So	Ne
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Tabulka 1

V každém čtverci 3×3 je součet čísel v každé střední příčce stejný a je roven součtu čísel v každé úhlopříčce a navíc je právě trojnásobkem prostředního čísla.

U3: Ověř polomagičnost kalendáře libovolného měsíce (tabulka 1).

[Prověření této zákonitosti pro mladší žáky spočívá v jejím prověření ve všech možných čtvercích, starší (již se znalostí algebraických výrazů) ji však lehce obecně ukáží.

Může to pro ně být důkazem užitečnosti algebry.]

Pro lepší orientaci dětí v chodu roků přestupných a nepřestupných jsou vhodné úlohy obdobné U4.

U4: Napiš datum svého narození a datum, kdy budeš oslavovat (nebo jsi už oslavoval) 4 000. den svého života. (MO Z5, 43. roč.)

Zajímavé jsou i úlohy, které upozorňují na potíže plynoucí z toho, že v našem počítání času chybí rok nula.

U5: Kolik let uplynulo od založení Říma? (Byl založen r. 753 před n. l.)
[Řešení: $753 + 2005 - 1 = 2757$]

Sportovce jistě zaujme úloha U6.

U6: Kolik let se konaly původní sportovní olympiády a kolik jich bylo?
[Od r. 776 př. n. l. do r. 393 n. l., kdy byly zakázány.]

Pro orientaci žáků o posunech dat na jednotlivé dny v týdnu poslouží dobře např. úlohy U7, U8 a U9.

U7: V lednu byly čtyři pondělky i čtyři pátky. Na jaký den tedy připadl Nový rok?
[Řešení opět může být experimentální: co kdyby bylo 1. 1. v pondělí, v úterý, ... Lze využít i tabulku.]

U8: Zjistěte, zda se může stát, aby v některém roce nebyl ani jeden pátek třináctého. (MO Z6, 47. roč.)

U9: Jedno pořadové číslo dne bylo smutné, protože nebylo (v určitém roce) ani jednou nedělí. Které to bylo? (MO Z8, 54. roč.)

Řešení: Předpokládejme, že ono číslo padne v lednu na den D a uvažujme, jaký den týdne bude nést toto číslo v únoru, březnu, ... (tabulka 2).

Vidíme, že pouze den D+4 (v přestupném roce D+5) se vyskytuje jen jedenkrát v měsíci, který nemá všech 31 možných dní. Kdyby měla být 31. června neděle, nebylo by v tom roce číslo 31 nikdy nedělí. (Rok by začínal v pondělí, kdyby byl přestupný, tak v úterý.)

Zároveň vidíme *řešení U8*: Číslo 13 projde v každém roce všechny dny týdne, tedy vždy je aspoň jeden pátek třináctého (a jak je zřejmé z tabulky 2, mohou být v jednom roce tyto „nešťastné pátky“ i tři).

Z tabulky 2 se též znovu potvrzuje známý závěr, že nepřestupný rok posouvá datum na následující den týdne, přestupný o dva dny dále. Padl-li Nový rok v r. 2001 na pondělí, bude v r. 2002 v úterý, v r. 2003 ve středu, v r. 2004 ve čtvrtek, v r. 2005 v sobotu, v r. 2006 v neděli, v r. 2007 v pondělí, v r. 2008 v úterý, v r. 2009 ve čtvrtek atd.

U10: Jirkovi zbyl kalendář z r. 2001. V kterých letech 21. století by ho mohl opět jako zcela funkční použít?

	Nepřestupný rok	Přestupný rok
Leden	D	D
Únor	D+3	D+3
Březen	D+3	D+4
Duben	D+6	D
Květen	D+1	D+2
Červen	D+4	D+5
Červenec	D+6	D
Srpen	D+2	D+3
Září	D+5	D+6
Říjen	D	D+1
Listopad	D+3	D+4
Prosinec	D+5	D+6
Nový rok	D+1	D+2

Tabulka 2

[Např. v letech $2001 + k \cdot 28$, kde k může být 1, 2, nebo 3, ale též v letech 2007, 2018, $2007 + 28$, $2007 + 2 \cdot 28$, $2007 + 3 \cdot 28$, $2018 + 28$, $2018 + 2 \cdot 28$.]

Mají-li žáci už dostatečnou zkušenost s obdobnými úvahami a úlohami, mohou dojít až k vytvoření svého „věčného kalendáře“.

U11: Vytvořte si tabulky pro tzv. „věčný kalendář“, který vám dovolí rychle zjistit, na jaký den týdne padlo určené datum.

[Jde o přitažlivý úkol, jehož splnění žáky velmi uspokojuje a motivuje. Vhodné je naučit je pracovat se zbytkovými třídami mod 7. Celé řešení by zde však neúměrně rozšířilo rozsah příspěvku.]

Závěrem: Dopřejme našim žákům zakusit „radost malého Prométhea, který krade bohům oheň“, dělat menší či větší objevy, a to při řešení např. kalendářových úloh.

Literatura

[1] Duncan, D. E., *Kalendář. Cesta k určení přesného roku.* Volvox, Praha, 2000.

[2] Kulovaná, L., *Kalendář a možnost jeho využití.* Diplomová práce. UHK, Hradec Králové, 2005.

[3] *Ročenky a letáky MO.*

Seznam účastníků

	Jméno účastníka	Škola, pracoviště	E-mail
1	Bláhová Jitka	SOŠ, Lipová 56, Štěžery	
2	Burešová Dagmar	ZŠ, T. G. Masaryka 136, Slatiňany	
3	Burjan Vladimír	EXAM testing s. r. o., Vranovská 6, Bratislava 5	burjan@exam.sk
4	Cachová Jana	UHK, nám. Svobody 301, Hradec Králové	jana.cachova@uhk.cz
5	Calda Emil	MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8	ecalda@volny.cz
6	Částková Daniela	G, Husitská 2053, Sokolov	
7	Černotík Josef	G, Lesní čtvrť 1364, Zlín	cernotik@gymzl.cz
8	Daňková Dana	G, Náměstí Františka Křižíka 860, Tábor	dankova@gymta.cz
9	Dolejší Dagmar	G a SOŠ, Lužická 423, Jaroměř	dolejsi@goajaro.cz
10	Dudková Magdaléna	SOU a OŠ SČMSD Polička s. r. o., nám. Bohuslava Martinů 95, Polička	dudcata@unet.cz
11	Fabiánová Věra	G, Křenová 36, Brno	fabianova@gymkren.cz
12	Fantová Ivana	G, Husova 470, Benešov	fantova@gbn.cz
13	Fischer Jakub	VŠE, nám. W. Churchilla 4, Praha 3	fischerj@vse.cz
14	Gieslerová Kateřina	SOŠ a SOU, Poděbradská 94, Pardubice	katerina.gieslerova@centrum.cz
15	Hajdinová Světlana	ZŠ, Zeyerova 3354, Kroměříž	s.hajdinova@seznam.cz
16	Hájková Hana	G, Křenová 36, Brno	hana.haj@centrum.cz
17	Havlíčková Šárka	ZŠ, Plhov, Náchod	havlíčkova.s@seznam.cz
18	Havlisová Dagmar	ZŠ, T. G. Masaryka 136, Slatiňany	d.havlisova@seznam.cz
19	Hoffmann Marek	G, T. G. Masaryka 106, Ústí nad Orlicí	hoffmann@gymuo.cz
20	Hofmanová Hana	VOŠ A SPŠD, Masná 18, Praha 1	
21	Horáková Hana	G, Plovdivská 8, Brno	hana_hor@seznam.cz
22	Hrabáková Miroslava	G, Jiráskova 617, Hořovice	mhrabakova@centrum.cz
23	Hruška Michal	G, Brandlova 875, Hradec Králové	michal.hruska@wo.cz

24	Hudcová Milada	VOŠ, VZŠ, SOŠ a SOU, Hybešova 53, Boskovice	hudcova@abba.cz hudcova@nhskola-boskovice.cz
25	Jacko Martin	Biskupské gymnázium, Hradec Králové	jackom@seznam.cz
26	Jančařík Antonín	PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1	jancarik@atlas.cz antonin.jancarik@pedf.cuni.cz
27	Jarolímková Jitka	ZŠ, Masarykova 563, Rychnov nad Kněžnou	jarolimkova@zsrychnov.cz
28	Jedličková Milada	SPŠ, Havlíčkův Brod	jedlickova@stavskola.cz
29	Jílková Eva	ZŠ, Mandysova 1434, Hradec Králové	eva.jilkova@email.cz
30	Kaslová Michaela	PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1	michaela.kaslova@pedf.cuni.cz
31	Kejzlarová Eva	ZŠ, Plhov, Náchod	kejzlarova@seznam.cz
32	Kluiber Zdeněk	UHK, nám. Svobody 301, Hradec Králové	zdenek.kluiber@email.cz
33	Kolářová Martina	ZŠ, Protivanov 292	
34	Kolmanová Dana	ZŠ, Hlavečník 25	bohumila.kalinova@cz.hlavecnik.indos.cz
35	Kopfová Jana	MÚ Slezské univerzity, Bezručovo náměstí 13, Opava	jana.kopfova@math.slu.cz
36	Kořenová Lenka	SPŠCH a VOŠCH, Na Třísle 135, Pardubice	lenkakorenova@seznam.cz
37	Koudelková Irena	ZŠ, Alžírská 680, Praha 6	irena.koudelkova@mff.cuni.cz
38	Kováříčková Marie	Biskupské gymnázium, Hradec Králové	marie.kovarickova@seznam.cz
39	Kubínová Ludmila	ZŠ, 9. května 148, Chvaletice	zschvaletice@cmail.cz
40	Kuřina František	UHK, nám. Svobody 301, Hradec Králové	frantisek.kurina@uhk.cz
41	Lauschmann Zdeněk	AG, Korunní 2, Praha 2	211.cz@centrum.cz
42	Leischner Pavel	PdF JU, Jeronýmova 10, České Budějovice	leischne@pf.jcu.cz

43	Leischnerová Hana	OA a VOS, SNP 170, Hradec Králové	hana.leischnerova@email.cz
44	Lesáková Eva	ÚIV - CERMAT, Jeruzalémská 12, Praha 1	lesakova@cermat.cz
45	Lišková Hana	VOŠP a SPgŠ, Komenského náměstí 22, Litomyšl	liskova@lit.cz
46	Mádlová Ivana	VOŠ, SPŠ a SOU, Pod Koželuhy 100, Jičín	madlova@vos-sps-jicin.cz
47	Machková Lenka	G, J. K. Tyla, Hradec Králové	machkova@gjkt.cz
48	Masaryk Ivan	UK, FMFI, Mlynská dolina, Bratislava	masaryk@ingenium.sk
49	Míček Arnošt	ZŠ, Bezručova 1468, Hradec Králové	doubravska@bezrucka.cz
50	Mikulášek Petr	G, A. K. Vitáka 452, Jevíčko	miki@gymjev.cz
51	Milková Eva	UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové	eva.milkova@uhk.cz
52	Molnár Josef	PřF UP, tř. Svobody 26, Olomouc	josef.molnar@upol.cz
53	Musílek Michal	SZŠ a VŠZ, Komenského 234, Hradec Králové	michal.musilek@seznam.cz
54	Novák Miroslav	G, J. K. Tyla, Hradec Králové	novak@gjkt.cz
55	Nováková Marie	Prometheus, Praha	novakova@prometheus-nakl.cz
56	Novotná Hana	G, Husitská 2053, Sokolov	
57	Odstrčilová Jana	ZŠ, Habrmanova 130, Hradec Králové	odstrcilovaj@atlas.cz
58	Ondráčková Ivana	G, J. K. Tyla, Hradec Králové	ondrackova@post.cz
59	Ondřejová Blanka	SPŠCH a VOŠCH, Na Třísle 135, Pardubice	ondrej@spsch.cz
60	Pavlíčková Helena	OA a ISŠ, Bratříků 851, Havlíčkův Brod	hellenka@centrum.cz
61	Pomykalová Eva	G, Lesní čtvrť 1364, Zlín	pomykalova@gymzl.cz
62	Radvanová Alena	G, Žižkovo nám. 186, Rakovník	radvanova@gzw.cz
63	Reichertová Blanka	G a SOS, Havlíčkova 812, Úpice	
64	Řezáčová Růžena	VOŠ a SPŠ, Dušní 17, Praha 1	rezacova@spsdusni.cz
65	Řídká Eva	G, Nad Štolou 1, Praha 7	eva.ridka@gymstola.cz
66	Skořepa Ladislav	SŠ, Tyršova 207, Náchod	skola@ssspna.cz
67	Svobodová Ivana	A. Kančeva, Tábor	ivca.sv@seznam.cz

68	Šarounová Alena	MFF UK, Sokolovská 86, Praha 8	sarounov@ karlin.mff.cuni.cz
69	Šimša Jaromír	MU, Janáčkovo nám. 2a, Brno	simsa@ipm.cz
70	Škvarlová Iva	ZŠ, Zeyerova 3354, Kroměříž	
71	Šváchová Jana	G, Husova 470, Benešov	svachova@gbn.cz
72	Švrček Jaroslav	PřF UP, tř. Svobody 26, Olomouc	svrcek@inf.upol.cz
73	Takáčová Lenka	SOU Obchodní Hradec Králové	lenka.takacova@ seznam.cz, takacova@cvkhk.cz
74	Vaněk Vladimír	UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové	vladimir.vanek@uhk.cz
75	Vaněk Vladislav	SPŠCH a VOŠCH, Na Třísle 135, Pardubice	vanek56@seznam.cz
76	Vaňková Jana	G, Partyzánská 530, Liberec	jana.vankova@gfxs.cz
77	Vlášková Jana	Prometheus, Praha	vlaskova@prometheus-nakl.cz
78	Volf Ivo	UHK, nám. Svobody 301, Hradec Králové	ivo.volf@uhk.cz
79	Volfová Marta	UHK, nám. Svobody 301, Hradec Králové	marta.volfova@uhk.cz
80	Vondráková Eva	Společnost pro talent a nadání, V remízku 926, Praha 5	vondrakova@chello.cz
81	Voršilková Věra	G, Partyzánská 530, Liberec	vo@gfxs.cz
82	Vostruhová Miroslava	G, Vítězná 616, Český Brod	miryv@seznam.cz
83	Vybíral Josef	UHK, Víta Nejedlého 573, Hradec Králové	bohumil.vybiral@uhk.cz
84	Zhouf Jaroslav	PedF UK, M. D. Rettigové 4, Praha 1	jaroslav.zhouf@ pedf.cuni.cz
85	Žabka Ján	G, Bajkalská 20, Bratislava	zabco@centrum.sk

Název: Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků.
Editor: Jaroslav Zhouf
Sazba v systému LaTeX: Naďa Stehlíková
Vydavatel: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Tisk: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta
Náklad: 150 kusů
Rok vydání: 2005

Text neprošel jazykovou úpravou.

Vydání sborníku bylo podpořeno grantem GAUK 500/2004/A-PP/PedF.

ISBN 80-7290-224-5